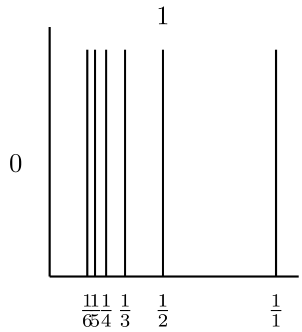
Ejercicios de Topología Algoritmica

Ortiz Ortiz Bosco
Instituto Politecnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Ciudad de México

26 de junio de 2024

1. En $\mathbb{R}^2$ sea

$$S := \left(\left\{ \frac{1}{n}_{n\in\mathbb{N}} \right\} \times [0,1] \right) \cup (0,1] \times \{0\}$$



(a) £S es conexo por caminos?
Demostración:
Sea $x, y \in S$. Queremos demostrar que existe un camino continuo en S que une a x e y. Existen dos casos a considerar:

i. x e y están en la misma línea vertical (ambos en una de las líneas $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \times [0,1]$ o en $(0,1] \times 0$. En este caso, el segmento rectilíneo que une a x e y es completamente contenido en S y es continuo.

ii. x está en una línea vertical $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \times [0,1]$ e y está en $(0,1] \times 0$.
Se puede definir un camino continuo a trozos de la siguiente manera:
- Un segmento rectilíneo de x a $(\frac{1}{n}, 0)$.
- Un segmento horizontal de $(\frac{1}{n}, 0)$ a $(1, 0)$.
- Un segmento vertical de $(1, 0)$ a y.

Todos estos segmentos están contenidos en S y la unión de estos segmentos define un camino continuo que une a x e y.

Conclusión: En ambos casos, hemos demostrado la existencia de un camino continuo en S que une a x e y. Por lo tanto, S es conexo por caminos.

(b) £$\bar{S}$ es conexo por caminos?
Demostración: Notar que $\bar{S}$ es el siguiente conjunto:

$$S := \left(\left\{ \frac{1}{n}_{n\in\mathbb{N}} \right\} \times [0,1] \right) \cup \{(0,1] \times \{0\}\} \cup \{\{0\} \times [0,1]\}$$

Es decir se le añade el segmento de recta que consta de:

$$(0,0) - - - (0,1)$$

Entonces por la demostración anterior bastaria con extender la demostración análogamente añadiendo la recta ya mencionada

(c) Demostrar que S es conexo $\to \bar{S}$ es conexo
Demostracón:
Para demostrar la implicación anterior basta con demostrar que que $\bar{S}$ no es conexo, S conexo, se sigue:

Podemos reescribir $\bar{S}$ como la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos:

- Un segmento vertical: $0 \times (0, 1]$
- Un conjunto de puntos con coordenadas x que se acercan a 0 desde el lado positivo: $\frac{1}{n} \times [0, 1] \forall \ n \in \mathbb{N}$ (incluyendo el punto límite (0,0))

Como estos dos conjuntos cerrados son disjuntos (no tienen puntos en común) y su unión forma $\bar{S}$, cualquier separación de $\bar{S}$ en dos conjuntos abiertos tendría necesariamente un conjunto que contiene el segmento vertical y el otro que contiene los puntos con coordenadas x que se acercan a 0. Esto desconectaría a $\bar{S}$.

2. **Lema de Pegado**: Sean X, Y dos espacios topológicos, $A, B \subset X$ sub-espacios cerrados tales que $X = A \cup B$ una función $f : A \to Y$ y una función $g : B \to Y$ ambas continuas con $f(x) = g(x)$ si $x \in A \cap B \to h : X \to Y$ dado por una función:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Demostración:

(a) Definimos la función $h : X \to Y$como:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

(b) Continuidad en A: Sea $x_0 \in A$. Dado una vecindad V de $h(x_0\ ) = f(x_0\ )$ en Y, como f es continua en A, existe una vecindad U de $x_0 \in\ A$ tal que $f(U) \subset V$.
Como $X = A \cup B$, cualquier entorno de $x_0\ \in X$ contiene puntos de A y puntos de B.
Pero para los puntos de A en ese entorno, $h(x) = f(x)$ y por lo tanto, $h(U) \subset V$.
Esto demuestra que h es continua en $x0_0 \in A$.

(c) Continuidad en B:
La demostración es análoga a la de la continuidad en A, reemplazando f por g y A por B.

(d) Conclusión:
Hemos demostrado que h es continua en cada punto de X, lo que significa que es una función continua.

3. $\forall q \in \mathbb{N}_0$ tal que $H_q \in Scomp \to Ab$ K pertenece a los complejos simpliciales tal que:

$$H_q(K) = \frac{Z_q(K)}{B_q(K)} \in Ab$$
$$Z_q(K) = Ker(\delta_q) < C_q(K) < (s_0, \ldots, s_q)$$
$$B_q(K) = Im(\delta_{q+1}) < Ker(\delta_q)$$
$$\delta_q(\delta_{q+1}(x)) = 0 \forall x \in K$$

Sea φ transformación afin tal que:

$$\begin{aligned}
\varphi :&K \to L \\
\varphi :&vert(K) \to vert(L) \\
\varphi([s_0, \dots, s_q]) &= [\varphi(s_0), \dots, \varphi(s_q)] \\
H(\varphi) &= \tilde{\varphi} : H_q(K) \to H_q(L) \\
a \in Z_q(K) \to \tilde{\varphi}(a + B_q(K)) &= \varphi_q(a) + B_q(L)
\end{aligned}$$

Demostrar que $\tilde{\varphi}$ esta bien definido.
Demostración:
Sea $\tilde{\varphi}$ functor que está definido entre dos objetos este caso $H_q(K), H_q(L)$ la transformación afín definida φ ya es un homomorfismo de grupos, entre K y L entonces tomando en cuenta que estan definidos sobre la misma dimensión q es decir que al menos continenen un simplice de tamaño q entonces:

$$\exists s \in K : \varphi(s) = t \in L$$

Por las definiciones de los operadores frontera y los conjuntos Z_q, B_q respectivos de cada complejo simplicial entonces:

$$\begin{aligned}
s &\in K \\
s &\in Z_q(K) \\
\varphi(s) &\in L \\
\varphi(s) &\in Z_q(L)
\end{aligned}$$

Analogamente con B_q, entonces:

$$\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) + B_q(L)$$