Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Productos

Materiales	A	B	C
α	2	5	7
β	8	2	5
γ	2	3	4

Disponibilidad: α ; β ; γ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ó

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow \boxed{Ax = b}$$

$A \to$ **matriz de coeficientes**

si $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema $Ax = b$ tiene una unica solución.

si $\det(A) = 0$, entonces el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

$\det(A) \neq 0 \iff \exists A^{-1}$

$$Ax = b \quad \ldots \times A^{-1}$$

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$\boxed{x = A^{-1}b}$$

Operaciones Elementales

Sea $\bar{A}$ una matriz ampliada u orlada de la forma:

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \Rightarrow \bar{A} = [A \vdots b]$$

Las Operaciones Elementales son:

1) $f_i \to \lambda f_i \quad (\lambda \neq 0) \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

2) $f_i \to f_i + \lambda f_j \quad (\lambda \neq 0) \qquad i \neq j \quad \forall\, i, j$

3) $f_i \rightleftarrows f_j \qquad i \neq j \quad \forall\, i, j$

Metodo de Gauss

Dado el sistema $Ax = b$, este método consiste en aplicar las operaciones elementales al sistema $\bar{A} = [A \vdots b]$ hasta obtener un sistema triangular $[\bar{A} \vdots \bar{b}]$ equivalente (misma solución) a $[A \vdots b]$.

Luego el sistema $[\bar{A} \vdots \bar{b}]$ se resuelve por sustitución regresiva (↑).

Ej:

	Alfajor	bombon	Galletita
Harina	200	100	150
Azucar	60	50	80
Dul. de leche	30	20	50

x: cant. de alfajores y: cant. de bombones

z: cant. de galletitas

$$\begin{cases} 200x + 100y + 150z = 200.000 \\ 60x + 50y + 80z = 150.000 \\ 30x + 20y + 50z = 50.000 \end{cases}$$

Pivote

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \overset{\frown}{200} & 100 & 150 & 200.000 \\ 60 & 50 & 80 & 150.000 \\ 30 & 20 & 50 & 50.000 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \to F_2 + \lambda F_1 \Rightarrow \lambda = -3/10 \\ F_3 \to F_3 + \lambda F_1 \Rightarrow \lambda = -3/20 \end{array}$$

$$
\begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{ccc|c}
200 & 100 & 150 & 200.000 \\
0 & \overset{\text{Pivote}}{20} & 35 & 30.000 \\
0 & 5 & \frac{55}{2} & 20.000
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
F_1 \\
F_2 \\
F_3 \rightarrow F_3 + \lambda F_2 \quad \lambda = -\frac{1}{4}
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{ccc|c}
200 & 100 & 150 & 200.000 \\
0 & \overset{\text{Pivote}}{20} & 35 & 30.000 \\
0 & 0 & \frac{75}{4} & -2.500
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
F_1 \\
F_2 \\
F_3
\end{array}
\end{array}
$$

F_1

$$200x + 100y + 150z = 200000$$

$$x = -\frac{3800}{3}$$

F_2

$$20y + 35z = 30000$$

$$y = \frac{14200}{3}$$

F_3

$$\frac{75}{4} z = -2500$$

$$z = -\frac{400}{3}$$

TAREA

Aumentar disponibilidad a un cero mas