

Análisis general de la función de transferencia

Tipo de filtro

Dada la función de transferencia asignada

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{s^4 + 88,86 \cdot s^3 + 7,935 \cdot 10^5 \cdot s^2 + 3,508 \cdot 10^7 \cdot s + 1,559 \cdot 10^{11}}$$

procederemos a analizar su comportamiento en $s = 0$ y $s \rightarrow \infty$.

En primer lugar analizamos el caso $s = 0$ para el cual tenemos que

$$H(0) = \frac{3948 \cdot 0^2}{0^4 + 88,86 \cdot 0^3 + 7,935 \cdot 10^5 \cdot 0^2 + 3,508 \cdot 10^7 \cdot 0 + 1,559 \cdot 10^{11}}$$

obteniendo entonces que

$$H(0) = 0$$

Analizando ahora el caso $s \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$$

dado que el grado del denominador es dos veces mayor al del numerador.

En base a los valores obtenidos podemos entonces afirmar que se trata de un filtro pasabanda dado que la transferencia es nula para frecuencias bajas y altas.

Ceros y polos

En principio, es trivial ver que el único cero de la función $H(s)$ es $s = 0$ y dado que está elevado al cuadrado se deduce que el cero es doble.

Por otro lado tenemos los polos, cuyo cálculo no es trivial. Dado que el denominador de la función es de grado cuatro tendremos entonces cuatro raíces. Debido a esto y a que los coeficientes del polinomio complejizan el desarrollo del cálculo de dichas raíces, se calcularán entonces mediante calculadora.

Obtenemos que

$$p_{1,2} \approx -21,40395436 \pm 606,8764861j$$

$$p_{3,4} \approx -23,02604564 \pm 649,8008994j$$

donde $p_{1,2}$ y $p_{3,4}$ son los pares conjugados que componen los cuatro polos de $H(s)$, y donde el primer subíndice corresponde al conjugado cuya parte imaginaria es positiva mientras que el segundo subíndice corresponde al de parte imaginaria negativa.

Cálculo de W_0 y Q

Dado que el denominador se compone de dos pares de raíces complejas conjugadas tendrá entonces un W_0 y Q para cada par. Para obtenerlos debemos primero reescribir la función $H(s)$ a la forma

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{(a \cdot s^2 + b \cdot s + c) \cdot (d \cdot s^2 + e \cdot s + f)}$$

donde las letras corresponden a valores que debemos calcular de forma tal que dicha ecuación sea equivalente a la fórmula original de $H(s)$.

Para conseguir esto es conveniente utilizar las raíces del denominador de $H(s)$ (los polos de la función) expresando la función como

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{k \cdot (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3) \cdot (s - p_4)}$$

donde k es el factor del término $k \cdot s^4$ y, para nuestra función en particular, se da que $k = 1$.

Luego, multiplicando los polos conjugados entre sí obtenemos

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{(s^2 - (p_1 + p_2) \cdot s + p_1 \cdot p_2) \cdot (s^2 - (p_3 + p_4) \cdot s + p_3 \cdot p_4)}$$

Sean z_1 y z_2 dos números complejos conjugados tenemos que

$$z_1 + z_2 = 2\Re(z_1) = 2\Re(z_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2$$

Aplicando estas propiedades a $p_{1,2}$ y $p_{3,4}$ obtenemos la expresión

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{(s^2 - 2\Re(p_1) \cdot s + |p_1|^2) \cdot (s^2 - 2\Re(p_3) \cdot s + |p_3|^2)}$$

W_0 y Q vienen dados por $s^2 + \frac{W_0}{Q} \cdot s + W_0^2$. Ejemplificando para el primer factor del denominador tendríamos entonces que

$$W_{0_1} = |p_1|$$

$$Q_1 = -\frac{W_{0_1}}{2\Re(p_1)}$$

Reemplazando obtenemos finalmente que

$$W_{0_1} \approx 607,2538173 \frac{r}{s}$$

$$Q_1 \approx 14,18555205$$

$$W_{0_2} \approx 650,2087416 \frac{r}{s}$$

$$Q_2 \approx 14,11898404$$

siendo W_{0_1} y Q_1 los valores correspondientes al polinomio de segundo grado cuyas raíces son $p_{1,2}$ y W_{0_2} y Q_2 los correspondientes al polinomio de segundo grado de raíces $p_{3,4}$.

Finalmente, reemplazando con los valores de W y Q obtenidos podemos expresar la función de transferencia como

$$H(s) \approx \frac{3948 \cdot s^2}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 607,3^2) \cdot (s^2 + 46,05 \cdot s + 650,2^2)}$$

Diagramas de Bode

A continuación se presentan los diagramas de Bode tanto de módulo como de fase (en grados sexagesimales) de la función $H(s)$ junto con una breve descripción explicando lo obtenido. Para los diagramas de Bode se analiza el caso $s = jw$ donde w se mide en $\frac{r}{s}$ (radianes por segundo).



Figure 1: Diagramas de Bode

En primer lugar tenemos el diagrama de módulo de Bode, es decir, el módulo de $H(jw)$ medido en dB (decibeles) el cual viene dado por la fórmula

$$20 \cdot \log(|H(jw)|)dB$$

Dado que el filtro es un pasabanda era lo esperable observar que para frecuencias bajas ($w \rightarrow 0$) y altas ($w \rightarrow \infty$) el gráfico tendiera a $-\infty$ dado que este tipo de filtro se caracteriza por anular la función de transferencia para dichas frecuencias. Esto puede verse matemáticamente en base al análisis previo realizado donde se calculó que $H(0) = 0$ y $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) =$

0, luego $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$ lo cual explica lo observado en el primer gráfico. Por último, para las frecuencias en el intervalo (W_{01}, W_{02}) se aprecia una ganancia que tiende a $0dB$ lo que implica una salida de igual amplitud a la de la señal de entrada (esta es la banda que nuestro filtro deja pasar sin amortiguar).

El segundo gráfico es el diagrama de fase de Bode (en grados sexagesimales). Los valores de este gráfico vienen dados por la fórmula

$$\arctan\left(\frac{\Im(H(jw))}{\Re(H(jw))}\right)$$

Dado que el numerador de la función se compone de un único término $3948 \cdot s^2$ tenemos que la constante positiva aporta 0° mientras que el s^2 aporta 180° (recordemos que $s = jw$ lo cual tiene un ángulo de 90° , luego elevar al cuadrado duplica el ángulo y obtenemos 180°).

Al acercarnos a las frecuencias W_0 de los polos vemos como empieza a disminuir el ángulo a un ritmo de $-180 \frac{grad}{dec}$ aproximadamente. En rigor, en principio hay un intervalo donde disminuye $-90 \frac{grad}{dec}$ pero dicho intervalo no es apreciable dada la escala y cercanía entre los W_0 . Finalmente, una vez alcanzado el valor $W = 10 \cdot W_0$ los polos ya no aportan pendiente decreciente y se estabiliza el gráfico nuevamente, quedando en este caso en -180° aproximadamente.

Respuesta gráfica del sistema a distintas señales

A continuación se presentan gráficos de respuestas del sistema a distintos tipos de señales y frecuencias.

Respuesta al escalón

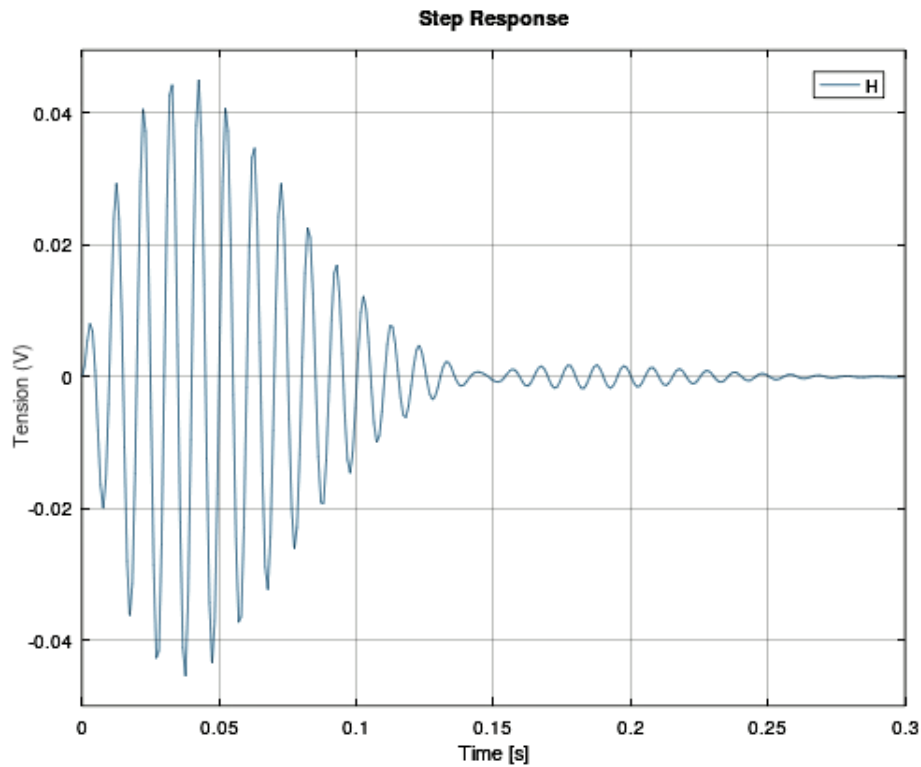


Figure 2: Respuesta al escalón

Vemos que al ser un filtro pasabanda nuestro sistema no reacciona al instante $t = 0^+$ el cual correspondería a una frecuencia $w \rightarrow \infty$. Luego obtenemos una respuesta oscilatoria (esperable dado que se tienen polos complejos) que va tendiendo a cero a medida que pasa el tiempo (debido a los factores exponenciales decrecientes provenientes de la parte real negativa de las raíces de los polos). Cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que $w \rightarrow 0$ y se da, como era esperable dado el análisis previo, que la respuesta del sistema tiende a cero y logrando estabilizarse.

Si analizamos el instante donde $t = 0,15s$ podemos observar un com-

portamiento en principio extraño, donde nuestra señal disminuye considerablemente para luego volver a crecer y finalmente anularse. Esto se debe a que la respuesta al escalón es una función compuesta por funciones senoidales de igual fase y frecuencias muy cercanas entre sí (recordemos que $W_{01} \approx 607,3 \frac{r}{s}$ y $W_{02} \approx 650,2 \frac{r}{s}$) donde la amplitud de estas senoidales viene dada por funciones exponenciales negativas de τ (*taus*) cercanos entre sí ($\tau_1 \approx 21,03s$, $\tau_2 \approx 23,03s$), lo que da como resultado el efecto de *batido* para esa intervalo de tiempo específico. Los siguientes gráficos ayudan a ejemplificar este efecto de batido.¹



Figure 3: Efecto de batido entre dos funciones senoidales

Si no tuvieramos las exponenciales negativas que nos "matan" la señal observaríamos lo siguiente a medida que avanzamos en la escala del tiempo.



Figure 4: Efecto de batido extendido en el tiempo

¹<https://ricuti.com.ar/no-me-salen/ondas/Ap-ond-14.html>

Respuesta al impulso



Figure 5: Respuesta al impulso

La respuesta al impulso es matemáticamente la derivada de la respuesta al escalón, lo que dará como resultado que en los valores de t donde la respuesta al escalón alcance un máximo o mínimo entonces en la respuesta al impulso obtendremos un cero. Puede observarse sencillamente esto en el t alineado con la barra horizontal del valor $0V$, donde para la respuesta al escalón se ve que se alcanza un máximo mientras que la respuesta al impulso vale cero. Vemos que en esta respuesta también tenemos el efecto de batido para $t = 0,15s$ lo cual es esperable dado que la derivada de la respuesta al escalón (la respuesta al impulso que estamos graficando) esta compuesta por términos similares.

Respuesta a senoidales



Figure 6: Respuesta a la senoidal de frecuencia $\omega = 20 \frac{\text{r}}{\text{s}}$

Para una señal senoidal de frecuencia $\omega = 20 \frac{\text{r}}{\text{s}}$ y $1V$ de amplitud vemos que se repite la forma de la respuesta al escalón para las primeras décimas de segundo (componente transitoria) para finalmente tender a cero en el estado permanente, coincidiendo con el comportamiento esperado del filtro dado que es un pasabanda y por lo tanto tenderá a anular las señales de baja frecuencia.

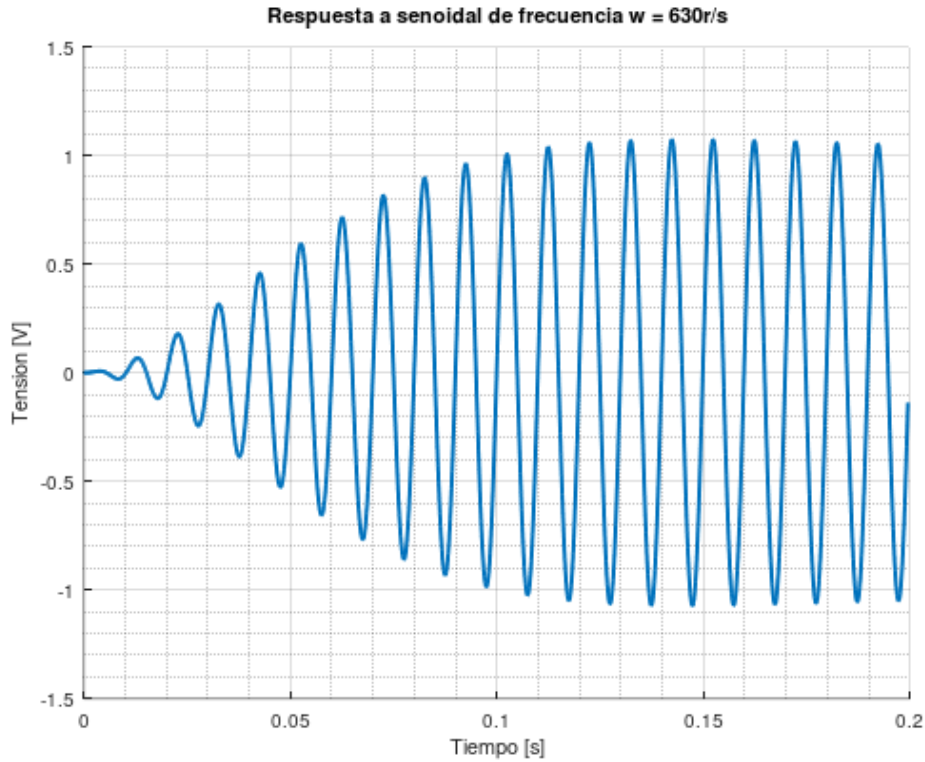


Figure 7: Respuesta a la senoidal de frecuencia $w = 630\frac{r}{s}$

Vemos que para una señal senoidal de frecuencia $w = 630\frac{r}{s}$ y amplitud $1V$ al estabilizarse la respuesta obtenemos que la amplitud de la misma coincide aproximadamente con la de la señal senoidal. Esto coincide con el análisis previo de la función de transferencia, ya que $w = 630\frac{r}{s}$ se encuentra a mitad de camino entre los W_0 calculados ($W_{01} \approx 607,3\frac{r}{s}$ y $W_{02} \approx 650,2\frac{r}{s}$) y vimos en el diagrama de Bode que para la banda de frecuencias con W_{0i} de extremos la ganancia era de aproximadamente $0dB$, lo que significa que la salida mantiene la amplitud de la entrada, tal y como podemos apreciar para la respuesta a esta señal senoidal.



Figure 8: Respuesta a la senoidal de frecuencia $w = 5000\frac{r}{s}$

Por último tenemos que para una señal senoidal de frecuencia $w = 5000\frac{r}{s}$ y amplitud 1V se presenta una respuesta similar a la de baja frecuencia, donde la respuesta de nuestro sistema se ve muy atenuada (como vimos previamente para la señal senoidal de frecuencia $w = 20\frac{r}{s}$). Vemos que inicialmente presenta una respuesta parecida a la del escalón para su estado transitorio, y una vez alcanzado el estado estacionario la respuesta es de forma senoidal con amplitud tendiendo a cero (como es esperable, mientras más aumentemos la frecuencia dicha amplitud tenderá más aún a cero). La atenuación de la señal senoidal coincide con el hecho de que nuestro filtro es un pasabanda y por lo tanto anulará las señales de altas frecuencias.

Respuesta a la cuadrada

Esta sección se dividirá en dos subsecciones, en la primera analizaremos las cuadradas de frecuencias relacionadas con la de $W_{01} \approx 607,3 \frac{r}{s}$ y en la siguiente para las cuadradas de frecuencias relacionadas a $W_{02} \approx 607,3 \frac{r}{s}$. Recordemos que $f = \frac{W}{2 \cdot \pi}$.

Frecuencia f_{01}

Para W_{01} tenemos que $f_{01} = \frac{W_{01}}{2 \cdot \pi} \approx 96,65 Hz$.



Figure 9: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $\frac{f_{01}}{10}$

Para una señal cuadrada de frecuencia $\frac{f_{01}}{10} \approx 9,665 Hz$ vemos que la respuesta oscila constantemente alrededor de cero, y dado que es un filtro pasabanda no reacciona a ninguno de los flancos (los flancos tendrían una frecuencia prácticamente infinita y el filtro pasabanda, como vimos antes, no reacciona a dicha frecuencia). Comparando gráficos vemos que la respuesta a esta señal cuadrada se asemeja a la respuesta al escalón con la

diferencia de que, debido a que estamos excitandola constantemente y no dejamos que alcance frecuencia cero, la respuesta nunca se extingue.



Figure 10: Respuesta a la cuadrada de frecuencia f_{0_1}

Para la señal cuadrada de frecuencia $f_{0_1} \approx 96,65Hz$ tenemos que la respuesta, una vez estabilizada, es una senoidal de amplitud igual a la mitad de la de la señal cuadrada ($0,5V$ en este caso). Esto es lógico si vemos que la señal cuadrada generada se puede pensar como una continua de $0,5V$ más una cuadrada centrada en cero de $0,5V$ de amplitud. Dado que la frecuencia de la cuadrada esta en el rango de frecuencias entre los W_{0_i} (más específicamente, coincide con el extremo W_{0_1}) entonces la señal no se ve atenuada significativamente por el filtro. Por otro lado, el tiempo que tarda en estabilizarse la señal está relacionado con el tiempo que tarda el filtro en estabilizar la respuesta a la continua.



Figure 11: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $f_{0_1} \cdot 10$

Para la señal cuadrada de frecuencia $10 \cdot f_{0_1} \approx 966,5Hz$ tenemos que una vez alcanzado el estado permanente la respuesta oscila alrededor de los $0V$ cercanamente, coincidiendo con el comportamiento esperado del pasabanda para frecuencias mayores a las de la banda que deja pasar el filtro (que recordemos que va de f_{0_1} a f_{0_2} , y debido a que estas frecuencias son cercanas entre sí entonces diez veces la primera ya se aleja considerablemente de dicha banda). El estado transitorio presenta la forma de la respuesta al escalón debido a la tensión continua que tiene la señal cuadrada. Lo que aparenta ser un rectángulo rojo en realidad son varios pulsos de la cuadrada pero debido a su alta frecuencia estos pulsos son muy cercanos entre sí (nuevamente, la señal cuadrada tiene amplitud $1V$).

Frecuencia f_{0_2}

Dado que $W_{0_2} \approx 650,2 \frac{r}{s}$ para este caso tendremos que $f_{0_2} = \frac{W_{0_2}}{2 \cdot \pi} \approx 103,5Hz$. Debido a que las frecuencias f_{0_i} son tan cercanas entre sí ten-

dremos que los siguientes gráficos serán extremadamente parecidos a los anteriores, por lo que todo lo explicado previamente aplica de igual manera a lo siguiente y no será repetido.



Figure 12: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $\frac{f_{02}}{10}$

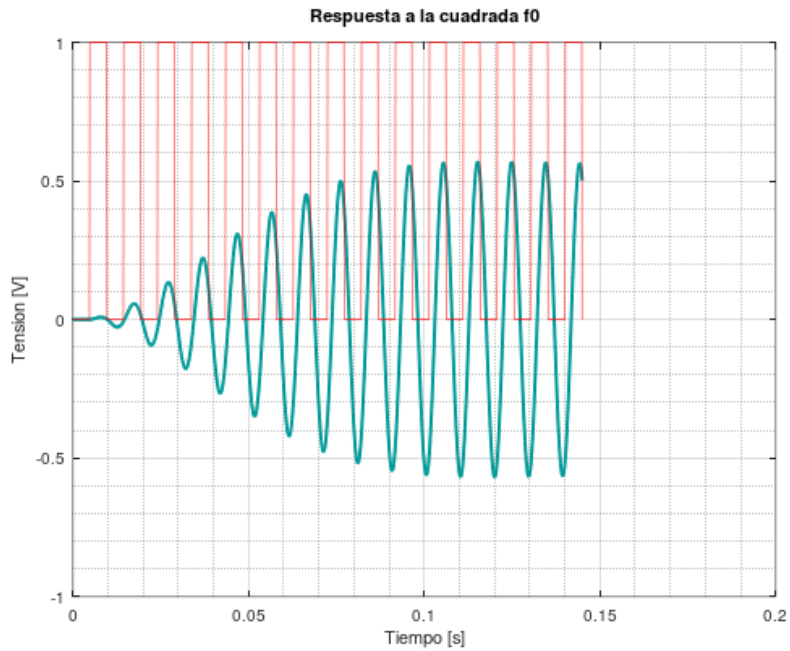


Figure 13: Respuesta a la cuadrada de frecuencia f_{02}



Figure 14: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $f_{0_2} \cdot 10$

Circuito propuesto

Se propone un circuito compuesto por dos Multiple Feedback Band-pass Filter (MFBP) . La elección del MFBP por sobre otro tipo de filtros se debe a la facilidad que aporta diseñar el circuito con este tipo de filtro. La principal desventaja de este filtro es que es complicado conseguir secciones de frecuencias y Q altos ($Q > 20$) debido a las limitaciones de la ganancia de lazo abierto del amplificador operacional integrado.² Dado que nuestra transferencia se compone por valores de Q bajos ($Q < 20$) no habrá problemas en utilizar este tipo de filtro.

²<https://www.analog.com/media/en/training-seminars/design-handbooks/Op-Amp-Applications/Sections5-5-to-5-8.pdf>, página 5.70

Transferencia del MFPB

A continuación se presenta un diagrama de un filtro Multiple Feedback Band-pass (MFBP).



Figure 15: Filtro MFBP

Para este tipo de filtro se tiene una transferencia del tipo

$$H_{MFBP}(s) = -H_0 \cdot \frac{\frac{W_0}{Q} \cdot s}{s^2 + \frac{W_0}{Q} \cdot s + W_0^2}$$

Para simplificar las expresiones y cuentas tomaremos $C1 = C2 = C$. Resolviendo el circuito mediante el método de nodos obtenemos que la función de transferencia puede expresarse como

$$H_{MFBP}(s) = -\frac{R_2}{2 \cdot R_1} \cdot \frac{\frac{2}{C \cdot R_2} \cdot s}{s^2 + \frac{2}{C \cdot R_2} \cdot s + \frac{1 + \frac{R_1}{R_3}}{C^2 \cdot R_1 \cdot R_2}}$$

De las anteriores dos expresiones podemos inferir que

$$H_0 = \frac{R_2}{2 \cdot R_1}$$

$$\frac{W_0}{Q} = \frac{2}{C \cdot R_2}$$

$$W_0^2 = \frac{1 + \frac{R_1}{R_3}}{C^2 \cdot R_1 \cdot R_2}$$

Despejando las R_i en función de las demás variables obtenemos

$$R_2 = \frac{2 \cdot Q}{C \cdot W_0}$$

$$R_1 = \frac{R_2}{2 \cdot H_0}$$

$$R_3 = \frac{R_1}{\frac{2 \cdot Q^2}{H_0} - 1}$$

donde Q y W_0 son datos provenientes de nuestra función de transferencia, por lo que es cuestión tan solo de seleccionar un C adecuado, reemplazar y obtener los R_i . Antes de proceder a calcular los valores de estos elementos debemos expresar la función de transferencia $H(s)$ de forma tal que podamos aplicarle las ecuaciones previas.

Previamente teníamos que

$$H(s) \approx \frac{3948 \cdot s^2}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 607,3^2) \cdot (s^2 + 46,05 \cdot s + 650,2^2)}$$

Reescribiendolo para que se adapte a la forma de los filtros MFBP tendríamos

$$H(s) \approx 2 \cdot \frac{42,81 \cdot s}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 607,3^2)} \cdot \frac{46,05 \cdot s}{(s^2 + 46,05 \cdot s + 650,2^2)}$$

de forma tal que tenemos dos filtros MFBP, por lo tanto tendremos que encontrar las constantes H_0 , C , R_1 , R_2 y R_3 para cada uno.

Cálculo de los componentes

Comenzaremos calculando los valores para el MFBP de frecuencia

$W_0 \approx 607,3 \frac{r}{s}$ y $Q \approx 14,19$. La idea es conseguir valores ideales de resistencias que se aproximen lo más posible a valores normalizados (de forma tal de disminuir el error al normalizar) manteniendonos en un rango de resistencias de $1K\Omega$ a $1M\Omega$. Para esto eligiremos el valor del capacitor C (normalizado) que de mejores resultados; dicho capacitor debe tener un valor de entre $1nF$ y $1\mu F$.

El otro factor a variar junto con el C es el H_0 del MFBP. Tenemos que para la transferencia $H(s)$ debe suceder que $H_0 \approx 2$, para lo cual debemos lograr que la multiplicación entre los H_0 de los filtros MFBP den aproximadamente 2. Si bien hay infinitas combinaciones posibles en la teoría, en la práctica nos vemos limitados por las otras condiciones del sistema.

Para encontrar la combinación de componentes que minimizase el error relativo de W_o y Q inicialmente se fueron proponiendo valores a los capacitores y ganancias de cada filtro. Tras un extenso análisis resultó evidente que el segundo filtro era muy difícil de aproximar las resistencias normalizadas a los valores ideales de las resistencias calculadas debido a los valores particulares de W_0 y Q del mismo. Debido a esto se desarrolló un algoritmo que analizase todas las combinaciones de capacitores comerciales entre $1nF$ y $1\mu F$ posibles para ambos filtros, y para cada combinación variase la ganancia del primer filtro H_{o1} (donde la ganancia del segundo filtro se calcula mediante $H_{o2} = \frac{2}{H_{o1}}$) comenzando por $H_{o1} = 0,01$ hasta $H_{o1} < 70$ con paso 0,01.

Una vez obtenidos los valores normalizados de las resistencias calculadas el algoritmo calcula con ellas el W_0 y Q y procede a calcular el error relativo de cada uno. Con los cuatro errores relativos obtenidos (porque hay dos filtros) procede a sumarlos para obtener una aproximación del error relativo total, y analiza si este es menor a la anterior mejor combinación obtenida. De esta forma se consigue la mejor combinación de resistencias normalizadas para nuestro circuito. Es importante recalcar que no se considera el error de H_0 para el algoritmo ya que este en última instancia podría mejorarse con un filtro plano, la idea es que el algoritmo se enfoque en minimizar el error en W_0 y Q .

Los resultados obtenidos fueron interesantes. A continuación se presentan los mejores resultados posibles para tres condiciones distintas.

- Manteniéndose entre resistencias de $1K\Omega$ y $1M\Omega$ utilizando resistencias de tolerancia 10% únicamente

```

Suma de errores relativos = 8.597%

T1
C = 4.7e-08
Ho = 0.5
R1 = 1e+06
R2 = 1e+06
R3 = 1200
Wo Error = 1.19059%
Q Error = 1.77853%

T2
C = 5.6e-08
Ho = 4
R1 = 100000
R2 = 820000
R3 = 1000
Wo Error = 3.74975%
Q Error = 1.87813%

```

Figure 16: Primera simulación

Vemos que si intentamos mantenernos en los valores recomendados por el trabajo práctico obtenemos los peores resultados con diferencia. Como se mencionó previamente el principal culpable es el segundo filtro (T2), aportándonos mucho error relativo para el W_0 . Si simulamos el circuito en el programa *LTSpice* y graficamos los diagramas de Bode se obtiene un error de aproximadamente $5,6dB$ en el diagrama de módulo. Si bien se podría disminuir este error, se requeriría de varias resistencias de menor tolerancia y presets, lo cual no es ideal. Veremos que pasa con los siguientes casos.

- Manteniéndose entre resistencias de 100Ω y $1M\Omega$ utilizando resistencias de tolerancia 10% únicamente

```

Suma de errores relativos = 6.89032%

T1
C = 1.2e-07
Ho = 45.28
R1 = 3900
R2 = 390000
R3 = 560
Wo Error = 0.703066%
Q Error = 0.531653%

T2
C = 5.6e-07
Ho = 0.0441696
R1 = 820000
R2 = 82000
R3 = 100
Wo Error = 4.26085%
Q Error = 1.39475%

```

Figure 17: Segunda simulación

Vemos que para este caso obtenemos una mejora leve con respecto al anterior, disminuyendo el error relativo total aproximadamente 1,7%. Logramos conseguir una mejor aproximación para el primer filtro sin embargo el segundo filtro aumentó su error de W_0 considerablemente. Si simulamos el circuito con estos valores en el *LTSpice* obtenemos un error aproximado de $6dB$ lo cual es más error que en nuestra anterior simulación (esto se debe a que la suma de errores relativos es tan sólo una estimación del error real, y por otro lado solo estamos analizando el error en dB y no en la banda de frecuencias). Veremos que sucede con el último análisis.

- Manteniéndose entre resistencias de 100Ω y $1M\Omega$ utilizando resistencias de tolerancia 10% pero permitiendo usar una del 5%

```

Suma de errores relativos = 3.9225%

T1
C = 4.7e-07
Ho = 0.13
R1 = 390000
R2 = 100000
R3 = 120
Wo Error = 1.15982%
Q Error = 1.76535%

T2
C = 1e-07
Ho = 15.3846
R1 = 15000
R2 = 430000
R3 = 560
Wo Error = 0.943445%
Q Error = 0.0538799%

```

Figure 18: Tercera simulación

Por último le permitimos al algoritmo hacer uso de una sola resistencia de tolerancia 5% y ver si conseguimos algún tipo de mejora substancial. Afortunadamente conseguimos una mejora considerable de aproximadamente el 3%. No sólo eso sino que logramos bajar también considerablemente el promedio de errores relativos, lo que resulta en una mejora mucho mayor a la esperada. Si simulamos el circuito en el *LTSpice* ahora tenemos un error de aproximadamente $0,2dB$ únicamente, y logramos una aproximación de la banda de frecuencias del pasabanda muy cercana al ideal.

En base a lo expuesto se optó por la última combinación de valores. Para resumir se presenta la siguiente tabla con los valores de los componentes y sus respectivos errores relativos, de igual forma se presentan los valores ideales y aproximados de W_0 , Q y H_0 .

T1	Valor Ideal	Valor Normalizado	Δ %	Tolerancia %
C	470 n	470 n	0	-
R1	382,3268321 K	390 K	2	10
R2	99,40497636 K	100 K	0,6	10
R3	123,5366884	120	2,86	10
Wo	607,2538181	614,2968994	1,16	-
Q	14,18555209	14,43597714	1,77	-
Ho	0,13	0,1282051282	1,38	-
T2	-----	-----	---	-----
C	100 n	100 n	0	-
R1	14,11445129 K	15 K	6,27	10
R2	434,290809 K	430 K	0,99	5
R3	566,5054799	560	1,15	10
Wo	650,2087408	656,3431023	0,94	-
Q	14,118984	14,1113767	0,05	-
Ho	15,38461538	14,333333333	6,83	-

Figure 19: Valores obtenidos para el circuito

En base a los valores de H_0 , W_0 y Q calculados en la tabla obtenemos una función de transferencia tal que

$$H_n(s) \approx \frac{(-0,128) \cdot 42,55 \cdot s}{s^2 + 42,55 \cdot s + 614,30^2} \cdot \frac{(-14,33) \cdot 46,51 \cdot s}{s^2 + 46,51 \cdot s + 656,34^2}$$

Multiplicando ambos factores obtenemos finalmente que

$$H_n(s) \approx \frac{3637 \cdot s^2}{(s^2 + 42,55 \cdot s + 614,30^2) \cdot (s^2 + 46,51 \cdot s + 656,34^2)}$$

donde $H_n(s)$ es la función de transferencia obtenida tras normalizar los componentes.

Diagramas de $H_n(s)$

A continuación se presentan los diagramas de Bode y la respuesta al escalón de $H_n(s)$. Se mostrarán primero los gráficos por separado para poder apreciarlo mejor, y luego se superpondrán con los correspondientes a $H(s)$ para tener una idea de la precisión de la misma.

Diagramas de Bode



Figure 20: Diagramas de bode de $H_n(s)$



Figure 21: Diagramas de bode de $H_n(s)$ y $H(s)$

Vemos que a gran escala ambos gráficos prácticamente se superponen. Para apreciar la diferencia podemos magnificar la banda de frecuencias donde la ganancia es aproximadamente 0dB.



Figure 22: Diagramas de bode de $H_n(s)$ (azul) y $H(s)$ (naranja)

Vemos que el error es aproximadamente 0,5dB. También podemos observar un ligero error en las frecuencias, esperable si consideramos que $W_{01} \approx 607,3 \frac{r}{s}$ y nosotros obtuvimos un valor $W_{01} \approx 614,30 \frac{r}{s}$ cuando

normalizamos (lo mismo para W_{02}).

Respuesta al escalón

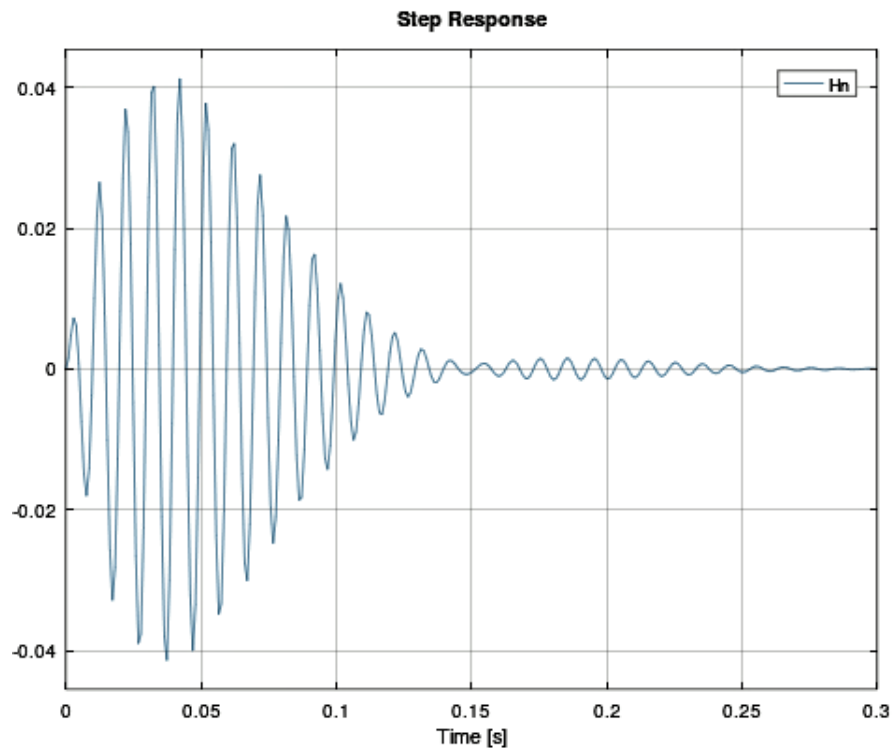


Figure 23: Respuesta al escalón de $H_n(s)$



Figure 24: Respuesta al escalón de $H_n(s)$ y $H(s)$

Nuevamente ambos gráficos son muy parecidos, si bien aquí es más sencillo ver las diferencias. A continuación se muestra un gráfico que magnifica la zona donde $t \approx 0,15s$.



Figure 25: Respuesta al escalón de $H_n(s)$ y $H(s)$

Simulación con *LTSpice*

Habiendo normalizado los valores de los componentes del circuito para conseguir la transferencia asignada procederemos a simular el mismo mediante el programa *LTSpice*. Para esto se mostrarán primero los diagramas obtenidos para las distintas simulaciones individualmente y luego comparando con los diagramas de la transferencia original. Finalmente se compararan todos los diagramas juntos (la función $H(s)$, la función $H_n(s)$ y los generados por *LTSpice*).

Antes de proceder a mostrar los gráficos obtenidos, se presenta un esquema del circuito utilizado en el *LTSpice*.

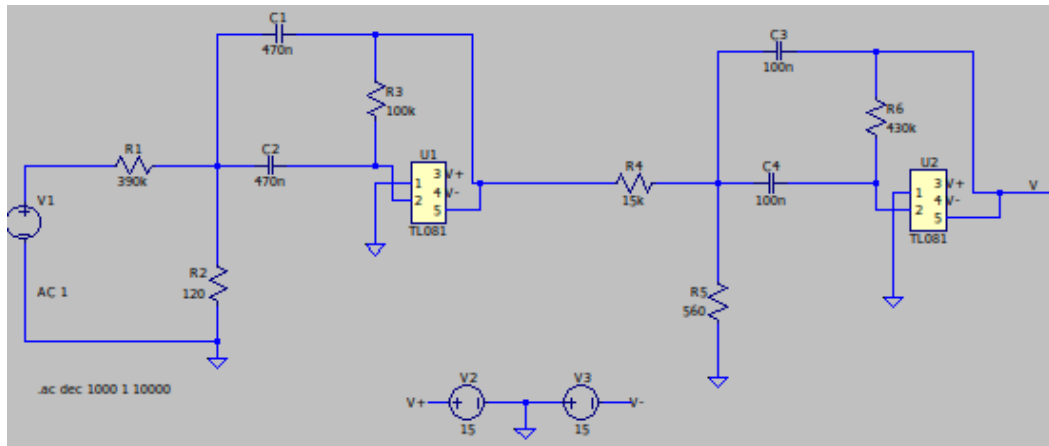


Figure 26: Circuito propuesto para la transferencia asignada

Diagramas de Bode



Figure 27: Diagrama de magnitud de Bode del circuito simulado en *LTSpice*



Figure 28: Diagrama de fase de Bode del circuito simulado en *LTSpice*

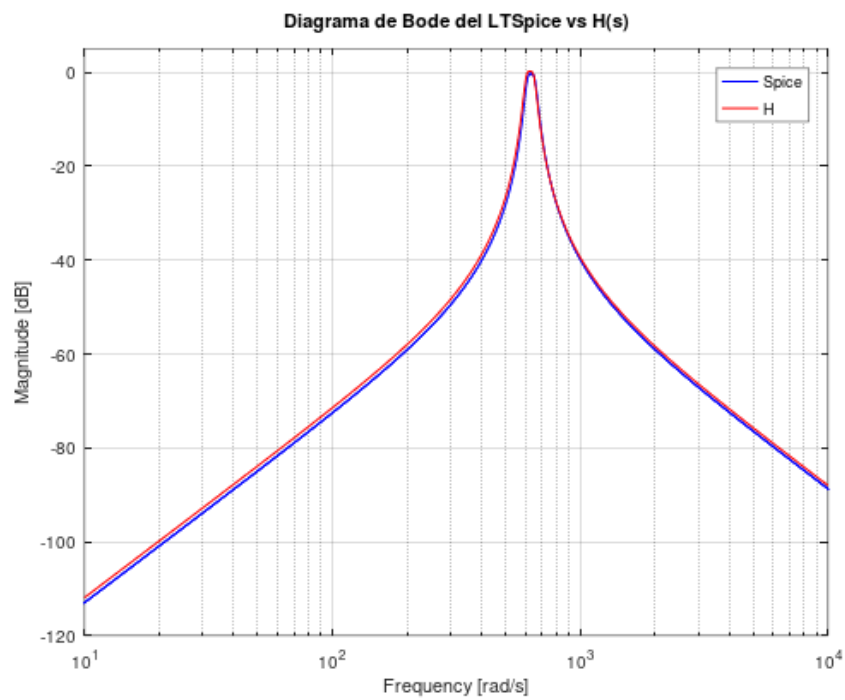


Figure 29: Comparación entre $H(s)$ y $LTSpice$ de la magnitud

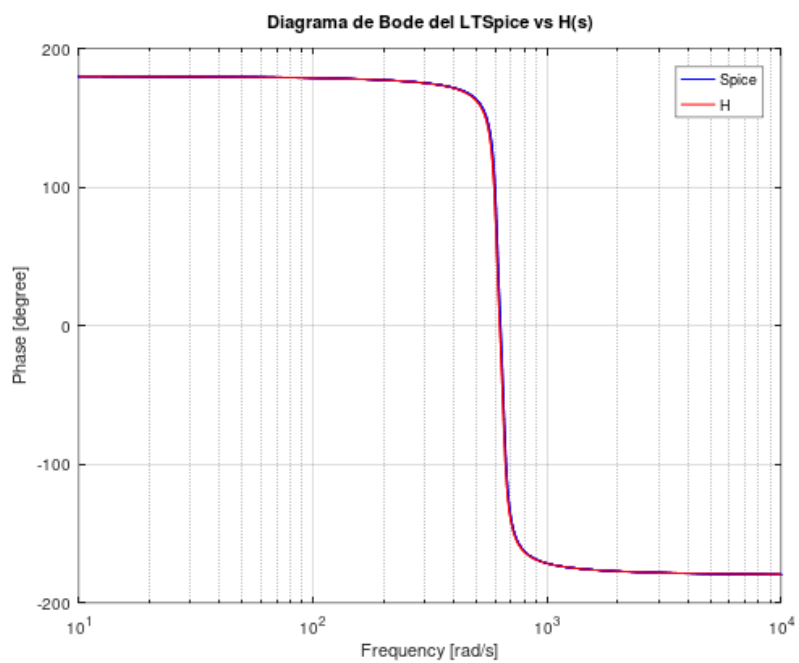


Figure 30: Comparación entre $H(s)$ y $LTSpice$ de la fase

Respuesta al escalón

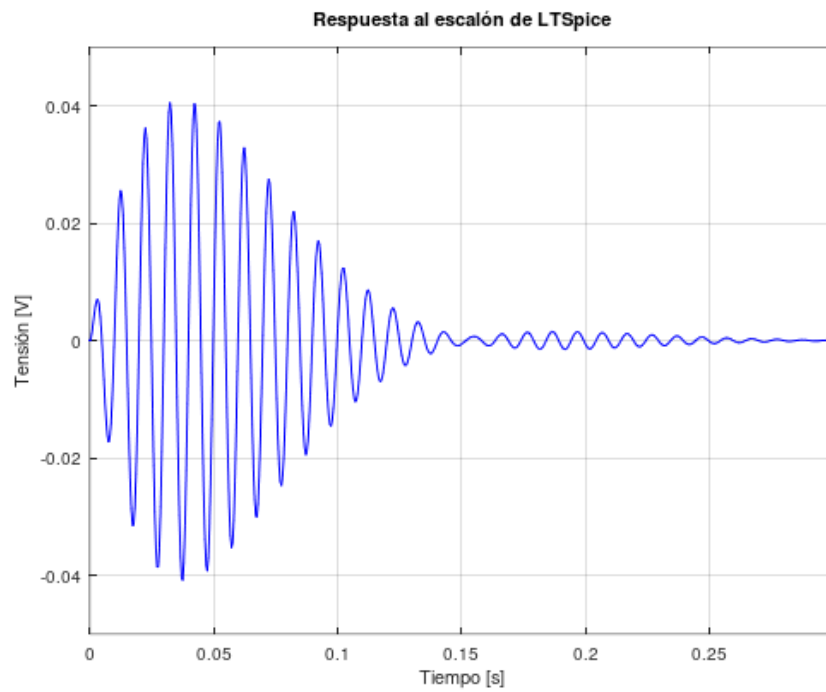


Figure 31: Respuesta al escalón de *LTSpice*

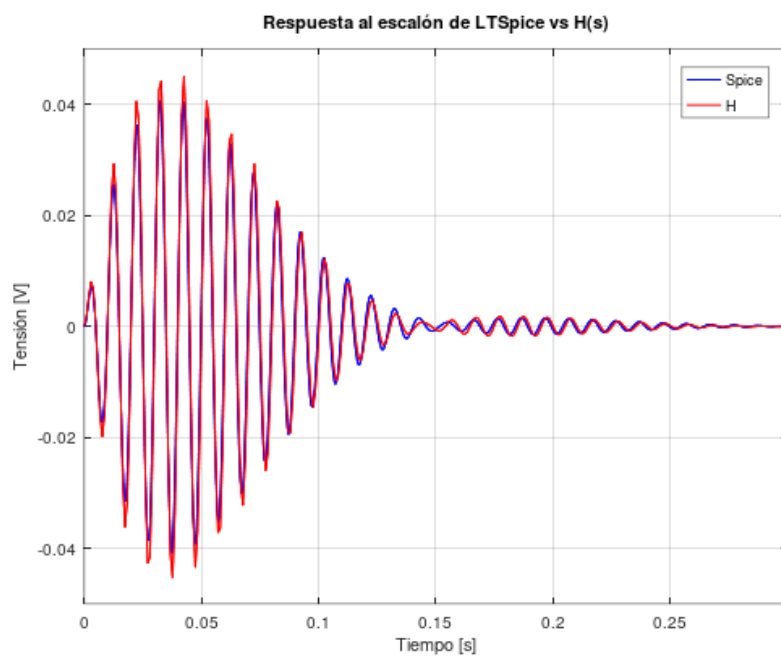


Figure 32: Comparación de la respuesta al escalón entre *LTSpice* y $H(s)$

Respuesta a senoidales

Las frecuencias W_0 utilizadas para las señales senoidales serán las mismas que para el inciso **Respuesta a senoidales** de la sección **Respuesta gráfica del sistema a distintas señales**.



Figure 33: Respuesta a señal senoidal de $w = 20 \frac{r}{s}$ de *LTSpice*

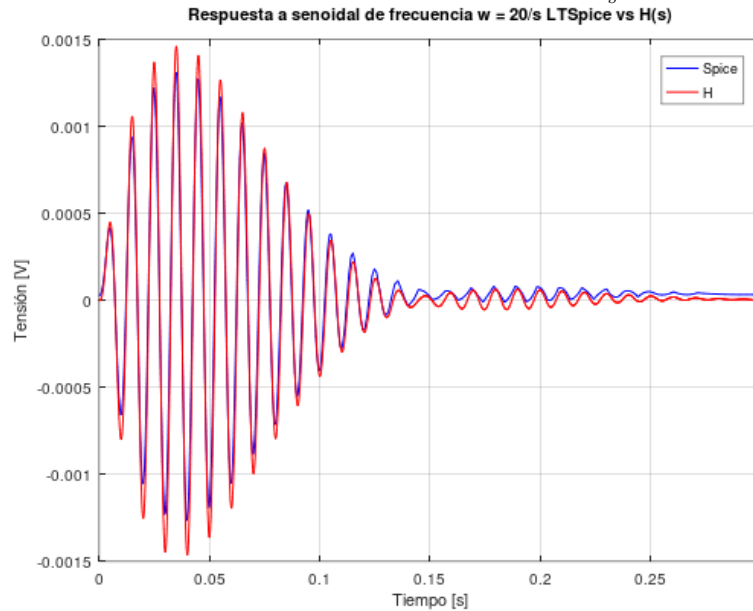


Figure 34: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*



Figure 35: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*
Respuesta a senoidal de frecuencia $\omega = 630\text{r/s}$ LTSpice vs $H(s)$

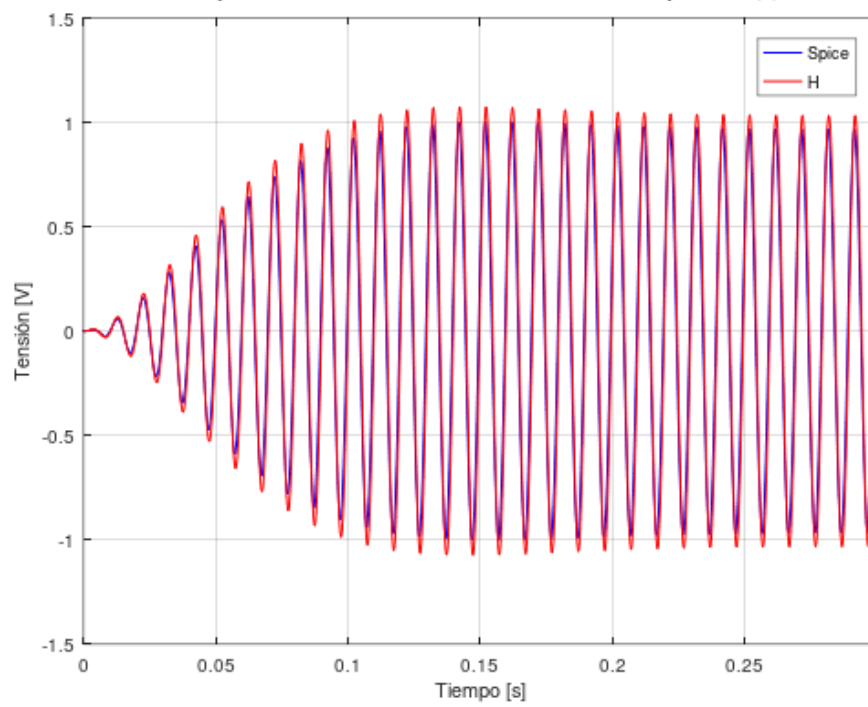


Figure 36: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*



Figure 37: Respuesta a señal senoidal de $w = 5000 \frac{r}{s}$ de *LTSpice*

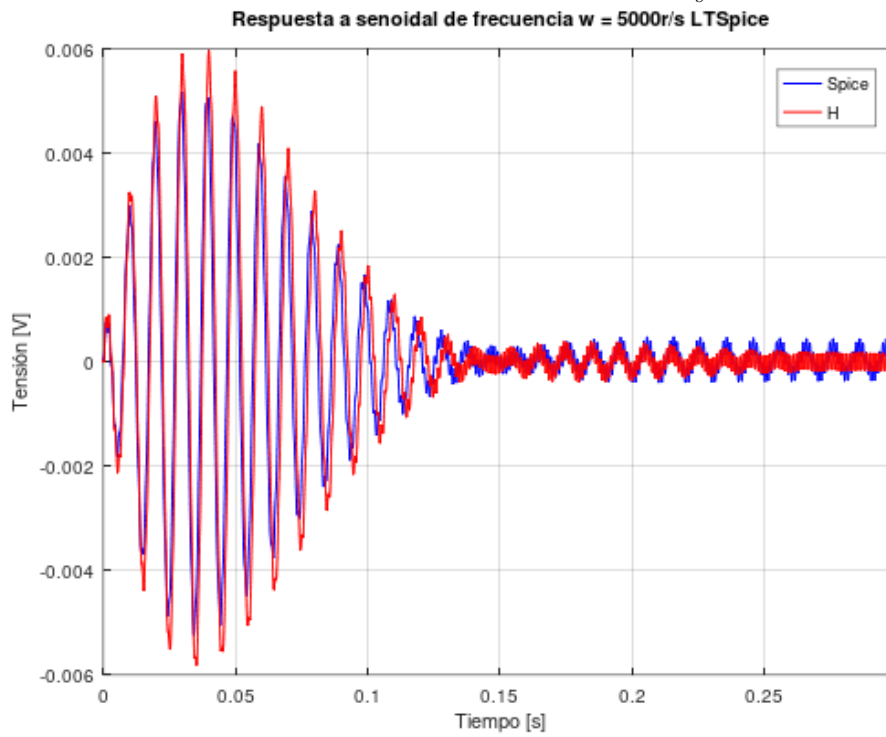


Figure 38: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*

El siguiente gráfico magnifica la respuesta a la señal senoidal de frecuencia $w = 5000 \frac{r}{s}$ en el estado permanente para poder apreciar mejor la diferencia entre la respuesta de $H(s)$ y la respuesta del circuito normalizado generada por *LTSpice*.



Figure 39: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice* magnificada

Vemos que hay una diferencia de amplitud y un desfase, esperable considerando la normalización de los componentes. Hay que considerar también que a medida que vamos avanzando hacia frecuencias altas o bajas nuestra respuesta tiende más a cero y las simulaciones son más propensas a tener errores de aproximación (como vimos para el caso de frecuencias bajas en *Octave*).

Resposta a la cuadrada

Al igual que como hicimos para el ítem **Resposta a la cuadrada** de la sección **Resposta gráfica del sistema a distintas señales**, esta sección se dividirá en dos subsecciones, en la primera analizaremos las cuadradas de frecuencias relacionadas con la de $W_{01} \approx 607,3 \frac{r}{s}$ y en la

siguiente para las cuadradas de frecuencias relacionadas a $W_{02} \approx 650, 2\frac{r}{s}$.
Recordemos que $f = \frac{W}{2\pi}$.

Frecuencia f_{01}



Figure 40: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $\frac{f_{01}}{10}$ de *LTSpice*



Figure 41: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*



Figure 42: Respuesta a la cuadrada de frecuencia f_{0_1} de *LTSpice*



Figure 43: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*

Para la respuesta a la cuadrada de frecuencia $f_0 = f_{0_1}$ tenemos un error de tensión aproximado de $0,05V$, donde la tensión del circuito normalizado simulado por *LTSpice* es menor a la de $H(s)$. Esto es previsible ya que la frecuencia angular ideal es $\omega_{0_1} \approx 607,3 \frac{r}{s}$ mientras que la normal-

izada (que es la que simula *LTSpice*) es $W_0 \approx 614,3_s^r$ por lo tanto tendremos menos ganancia para el normalizado y consecuentemente menos tensión, que es lo observado.



Figure 44: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $10 \cdot f_{0_1}$ de *LTSpice*

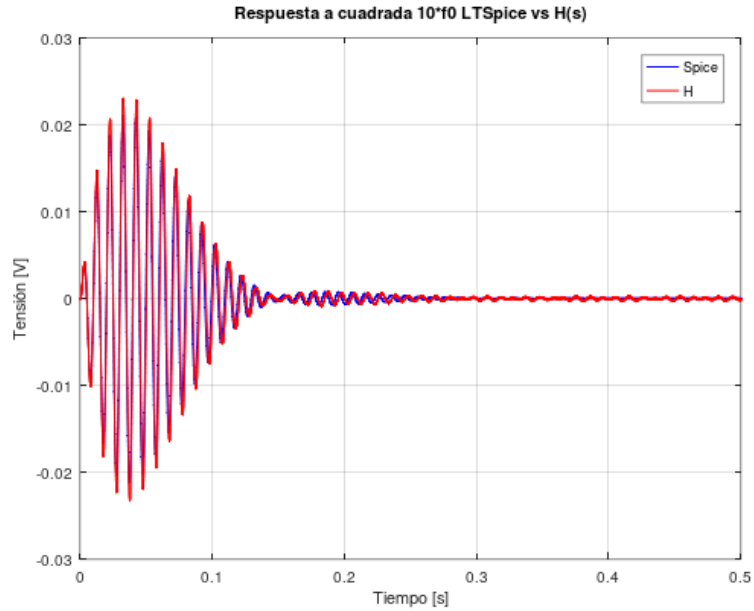


Figure 45: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*

Frecuencia f_{0_2}



Figure 46: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $\frac{f_{0_2}}{10}$ de *LTSpice*

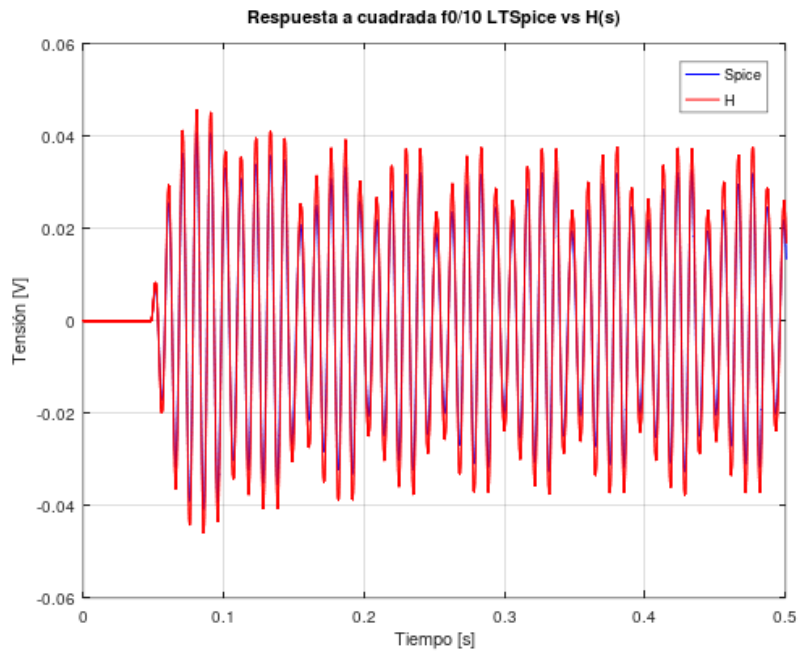


Figure 47: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*



Figure 48: Respuesta a la cuadrada de frecuencia f_{0_2} de *LTSpice*

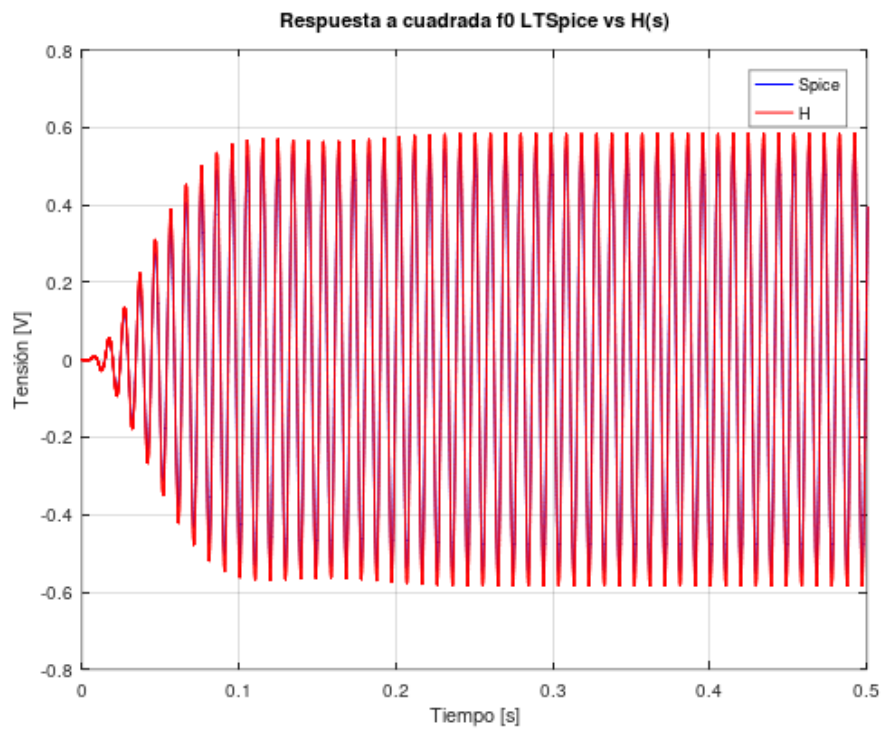


Figure 49: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*



Figure 50: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $10 \cdot f_{0_2}$ de *LTSpice*



Figure 51: Comparación de la respuesta para $H(s)$ vs *LTSpice*

Los gráficos obtenidos para esta frecuencia son, como era esperable, iguales a los obtenidos para la frecuencia f_{0_1} ya que ambas frecuencias son muy cercanas entre sí (esto lo habíamos aclarado ya en secciones previas) por lo tanto no hay nada remarcable para destacar.

Cálculo analítico de las respuestas de $H(s)$

Esta sección se dividirá en tres subítems donde cada ítem corresponderá a una de las respuestas. Para las respuestas al impulso y al escalón se resolverá mediante propiedades de Laplace haciendo uso de la separación en fracciones cuadráticas (se evitan las fracciones simples para no trabajar con coeficientes complejos). Por otro lado, para el cálculo de la respuesta a la señal senoidal se utilizará la integral de Bromwich dado que esta coincide con la inversa de Laplace.

Respuesta al escalón

La respuesta al escalón viene dada por $\mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot \frac{1}{s}\}(t)$, donde $\frac{1}{s}$ es la transformada de Laplace de la función escalón (también conocida como función de Heaviside). Obtenemos entonces que

$$H(s) \cdot \frac{1}{s} \approx \frac{3948 \cdot s}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 607,3^2) \cdot (s^2 + 46,05 \cdot s + 650,2^2)}$$

Esta expresión no es útil para poder encontrar la inversa, por lo tanto lo reescribiremos de una forma que sepamos como invertir; para eso podemos plantear descomposición en fracciones cuadráticas, expresándolo como

$$\frac{A \cdot s + C}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 607,3^2)} + \frac{B \cdot s + D}{(s^2 + 46,05 \cdot s + 650,2^2)}$$

Igualando esta expresión con la anterior, buscaremos que los coeficientes de los distintos grados de s sean iguales. Dado que sólo tenemos un término de s (de primer grado) tan solo tendremos una ecuación no homogénea.

Desarrollando la igualdad obtendremos entonces las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
46,05 \cdot A + 42,81 \cdot B + C + D &= 0 \\
650,2^2 \cdot A + 607,3^2 \cdot B + 46,05 \cdot C + 42,81 \cdot D &= 3948 \\
650,2^2 \cdot C + 607,3^2 \cdot D &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema mediante *Octave* obtenemos que los coeficientes son

$$\begin{aligned}
A &\approx 0,073274 \\
B &\approx -0,073274 \\
C &\approx 1,623070 \\
D &\approx -1,860479
\end{aligned}$$

Habiendo obtenido los coeficientes tan solo falta invertir la funci. Para esto separamos las fracciones de forma tal que nos queda

$$\begin{aligned}
&A \cdot \frac{s}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 607,3^2)} + \frac{C}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 607,3^2)} \\
&+ B \cdot \frac{s}{(s^2 + 46,05 \cdot s + 650,2^2)} + \frac{D}{(s^2 + 46,05 \cdot s + 650,2^2)}
\end{aligned}$$

Todavía no tenemos una expresión del todo familiar, pero esto es sencillamente corregible sabiendo que los denominadores, al tener raíces complejas, pueden ser escritos como $(s + a)^2 + b^2$ donde $a = -\Re(p)$ y $b = \Im(p)$, donde p es cualquiera de las dos raíces conjugadas de la cuadrática. Podemos expresar los términos entonces como

$$\begin{aligned}
&A \cdot \frac{s}{(s + 21,40)^2 + 606,87^2} + \frac{C}{(s + 21,40)^2 + 606,87^2} \\
&+ B \cdot \frac{s}{(s + 23,03)^2 + 649,80^2} + \frac{D}{(s + 23,03)^2 + 649,80^2}
\end{aligned}$$

lo cual si sabemos invertir, ya que cada término es un seno o coseno multiplicado por una exponencial negativa.

Inviertiendo cada término obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot \frac{1}{s}\}(t) \approx & e^{(-21,40 \cdot t)} \cdot [A \cdot \cos(606,87 \cdot t) + \frac{C}{606,87} \cdot \sin(606,87 \cdot t)] \\ & + e^{(-23,03 \cdot t)} \cdot [B \cdot \cos(649,80 \cdot t) + \frac{D}{649,80} \cdot \sin(649,80 \cdot t)] \text{ V}\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando los coeficientes con los valores obtenidos obtenemos una respuesta analítica al escalón tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot \frac{1}{s}\}(t) \approx & e^{(-21,40 \cdot t)} \cdot [73,27 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(606,87 \cdot t) - 2,67 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(606,87 \cdot t)] \\ & + e^{(-23,03 \cdot t)} \cdot [-73,27 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(649,80 \cdot t) - 2,86 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(649,80 \cdot t)] \text{ V}\end{aligned}$$

Comparando con las respuestas de *Octave* y *LTSpice*

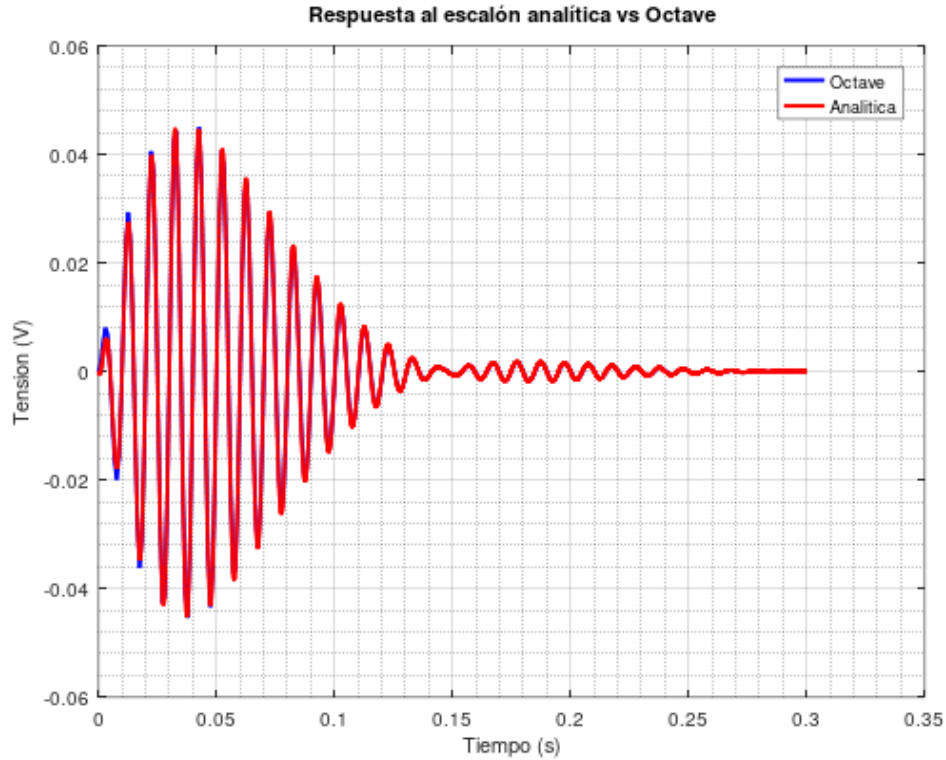


Figure 52: Comparación de la respuesta al escalón para $H(s)$ analítica vs *Octave*

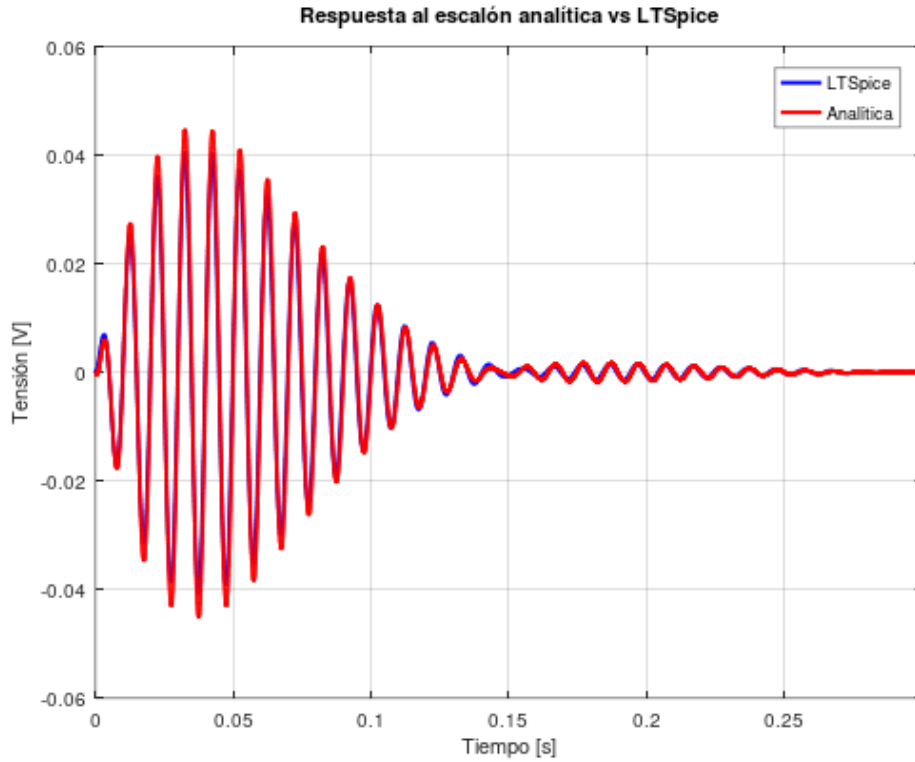


Figure 53: Comparación de la respuesta al escalón para $H(s)$ analítica vs *LTSpice*

Vemos que la expresión analítica obtenida, si bien tiene un poco de error por los redondeos de los coeficientes y frecuencias, da extremadamente similar a lo obtenido por *LTSpice* y *Octave* lo que nos confirma que el resultado obtenido es correcto. Lógicamente da más parecido a lo obtenido por *Octave* ya que los resultados del *LTSpice* se basan en la función de transferencia que se deriva del circuito normalizado mientras que *Octave* usa $H(s)$ ideal que fue el que utilizamos para la expresión analítica.

Respuesta al impulso

La respuesta al impulso viene dada por $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t)$ ya que la transformada de la función impulso (también conocida como la función Delta de Dirac $\delta(t)$) es la unidad; es decir, $\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$. Debido a esto la función que tendremos que invertir será directamente $H(s)$ y recordemos que

$$H(s) \approx \frac{3948 \cdot s^2}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 607,3^2) \cdot (s^2 + 46,05 \cdot s + 650,2^2)}$$

Afortunadamente podemos aplicar todo lo utilizado para la respuesta al escalón para este caso, cambiando únicamente las igualdades de las ecuaciones de los coeficientes de las fracciones cuadráticas. Otra alternativa posible sería derivar la respuesta al escalón que obtuvimos previamente y ya obtendríamos la respuesta al impulso, pero la función no es muy amigable para trabajar e implicaría más trabajo.

Recordemos que queremos expresar $H(s)$ como

$$A \cdot \frac{s}{(s + 21,40)^2 + 606,87^2} + \frac{C}{(s + 21,40)^2 + 606,87^2} \\ + B \cdot \frac{s}{(s + 23,03)^2 + 649,80^2} + \frac{D}{(s + 23,03)^2 + 649,80^2}$$

donde para este caso tendríamos las ecuaciones

$$A + B = 0 \\ 46,05 \cdot A + 42,81 \cdot B + C + D = 3948 \\ 650,2^2 \cdot A + 607,3^2 \cdot B + 46,05 \cdot C + 42,81 \cdot D = 0 \\ 650,2^2 \cdot C + 607,3^2 \cdot D = 0$$

y resolviendo dicho sistema con *Octave* obtenemos que

$$A \approx -1,51380 \\ B \approx 1,51380 \\ C \approx -27024,49711 \\ D \approx 30977,40181$$

Como lo único que cambia en esta respuesta comparando con la del escalón son estos coeficientes ya tenemos entonces la expresión de la inversa,

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) \approx & e^{(-21,40 \cdot t)} \cdot [A \cdot \cos(606,87 \cdot t) + \frac{C}{606,87} \cdot \sin(606,87 \cdot t)] \\ & + e^{(-23,03 \cdot t)} \cdot [B \cdot \cos(649,80 \cdot t) + \frac{D}{649,80} \cdot \sin(649,80 \cdot t)] \text{ V}\end{aligned}$$

Reemplazando los coeficientes con los valores obtenidos obtenemos una respuesta analítica al impulso tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) \approx & e^{(-21,40 \cdot t)} \cdot [-1,51 \cdot \cos(606,87 \cdot t) - 44,53 \cdot \sin(606,87 \cdot t)] \\ & + e^{(-23,03 \cdot t)} \cdot [1,51 \cdot \cos(649,80 \cdot t) + 47,67 \cdot \sin(649,80 \cdot t)] \text{ V}\end{aligned}$$

Comparando con la respuesta de *Octave*

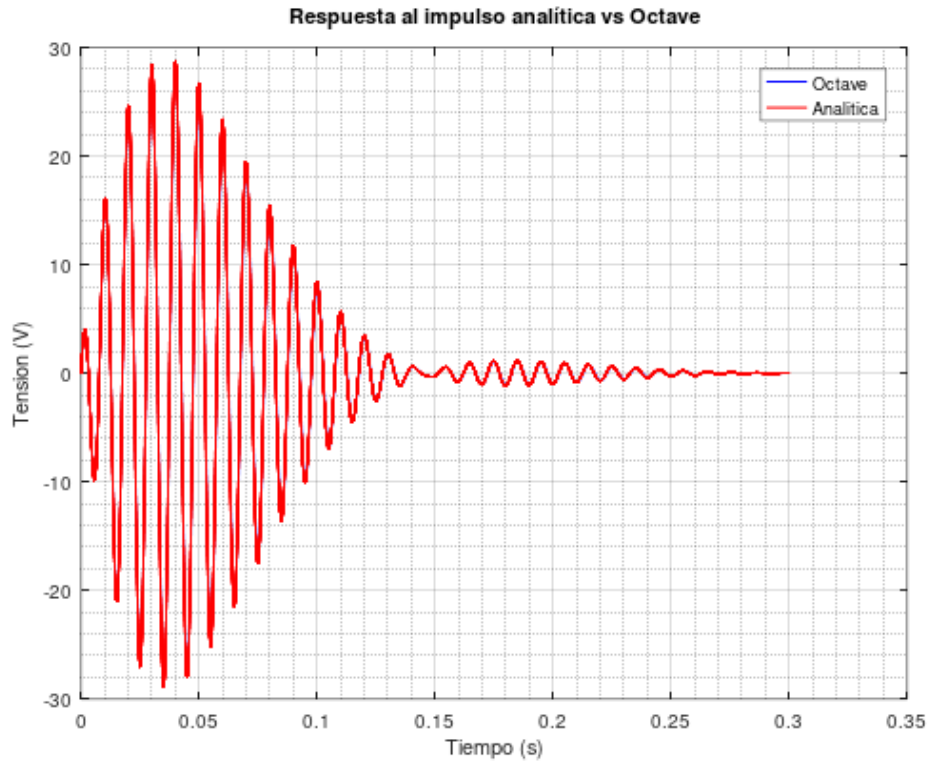


Figure 54: Comparación de la respuesta al impulso para $H(s)$ analítica vs *Octave*

Vemos que los gráficos son tan próximos que no hay diferencia observable a esta escala. A continuación se presenta otro gráfico magnificado para poder apreciar la leve diferencia (proveniente de errores de aproximación en los coeficientes y frecuencias, lógicamente).

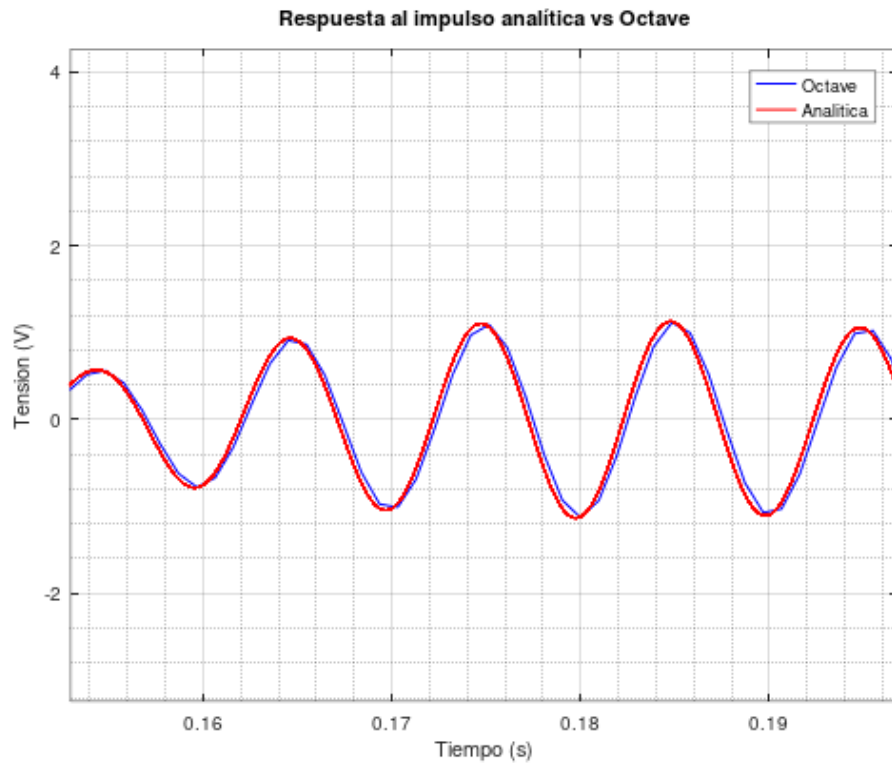


Figure 55: Comparación de la respuesta al impulso para $H(s)$ analítica vs *Octave*

Vemos que la diferencia es, efectivamente, despreciable. Con esto podemos confirmar nuevamente que la respuesta analítica al impulso que obtuvimos es la correcta.

Respuesta a la senoidal

Para este ítem se buscará la respuesta a una señal senoidal de frecuencia $\omega = 630 \frac{r}{s}$, de forma tal que se pueda comparar con resultados previos fácilmente. Como se habrá imaginado, aplicar el algoritmo de fracciones cuadráticas anterior no es muy amigable para este caso ya que encontrar los coeficientes de las ecuaciones resultaría mucho mas engorroso y

propenso a errores. Es por este motivo que haremos uso de la integral de Bromwich para poder invertir la transformada en cuestión.

Utilizando la integral de Bromwich, sea $F(s)$ una función analítica salvo en una cantidad finita de singularidades, la inversa de Laplace viene dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} ds$$

donde γ es una constante real tal que sea mayor a la parte real de todas las singularidades de $F(s)$, de forma tal que las singularidades queden a la izquierda de la recta vertical sobre la que se está integrando en el plano complejo. El siguiente diagrama ayuda a conceptualizar lo dicho.

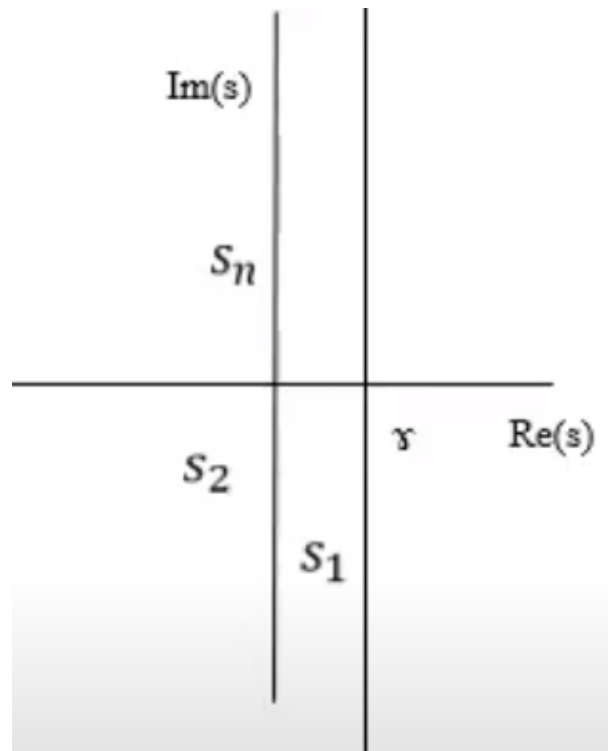


Figure 56: Las S son las singularidades vistas en el plano complejo

Dado que los polos de la función $H(s)$ tienen parte real aproximadamente -20 y que los polos conjugados de la transformada senoidal tienen parte real cero, γ podría ser cualquier número real mayor a cero.

Resolver la integral de Bromwich mediante el típico análisis de sustitución, por partes y primitivas es prácticamente inviable dada la complejidad de lo que estamos integrando, por lo tanto se hará uso de un recurso poderoso que nos permitirá simplificar mucho este cálculo: el teorema de los residuos.

El teorema de los residuos establece que

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k)$$

donde z_k son las singularidades de la función $f(z)$ encerradas por C y C una curva cerrada en el plano complejo, recorriendo C en sentido antihorario.

Para poder aplicar este teorema a nuestra integral debemos modificar la curva sobre la que integramos. Para esto agregaremos a la recta sobre la que ya integrabamos un semicircunferencia de radio R , donde $R \rightarrow \infty$. Tendríamos una curva C entonces del siguiente tipo.

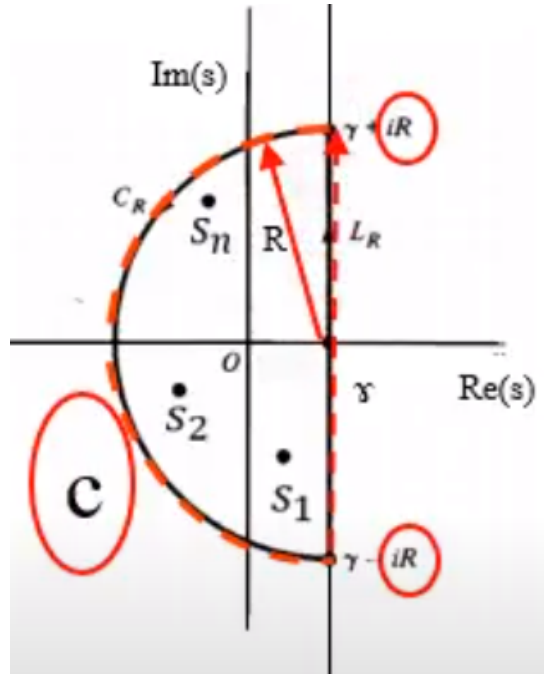


Figure 57: Las S son las singularidades vistas en el plano complejo

Llamaremos a esta nueva curva de integración la curva C . Vemos que si $R \rightarrow \infty$ encerraremos todas las singularidades de nuestra función $f(z)$, donde $f(z)$ será la función $H(s)$ multiplicada por la transformada del seno. Lo útil de este método es que podemos aprovechar además que la integral a través de la semicircunferencia da cero cuando R tiende a infinito. Esto puede demostrarse mediante el Lema de Jordan ³ si bien no se demostrará aquí para no extender demasiado este trabajo.

Sea $F(s) = H(s) \cdot \frac{630}{s^2 + 630^2}$ la transformada de Laplace de la respuesta de $H(s)$ a la señal senoidal de frecuencia $\omega = 630 \frac{r}{s}$, podemos plantear entonces que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C F(s) \cdot e^{s \cdot t} ds \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Res}(F(s) \cdot e^{s \cdot t}, s_k)\end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ y s_k son las singularidades de $F(s) \cdot e^{s \cdot t}$. Dichas singularidades son los tres pares de polos conjugados (dos pares provenientes de las raíces del denominador de $H(s)$ y el otro par proviene de las raíces del denominador de la transformada del seno). Tenemos entonces los siguiente polos simples

$$s_1 \approx -21,40 + 606,88j$$

$$s_2 \approx -21,40 - 606,88j$$

$$s_3 \approx -23,03 + 649,80j$$

$$s_4 \approx -23,03 - 649,80j$$

$$s_5 = 630j$$

$$s_6 = -630j$$

³<https://mathworld.wolfram.com/JordansLemma.html>

El residuo de los polos simples puede calcularse para nuestra función mediante la fórmula

$$\lim_{s \rightarrow s_0} [(s - s_0) \cdot F(s) \cdot e^{(s \cdot t)}]$$

donde s_0 se reemplaza por cada uno de los polos previos.

Calculando para cada polo y reescribiendo las exponenciales complejas como combinación de senos y cosenos obtenemos que la respuesta a la senoidal es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) &\approx -80,14 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(630 \cdot t) + 1,0304 \cdot \sin(630 \cdot t) \\ &+ e^{-21,40 \cdot t} \cdot [-496,6 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(606,8 \cdot t) - 518,8 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(606,8 \cdot t)] \\ &+ e^{-23,03 \cdot t} \cdot [577,2 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(649,8 \cdot t) - 510,4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(606,8 \cdot t)] \text{ V} \end{aligned}$$