La relación entre el teorema de la Divergencia y el de Green

Como se puede definir el teorema de green como un caso especial de la divergencia

Marcos Nicolau

0.1 Introducción

Una de las características propias de la matemática es tratar de generar ideas y resultados cada vez más generales con los cuales se pueda lograr un mejor entendimiento de la teoría. Durante la cursada hemos explorado las ideas del cálculo en dimensiones superiores, dejando atrás la idea de un sola variable. Gracias a este estudio es que hemos obtenido resultados muy importantes. Entre ellos:

1. El teorema de Green, cuya formula es:

$$\oint_{\partial K^+} \mathbf{F} \cdot d\lambda = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy$$

   y relaciona la integral de linea de la curva K de campo vectorial $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$ sobre la frontera de cierta region K definida en $\subseteq R^2$ con la integral doble de $\mathbf{F}$ en K ^35b8a9

2. El teorema de Stokes, cuya formula es:

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\Sigma = \iint_S rot(\mathbf{F}) \cdot dS$$

   y relaciona una integral de linea de superficie S con la integral doble del campo rotacional de $\mathbf{F}$ donde $\partial S = \Sigma$.

3. El teorema de la Divergencia o de Gauss, cuya formula es:

$$\oiint_{\partial S} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\Sigma = \iiint_V div(\mathbf{F}) \cdot dV$$

   y relaciona una integral de superficie sobre un campo $\mathbf{F}$ definido en R^3, sobre una superficie cerrada S, y la integral triple de la divergencia de $\mathbf{F}$ sobre la region V que encierra $\partial S = \Sigma$

Lo que queremos hacer en este documento es explorar un poco mas a fondo la teoría vista y ver como el Teorema de la Divergencia se relaciona con el Teorema de Green. Mas precisamente, nos proponemos derivar el teorema de Green a partir del de la Divergencia. Para ello, sera necesario realizar un trabajo de campo en el cual exploraremos nuevas ideas y conceptos que nos permitirán llegar al nivel necesario para llevar a cabo lo propuesto.

Partiremos enunciando el Teorema General de Stokes y, desarrollándolo, veremos si es posible extender el Teorema de la Divergencia hacia una vision mas general de manera tal que sea posible definir el Teorema de Green como un caso especial de este.

0.2 El teorema general de Stokes

El teorema general de Stokes fue formulado, en su forma moderna, por Élie Cartan en 1945. Para ello se sirvió del trabajo hecho por Vito Volterra, Édouard Goursat, y Henri Poincaré, sobre las generalizaciones de los teoremas del cálculo vectorial.

Theorem 1. (Teorema General de Stokes)

Sea U un conjunto abierto del espacio R^n, ω una $p-1$-forma, y M un p-cadena en U. Entonces

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Vemos que se nos presentan dos nuevas conceptos: p-forma y p-cadena. Esto esta englobado en un tópico que llamamos: **Formas diferenciales**.

0.3 Formas diferenciales

En esta sección nos introduciremos, de manera breve y elemental, a las formas diferenciales. **Definiremos estos objetos como expresiones puramente formales** y no trataremos de darle ningún tipo de sentido y definitivamente no nos meteremos en las definiciones rigurosas algebraicas, lo cual requeriría un libro entero. Simplemente nos interesa desarrollar la operatoria y las reglas de las formas para demostrar nuestro punto.

Para ello, una buena manera de abordar las formas diferenciales, al menos para lo que nos concierne aquí, es pensando que no son mas que una **abstracción diseñada para definir todos los teoremas de cálculo integral como un caso especial del teorema general de Stokes.**

Tampoco nos detendremos en demostraciones ni nada del estilo. Si usted así lo desea, puede referirse a la bibliografía.

Definition 2. (Forma diferencial)

Sea $p \in \mathbb{N}$ una p-forma definida en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Una p-forma es una expresión del tipo

$$\sum_I f_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p}$$

donde $I = 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$, y las funciones $g_{i_1 i_2 \ldots i_p} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^2$.

Antes que nada, hagamos algunas aclaraciones:

1. El indice I lo denotamos como *"indice multilineal"*. Puede que esta notación sea intimidante y confusa, sin embargo solo representa p sumatorias donde cada i_j toma valores de $i_j - 1$ hasta n

$$\sum_I g_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} \cdots \sum_{i_p=i_{p-1}}^{n} f_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p}$$

   A partir de ahora, cuando aparezca I haremos ilusión a este indice multiple.

2. Los objetos dx_i son simplemente expresiones que fueron definidas con esta notación y no representan la idea de "el diferencial de x". Aquí, no le daremos ningún significado.

3. Por ultimo, el símbolo $\wedge$ es un operador que hace referencia a la operación *"producto wedge o producto exterior"*. Tomaremos este producto como una multiplicación normal, solo que definiremos ciertas reglas:

$$dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_n = (-1)^r (dx_{\sigma(1)} \wedge dx_{\sigma(2)} \cdots \wedge dx_{\sigma(k)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i \neq j : dx_i = dx_j \\ dx_{12\ldots n} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   Donde σ es una función que permuta i y r representa la cantidad total de permutaciones realizadas sobre la forma "original".

Con estas reglas en cuenta, veremos que si expandimos la suma solo nos quedaran las p combinaciones posibles en n. Por tanto ω tendrá $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ sumandos. Es por esto que utilizamos la notación multiple en los indices, para "simplificar" los sumandos.

Ademas, nos interesa el caso cuando $p \leq n$. Ya que si $p > n$ entonces la p-forma es cero, ya que cualquier sumando tendrá al menos una repetición de la expresión dx_i por lo tanto todos darán como resultado 0.

Corollary.

Sea ω una p-forma definida en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\text{si } p > n \ \Rightarrow \omega = 0$$

A continuación, veamos como lucen algunos ejemplos de formas.

0-forma Una 0-forma en el conjunto abierto $U \subseteq R^n$ es una expresión del tipo

$$\omega = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

1-forma Una 1-forma en el conjunto abierto $U \subseteq R^n$ es una expresión del tipo

$$\omega = \sum_i^n f_i dx_i = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

En el caso de $n = 1$

$$\omega = f dx$$

En el caso de $n = 2$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

En el caso de $n = 3$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

2-forma Una 2-forma en el conjunto abierto $U \subseteq R^n$ es una expresión del tipo

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n}^n f_{i_1 i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}$$

En el caso de $n = 2$

$$\omega = f_{12} dx_1 \wedge dx_2$$

En el caso de $n = 3$

$$\omega = f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3$$

Note que omitimos el caso de $n = 1$, por la propiedad vista en #^29feb1.

3-forma Una 3-forma en el conjunto abierto $U \subseteq R^n$ es una expresión del tipo

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n}^n f_{i_1 i_2 i_3} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3}$$

En el caso de $n = 3$

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Notar que en el caso de que $p = n$. Se cumple que

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

0.3.0.1 Algebra de las p-formas Definamos ahora las operaciones básicas entre las formas. Para ello, sean ω_1 y ω_2 dos p-formas y sea ψ una q-forma.

Se define la suma de formas como

$$\omega_1 + \omega_2 = \sum_I (f_{i_1 i_2 \dots i_p} + g_{i_1 i_2 \dots i_p}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Notar que la suma de formas esta definida si y solo si, ambas formas son una p-forma.

Se define el producto de formas como

$$\omega_1 \wedge \psi = \sum_I (f_{i_1 i_2 \dots i_p} g_{j_1 j_2 \dots j_q}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \dots dx_{j_q}$$

Observemos como en este caso, el producto de formas si esta definido para una p-forma y otra q-forma donde $p \neq q$

A continuación, se recogen algunas de las propiedades mas importantes de las sumas y los productos entre formas.

Theorem 3.

Sean ω_1, ω_2, y ω_3 p-formas definidas en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

a. $\omega_1 + \omega_2 = \omega_2 + \omega_1$

b. $\omega_1 + (\omega_2 + \omega_3) = (\omega_1 + \omega_2) + \omega_3$

Theorem 4.

Sean ω_1 y ω_2 una p-forma en $U \subseteq \mathbb{R}^n$, γ una q-forma, y ψ una k-forma. Entonces

a. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \gamma = \gamma \wedge \omega_1 + \gamma \wedge \omega_2$

b. $\gamma \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \gamma \wedge \omega_1 + \gamma \wedge \omega_2$

c. $\omega_1 \wedge (\gamma \wedge \psi) = (\omega_1 \wedge \gamma) \wedge \psi$

d. $\gamma \wedge \psi = (-1)^{qk} (\psi \wedge \gamma)$

Notar que los incisos **a.** y **b.** nos están diciendo que el producto no es conmutativo. Ademas, el producto entre una p-forma y una q-forma nos da como resultado una $(p+q)$ forma.

0.3.1 Diferencial exterior

El diferencial exterior es otra operación que se define sobre las formas que sera como "derivar". Veremos que se producirán nuevas formas ya conocidas y vistas durante la cursada.

Theorem 5.

Sea ω la p-forma $U \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos la diferencial exterior de ω como la $(p+1)$-forma en U, denotada por $d\omega$

$$\sum_I (\sum_j^n \frac{\partial}{\partial dx_j} g_{i_1 i_2 \dots i_p} dx_j) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Lo que esta definición no esta diciendo es que a la forma dw la obtenemos derivando cada una de los sumando con respecto a cada dx_i.

A continuation enunciaremos algunas propiedades importantes

Theorem 6. *Sean $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ p-formas y γ una q-forma definidas en $U \subseteq R^n$, se tiene*

a. $d(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_k) = d\omega_1 + d\omega_2 + \cdots + d\omega_k$

b. $d(\omega_k \wedge \gamma) = d\omega_k \wedge \gamma + (-1)^p \omega \wedge d\gamma$

c. $d(d\omega) = 0$

Notemos que la propiedad **b.** es la version generalizada de la regla de la cadena.

Por otro lado, **c.** nos esta diciendo que el diferencial exterior del diferencial exterior de una cualquier p-forma es cero. Quiere esto decir que toda p-forma cuyo diferencial exterior es cero es ya el diferencial exterior de una $(p-1)$ forma?

Pues sí! De hecho, tienen un nombre especial

Theorem 7.

Sea ω-forma una p-forma. Si $\exists$ una $p-1$ forma ψ tal que $d\omega = \psi$. Entonces decimos que ω es una forma exacta.

Este es un concepto my importante. Y aparece en muchos contextos. Por ejemplo: en el método de los diferenciales exactos en las ecuaciones diferenciales de orden superior. Ademas, físicamente hablando, esto significa que el campo es conservativo, algo con lo cual nos hemos machacado bastante durante la cursada.

A continuación, se presentan los diferenciales exteriores de distintas formas.

0-forma El diferencial exterior de una 0-forma en el conjunto abierto $U \subseteq R^n$ es una expresión del tipo

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j}^{n} \frac{\partial}{\partial dx_j} f dx_j \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n \\ &= \nabla f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= grad\, f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Es decir, que el diferencial exterior de una 0-forma, es el gradiente de f.

1-forma El diferencial exterior de una 1-forma en el conjunto abierto $U \subseteq R^n$ es una expresión del tipo

$$d\omega = \sum_{i}^{n} (\sum_{j}^{n} \frac{\partial}{\partial dx_j} f_i dx_j) \wedge dx_i$$

En el caso de $n = 1$

$$d\omega = 0$$

En el caso de $n = 2$

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial dx_2} f_1 dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial}{\partial dx_1} f_2 dx_1 \wedge dx_2 = (\frac{\partial f_2}{\partial dx_1} - \frac{\partial f_1}{\partial dx_2}) dx_1 \wedge dx_2$$

En el caso de $n = 3$

$$\begin{aligned} d\omega = (\frac{\partial f_1}{\partial dx_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial dx_3} dx_3) dx_1 + (\frac{\partial f_2}{\partial dx_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial dx_3} dx_3) dx_2 + (\frac{\partial f_3}{\partial dx_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial dx_2} dx_2) dx_3 = \\ (\frac{\partial f_3}{\partial dx_2} - \frac{\partial f_2}{\partial dx_3}) dx_2 \wedge dx_3 + (\frac{\partial f_3}{\partial dx_1} - \frac{\partial f_1}{\partial dx_3}) dx_1 \wedge dx_3 + (\frac{\partial f_2}{\partial dx_1} - \frac{\partial f_1}{\partial dx_2}) dx_1 \wedge dx_2 = \\ (\nabla \times f)_1 dx_2 \wedge dx_3 + (\nabla \times f)_2 dx_1 \wedge dx_3 + (\nabla \times f)_3 dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Vemos que el diferencial de una 2-forma en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es el $rotf$

Observamos también que, en el caso de $p = n$ el $d\omega = 0$.

2-forma El diferencial exterior de una 2-forma en el conjunto abierto $U \subseteq R^n$ es una expresión del tipo

$$d\omega = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq n}^{n} (\sum_{j}^{n} \frac{\partial}{\partial dx_j} f_{i_1 i_2} dx_j) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}$$

En el caso de $n = 3$

$$d\omega = (\frac{\partial f_{12}}{\partial dx_3} dx_3) dx_1 \wedge dx_2 + (\frac{\partial f_{13}}{\partial dx_2} dx_2) dx_1 \wedge dx_3 + (\frac{\partial f_{23}}{\partial dx_1} dx_1) dx_2 \wedge dx_3 =$$
$$(\frac{\partial f_{12}}{\partial dx_3} - \frac{\partial f_{13}}{\partial dx_2} + \frac{\partial f_{23}}{\partial dx_1}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Sin embargo, si en vez de elegir $dx_1 \wedge dx_3$ lo cambiamos por $dx_3 \wedge dx_1$ entonces nos queda

$$d\omega = (\frac{\partial f_{12}}{\partial dx_3} + \frac{\partial f_{13}}{\partial dx_2} + \frac{\partial f_{23}}{\partial dx_1}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = div\, f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

De hecho, se puede demostrar que para toda $(n-1)$-forma en $\mathbb{R}^n$

$$d\omega = div\, f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \nabla \cdot f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Este es un hecho que nos sera de especial utilidad a la hora de mostrar la relación entre el teorema de Green y el de la Divergencia.

0.3.1.0.1 Operadores diferenciales Con lo visto recientemente, vemos que los operadores diferenciales no son mas que los diferenciales exteriores de las distintas formas.

Entonces, el rotacional de un campo de gradientes identificado por la forma ω es el diferencial exterior de ω que a su vez es el diferencial exterior de una $(\omega - 1)$-forma, por tanto, teniendo en cuenta la propiedad **c.** del #^1e5e17, sera cero. De ahí que $rot(grad\, f) = 0$.

Siguiendo la misma analogía es que llegamos a que $div(rot\, f) = 0$.

0.3.2 Cambio de variables

Aquí definiremos una nueva operación: *"pullback"* la cual es muy poderosa, ya que es la que nos garantiza abordar el cálculo como libre de coordenadas. Es decir, es lo que nos permite calcular integrales sin tener que especificar coordenadas.

Theorem 8.

Sea ω p-forma un conjunto abierto U en $\mathbb{R}^n$ tal que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ y V otro conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$ tal que $(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in V$, y sea $\varphi : V \to U$ una función suave / $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$. Definiremos la p-forma $\varphi^*\omega$, como

$$\varphi^*\omega = \sum_I \varphi^*(g_{i_1 i_2 \ldots i_p}) \varphi^* dx_1 \wedge \varphi^* dx_2 \wedge \cdots \wedge \varphi^* dx_p$$

Esta nueva forma $\varphi^*\omega$ se lee *"φ estrella omega"* y es la operación *pullback* que hicimos mención anteriormente. Ademas, notemos que la función φ es la *función cambio de variable.* Entonces

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Veamos como funciona el operador estrella

$$\begin{gathered}
.\varphi^* f = f \circ \varphi = f(\varphi) \\
.\varphi^* dx_i = d\varphi_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j
\end{gathered}$$

Algunas propiedades importantes son

Theorem 9.

Sean ω_1 y ω_2 dos p-formas en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, μ otra q-forma en U y $\varphi : V \to U$ una función suave en el conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Entonces

a. $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$

b. $\varphi^*(\omega_1 \wedge \mu) = (\varphi^*\omega_1)(\varphi^*\mu)$

c. $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$

Con todo esto en cuenta es que uno puede decir en forma general que

Theorem 10.

Sea ω una n-forma definida en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $\varphi : V \to U$ una función suave en $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\varphi^*\omega = f(\varphi)\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n = f(\varphi)\mathbf{J_f} dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$$

Es decir, que si una p-forma posee el mismo "numero" p que el conjunto en el cual esta definida, entonces el pullback es la composición de la función por el **determinante Jacobiano**.

Ejemplo

Para terminar esta sección, hagamos un simple ejemplo para esclarecer la idea.

Sea la ω una 1-forma en $\mathbb{R}^2$, tal que $\omega = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ y sea $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\} / \varphi = (\cos t, \sin t)$ la parametrización de una circunferencia de radio 1. Hallemos $\varphi^*\omega$.

Tomando la definición tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega &= \sum_{i=1}^{2} \varphi^* f_i \varphi^* dx_i \\ &= \varphi^* f_1 \varphi^* dx + \varphi^* f_2 \varphi^* dy \\ &= f_1(\varphi(t))\varphi'(t)dt + f_2(\varphi(t))\varphi'(t)dt \end{aligned} \tag{1}$$

Antes que nada, notemos que esta es una expresión que ya conocemos de las integrales de linea de campos vectoriales. Por otro lado, notemos también que dejamos de lado la notación indexada por dx y dy.

Identifiquemos f_1 y f_2. Para ello, sabemos que son las funciones que acompañan los "diferenciales". Entonces

$$f_1 = \frac{-y}{x^2+y^2}dx$$
$$f_2 = \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

Ahora hallemos los respectivos *pullbacks*

$$\varphi^* f_1 = f_1(\varphi(t)) = -\sin t$$
$$\varphi^* dx_1 = \varphi_1'(t)dt = -\sin t$$

$$\varphi^* f_2 = f_2(\varphi(t)) = \cos t$$
$$\varphi^* dx_2 = \varphi_2'(t)dt = \cos t$$

Reemplazando en #^f19ff7 nos queda que

$$\varphi^*\omega = \sin^2 t dt + \cos^2 t dt = dt$$

0.3.3 Integrales

Vamos viendo como de a poco, todo va tomando sentido y muchos de los temas que vimos durante la cursada van apareciendo de manera natural. Nos queda ver el concepto de integrales de formas que es donde todo termina conectándose bajo un mismo concepto.

Theorem 11.

Sea Ω una region definida en $\mathbb{R}^n$, ω una p-forma en U, y sea $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \Omega$ una parametrización de U. Entonces definimos la integral de ω sobre Ω como

$$\int_\Omega \omega = \int_D \varphi^*\omega$$

Sin embargo, rápidamente nos damos cuenta que no todas las regiones pueden ser parametrizadas en un dominio abierto de $\mathbb{R}^n$. Aunque siempre es posible parametrizarlas localmente. Entonces, podríamos definir la integral de una region cualquiera en $\mathbb{R}^n$ como la sumatoria de parametrizaciones locales. Para ello, definiremos objetos que nos permitirán fácilmente expresar esto.

Definition 12.

Un p-cubo en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p] = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) |\, a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

En el caso de que $[a_i, b_i] = [0, 1]\, \forall i \in [1, p]$. Entonces, decimos que es un *p-cubo singular* y denotamos al interval $[0, 1]$ como I.

Definition 13.

Una p-celda en el conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable $\varphi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p] \to U$.

En el caso que los intervalos sean todos cubos singulares, decimos que es una p-celda singular.

Definition 14.

Una p-cadena, denotada por m, en el conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una expresión del tipo

$$m = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_p\varphi_p$$

Donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son números reales y $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ son p-celdas.

Es decir, una p-cadena singular es la combinación lineal de p-celdas. Esto nos permitirá integrar sobre regiones mas generales.

Por ultimo, definiremos un concepto muy importante, la frontera de una p-cadena.

Definition 15.

La frontera, denotada por ∂, de una p-celda φ definida en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es la $p-1$-cadena tal que

$$\partial\varphi = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} (\varphi(x_1, \dots, x_{i-1} a_i, x_{i+1} \dots, x_p) - \varphi(x_1, \dots, x_{i-1} b_i, x_{i+1} \dots, x_p))$$

Donde a_1 y b_1 representan los extremos del p-cubo$_i$. En el caso de que sea una p-celda singular, entonces $a_i = 0$ y $b_i = 1\ \forall i$. Lo que estamos haciendo aquí es sumar la parametrización de cada cara del p-cubo con sus respectivos limites.

Naturalmente, de esta definición se desprende que en general, la frontera de una p-cadena m es la sumatoria de la frontera de cada p-celda por su respectivo coeficiente. Esto es

$$\partial m = c_1 \partial \varphi_1 + c_2 \partial \varphi_2 + \cdots + c_n \partial \varphi_n$$

A continuación se enumeran algunas propiedades importantes.

Theorem 16.

Sean ω_1 y ω_2 dos p-formas definidas en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sean m_1 y m_2 dos p-cadenas en U y sea β un numero real. Entonces

a. $\displaystyle\int_{m_1} (\omega_1 + \omega_2) = \int_{m_1} \omega_1 + \int_{m_1} \omega_2$

b. $\displaystyle\int_{m_1 + m_2} \omega_1 = \int_{m_1} \omega_1 + \int_{m_2} \omega_1$

c. $\displaystyle\int_{\beta m_1} = \beta \int_{m_1} \omega_1 = \int_{m_1} \beta \omega_1$

Y con respecto a las fronteras de las p-cadenas

Theorem 17.

Sean Sean m_1 y m_2 dos p-cadenas en U y sea β un numero real. Entonces

a. $\partial(\beta m_1 + m_2) = \beta \partial m_1 + \partial m_2$

b. $\partial(\partial m_1) = 0$

Ejemplo

Hagamos ahora un ejemplo para terminar de cerrar la idea.

Sea la 1-forma en $\mathbb{R}^3$ dada por $\omega = ydx + xdy + zdx$. Y sea la superficie $S : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0\}$. Hallar la integral de ω sobre la frontera de S.

Siguiendo la definición de integrales de p-formas, tenemos que

$$\int_{\partial S} \omega = \int_D \mu^* \omega$$

Donde μ es la 1-cadena que parametriza a ∂S. Entonces, debemos hallar una parametrizacion de ∂S. Para ello, podemos hallar una 2-cadena φ que parametrice a S y luego aplicar la #^a5bca0 .

La 2 cadena de S puede ser:

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to R^3 \,|\, \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{1 - \rho^2})$$

Entonces ∂S es

$$\begin{aligned}
\partial S &= \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}(\varphi(\partial_i) - \varphi(\partial_i'))\\
&= (-1)^2(\varphi(1,\theta) - \varphi(0,\theta)) + (-1)^3(\varphi(\rho,2\pi) - \varphi(\rho,0))\\
&= [(\cos\theta, \sin\theta, 0) - \underbrace{(0,0,1)}_{=0 \text{ (por ser un punto)}}] - [(\rho, 0, \sqrt{1-\rho^2}) - (\rho, 0, \sqrt{1-\rho^2})]\\
&= (\cos\theta, \sin\theta, 0)
\end{aligned}$$

Donde $\mu : [0, 2\pi] \to R^2 \mid \mu(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ es la 1-cadena que la parametriza.

Calculando la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\partial_1 S} \omega &= \int_{[0,2\pi]} \mu_1^* \omega\\
&= \int_{[0,2\pi]} f(\mu(\theta))\mu' d\theta\\
&= \int_{[0,2\pi]} (\sin\theta, -\cos\theta, 0)(-\sin\theta, \cos\theta, 0) d\theta\\
&= \int_{[0,2\pi]} -\sin^2\theta - \cos\theta^2 d\theta = -1 \int_{[0,2\pi]} d\theta\\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

Ahora, nos proponemos hallar la integral de $d\omega$ sobre la superficie S. Obtengamos $d\omega$.

Como ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$ $d\omega$ es el $rot\, f$. Entonces

$$d\omega = (\nabla \times f)_1 dy \wedge dz + (\nabla \times f)_2 dx \wedge dz + (\nabla \times f)_3 dx \wedge dy = -2 dx \wedge dy$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\int_S d\omega &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \varphi^* d\omega\\
&= -2 \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \varphi^*(dx \wedge dy)\\
&= -2 \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho\, d\rho d\theta\\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho\, d\rho d\theta\\
&= -\int_0^{2\pi} d\theta = -\int \theta|_0^{2\pi}\\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

Vemos que $\int_{\partial\Gamma} \omega = \int_\Gamma d\omega$. Esto era esperable, ya que es lo que aseguramos al princpio al enunciar el #^c5dc3a.

0.4 Los teoremas integrales

Con todo lo viso, estamos ahora en condiciones de comprender el teorema general de Stokes. En esta sección, nos detendremos a ver como todos los teoremas integrales vistos se pueden ver como un caso especial del mismo.

0.4.1 Teorema Fundamental del Cálculo

Sea ω la 0-forma definida en $U \subseteq \mathbb{R}$ es decir $\omega : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to U$, y sea Γ una 1-cadena formada por φ en U tal que $\varphi : [a,b] \to U$. Entonces la frontera de Γ es una 0-cadena dada por $\partial\Gamma = \varphi(b) - \varphi(a)$. Entonces el teorema nos queda

$$\int_\Gamma d\omega = \int_{[a,b]} \varphi^* d\omega = \int_a^b f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\partial[a,b]} \omega = \int_{\varphi(b)-\varphi(a)} f = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

0.4.2 Teorema de Green

Sea ω la 1-forma definida en $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es decir $\omega : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to U$, y sea K una curva parametrizada por una 2-cadena φ en U tal que $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to U$. La frontera de K esta dada por la 1-cadena $\mu : [e,f] \to U$. Entonces el teorema nos queda

$$\int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 = \int_K d\omega = \int_{[a,b]\times[c,d]} \varphi^*(d\omega) = \iint_K (\frac{\partial f_2}{\partial dx_1} - \frac{\partial f_1}{\partial dx_2})dx_1 dx_2$$

Es decir

$$\int_{\partial K} f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 = \iint_K (\frac{\partial f_2}{\partial dx_1} - \frac{\partial f_1}{\partial dx_2})dx_1 dx_2$$

Llegando a la formula de Green dada al principio.

0.4.3 El teorema clásico de Stokes

Sea ω la 1-forma definida en $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es decir $\omega : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to U$, y sea S la superficie parametrizada por la 2-cadena φ en U tal que $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to U$. La frontera de S esta dada por la 1-cadena $\mu : [e,f] \to U$. Entonces el teorema nos queda

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \omega &= \int_{[e,f]} \mu^*(\omega) \\
&= \int_{[e,f]} f_1(\mu)\mu_1'(t)dt + f_1(\mu)\mu_2'(t)dt + f_1(\mu)\mu_3'(t)dt \\
&= \int_{[e,f]} (f_1(\mu), f_2(\mu), f_3)(\mu)) \cdot (\mu_1', \mu_2', \mu_3')dt \\
&= \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mu
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Gamma}\omega &= \int_{\Gamma} d\omega \\
&= \int_{[a,b]\times[c,d]} \varphi^* d\omega \\
&= \int_{[a,b]\times[c,d]} ((\frac{\partial f_3}{\partial dx_2}(\varphi) - \frac{\partial f_2}{\partial dx_3}(\varphi))\varphi^*(dx_2 \wedge dx_3) + \quad (\frac{\partial f_3}{\partial dx_1}(\varphi) - \frac{\partial f_1}{\partial dx_3}(\varphi))\varphi^*(dx_1 \wedge dx_3) + \\
&(\frac{\partial f_2}{\partial dx_1}(\varphi) - \frac{\partial f_1}{\partial dx_2}(\varphi))\varphi^*(dx_1 \wedge dx_2)) \\
&= (rot\,\mathbf{F} \circ \varphi) \cdot (\frac{\partial \varphi}{\partial dy_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial dy_2}) dy_1 dy_2 \\
&= \iint_{[a,b]\times[c,d]} rot\,\mathbf{F} \cdot d\varphi \\
&= \iint_{\varphi} rot\,\mathbf{F} \cdot dA
\end{aligned}$$

En conclusión

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mu = \iint_S rot\,\mathbf{F} \cdot dS$$

Llegando a la formula de Stokes dada al principio.

Por otro lado, podríamos tomar el teorema de Green como un caso especial del teorema clásico de Stokes en el plano xy. Esto es, si $\mathbf{F} = (f_1(\mu), f_2(\mu), 0)$, entonces $rot\,\mathbf{F} = (\frac{\partial f_2}{\partial dx_1}(\varphi) - \frac{\partial f_1}{\partial dx_2}(\varphi))$.

0.4.4 Teorema de la Divergencia

Sea ω la 2-forma definida en $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es decir $\omega : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to U$, y sea V una region parametrizada por la 3-cadena φ en U tal que $\varphi : I^3 \to U$. Entonces la frontera de V es una 2-cadena formada por $\mu : [a,b] \times [c,d] \to U$. Entonces el teorema nos queda

$$\int_{\partial V} \omega = \int_{[a,b]\times[c,d]} \mu^* \omega = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot dS$$

Ademas

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega = \int_{I^3} (\frac{\partial f_{12}}{\partial dx_3}(\varphi) + \frac{\partial f_{13}}{\partial dx_2}(\varphi) + \frac{\partial f_{23}}{\partial dx_1}(\varphi)) d\varphi = \iiint_V div\, f \cdot dV$$

Por lo tanto

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot dS == \iiint_V div\, f \cdot dV$$

Llegando a la formula de la Divergencia dada al principio.

0.5 Hallemos lo propuesto

Vimos que todos los teoremas están relacionados entre si a través del teorema general de stokes. Es por esto que también es considerado como el **Teorema fundamental del cálculo en** $\mathbb{R}^n$. Ademas, vimos como se podría ver el teorema de green como un caso especial del clásico de stokes.

Como dijimos al principio nos interesa demostrar como el teorema de green se puede obtener a partir del de la divergencia, y con toda la maquinaria que hemos desarrollado, estamos ahora en condiciones de realizarlo.

Para ello, primero vamos a generalizar el teorema de la divergencia.

Haciendo uso de la propiedad de que para toda $(n-1)$-forma en $\mathbb{R}^n$

$$d\omega = div\, f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \nabla \cdot f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Y con el teorema general Stokes. Podemos afirmar que

Theorem 18. (Generalización del teorema de la Divergencia)

Sea ω un n-forma en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea V un solido en $\subseteq U$ representado por la n-cadena $\varphi : I^n \to U$. Entonces, ∂V es una $(n-1)$-cadena formada por $\mu : I^{(n-1)} \to U$ y su integral es

$$\int_{\partial V} \omega = \int_{I^{(n-1)}} \mu^* \omega \underbrace{\int \cdots \int_{\partial V}}_{n-1} \mathbf{F} \cdot \check{n}\, \mathrm{d}S = \int_V d\omega = \int_I^n \varphi^* d\omega = \int_I^n \nabla \cdot \omega(\varphi) dV = \underbrace{\int \cdots \int_V}_{n} \nabla \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}V$$

Es decir que

$$\underbrace{\int \cdots \int_V}_{n} \nabla \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}V = \underbrace{\int \cdots \int_{\partial V}}_{n-1} \mathbf{F} \cdot\ \check{n} \mathrm{d}V$$

En el caso en que $n = 2$ nos queda que

$$\iint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \check{n} dV$$

Ahora, consideremos el lado derecho de la integral. Vemos que es una integral de linea, por tanto $\check{\mathbf{n}} dS = (dx, dy)$ es un vector tangente a la curva C. Si tomamos la curva C con orientación contraria, entonces el $\check{\mathbf{n}} = (dy, -dx)$ y $\check{\mathbf{n}} dS = (-dy, dx)$.

Con esto en cuenta nos queda que

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \check{\mathbf{n}} dV = \int_{\partial V} (f_1, f_2)(dx, dy) = \int_{\partial V} (f_2, -f_1)(dy, -dx) = \int_{\partial V} (f_2, -f_1) \cdot \check{\mathbf{n}} dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia cuando $n = 2$ y $\mathbf{F} = (f_2, -f_1)$ nos queda que

$$\int_{\partial V} (f_2, -f_1) \cdot \check{\mathbf{n}} dV = \iint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_U (\frac{\partial f_2}{\partial dx_1} - \frac{\partial f_1}{\partial dx_2}) dx_1 dx_2$$

Que es el teorema de Green!

0.6 Conclusión

El objetivo de este documento fue ver si era posible relacionar el teorema de Green con el teorema de la Divergencia. Para ello, presentamos el teorema moderno de Stokes. Desarrollando, a grandes rasgos, las formas diferenciales es que pudimos entender el teorema y comenzar a jugar con el.

A partir de allí, generalizamos el teorema de la Divergencia para n dimensiones y vimos que cuando $n = 2$ es el equivalente al teorema de Green. Concluyendo así, nuestro objetivo!

0.7 Ultimas palabras

Fue durante una clase de cálculo II que, a partir de una confusion, trate de ver si era posible relacionar el teorema de Green con el de la Divergencia. Probando y probando pensé que había llegado a algo. Preguntandole a mi profesor si el desarrollo era correcto; me dijo que no, pero que trate de verlo en casa tranquilo.

Ese mismo día, apenas llegue a casa es que me puse a investigar. Una cosa llevo a la otra y es así que termine escribiendo esto.

Puede que sea un poco pretencioso de mi parte escribir un documento de esta magnitud y, por encima de todo, presentarlo. Sin embargo, le aseguro que lo hago desde la supina humildad y este desarrollo no es mas mi comprensión del tema puesto en las palabras que considero que me ayudarían a entenderlo como un primer abordaje al tema.

Lo que quiero decir es: este texto es solo un ejercicio personal, no es para nada un texto que pueda ser considerado como algo serio, ya que es probable que haya errores groseros.

Por ultimo, decir que, sin dudas, durante el desarrollo de este trabajo puede saborear el amargo sabor que puede tener la matemática. Sin embargo, a medida que fui avanzando, dejo de ser amargo para volverse una rica dulzura. Es por esto que, asumiendo que no lo hizo ya, lo invito a explorar mas sobre este tema y profundizar sobre muchos de los temas que dejamos de lado aquí. Así usted también experimenta la dulzura de las matemáticas!

[!biblio] ## Bibliografía Spivak, M. (2018). *Calculus On manifolds: A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* Hubbard, J. H., & Hubbard, B. B. (2009). *Vector* *calculus, linear algebra, and differential forms: A unified approach* (4th ed). Matrix Editions.

Pita Ruiz, C. (1995). _Cálculo vectorial_ (1. ed). Prentice-Hall Hispanoamericana.

Differential form. (2023). In _Wikipedia_. [[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Differential

Generalized Stokes theorem. (2023). In _Wikipedia_. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gene

Manifold. (2023). In _Wikipedia_. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Manifold&oldid=1169864

Math 3500 & 3510: Multivariable Calculus and Linear Algebra-YouTube. (n.d.). Retrieved October 29,

Differential Forms-YouTube. (n.d.). Retrieved October 27, 2023, from [https://www.youtube.com/play

Divergence and curl: The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more. (n.d.). Retrieved