

# Cuadraturas Numéricas

Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Formación Básica  
Departamento de Matemática



## **1- Generalidades**

El cálculo exacto de la integral definida de una función continua sobre un intervalo cerrado es posible, a través de las funciones elementales o funciones conocidas hasta el momento por la mayoría de los lectores, sólo en algunos casos.

Y cuando es posible bajo tales condiciones, en numerosas oportunidades debemos recurrir al empleo de técnicas de integración que conducen a trabajos pesados y aburridos, con resultados posiblemente erróneos.

Si  $f$  es una función continua sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$  sabemos (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral) que existe una infinidad de funciones primitivas de  $f$  (con derivada primera continua) en  $[a, b]$ .

También sabemos que una función primitiva se distingue de otra a través de cierta constante aditiva.

Si  $p$  es una función primitiva cualquiera de la función continua  $f$  sobre  $[a, b]$ , entonces:

$$p'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

También conocemos (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral o Regla de BARROW) que:

$$\int_a^b f(x) dx = p(x)|_a^b = p(b) - p(a)$$

Vale la pena destacar que tenemos asegurada la existencia de funciones primitivas de una función continua sobre un intervalo cerrado, pero no como construirlas a través de los métodos de integración mediante funciones elementales.

Por ejemplo:

$$\frac{\sin(x)}{1+x^2}, \quad \cos(x^2), \quad e^{x^2}$$

son, entre tantas otras, funciones continuas sobre todo intervalo cerrado por propiedades conocidas de las funciones continuas. Sin embargo, no admiten funciones primitivas expresables con funciones elementales sino con funciones especiales.

El estudio de las funciones especiales (la cantidad de ellas es enorme) requiere nuevos conocimientos matemáticos, por lo que esta alternativa queda fuera de nuestras posibilidades. Sin embargo, ellas juegan un rol muy importante tanto en la Matemática Pura como en la Matemática Aplicada.

Para sortear tal dificultad, procederemos a estudiar algunos Métodos Numéricos que permitan calcular aproximadamente y de modo eficiente (con la cantidad de dígitos correctos requeridos bajo representación decimal) integrales definidas de funciones al menos continuas sobre intervalos cerrados, que se denominan Quadraturas Numéricas.

## Ejemplos

$$\int_{-1}^2 \frac{\sin(x)}{1+x^2} dx \cong 0.3055892508235832$$

$$\int_0^\pi \cos(x)^2 dx \cong 0.5656935136066824$$

$$\int_0^2 e^{x^2} dx \cong 16.4526277655072302$$

Los tres resultados anteriores son aproximaciones en representación decimal con corrección hasta el dígito decimal que figura en la posición 16 incluida.

Al conseguir, por algún método, aproximaciones al valor exacto surge la necesidad ineludible de hacer consideraciones sobre los errores cometidos.

Por estimación del error cometido debe entenderse la búsqueda de una cota superior apropiada del valor absoluto de dicho error, también llamado error absoluto. En ocasiones, también podrá interesar la determinación de una cota inferior para el error absoluto. En el presente trabajo, y como es usual, sólo procuraremos alguna cota superior adecuada del error absoluto.

Si  $V$  indica el valor verdadero o exacto (generalmente desconocido) y si  $C$  representa el valor calculado (como aproximación al valor verdadero  $V$ ), el error cometido en la aproximación es

$$E = V - C$$

Estimar tal error significa encontrar un número positivo  $\varepsilon$  tal que  $|E| \leq \varepsilon$

Representa  $\varepsilon$  una cota superior del error absoluto.

Lo deseable es que  $\varepsilon$  resulte relativamente pequeño, pues entonces  $C$  estará relativamente cercano a  $V$ .

Existe una cantidad extraordinaria de Cuadraturas Numéricas, tanto para integrales propias como impropias. Muchas de ellas se basan en la utilización de polinomios interpolantes.

Para destacar están las Cuadraturas Numéricas de NEWTON-COTES y las de GAUSS-LEGENDRE y GAUSS-CHEBYSHEV. Otra Cuadratura Numérica de importancia es la introducida por ROMBERG, sumamente eficiente para computadoras. En el presente texto, sólo se describirán las Cuadraturas Numéricas de NEWTON-COTES.

Las diferencias fundamentales entre las Cuadraturas Numéricas de NEWTON-COTES y las de GAUSS-LEGENDRE y GAUSS-CHEBYSHEV es que las Cuadraturas Gaussianas son de mejor calidad para el mismo costo computacional.

Otra diferencia importante es que tanto las Cuadraturas de GAUSS-LEGENDRE y GAUSS-CHEBYSHEV como la de ROMBERG no son aplicables a funciones tabuladas: requieren el conocimiento de la ley de la función integrando. En cambio, para las Cuadraturas de NEWTON-COTES no es necesario el conocimiento explícito de la ley de la función integrando, simplemente es suficiente conocer los valores de la función integrando sobre algunas abscisas, pero con la limitación de que dichas abscisas deben estar igualmente espaciadas.

Respecto de estimaciones de Errores por Truncamiento en Cuadraturas Numéricas hay estudios realizados tanto para el caso del saber explícito de la ley de la función integrando (con ciertas propiedades) como para el caso de una función integrando tabulada.

### Teorema del Valor Medio Discreto (TVMD)

Sean:

$g$  una función continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$   $n$  puntos arbitrarios en  $[a, b]$

(no necesariamente distintos entre sí)

$c_1, c_2, \dots, c_n$   $n$  números reales no negativos

sujetos a la restricción

$$\sum_{k=1}^n c_k = 1$$

Entonces: existe al menos un punto  $\xi \in [a, b]$  tal que

$$\sum_{k=1}^n c_k g(\xi_k) = g(\xi)$$

#### *Demostración*

Por ser  $g$  una función continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$ , existen

$m = \text{mínimo absoluto de } g \text{ sobre } [a, b]$

$M = \text{máximo absoluto de } g \text{ sobre } [a, b]$

Resultando:

$$m \leq g(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

En particular:

$$m \leq g(\xi_k) \leq M \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

En consecuencia:

$$m c_k \leq g(\xi_k) \leq M c_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

En otras palabras

$$m c_1 \leq g(\xi_1) \leq M c_1 \quad \text{para } k = 1$$

$$m c_2 \leq g(\xi_2) \leq M c_2 \quad \text{para } k = 2$$

$$\dots$$

$$m c_n \leq g(\xi_n) \leq M c_n \quad \text{para } k = n$$

Sumando ordenadamente por columnas en las últimas  $n$  desigualdades, y teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^n c_k = 1$$

Obtenemos la nueva desigualdad:

$$m \leq \sum_{k=1}^n c_k g(\xi_k) \leq M$$

En virtud del Teorema de los Valores Intermedios (para funciones continuas en intervalos cerrados) existe al menos un punto  $\xi \in [a, b]$  tal que

$$\sum_{k=1}^n c_k g(\xi_k) = g(\xi)$$

#### Corolario del TVMD

Escogiendo  $c_k = 1/n$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

se tiene

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(\xi_k) = g(\xi)$$

ó

$$\sum_{k=1}^n g(\xi_k) = n g(\xi)$$

## **2 - Introducción a las Fórmulas de NEWTON-COTES**

Sea  $f$  una función continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

Consideremos una partición equiespaciada de  $[a, b]$  consistente en  $n + 1$  puntos, siendo  $h = \frac{b-a}{n}$  la norma de dicha partición.

Notar que a medida que  $n$  aumenta,  $h$  decrece positivamente hacia 0.

Los puntos de la partición los designamos con

$$x_k = x_0 + k h \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n, \text{ siendo } x_0 = a \text{ y } x_n = b.$$

$$\text{Indicamos } f_k = f(x_k) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n.$$

Si se pretende analizar la posibilidad de la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \sum_{k=0}^n c_k f_k = h (c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_{n-1} f_{n-1} + c_n f_n)$$

donde  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$  son ciertos coeficientes a determinar ( $n + 1$  en total) con algún criterio, llamados coeficientes pesos o coeficientes de ponderación, se ingresa a una Cuadratura Cerrada de NEWTON-COTES.

Se dice cerrada por incluir los valores de  $f$  en los extremos de  $[a, b]$ :  $f_0$  y  $f_n$ .

Si se excluyen los valores  $f_0$  y  $f_n$ , entonces se ingresa a una Cuadratura Abierta de NEWTON-COTES. En el presente texto, sólo se tratarán Cuadraturas Cerradas de NEWTON-COTES.

Corresponderá deducir alguna estimación para el Error Global de Truncamiento cometido al sustituir el valor exacto por un valor aproximado:

$$E_{GT}(h) = \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=0}^n c_k f_k$$

Una Fórmula Cerrada de NEWTON-COTES tiene el aspecto

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=0}^n c_k f_k + E_{GT}(h)$$

Conviene aclarar que, como veremos luego, para cada Fórmula de NEWTON-COTES (Cerrada o Abierta) el Error Global de Truncamiento involucra alguna derivada de cierto orden de  $f$ , evaluada en algún punto desconocido de  $(a, b)$ .

Como un objetivo permanente es estimar tal error (acotar el error absoluto) habrá necesidad de estimar dicha derivada (acotar su valor absoluto).

Cuando esa derivada se comporta mal en uno o en ambos extremos de  $[a, b]$ , la cota superior del error absoluto se tornará sumamente gruesa; la estimación lograda para el error no dará información convincente. Entonces, no será útil.

En tal caso deberá optar por alguna Fórmula Abierta, pero nunca por una Fórmula Cerrada.

En algunos problemas tampoco alcanzará con esta receta, y deberá apelar (de ser posible) a otro tipo de Cuadratura Numérica (otro Método Numérico); como ser: una Cuadratura Gaussiana (como GAUSS-LEGENDRE o GAUSS-CHEBYSHEV) o una de ROMBERG.

### Observación

Lo mínimo de esperar en cualquier Cuadratura Numérica, particularmente para una Fórmula Cerrada de NEWTON-COTES, es que no se cometa error con una función constante:  $E_{GT}(h) = 0$ .

Entonces, si  $f(x) = C = \text{constante } \forall x \in [a, b]$

deberá ser:

$$\int_a^b C dx = h \sum_{k=0}^n c_k C$$

Esto es:

$$C(b-a) = C h \sum_{k=0}^n c_k$$

Esto nos dice que, necesariamente, los  $n + 1$  coeficientes ponderados deberán cumplir la condición siguiente:

$$\sum_{k=0}^n c_k = \frac{b-a}{h} = n$$

Es decir:

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1} + c_n = n$$

### Nota

A continuación tratamos, con alguna profundidad, las dos primeras Fórmulas Cerradas de NEWTON-COTES, popularmente conocidas como TRAPECIOS y SIMPSON (SIMPSON UN TERCIO).

Son las dos primeras de una larga cadena de Fórmulas Cerradas.

### Comentario

Si no se conoce la ley explícita para la función integrando  $f$ , hasta ahora supuesta continua en  $[a, b]$ , pero sí conocemos los valores  $f_k$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  inicialmente definidos, la siguiente aproximación puede mirarse como el cálculo aproximado de la integral definida de la función tabulada  $f$ :

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \sum_{k=0}^n c_k f_k$$

en el sentido de una Cuadratura Cerrada de NEWTON-COTES.

### 3.1 - Primera Fórmula Cerrada de NEWTON-COTES en un panel de dos puntos

#### Fórmula de TRAPECIOS

Sea  $f$  una función continua sobre el intervalo cerrado  $[0, h]$ .

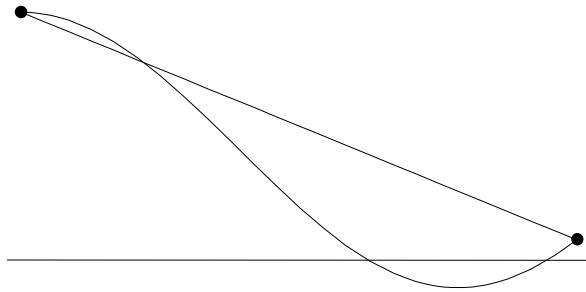
Indicamos:  $f_0 = f(0)$  y  $f_1 = f(h)$

El polinomio interpolante  $P_1$  por la muestra de dos puntos del plano  $\{(0, f_0), (h, f_1)\}$ , resultará único y de grado menor o igual que 1, y es:

$$P_1(x) = \frac{f_1 - f_0}{h} (x - 0) + f_0 \text{ para } 0 \leq x \leq h$$

En algún sentido  $P_1$  aproxima a  $f$  sobre  $[0, h]$ .

Una interpretación geométrica de la aproximación mediante interpolación:



Sean el valor exacto (generalmente desconocido)

$$I(f) = \int_0^h f(x) dx$$

y el valor calculado

$$\bar{I}(f) = \int_0^h P_1(x) dx$$

Concretamente:

$$\bar{I}(f) = \frac{f_1 - f_0}{h} \int_0^h x dx + f_0 \int_0^h 1 dx = \frac{f_1 - f_0}{h} \frac{h^2}{2} + f_0 h = \frac{h}{2} (f_1 - f_0 + 2 f_0)$$

$$\bar{I}(f) = \frac{h}{2} (f_0 + f_1)$$

#### Observación 1

Los coeficientes de ponderación, en este caso, son  $c_0 = 1/2$  y  $c_1 = 1/2$ , y entonces  $c_0 + c_1 = 1 = n$ , por lo que cumplen la condición necesaria establecida.

### Observación 2

Cuando  $f_0 > 0$  y  $f_1 > 0$ , la región plana definida por  $\{(x, y) / 0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq P_1(x)\}$  representa un trapecio, notar que el área de dicho trapecio es, precisamente, el valor  $\frac{h}{2} (f_0 + f_1)$ .

Esto da el nombre al método en estudio.

Cuando  $f_0 < 0$  y  $f_1 < 0$ , la región plana definida por  $\{(x, y) / 0 \leq x \leq h, P_1(x) \leq y \leq 0\}$  representa un trapecio, cuya área vale ahora  $-\frac{h}{2} (f_0 + f_1)$ .

De todos modos, y para tener muy en cuenta, el método de aproximación es independiente de los valores asumidos por  $f_0$  y  $f_1$ . Es decir, el procedimiento de aproximación es independiente de la interpretación geométrica (haya o no trapecios).

### Error Local de Truncamiento

Al considerar la aproximación:  $I(f) \cong \bar{I}(f)$

el Error Local de Truncamiento es:

$$E_{LT}(h) = I(f) - \bar{I}(f) = \int_0^h f(x) dx - \int_0^h P_1(x) dx = \int_0^h [f(x) - P_1(x)] dx$$

La fórmula completa queda:  $I(f) = \bar{I}(f) + E_{LT}(h)$

Para el estudio de  $E_{LT}(h)$ , agregamos la hipótesis adicional de que  $f$  tiene derivada de segundo orden continua sobre  $[0, h]$ .

Entonces (error en la interpolación polinomial):

$$f(x) - P_1(x) = \frac{1}{2!} (x - 0)(x - h) f''(\mu) \quad \text{para } 0 \leq x \leq h$$

siendo  $\mu$  cierto punto situado en  $(0, h)$ .

En consecuencia:

$$E_{LT}(h) = \int_0^h [f(x) - P_1(x)] dx = \frac{1}{2} \int_0^h x (x - h) f''(\mu) dx$$

Puesto que la función cuadrática  $x(x - h)$  no cambia de signo sobre  $(0, h)$ , siendo particularmente negativa, por el Segundo Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral se garantiza la existencia de algún punto  $\xi$  en  $(0, h)$  para el cual

$$\int_0^h x (x - h) f''(\mu) dx = f''(\xi) \int_0^h x (x - h) dx$$

Además:

$$\int_0^h x (x - h) dx = -\frac{1}{6} h^3$$

Entonces, queda demostrado el siguiente Teorema:

**Teorema**

Sea  $f''$  continua sobre  $[0, h]$ .

Entonces:

$$E_{LT}(h) = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi) \quad \text{para cierto } \xi \text{ en } (0, h)$$

Una estimación para el Error Local de Truncamiento

Sea  $f''$  continua sobre  $[0, h]$ .

Por lo tanto existe  $M = \text{máximo absoluto de } f'' \text{ sobre } [0, h]$  ( $M$  constante no negativa), esto es:

$$|f''(x)| \leq M \quad \text{para } 0 \leq x \leq h$$

y en particular

$$|f''(\xi)| \leq M$$

Finalmente:

$$|E_{LT}(h)| \leq \frac{1}{12} M h^3$$

De la estimación anterior sigue que  $E_{LT}(h)$  es de orden  $h^3$

$$E_{LT}(h) = O(h^3)$$

Observación

La fórmula completa para el Método de TRAPECIOS en un panel de dos puntos es:

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi) \quad \text{para algún punto } \xi \text{ en } (0, h)$$

### **3.2 - Primera Fórmula Cerrada de NEWTON-COTES para un intervalo cerrado**

#### Fórmula de TRAPECIOS

Vamos a extender la Fórmula de TRAPECIOS para un panel de dos puntos a un intervalo cerrado, a partir de la idea de aproximación seccional o por secciones.

Sea  $f$  una función con derivada de segundo orden continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

Realizamos una partición de  $[a, b]$  mediante  $n + 1$  puntos igualmente distanciados.

Designamos con  $h = \frac{b-a}{n}$  la norma de tal partición, por lo que los  $n$  sub-intervalos generados por dicha partición tienen todos la misma longitud  $h$ .

Indicamos con  $x_k = x_0 + k h$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  ( $x_0 = a$  y  $x_n = b$ ) los puntos de sub-división.

Señalamos  $f_k = f(x_k)$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  los valores tomados por  $f$  en cada punto de la partición.

La cantidad total de puntos de la partición ( $n + 1$ ) puede ser tanto par como impar. Si  $n + 1$  es par ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ), generamos  $n$  paneles consecutivos de dos puntos, en una cantidad impar de ellos. Si  $n + 1$  es impar ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ), generamos  $n$  paneles consecutivos de dos puntos, en una cantidad par de ellos.

A continuación, aplicamos adecuadamente la Fórmula de TRAPECIOS para un panel de dos puntos, y de manera sucesiva, sobre cada uno de los  $n$  sub-intervalos cerrados consecutivos generados por aquella partición:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Es decir:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi_1) \text{ para algún punto } \xi_1 \text{ en } (x_0, x_1)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_1 + f_2) - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi_2) \text{ para algún punto } \xi_2 \text{ en } (x_1, x_2)$$

---

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_{n-1} + f_n) - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi_n) \text{ para algún punto } \xi_n \text{ en } (x_{n-1}, x_n)$$

Sumando ordenadamente en cada columna, teniendo presente la propiedad de aditividad de la integral definida respecto del intervalo de integración para la suma en la columna izquierda y el factoreo conveniente para la suma en la columna derecha, obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left( f_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_k + f_n \right) - \frac{1}{12} h^3 \sum_{k=1}^n f''(\xi_k)$$

Sean

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad : \text{valor exacto (generalmente desconocido)}$$

$$\bar{I}(f) = \frac{h}{2} \left( f_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_k + f_n \right) \quad : \text{valor calculado aproximante a } I(f)$$

$$E_{GT}(h) = - \frac{1}{12} h^3 \sum_{k=1}^n f''(\xi_k) \quad : \text{error global de truncamiento}$$

que representa la suma de los  $n$  Errores Locales de Truncamiento cometidos en cada uno de los  $n$  sub-intervalos considerados.

La fórmula completa queda:  $I(f) = \bar{I}(f) + E_{GT}(h)$

Para el análisis de  $E_{GT}(h)$ , tenemos en cuenta que

$$\sum_{k=1}^n f''(\xi_k) = n f''(\xi) \quad \text{para algún punto } \xi \text{ en el intervalo abierto } (a, b)$$

Hemos utilizado el Corolario del TVMD para  $g = f''$ .

Conclusión:

$$E_{GT}(h) = - \frac{1}{12} n h^3 f''(\xi) \quad \text{para algún punto } \xi \text{ en } (a, b)$$

Pero  $n$  y  $h$  están vinculados entre sí a través de la longitud del intervalo cerrado  $[a, b]$ . Tal longitud es  $b - a$ , y representa una constante positiva conocida y relativa al problema.

Puesto que  $h = \frac{b-a}{n}$ , resulta  $n h = b - a$ .

Finalmente

$$E_{GT}(h) = - \frac{1}{12} n h^3 f''(\xi) = - \frac{1}{12} n h h^2 f''(\xi) = - \frac{1}{12} (b - a) h^2 f''(\xi)$$

para algún punto  $\xi$  en  $(a, b)$

Entonces, queda demostrado el siguiente Teorema:

### Teorema

Sea  $f''$  continua sobre  $[a, b]$ .

Entonces:

$$E_{GT}(h) = -\frac{1}{12} (b - a) h^2 f''(\xi) \text{ para cierto } \xi \text{ en } (a, b)$$

### Una estimación para el Error Global de Truncamiento

Sea  $f''$  continua sobre  $[a, b]$ .

Designamos con  $M = \text{máximo absoluto de } f'' \text{ sobre } [a, b]$

$$|f''(x)| \leq M \text{ para } a \leq x \leq b$$

Entonces:

$$|E_{GT}(h)| \leq \frac{1}{12} (b - a) M h^2$$

De la estimación anterior sigue que  $E_{GT}(h)$  es de orden  $h^2$

$$E_{GT}(h) = O(h^2)$$

### Observación

$E_{GT}(h) = O(h^2)$  sobre  $[a, b]$

En cambio,  $E_{LT}(h) = O(h^3)$  sobre cada uno de los  $n$  sub-intervalos de longitud  $h$  en los que hemos sub-dividido el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

### Nota

$I(f) = \bar{I}(f)$  (valor exacto igual a valor aproximado) ó  $E_{GT}(h) = 0$  sólo para el caso en que  $f$  sea un polinomio de grado menor o igual que 1.

### Exactitud del método

En virtud de la Nota anterior se dice que el procedimiento tiene exactitud de orden 1.

## **4.1 - Segunda Fórmula Cerrada de NEWTON-COTES en un panel de tres puntos**

### Fórmula de SIMPSON

Sea  $f$  una función continua sobre el intervalo cerrado  $[-h, h]$ .

Indicamos:  $f_{-1} = f(-h)$ ,  $f_0 = f(0)$  y  $f_1 = f(h)$ .

El polinomio interpolante  $P_2$  por la muestra de tres puntos del plano  $\{(-h, f_{-1}), (0, f_0), (h, f_1)\}$ , resultará único y de grado menor o igual que 2.

Para su determinación, utilizamos el enfoque directo.

Proponemos  $P_2(x) = A x^2 + B x + C$ , con coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  a determinar, mediante las tres condiciones de interpolación

$$\begin{aligned} P_2(-h) &= A h^2 - B h + C = f_{-1} \\ P_2(0) &= C = f_0 \\ P_2(h) &= A h^2 + B h + C = f_1 \end{aligned}$$

Este sistema normal (tres ecuaciones con tres incógnitas) lineal y no homogéneo tiene solución única: compatible determinado.

De la segunda ecuación:  $C = f_0$

Sumando la primera ecuación con la tercera ecuación obtenemos

$$2 A h^2 + 2 C = f_{-1} + f_1$$

De ésta despejamos  $A$  (con  $C = f_0$ ) para conseguir

$$A = \frac{f_{-1} - 2 f_0 + f_1}{2 h^2}$$

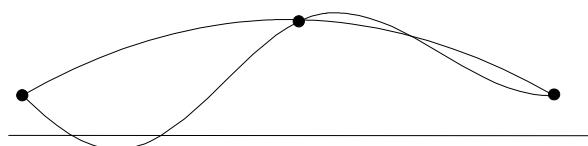
el coeficiente  $B$  no lo calcularemos pues no importará conocer su valor.

En definitiva:

$$P_2(x) = \frac{f_{-1} - 2 f_0 + f_1}{2 h^2} x^2 + B x + f_0 \quad \text{para } -h \leq x \leq h$$

y en algún sentido  $P_2$  aproxima a  $f$  sobre  $[-h, h]$ .

Una interpretación geométrica de la aproximación mediante interpolación:



Sean el valor exacto (generalmente desconocido)

$$I(f) = \int_{-h}^h f(x) dx$$

y el valor calculado

$$\bar{I}(f) = \int_{-h}^h P_2(x) dx$$

Concretamente:

$$\begin{aligned}\bar{I}(f) &= \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} \int_{-h}^h x^2 dx + B \int_{-h}^h x dx + f_0 \int_{-h}^h 1 dx = \\ &= \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} 2 \frac{h^3}{3} + B \cdot 0 + f_0 2h = \frac{h}{3} (f_{-1} - 2f_0 + f_1 + 6f_0) \\ \bar{I}(f) &= \frac{h}{3} (f_{-1} + 4f_0 + f_1)\end{aligned}$$

### Observación

Los coeficientes de ponderación, en este caso, son

$c_{-1} = 1/3$ ,  $c_0 = 4/3$  y  $c_1 = 1/3$ , y entonces  $c_{-1} + c_0 + c_1 = 2 = n$ , por lo que cumplen la condición necesaria establecida.

### Error Local de Truncamiento

Al considerar la aproximación:  $I(f) \cong \bar{I}(f)$

el Error Local de Truncamiento es:

$$E_{LT}(h) = I(f) - \bar{I}(f) = \int_{-h}^h f(x) dx - \int_{-h}^h P_2(x) dx = \int_{-h}^h [f(x) - P_2(x)] dx$$

La fórmula completa queda:  $I(f) = \bar{I}(f) + E_{LT}(h)$

El siguiente Teorema es algo laborioso de probar, por lo que omitimos su demostración.

Interviene la continuidad de la derivada de cuarto orden de la función  $f$  sobre el intervalo cerrado  $[-h, h]$ .

### Advertencia

No intente ahora seguir directamente la idea desarrollada en el estudio del Error Local de Truncamiento para la Fórmula de TRAPECIOS en un panel de dos puntos pues, en tal caso, no podrá aplicar directamente el Segundo Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

### Teorema

Sea  $f^{(4)}$  continua sobre  $[-h, h]$ .

Entonces:

$$E_{LT}(h) = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad \text{para cierto } \xi \text{ en } (-h, h)$$

### Una estimación para el Error Local de Truncamiento

Sea  $f^{(4)}$  continua sobre  $[-h, h]$ .

Por lo tanto existe  $M = \max |f^{(4)}(x)|$  sobre  $[-h, h]$  ( $M$  constante no negativa), esto es:

$$|f^{(4)}(x)| \leq M \quad \text{para } -h \leq x \leq h$$

y en particular

$$|f^{(4)}(\xi)| \leq M$$

Finalmente:

$$|E_{LT}(h)| \leq \frac{1}{90} M h^5$$

De la estimación anterior sigue que  $E_{LT}(h)$  es de orden  $h^5$

$$E_{LT}(h) = O(h^5)$$

### Observación

La fórmula completa para el Método de SIMPSON en un panel de tres puntos es:

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{h}{3} (f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

para algún punto  $\xi$  en  $(-h, h)$

## **4.2 Segunda Fórmula Cerrada de NEWTON-COTES para un intervalo cerrado**

### Fórmula de SIMPSON

Vamos a extender la Fórmula de SIMPSON para un panel de tres puntos a un intervalo cerrado, a partir de la idea de aproximación seccional o por secciones.

Sea  $f$  una función con derivada de cuarto orden continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

Realizamos una partición de  $[a, b]$  mediante  $2n + 1$  puntos igualmente distanciados (cantidad total impar de puntos).

Designamos con  $h = \frac{b-a}{2n}$  la norma de tal partición, por lo que los  $2n$  subintervalos generados por dicha partición tienen todos la misma longitud  $h$ .

Indicamos con  $x_k = x_0 + k h$  para  $k = 0, 1, \dots, 2n$  ( $x_0 = a$  y  $x_{2n} = b$ ) los puntos de sub-división.

Señalamos  $f_k = f(x_k)$  para  $k = 0, 1, \dots, 2n$  los valores tomados por  $f$  en cada punto de la partición.

A continuación, aplicamos adecuadamente la Fórmula de SIMPSON para un panel de tres puntos, y de manera sucesiva, sobre cada uno de los siguientes  $n$  subintervalos cerrados consecutivos (de longitud  $2h$ ) generados por aquella partición:

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$$

Es decir:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi_1) \quad \text{con } \xi_1 \text{ en } (x_0, x_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi_2) \quad \text{con } \xi_2 \text{ en } (x_2, x_4)$$

---

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi_n) \quad \text{con } \xi_n \text{ en } (x_{2n-2}, x_{2n})$$

Sumando ordenadamente en cada columna, teniendo presente la propiedad de aditividad de la integral definida respecto del intervalo de integración para la suma en la columna izquierda y los factoreos convenientes para la suma en la columna derecha, obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left( f_0 + 4 \sum_{k=1}^n f_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f_{2n} \right) - \frac{1}{90} h^5 \sum_{k=1}^n f^{(4)}(\xi_k)$$

Sean

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx : \text{valor exacto (generalmente desconocido)}$$

$$\bar{I}(f) = \frac{h}{3} \left( f_0 + 4 \sum_{k=1}^n f_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f_{2n} \right) : \text{valor calculado aproximante a } I(f)$$

$$E_{GT}(h) = -\frac{1}{90} h^5 \sum_{k=1}^n f^{(4)}(\xi_k) : \text{error global de truncamiento}$$

que representa la suma de los  $n$  Errores Locales de Truncamiento cometidos en cada uno de los  $n$  sub-intervalos considerados.

La fórmula completa queda:  $I(f) = \bar{I}(f) + E_{GT}(h)$

Para el análisis de  $E_{GT}(h)$ , tenemos en cuenta que

$$\sum_{k=1}^n f^{(4)}(\xi_k) = n f^{(4)}(\xi) \quad \text{para algún punto } \xi \text{ en el intervalo abierto } (a, b)$$

Hemos utilizado el Corolario del TVMD para  $g = f^{(4)}$ .

Conclusión:

$$E_{GT}(h) = -\frac{1}{90} n h^5 f^{(4)}(\xi) \quad \text{para algún punto } \xi \text{ en } (a, b)$$

Pero  $n$  y  $h$  están vinculados entre si a través de la longitud del intervalo cerrado  $[a, b]$ . Tal longitud es  $b - a$ , y representa una constante positiva conocida y relativa al problema.

Puesto que  $h = \frac{b-a}{2n}$ , resulta  $2n h = b - a$ .

Finalmente

$$E_{GT}(h) = -\frac{1}{90} n h^5 f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{180} 2n h h^4 f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{180} (b - a) h^4 f^{(4)}(\xi)$$

para algún punto  $\xi$  en  $(a, b)$

Entonces, queda demostrado el siguiente Teorema:

### Teorema

Sea  $f^{(4)}$  continua sobre  $[a, b]$ .

Entonces:

$$E_{GT}(h) = -\frac{1}{180} (b-a) h^4 f^{(4)}(\xi) \text{ para cierto } \xi \text{ en } (a, b)$$

### Una estimación para el Error Global de Truncamiento

Sea  $f^{(4)}$  continua sobre  $[a, b]$ .

Designamos con  $M = \text{máximo absoluto de } |f^{(4)}| \text{ sobre } [a, b]$

$$|f^{(4)}(x)| \leq M \text{ para } a \leq x \leq b$$

Entonces:

$$|E_{GT}(h)| \leq \frac{1}{180} (b-a) M h^4$$

De la estimación anterior sigue que  $E_{GT}(h)$  es de orden  $h^4$

$$E_{GT}(h) = O(h^4)$$

### Observación

$E_{GT}(h) = O(h^4)$  sobre  $[a, b]$

En cambio,  $E_{LT}(h) = O(h^5)$  sobre cada uno de los  $n$  sub-intervalos de longitud  $2h$  en los que hemos sub-dividido el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

### Nota

$I(f) = \bar{I}(f)$  (valor exacto igual a valor aproximado) ó  $E_{GT}(h) = 0$  sólo para el caso en que  $f$  sea un polinomio de grado menor o igual que 3.

### Exactitud del método

En virtud de la Nota anterior se dice que el procedimiento tiene exactitud de orden 3.

### Observación

La Fórmula de TRAPECIOS resultó ser exacta para polinomios de grado menor o igual a 1 mientras que la Fórmula de SIMPSON es exacta no sólo para polinomios de grado menor o igual que 2 como tal vez habíamos pensado sino también para polinomios de grado menor o igual que 3.

Esta mejora destacable con poco gasto computacional sugiere continuar generando Fórmulas Cerradas de NEWTON-COTES con paneles de 5, 7, 9, ... puntos y no con paneles de 4, 6, 8, ... puntos, para luego extenderlas a un intervalo cerrado cualquiera.

De todos modos, no conviene crecer demasiado con la cantidad de puntos por panel debido al crecimiento de la cantidad de operaciones a realizar.

Inclusive, a partir de cierto punto, aparecen coeficientes positivos y negativos en las fórmulas de aproximación; esta situación provoca inestabilidad numérica y debe evitarse.

En otras palabras: para las Fórmulas Cerradas de NEWTON-COTES de tres o cuatro puntos por panel resulta  $E_{LT}(h) = O(h^5)$  y  $E_{GT}(h) = O(h^4)$  para la extensión.

Para cinco o seis puntos por panel resulta  $E_{LT}(h) = O(h^7)$  y  $E_{GT}(h) = O(h^6)$  para la extensión, etcétera.

Aclaración: el comentario de que las Fórmulas Cerradas de NEWTON-COTES de tres o cuatro puntos por panel tienen ambas el mismo  $E_{LT}(h) = O(h^5)$ , no significa que tienen ambas el mismo Error Local de Truncamiento.

## **5 - Otras Fórmulas Cerradas de NEWTON-COTES**

### Panel de cuatro puntos (SIMPSON TRES OCTAVOS)

$f^{(4)}$  continua en  $[0, 3h]$

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \frac{3h}{8} (f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h)) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

para algún punto  $\xi$  en el intervalo  $(0, 3h)$ .

Se puede extender a un intervalo cerrado  $[a, b]$  con  $h = \frac{b-a}{3n}$   
y es exacta para polinomios de grado igual o menor que 3.

### Panel de cinco puntos (BOOLE)

$f^{(6)}$  continua en  $[0, 4h]$

$$\int_0^{4h} f(x) dx = \frac{2h}{45} (7f(0) + 32f(h) + 12f(2h) + 32f(3h) + 7f(4h)) - \frac{8}{945} h^7 f^{(6)}(\xi)$$

para algún punto  $\xi$  en el intervalo  $(0, 4h)$ .

Se puede extender a un intervalo cerrado  $[a, b]$  con  $h = \frac{b-a}{4n}$   
y es exacta para polinomios de grado igual o menor que 5.

### Panel de seis puntos

$f^{(6)}$  continua en  $[0, 5h]$

$$\int_a^{5h} f(x) dx = \frac{5h}{288} (19f(0) + 75f(h) + 50f(2h) + 50f(3h) + 75f(4h) + 19f(5h)) - \frac{275}{12096} h^7 f^{(6)}(\xi)$$

para algún punto  $\xi$  en el intervalo  $(0, 5h)$ .

Se puede extender a un intervalo cerrado  $[a, b]$  con  $h = \frac{b-a}{5n}$   
y es exacta para polinomios de grado igual o menor que 5.

### Panel de siete puntos (HARDY)

$f^{(8)}$  continua en  $[0, 6h]$

$$\int_a^{6h} f(x) dx = \frac{h}{140} (41f(0) + 216f(h) + 27f(2h) + 272f(3h) + 27f(4h) + \\ + 216f(5h) + 41f(6h)) - \frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\xi)$$

para algún punto  $\xi$  en el intervalo  $(0, 6h)$ .

Se puede extender a un intervalo cerrado  $[a, b]$  con  $h = \frac{b-a}{6n}$   
y es exacta para polinomios de grado igual o menor que 7.

### Panel de ocho puntos

$f^{(8)}$  continua en  $[0, 7h]$

$$\int_a^{7h} f(x) dx = \frac{7h}{17280} (751f(0) + 3577f(h) + 1323f(2h) + 2989f(3h) + \\ + 2989f(4h) + 1323f(5h) + 3577f(6h) + 751f(7h)) - \frac{8183}{518400} h^9 f^{(8)}(\xi)$$

para algún punto  $\xi$  en el intervalo  $(0, 7h)$ .

Se puede extender a un intervalo cerrado  $[a, b]$  con  $h = \frac{b-a}{7n}$   
y es exacta para polinomios de grado igual o menor que 7.

### Nota

Para un panel de nueve puntos, los coeficientes ponderados ya no son todos positivos, por lo que este tipo de fórmula no es recomendable.

## 6 - Errores

Algunas consideraciones sobre el Error Total en las Fórmulas extendidas de NEWTON-COTES. Estas cuestiones también deberán ser tenidas en cuenta para todo otro tipo de Cuadratura Numérica. En realidad, tienen validez para muchos Métodos Numéricos fuera del campo de las Cuadraturas Numéricas.

Por Error Total entendemos la suma del Error Absoluto Global de Truncamiento con el Error de Redondeo (debido a redondeos de números representados en computadora).

Indicamos con

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad : \text{ valor exacto}$$

$\bar{I}(f)$  : valor calculado, aproximante a  $I(f)$ , con alguna Cuadratura Numérica (extendida) de NEWTON-COTES

$E_{GT}(h)$  : Error Global de Truncamiento correspondiente

La fórmula completa es:  $I(f) = \bar{I}(f) + E_{GT}(h)$

La longitud del intervalo cerrado  $[a, b]$ , digamos  $L = b - a$ , está relacionada con el paso  $h > 0$  elegido mediante la fórmula:

$$h = \frac{b - a}{m n} = \frac{L}{m n}$$

para algún número natural  $m$  que depende de la fórmula elegida.

Por ejemplo:

$m = 1$  para TRAPECIOS con  $n + 1$  puntos de sub-división,

$m = 2$  para SIMPSON UN TERCIO con  $2n + 1$  puntos de sub-división

$m = 3$  para SIMPSON TRES OCTAVOS con  $3n + 1$  puntos de sub-división.

Conviene destacar que, cualquiera sea el número natural  $m$  adoptado:

$$h \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$$

y que particularmente  $h$  decrece positivamente hacia 0, equivale a que  $n$  aumenta indefinidamente (sin cota superior) por los números naturales.

En virtud de los conocimientos adquiridos, es obvio que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \bar{I}(f) = I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{I}(f)$$

Esto es rigurosamente cierto desde el punto de vista matemático: el límite matemático.

Desde el punto de vista computacional no siempre es cierto que  $\bar{I}(f)$  se aproxime hacia  $I(f)$  cuando  $h$  toma valores positivos relativamente pequeños o  $n$  alcanza valores naturales relativamente grandes.

Entran en juego cuestiones como la elevada cantidad de operaciones a realizar y la propagación de los errores de redondeo.

Y también es importante la precisión en los cálculos: para ciertos valores positivos muy pequeños de  $h$  o para ciertos valores naturales muy grandes de  $n$ , resultará que, con suerte,  $\bar{I}(f)$  se aproximará hacia  $I(f)$  trabajando con, por decir, 32 ó 64 ó 128 dígitos pero no con 16 dígitos.

Naturalmente, también importa el tiempo invertido en computadora; éste no es el mismo (a misma cantidad de operaciones) con 16 dígitos que con 64 dígitos. Aumenta el tiempo de cálculo al aumentar la precisión en los cálculos.

Para la misma precisión en los cálculos, digamos con 16 dígitos, existen procedimientos (algo complicados) para conseguir aproximadamente el valor positivo óptimo del paso  $h$ :  $h_{óptimo}$

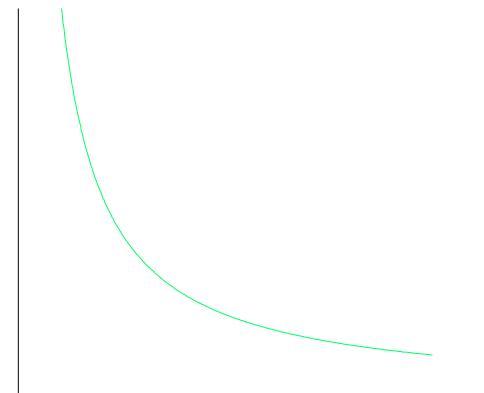
Cualquiera sea la cuestión, el riguroso resultado dado por el límite matemático puede contrastar fuertemente con el punto de vista computacional.

A partir de cierto valor positivo y muy pequeño del paso  $h$ : ( $h_{óptimo}$ ), y para la misma precisión en los cálculos, al achicar  $h$  ( $0 < h < h_{óptimo}$ ) resultará que las correspondientes aproximaciones  $\bar{I}(f)$  se alejarán (en lugar de acercarse) del valor exacto  $I(f)$ .

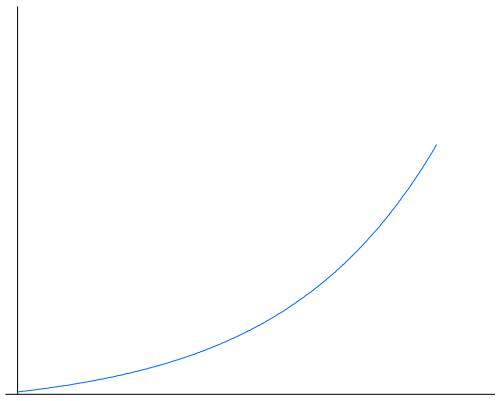
Mientras el lector no experimente computacionalmente sobre todos estos aspectos, nunca podrá apreciar la importancia de los comentarios previos, advertencias incluidas. Peor todavía, puede seguir creyendo que límite matemático es sinónimo de "límite computacional". Para mayor claridad: no existe "límite computacional" bajo las consideraciones de partida.

A continuación, algunos gráficos ilustrativos.

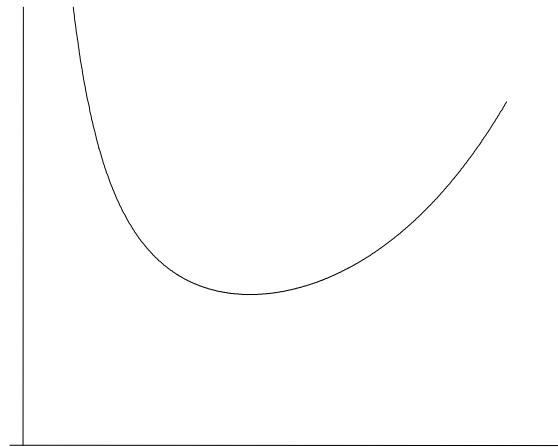
Gráfica del ERROR de REDONDEO en función de  $h$ :



Gráfica del ERROR ABSOLUTO de TRUNCAMIENTO en función de  $h$ :

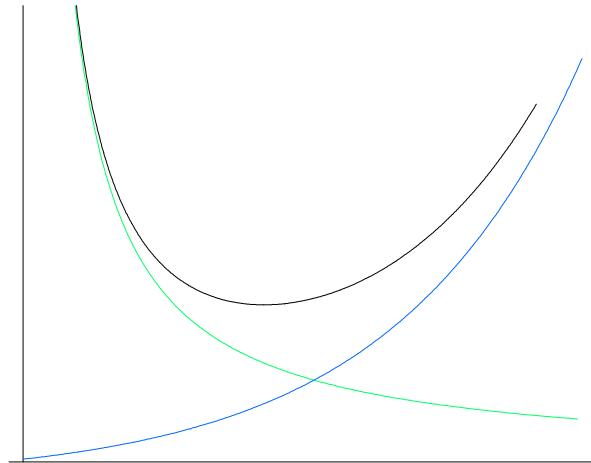


Gráfica del ERROR TOTAL en función de  $h$   
(ERROR de REDONDEO + ERROR ABSOLUTO de TRUNCAMIENTO)



El valor de  $h$  para el que el EROR TOTAL muestra el mínimo absoluto corresponde al denominado  $h_{óptimo}$ .

Por último, la superposición de los tres dibujos anteriores:



## **7 - Problema**

Es conocido que

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \cong = \ln 2 \cong 0.6931471805599453$$

Calcule la aproximación a I mediante una Cuadratura de TRAPECIOS extendida con paso  $h=0.1$  y estime el Error Global de Truncamiento cometido.

Determine el paso óptimo de manera que el valor absoluto del Error Global de Truncamiento sea menor o igual que  $10^{-8}$ .

¿Qué cantidad de paneles consecutivos de dos puntos necesitaría?

¿Qué cantidad de evaluaciones de la función integrando en puntos distintos debería efectuar?

Calcule la aproximación a I mediante una Cuadratura de SIMPSON UN TERCIO extendida con paso  $h=0.1$  y estime el Error Global de Truncamiento cometido.

Determine el paso óptimo de manera que el valor absoluto del Error Global de Truncamiento sea menor o igual que  $10^{-8}$ .

¿Qué cantidad de paneles consecutivos de tres puntos necesitaría?

¿Qué cantidad de evaluaciones de la función integrando en puntos distintos debería efectuar?

Obtenga aproximaciones a I mediante Cuadraturas Cerradas extendidas de NEWTON-COTES de cinco y siete puntos por panel, ambas con idéntico paso  $h = (1/12)$ .

Estime los respectivos Errores Globales de Truncamiento cometidos.