INF1608 – Análise Numérica: Prova 2 – 23/11/2021

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

*A prova é **individual**. As **justificativas** das resposta são essenciais. Respostas sem justificativas adequadas não serão consideradas na correção.*

As respostas devem ser escritas em **caligrafia própria**, digitalizadas e enviadas, em formato **pdf**, via EAD. Não esqueça de indicar *nome* e *número de matrícula* nas respostas.

O prazo para submissão **expira às 23:59h**.

---

1. Da Série de Taylor, podemos derivar um método para avaliar a derivada de segunda ordem de uma função, $f''(x)$:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

Esse método tem erro proporcional a h^2, sendo portando um método de segunda ordem.

Com base nos conceitos discutidos e na "sintaxe" dos pseudo-códigos dos *slides* apresentados nas aulas, escreva um pseudo-código de uma função que retorna o valor da derivada de segunda ordem de uma função, $f''(x)$, usando um método de *terceira ordem.*

2. O método da Regra do Trapézio para integração numérica é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] - \frac{h^3}{12}f''(c)$$

e método do Ponto Médio para integração numérica é dado por:

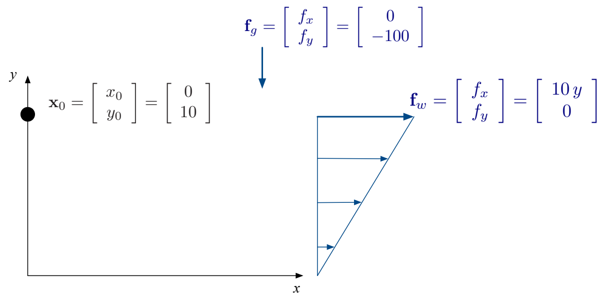
$$\int_a^b f(x)dx = h\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{h^3}{24}f''(c)$$

com $h = b - a$ e $c \in [a, b]$.

Considere a implementação de um método de integração adaptativo. Ao invés de usar o mesmo método e aplicar a estratégia de dobrar o passo para avaliar o erro, vamos considerar a avaliação numérica da integral pelo método da Regra do Trapézio, $T_{[a,b]}$, e pelo método do Ponto Médio, $M_{[a,b]}$, no mesmo intervalo. Deduza uma fórmula para avaliar o erro numérico associado à avaliação da integral pelo método do Ponto Médio em função dessas avaliações numéricas.

3. Considere um sistema físico como ilustrado abaixo. Uma partícula, com massa $m = 1$, inicialmente em repouso, é solta a partir da posição $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (0, 10)$, num meio submetida à força de gravidade $\mathbf{f}_g = (f_x, f_y) = (0, -100)$ e a uma força de vento horizontal que varia com a altura da partícula $\mathbf{f}_w = (f_x, f_y) = (10\,y, 0)$.

   Usando o método de Verlet com passo de integração $h = 0.1$, sem amortecimento, determine a posição da partícula $\mathbf{x} = (x, y)$ no instante $t = 0.2$. Como a velocidade inicial da partícula é nula, pode-se considerar que a posição anterior, no início da simulação, é igual a posição inicial.



4. Considere o sistema linear $n \times n$ ilustrado abaixo, onde os elementos nulos da matriz não são representados. Considere ainda implementações eficientes de métodos iterativos para a resolução desse sistema.

$$
\begin{bmatrix}
5 & -3 & & & & & \\
-3 & 5 & -3 & & & & \\
 & -3 & 5 & -3 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & -3 & 5 & -3 \\
 & & & & & -3 & 5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

   (a) Considerando o método iterativo de Gauss-Seidel para resolução desse sistema, é possível afirmar que o método converge para a solução?

   (b) Considerando o método dos Gradientes Conjugados para resolução desse sistema, qual a ordem do tempo esperado, em relação a n, de cada iteração? Qual a ordem do tempo esperado, em relação a n, para o método chegar na solução exata (a menos de erros de arredondamento)?

   (c) Se o objetivo for alcançar uma solução aproximada dentro de uma tolerância de erro, como você avalia o uso do pré-condicionador de Jacobi para esse sistema; o problema em questão apresenta as condições favoráveis para que o pré-condicionar tenha bons resultados?

5. O método de *Nelder-Mead* para determinação de mínimo de funções escalares parte de duas estimativas iniciais, x_0 e x_1. Considerando as diferentes estratégias do método, entre *expansão*, *contração externa e interna*, e *encolhimento*, determine a próxima estimativa, x_2, se o método for aplicado à função $f(x) = x^6 + 3x^4 - 12x^3 + x^2 - x + 15$, ilustrada abaixo, considerando as seguintes estimativas iniciais: $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Note que é possível avaliar a função de forma aproximada observando o gráfico.