# Ejercitario 1: Conjuntos Difusos y sus Operaciones

**Responde a las preguntas de abajo utilizando este mismo notebook. Recuerda de seguir las instrucciones de envío que están en la plataforma Educa.**

---

**Ejercicio 1.** **Definimos un poset $(\mathbb{R}^n, \leq)$ donde para todo $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}$ tenemos que $x \leq y$ si y solo si $x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Demuestra que $(\mathbb{R}^n, \leq)$ es de hecho un poset.**

---

**Ejercicio 2.** **Sea $\mathbb{Q}[x]$ el conjunto de todos los polinomios de una sola variable $x$ con coeficientes en los números racionales $\mathbb{Q}$. Un polinomio de la forma $a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ puede representarse como una tupla $(a_{n-1}, \dots, a_0) \in \mathbb{Q}^n$.**

**Considera el conjunto de polinomios de una sola variable con coeficientes racionales no negativos $\mathbb{Q}^{+0}[x]$. Decimos que para dos polinomios $p, q \in \mathbb{Q}^{+0}[x]$ se tiene que $p \leq q$ si los vectores correspondientes de $p$ y $q$ denotados $v_p$ y $v_q$ se cumple que $v_p \leq v_q$ en el poset $(\mathbb{R}, \leq)$ del Ejercicio 1. (i) ¿Cuál es el ínfimo de $(\mathbb{Q}^{+0}[x], \leq)$? ¿Porqué?. (ii) ¿Cuál es el supremo de $(\mathbb{Q}^{+0}[x], \leq)$? ¿Porqué?. (iii) ¿Tiene $(\mathbb{Q}^{+0}[x], \leq)$ elementos mínimos o máximos? Explica porque si o porque no, y en caso positivo escribe explícitamente el mínimo o el máximo.**

---

**Ejercicio 3.** **Demostrar que $([0,1], \leq)$ es un retículo completo y distributivo.**

---

**Ejercicio 4.** **Considera los conjuntos difusos $A, B : \{1, 2, \dots, 10\} \to [0, 1]$ definidos como**

$$A(x) = 0.2/2 + 0.7/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.2/6$$

**y**

$$B(x) = 0.3/4 + 0.5/5 + 0.8/6 + 1/7 + 0.5/8 + 0.2/9.$$

1. **Escribe utilizando la notación de Zadeh (i) $A \cup B$, (ii) $A \cap B$, (iii) $\overline{A}$, (iv) $\overline{B}$, (v) $A \cup \overline{A}$, (vi) $A \cap \overline{A}$, (vii) $\overline{A \cap B}$, (viii) $\overline{A \cup B}$.**

2. **Dibuja los conjuntos (i) $A \cup B$, (ii) $A \cap B$, (iii) $\overline{A}$, (iv) $\overline{B}$, (v) $A \cup \overline{A}$, (vi) $A \cap \overline{A}$, (vii) $\overline{A \cap B}$, (viii) $\overline{A \cup B}$.**
3. **Escribe formalmente el soporte (*support*), núcleo (*core*) y altura (*height*) de $A$ y $B$.**

---

**Ejercicio 5. Considera los conjuntos difusos $A, B : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ definidos como $A(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $B(x) = \frac{1}{10^x}$.**

1. **Escribe utilizando la notación de Zadeh (i) $A \cup B$, (ii) $A \cap B$, (iii) $\overline{A}$, (iv) $\overline{B}$, (v) $A \cup \overline{A}$, (vi) $A \cap \overline{A}$, (vii) $\overline{A \cap B}$, (viii) $\overline{A \cup B}$**
2. **Escribe las funciones de membresía de (i) $A \cup B$, (ii) $A \cap B$, (iii) $\overline{A}$, (iv) $\overline{B}$, (v) $A \cup \overline{A}$, (vi) $A \cap \overline{A}$, (vii) $\overline{A \cap B}$, (viii) $\overline{A \cup B}$.**
3. **Escribe formalmente el soporte (*support*), núcleo (*core*) y altura (*height*) de $A$ y $B$.**

---

**Ejercicio 6. Considera los conjuntos difusos $A, B$ definidos como**

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{6} & \text{si } 1 \leq x < 7 \\ \frac{10-x}{3} & \text{si } 7 \leq x < 10 \\ 0 & \text{si } 10 \leq x, \end{cases}$$

**y**

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{6-x}{2} & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 0 & \text{si } 6 < x, \end{cases}$$

1. **Escribe las funciones de membresía de (i) $A \cup B$, (ii) $A \cap B$, (iii) $\overline{A}$, (iv) $\overline{B}$, (v) $A \cup \overline{A}$, (vi) $A \cap \overline{A}$, (vii) $\overline{A \cap B}$, (viii) $\overline{A \cup B}$.**
2. **Dibuja los conjuntos (i) $A \cup B$, (ii) $A \cap B$, (iii) $\overline{A}$, (iv) $\overline{B}$, (v) $A \cup \overline{A}$, (vi) $A \cap \overline{A}$, (vii) $\overline{A \cap B}$, (viii) $\overline{A \cup B}$.**
3. **Escribe formalmente el soporte (*support*), núcleo (*core*) y altura (*height*) de $A$ y $B$.**

---

**Ejercicio 7. Demuestra las propiedades 1 al 5, 7 y 8 en la Proposición 1.15 de libro de Bede (2013).**

---

**Ejercicio 8. Demostrar que para cualquier conjunto difuso $A : X \to [0,1]$ se cumple que para todo $x \in X$ (i) $A(x) \cup \overline{A}(x) \geq 0.5$ y (ii) $A(x) \cap \overline{A}(x)$ .**

$A(x)$
$\leq 0.5$

---

**Ejercicio 9. Demostrar que para cualquier par de conjuntos difusos $A : X \to [0,1]$ y $B : X \to [0,1]$ se cumple que**

1. $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \supseteq 0.5 \cap (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ **y**
2. $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \subseteq 0.5 \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ **.**

---

**Ejercicio 10. Denotamos por $T_L$ y $S_L$ la t-norma y t-conomar de Łukasiewicz y están definidas como**

$$xT_Ly = (x+y-1) \vee 0$$

**y**

$$xS_Ly = (x+y) \wedge 1.$$

**Demostrar que $T_L$ y $S_L$ es una t-norma y t-conorma, respectivamente.**

---

**Ejercicio 11. Considera los conjuntos difusos $A, B : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ definidos como $A(x) = 1/(1+x^2)$ y $B(x) = 1/10^x$. Escribe formalmente como funciones $AT_LB$, $AS_LB$, $AT_GB$, $AS_GB$, donde $T_L$ y $S_L$ son la t-norma y t-conorma de Łukasiewicz y $T_G$ y $S_G$ son la t-norma y t-conorma de Goguen. Presenta una gráfica de cada uno.**