

Análisis general de la función de transferencia

Tipo de filtro

Dada la función de transferencia asignada

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{s^4 + 88,86 \cdot s^3 + 7,935 \cdot 10^5 \cdot s^2 + 3,508 \cdot 10^7 \cdot s + 1,559 \cdot 10^{11}}$$

procederemos a analizar su comportamiento en $s = 0$ y $s \rightarrow \infty$.

En primer lugar analizamos el caso $s = 0$ para el cual tenemos que

$$H(0) = \frac{3948 \cdot 0^2}{0^4 + 88,86 \cdot 0^3 + 7,935 \cdot 10^5 \cdot 0^2 + 3,508 \cdot 10^7 \cdot 0 + 1,559 \cdot 10^{11}}$$

obteniendo entonces que

$$H(0) = 0$$

Analizando ahora el caso $s \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$$

dado que el grado del denominador es dos veces mayor al del numerador.

En base a los valores obtenidos podemos entonces afirmar que se trata de un filtro pasabanda dado que la transferencia es nula para frecuencias bajas y altas.

Ceros y polos

En principio, es trivial ver que el único cero de la función $H(s)$ es $s = 0$ y dado que está elevado al cuadrado se deduce que el cero es doble.

Por otro lado tenemos los polos, cuyo cálculo no es trivial. Dado que el denominador de la función es de grado cuatro tendremos entonces cuatro raíces. Debido a esto y a que los coeficientes del polinomio complejizan el desarrollo del cálculo de dichas raíces, se calcularán entonces mediante calculadora.

Obtenemos que

$$p_{1,2} \approx -21,40 \pm 606,9j$$

$$p_{3,4} \approx -23,03 \pm 649,8j$$

donde $p_{1,2}$ y $p_{3,4}$ son los pares conjugados que componen los cuatro polos de $H(s)$, y donde el primer subíndice corresponde al conjugado cuya parte imaginaria es positiva mientras que el segundo subíndice corresponde al de parte imaginaria negativa.

Cálculo de W_0 y Q

Dado que el denominador se compone de dos pares de raíces complejas conjugadas tendrá entonces un W_0 y Q para cada par. Para obtenerlos debemos primero reescribir la función $H(s)$ a la forma

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{(a \cdot s^2 + b \cdot s + c) \cdot (d \cdot s^2 + e \cdot s + f)}$$

donde las letras corresponden a valores que debemos calcular de forma tal que dicha ecuación sea equivalente a la fórmula original de $H(s)$.

Para conseguir esto es conveniente utilizar las raíces del denominador de $H(s)$ (los polos de la función) expresando la función como

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{k \cdot (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3) \cdot (s - p_4)}$$

donde k es el factor del término $k \cdot s^4$ y, para nuestra función en particular, se da que $k = 1$.

Luego, multiplicando los polos conjugados entre sí obtenemos

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{(s^2 - (p_1 + p_2) \cdot s + p_1 \cdot p_2) \cdot (s^2 - (p_3 + p_4) \cdot s + p_3 \cdot p_4)}$$

Sean z_1 y z_2 dos números complejos conjugados tenemos que

$$z_1 + z_2 = 2\Re(z_1) = 2\Re(z_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2$$

Aplicando estas propiedades a $p_{1,2}$ y $p_{3,4}$ obtenemos la expresión

$$H(s) = \frac{3948 \cdot s^2}{(s^2 - 2\Re(p_1) \cdot s + |p_1|^2) \cdot (s^2 - 2\Re(p_3) \cdot s + |p_3|^2)}$$

W_0 y Q vienen dados por $s^2 + \frac{W_0}{Q} \cdot s + W_0^2$. Ejemplificando para el primer factor del denominador tendríamos entonces que

$$W_{0_1} = |p_1|$$

$$Q_1 = -\frac{W_{0_1}}{2\Re(p_1)}$$

Reemplazando obtenemos finalmente que

$$W_{0_1} \approx 607,3 \frac{r}{s}$$

$$Q_1 \approx 14,19$$

$$W_{0_2} \approx 650,2 \frac{r}{s}$$

$$Q_2 \approx 14,12$$

siendo W_{0_1} y Q_1 los valores correspondientes al polinomio de segundo grado cuyas raíces son $p_{1,2}$ y W_{0_2} y Q_2 los correspondientes al polinomio de segundo grado de raíces $p_{3,4}$.

Finalmente, reemplazando con los valores de W y Q obtenidos podemos expresar la función de transferencia como

$$H(s) \approx \frac{3948 \cdot s^2}{(s^2 + 42,81 \cdot s + 368,8 \cdot 10^3) \cdot (s^2 + 46,05 \cdot s + 422,8 \cdot 10^3)}$$

Diagramas de Bode

A continuación se presentan los diagramas de Bode tanto de módulo como de fase (en grados sexagesimales) de la función $H(s)$ junto con una breve descripción explicando lo obtenido. Para los diagramas de Bode se analiza el caso $s = jw$ donde w se mide en $\frac{r}{s}$ (radianes por segundo).

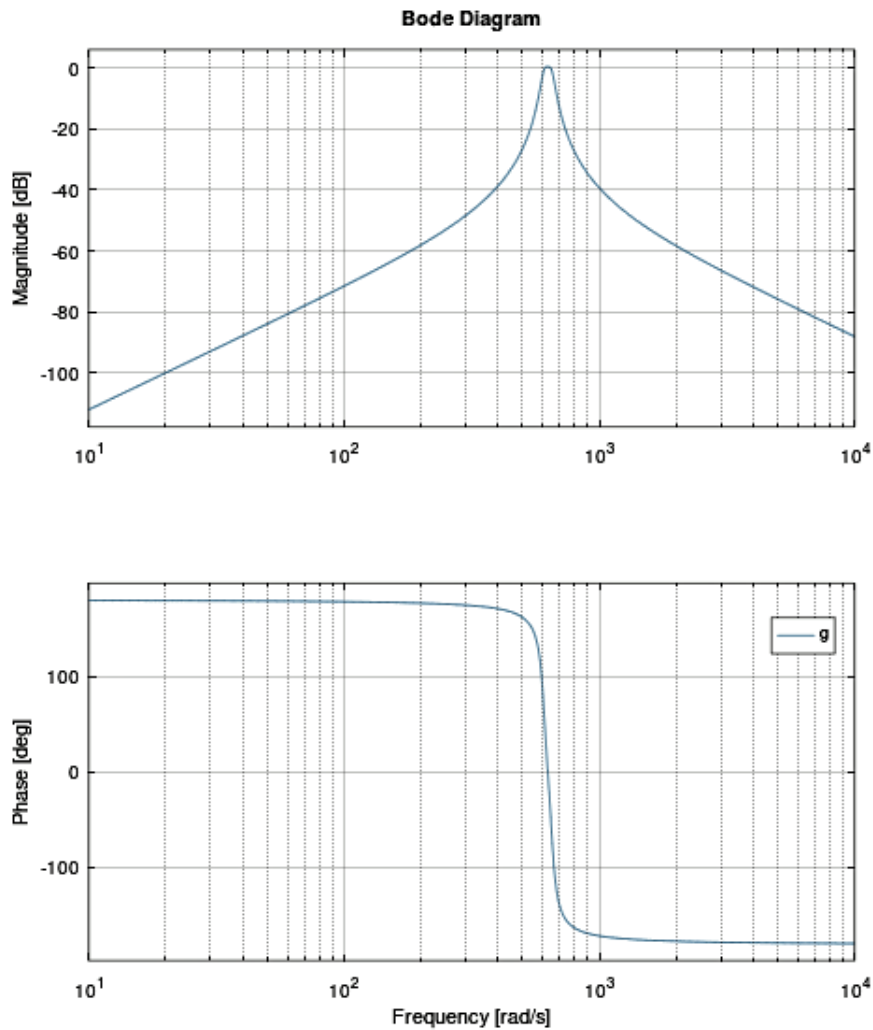


Figure 1: Diagramas de Bode

En primer lugar tenemos el diagrama de módulo de Bode, es decir, el módulo de $H(jw)$ medido en dB (decibels) el cual viene dado por la fórmula

$$20 \cdot \log(|H(jw)|)dB$$

Dado que el filtro es un pasabanda era lo esperable observar que para frecuencias bajas ($w \rightarrow 0$) y altas ($w \rightarrow \infty$) el gráfico tendiera a $-\infty$ dado que este tipo de filtro se caracteriza por anular la función de transferencia para dichas frecuencias. Esto puede verse matemáticamente en base al análisis previo realizado donde se calculó que $H(0) = 0$ y $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) =$

0, luego $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$ lo cual explica lo observado en el primer gráfico.

El segundo gráfico es el diagrama de fase de Bode (en grados sexagesimales). Los valores de este gráfico vienen dados por la fórmula

$$\arctan\left(\frac{\Im(H(jw))}{\Re(H(jw))}\right)$$

Dado que el numerador de la función se compone de un único término $3948 \cdot s^2$ tenemos que la constante positiva aporta 0° mientras que el s^2 aporta 180° (recordemos que $s = jw$ lo cual tiene un ángulo de 90° , luego elevar al cuadrado duplica el ángulo y obtenemos 180°).

Al acercarnos a las frecuencias W_0 de los polos vemos como empieza a disminuir el ángulo a un ritmo de $-180 \frac{grad}{dec}$ aproximadamente. En rigor, en principio hay un intervalo donde disminuye $-90 \frac{grad}{dec}$ pero dicho intervalo no es apreciable dada la escala y cercanía entre los W_0 . Finalmente, una vez alcanzado el valor $W = 10 \cdot W_0$ los polos ya no aportan pendiente decreciente y se estabiliza el gráfico nuevamente, quedando en este caso en -180° aproximadamente.

Respuesta gráfica del sistema a distintas señales

A continuación se presentan gráficos de respuestas del sistema a distintos tipos de señales y frecuencias.

Respuesta al escalón

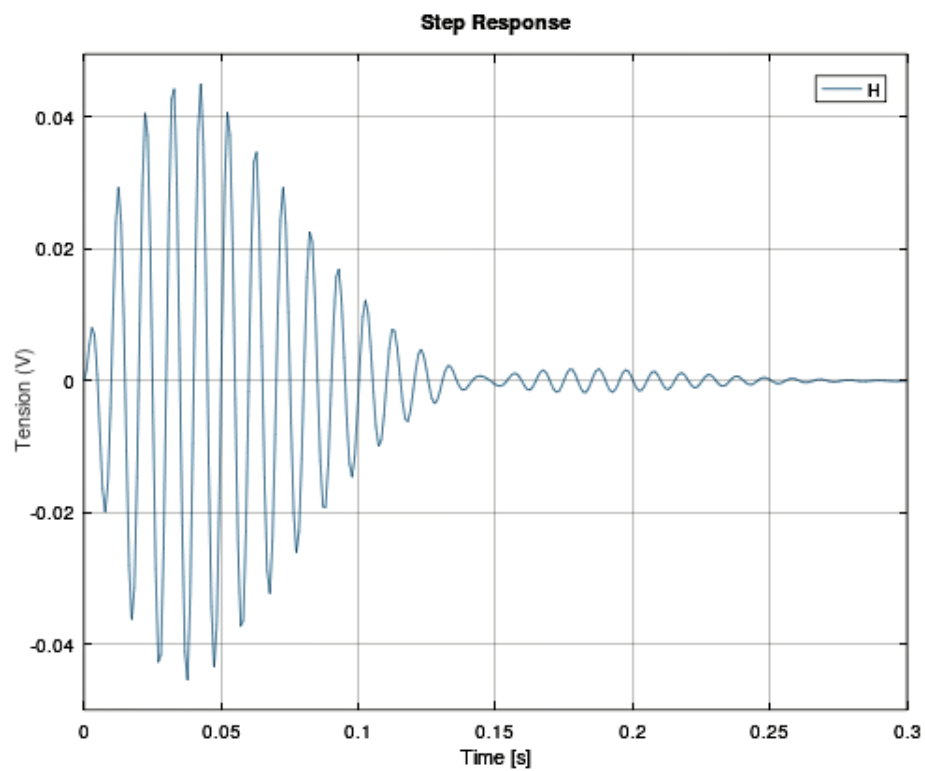


Figure 2: Respuesta al escalón

Respuesta al impulso

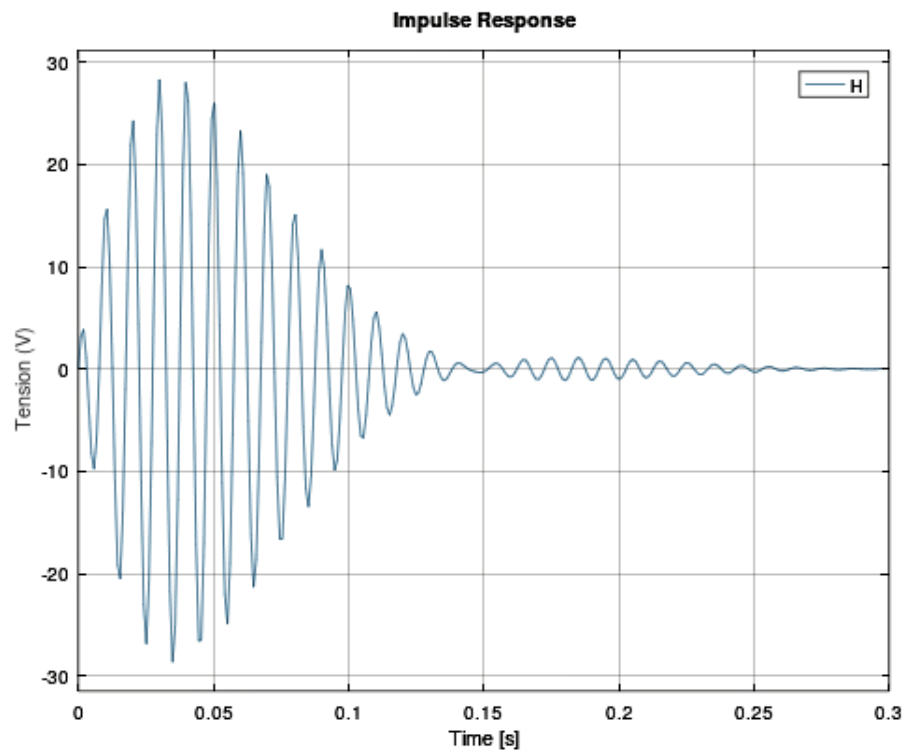


Figure 3: Respuesta al impulso

Respuesta a la cuadrada

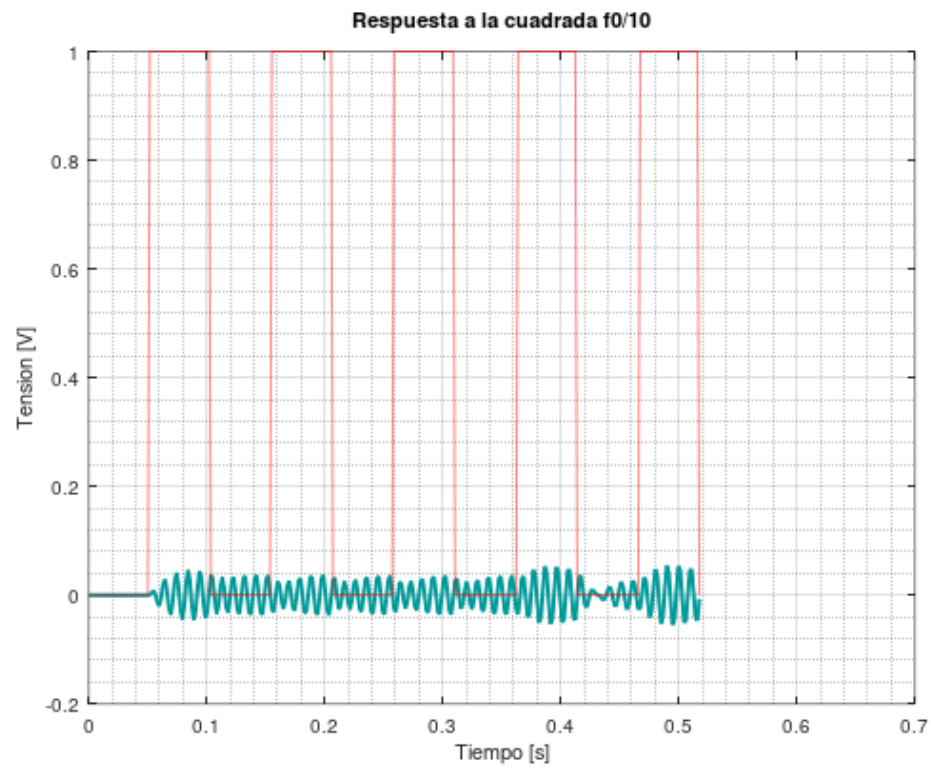


Figure 4: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $\frac{f_0}{10}$

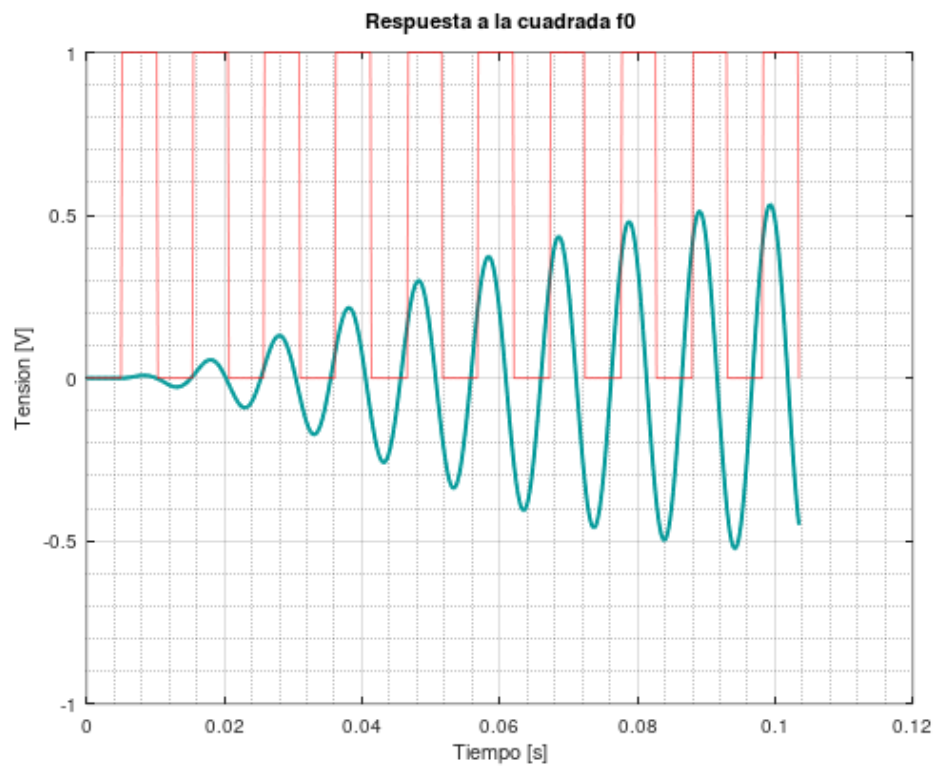


Figure 5: Respuesta a la cuadrada de frecuencia f_0

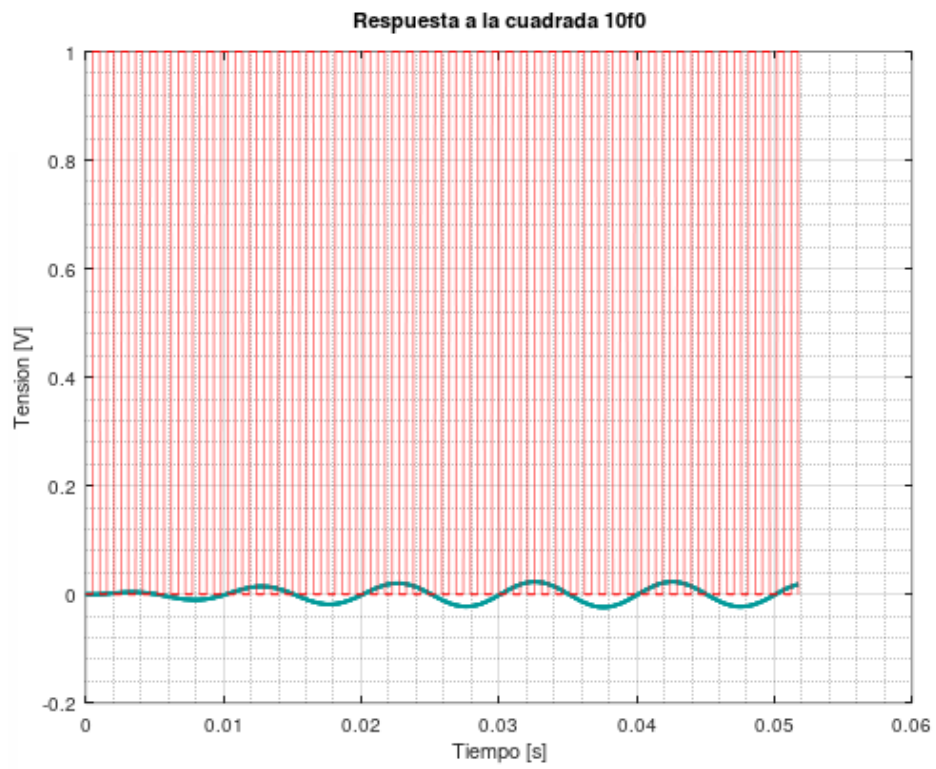


Figure 6: Respuesta a la cuadrada de frecuencia $f_0 \cdot 10$