Sea $a \in \mathbb{Z}$

1. Probar que $(5a+8 : 7a+3) = 1$ o 41
2. Hallar todos los valores de a para los cuales $(5a+8 : 7a+3) = 41$

1) LLAMO $d = (5a+8 : 7a+3)$

COMO d ES EL MCD ENTRE $5a+8$ Y $7a+3$

ENTONCES $d \mid 5a+8$ Y $d \mid 7a+3$

- SI $d \mid 5a+8 \Rightarrow d$ DIVIDE A CUALQUIER MÚLTIPLO DE $5a+8$, ELIJO $7.(5a+8) = 35a+56$

  Y TENGO QUE $d \mid 35a+56$

- ADEMÁS, SI $d \mid 7a+3 \Rightarrow d$ DIVIDE A CUALQUIER MÚLTIPLO DE $7a+3$, ELIJO $5.(7a+3) = 35a+15$

  Y TENGO QUE $d \mid 35a+15$

- POR OTRO LADO, SI $d \mid 35a+56$ Y $d \mid 35a+15$

  ENTONCES $d \mid (35a+56) - (35a+15) = 41$

  OBTUVE $d \mid 41$

AHORA BUSCO LOS DIVISORES DE 41, LOS CUALES SON ± 1 Y ± 41

PERO, COMO d ES UN MCD, ME QUEDO CON LOS NÚMEROS POSITIVOS

ENTONCES $d = 1$ ó $d = 41$.

ADEMÁS, TENÍA QUE $d = (5a+8 : 7a+3)$

DE ESTA FORMA, QUEDA DEMOSTRADO QUE

$$(5a+8 : 7a+3) = 1 \quad \text{ó} \quad (5a+8 : 7a+3) = 41$$

2) HALLO a PARA QUE $(5a+8 : 7a+3) = 41$

SÉ QUE $41 \mid 5a+8$ Y $41 \mid 7a+3$

ES DECIR, $r_{41}(5a+8) = 0$ Y $r_{41}(7a+3) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $5a+8 \equiv_{41} 0$ Y $7a+3 \equiv_{41} 0$, PERO

1 $5a \equiv_{41} -8$ Y 2 $7a \equiv_{41} -3$

TENGO 2 ECUACIONES DIOFÁNTICAS

VEO QUE LAS 2 TIENEN LAS MISMAS SOLUCIONES

① $5a \equiv_{41} -8$

VEO QUE $(5:41)=1$, Y $1 \mid -8$ ENTONCES LA ECUACIÓN TIENE SOLUCIÓN

BUSCO $m, n \in \mathbb{Z}$ TALES QUE $5m+41n=1$

A OJO VEO QUE $5.\underbrace{(-8)}_{m} + 41.\underbrace{1}_{n} = 1$

$\iff 5\cdot(-8) - 1 = 41$

COMO $41 \mid 41 \iff 41 \mid 5(-8)-1 \iff 5.(-8) \equiv_{41} 1$

SI MULTIPLICO POR a TENGO $5(-8)a \equiv_{41} 1.a$

VUELVO A $5a \equiv_{41} -8 \iff 5(-8)a \equiv_{41} (-8)(-8)$

PERO, YA SÉ QUE $5(-8)a \equiv_{41} a$, ENTONCES,

POR TRANSITIVIDAD, $a \equiv_{41} (-8)(-8) = 64$

ADEMÁS, $64 \equiv_{41} 23$, Y POR TRANSITIVIDAD

$\boxed{a \equiv_{41} 23}$

2) $7a \equiv_{41} -3$

VEO QUE $(7:41)=1$, Y $1 \mid -3$ ENTONCES LA ECUACIÓN TIENE SOLUCIÓN

BUSCO $m, n \in \mathbb{Z}$ TALES QUE $7m+41n=1$

A OJO VEO QUE $7 \cdot \underbrace{6}_{m} + 41 \cdot \underbrace{(-1)}_{n} = 1$

$\Leftrightarrow \quad 7 \cdot 6 - 1 = -41$

COMO $41 \mid (-41) \Leftrightarrow 41 \mid 7 \cdot 6 - 1 \Leftrightarrow 7 \cdot 6 \equiv_{41} 1$

SI MULTIPLICO POR a TENGO $7 \cdot 6 \cdot a \equiv_{41} 1 \cdot a$

VUELVO A $7a \equiv_{41} -3 \Leftrightarrow 7 \cdot 6 \cdot a \equiv_{41} (-3)\, 6$

PERO, YA SÉ QUE $7 \cdot 6 \cdot a \equiv_{41} a$, ENTONCES,

POR TRANSITIVIDAD, $a \equiv_{41} (-3) \cdot 6 = -18$

ADEMÁS, $-18 \equiv_{41} 23$, Y POR TRANSITIVIDAD

$\boxed{a \equiv_{41} 23}$, ES LA MISMA SOLUCIÓN

LUEGO, PARA QUE $(5a+8 : 7a+3) = 41$

OBTUVE QUE $a \equiv_{41} 23$, ES DECIR QUE EL

CONJUNTO SOLUCIÓN ES $a \in \mathbb{Z}$ TAL QUE

$\boxed{a = 23 + 41k}$ $(k \in \mathbb{Z})$

DICHO DE OTRA FORMA, SON TODOS LOS

NÚMEROS ENTEROS TALES QUE, AL SER

DIVIDIDOS POR 41, TIENEN RESTO 23.