métodos numéricos

REDONDEO

1. $n+1 < 5$ → dejamos como está
2. $n+1 > 5$ → añadimos una unidad a n
3. $n+1 = 5$ → y no hay ceros, añadimos una unidad
4. $n+1 = 5$ → resto son cero, ultimo digito → PAR: se deja; IMPAR: incrementa uno

Notación decimal en coma flotante

$\pm m^{\pm e}$ con $1 \le m < 10$

que corresponde con $\pm m \times 10^{\pm e}$

Número binario en coma flotante

$(s)\ (S)\ E\ m$

(s): signo del número; (S): signo del exponente; E: exponente base 2; m: Mantisa base 2, $1 \le m < 2$ $[10_2]$

NUMERO DE PUNTO FIJO

$$I_m = \sum_{i=0}^{m-1} (d_i b^i)$$

b: base numérica

d: digitos que son del conjunto de 0 a $(b-1)$

m: número de dígitos

Mayor Nº de punto fijo con "m" digitos

$$(I_m)_{máx} = \sum_{i=0}^{i=m-1} (b-1) b^i = b^m - 1$$

NUMERO DE PUNTO FLOTANTE

$$P_n = \sum_{i=1}^{i=n} (d_{-i}\ b^{-i})$$

valor fraccionario

Numero General

$$R_{mn} = I_m + P_n$$

m: enteros
n: fraccionarios

$$R_{mn} = \sum_{i=-n}^{i=m-1} (d_i b^i) + \sum_{i=1}^{i=n} (d_{-i} b^{-i})$$

NOTACIÓN CIENTIFICA NORMALIZADA

$$x = \pm f \times b^n$$

n: exponente
b: base numérica
f: mantisa

$$\frac{1}{b} \le f < 1$$

ERROR ABSOLUTO

$$E_{abs} = |x - x_a|$$

x: exacto; x_a: aproximado

Cota de error absoluto

$|x - x_a| = E_{abs} < \text{Cota}$

ERROR RELATIVO

$$E_r = \frac{E_{abs}}{|x|} = \frac{|x - x_a|}{|x|}$$

Cota error relativo

$E_r \le \text{cota}$

Error Relativo Porcentual

$$E_{r\%} = \frac{|x - x_a|}{|x|} \times 100$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

SUMA: $|c - fl(c)| = |E_a + E_b| \le |E_a| + |E_b|$ a y b: numeros reales; $c = a + b$; $fl(c)$: número en máquina

RESTA: $|c - fl(c)| = |E_a + E_b| \le |E_a| - |E_b|$ $c: a - b$

DIVISIÓN: $\left|\frac{c - fl(c)}{c}\right| = \left|\frac{E_a}{a} + \frac{E_b}{b}\right| \le \left|\frac{E_a}{a}\right| + \left|\frac{E_b}{b}\right|$ $c: \frac{a}{b}$

MULTIPLICACIÓN: $\left|\frac{c - fl(c)}{c}\right| = \left|\frac{E_a}{a} + \frac{E_b}{b}\right| \le \left|\frac{E_a}{a}\right| + \left|\frac{E_b}{b}\right|$ $c: a * b$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA POR PIVOTEO PARCIAL:

ubicar en la fila pivote el termino de mayor magnitud

FACTORIZACIÓN LU:

$Ax = L(Ux) = Ly = b$

L: 1 en la diagonal principal

1. calcular $A = LU$
2. calcular valores de y dado $Ly = b$
3. calcular valores de x dado $Ux = y$

Matriz Diagonalmente Dominante

$$|a_{ii}| \ge \sum_{k=1, k\ne i}^{n} |a_{ik}| \quad \forall i \in \{1, 2, \dots n\}$$

Matriz estrictamente Dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{k=1, k\ne i}^{n} |a_{ik}|$$

METODOS ITERATIVOS

n=3

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

vector inicial $x^{(0)} = 0 = [0, 0, 0]$

inicia con ceros

JACOBI

$x = \frac{b_x - y - z}{a_x}$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j\ne i}^{n} a_{ij} x_j^k \right]$$

para $1 \le i \le n$

GAUSS - SEIDEL

usa inmediatamente el último calculado

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k \right]$$

para $1 \le i \le n$

inicia con $[0, 0, 0]$

la convergencia solo está garantizada si la matriz es estrictamente diagonal dominante, o simétrica y definida positiva

MÉTODO DE SOBRERRELAJACIÓN SUCESIVA

Considerando la ecuación $x_i^{(k+1)} = \omega\, x_i^{(k+1)} + (1-\omega)\, x_i^{k}$

Despejamos x_i — valor previo

- Si $0 < \omega < 1$ subrrelajación
- Si $\omega = 1$ el resultado no se modifica
- Si $1 < \omega < 2$ sobrerrelajación y acelera convergencia
- Si $\omega > 2$ el método diverge

MÉTODO DE LA BISECCIÓN

1. $x_0 = a$ y $x_1 = b$ $\quad f(a).f(b) < 0$
2. $x_2 = c = \frac{a+b}{2}$
3. ver en qué subintervalo cae
4. $f(a).f(c) = 0$ entonces es solución

- $f(a).f(c) < 0 \qquad x_1 = c$ — "c" como "b"
- $f(a).f(c) > 0 \qquad x_0 = c \quad x_1 = b$ — "c" como "a"

Número de iteraciones necesarias mínimas

$$n \geq \log_2 \frac{(b-a)}{\varepsilon} \qquad n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$$

Tolerancia de Error $\quad \varepsilon = \frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$

MÉTODO DE NEWTON

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Elegir x_0 → Hacemos tabla, en el cambio de signo
2. se halla $f(x_0)$
3. Si $|f(x_0)| \leq \varepsilon$, x_0 es la solución estimada.
4. se calcula x_{n+1}

ε es cantidad pequeña

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$\varepsilon = \frac{\lvert x_{i+1} - x_i \rvert}{\lvert x_{i+1} \rvert}$

MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN

1. Elegir los valores tales que $f(a).f(b) < 0$
2. $x_p = b - \frac{f(b).(a-b)}{f(a) - f(b)}$
3. Se determina subintervalo
   - Si $f(a).f(x_p) < 0$ → $b = x_p$
   - Si $f(a).f(x_p) > 0$ → $a = x_p$
   - Si $f(a).f(x_p) = 0$ → raíz

MÉTODO DE LA SECANTE

En la fórmula de Newton ponemos

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \qquad n \geq 1$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{(x_n) - (x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right]$$

i	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	ε