TEMA 3. AJUSTE DE DATOS Y FUNCIONES. MEJOR APROXIMACIÓN MÍNIMOS CUADRADOS.

"With four parameters I can fit an elephant, and with five I can make him wiggle his trunk."
J. Von Neumann

1. Introducción. INTERPOLACIÓN vs AJUSTE de datos.

2. Planteamiento y formulación del problema.

3. Resolución del problema:
   - Formulación como problema de minimización.
   - Formulación como sistema lineal sobredeterminado.

4. Residuos. Error cuadrático.

5. Clases de funciones aproximantes que no son espacio vectorial. Algunas transformaciones de interés.

6. Ajuste de datos con pesos

1

1. INTRODUCCIÓN. INTERPOLACIÓN vs AJUSTE DATOS

- Tabla 1 (3 datos) (o)

  1. Polinomio interpolación Tabla 1 (3 datos) (rojo -)

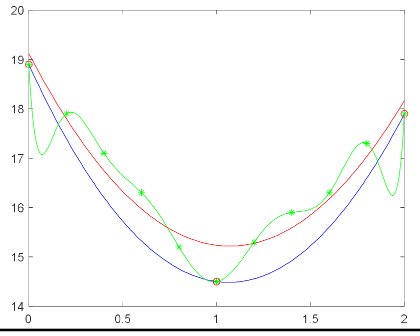
x	0	1	2
y	18.9	14.5	17.9

- Añadimos más datos: Tabla 2 (11 datos) (*)

x	*0*	*0.2*	*0.4*	*0.6*	*0.8*	*1*	*1.2*	*1.4*	*1.6*	*1.8*	*2*
fxx	18.90	17.90	17.10	16.30	15.20	14.50	15.30	15.90	16.30	17.30	17.90

  2. Polinomio interpolación (grado 10) Tabla 2 (- negro)

  3. Polinomio grado dos "mejor ajusta los datos de campo" (Tabla 2)
     (- verde)



2

I. INTERPOLACIÓN DATOS ⟶ COINCIDENCIA DATOS

Tabla 1:

xi	0	1	2
yi	18.9	14.5	17.9

1. Polinomio de grado 2 que interpola Tabla 1:

3 datos
3 parámetros

$$\mathrm{p}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \text{ verifique:}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{p}(0) &= c_0 = 18.9 \\ \mathrm{p}(1) &= c_0 + c_1 + c_2 = 14.5 \\ \mathrm{p}(2) &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 17.9 \end{aligned}\right\}$$

.

Con MATLAB:

```
xi=[ 0:2 ]';
yi=[ 18.9 14.5 17.9 ]';
H=[xi.^0 xi.^1 xi.^2];
c=H\yi   (también inv(H)*yi)
```


INTERPOLACIÓN DATOS

Tabla 2:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
fx	18.90	17.90	17.10	16.30	15.20	14.50	15.30	15.90	16.30	17.30	17.90

2. Polinomio de grado 10 que interpola Tabla 2:

11 datos
11 parámetros!

$$\mathrm{p2\_int}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{10} x^{10} \text{ verifique:}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{p2\_int}(0) &= c_0 = 18.9 \\ \mathrm{p2\_int}(0.2) &= c_0 + 0.2c_1 + 0.2^2 c_2 + \ldots + 0.2^{10} c_{10} = 18.9 \\ \mathrm{p2\_int}(0.4) &= c_0 + 0.4c_1 + 0.4^2 c_2 + \ldots + 0.4^{10} c_{10} = 17.9 \\ \mathrm{p2\_int}(0.6) &= c_0 + 0.6c_1 + 0.6^2 c_2 + \ldots + 0.6^{10} c_{10} = 17.1 \\ \mathrm{p2\_int}(0.8) &= c_0 + 0.8c_1 + 0.8^2 c_2 + \ldots + 0.8^{10} c_{10} = 16.3 \\ \mathrm{p2\_int}(1) &= c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{10} = 14.5 \\ \mathrm{p2\_int}(1.2) &= c_0 + 1.2c_1 + 1.2^2 c_2 + \ldots + 1.2^{10} c_{10} = 15.3 \\ \mathrm{p2\_int}(1.4) &= c_0 + 1.4c_1 + 1.4^2 c_2 + \ldots + 1.4^{10} c_{10} = 15.9 \\ \mathrm{p2\_int}(1.6) &= c_0 + 1.6c_1 + 1.6^2 c_2 + \ldots + 1.6^{10} c_{10} = 16.3 \\ \mathrm{p2\_int}(1.8) &= c_0 + 1.8c_1 + 1.8^2 c_2 + \ldots + 1.8^{10} c_{10} = 17.3 \\ \mathrm{p2\_int}(2) &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \ldots + 2^{10} c_{10} = 17.9 \end{aligned}\right\}$$

```
%Datos:
x=[0:0.2:2]';
fx=[….]';
% Matriz del sistema cuadrada
H=[x.^0 x.^1  x.^2  ….  x.^10];
c=H\fx   (también inv(H)*fx))
```

⟶ Sistema lineal 11 ecuaciones
11 incógnitas

II. MEJOR AJUSTE DATOS Tabla 2:

3. Polinomio de grado 2 que 'mejor ajusta datos Tabla 2:

11 datos
sólo 3 parámetros!

$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ verifique:

$$\left.\begin{array}{l}
p(0) = c_0 = 18.9 \\
p(0.2) = c_0 + 0.2c_1 + 0.2^2 c_2 = 18.9 \\
p(0.4) = c_0 + 0.4c_1 + 0.4^2 c_2 = 17.9 \\
p(0.6) = c_0 + 0.6c_1 + 0.6^2 c_2 = 17.1 \\
p(0.8) = c_0 + 0.8c_1 + 0.8^2 c_2 = 16.3 \\
p(1) = c_0 + c_1 + c_2 = 14.5 \\
p(1.2) = c_0 + 1.2c_1 + 1.2^2 c_2 = 15.3 \\
p(1.4) = c_0 + 1.4c_1 + 1.4^2 c_2 = 15.9 \\
p(1.6) = c_0 + 1.6c_1 + 1.6^2 c_2 = 16.3 \\
p(1.8) = c_0 + 1.8c_1 + 1.8^2 c_2 = 17.3 \\
p(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 17.9
\end{array}\right\} \longrightarrow$$

Sistema lineal
'sobredeterminado':
11 ecuaciones
3 incógnitas

Con MATLAB:

```
x=[ .. ]';
fx=[ .. ]';
H=[x.^0  x.^1  x.^2];
c3=H\fx
```

Observaciones: Sistema lineal 11x3; H3-> matriz 11x3 (no cuadrada)

Nº incógnitas=3<<Nº datos a ajustar=11

Polinomio p(x) que "Ajuste lo mejor posible" los datos de la tabla:

p(xi) lo más próximo posible a yi para los puntos de la Tabla

$\downarrow$

$|p(x_i) - y_i|$ lo menor posible para el conjunto de todos los puntos de la tabla

$\downarrow$

$\left(\sum_{i=1}^{n} |p(x_i) - y_i|^2\right)^{1/2}$ lo menor posible

$\updownarrow$

distancia del vector (p(xi)) al vector yi sea mínima (norma 2)

$\Updownarrow$

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (p(x_i) - y_i)^2 \quad \text{sea mínimo}}$ $\longrightarrow$ p(x) polinomio que mejor ajusta los datos tabla
en el sentido de mínimos cuadrados

Residuos en datos: |p(xi)-yi|, i=1,..,n

Resolución problema con datos Tabla 2

↕

"Resolución sistema lineal sobredeterminado"
Hc=b

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} c \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} b \end{bmatrix}}_{b}$$

1. Sistema lineal **SOBREDETERMINADO** (más ecuaciones que incógnitas).

Nº parámetros libres para ajustar <<Nº datos dados a ajustar

2. En general, **NO SOLUCIÓN EXACTA** (Hc-b=0, H no invertible)

3. Buscar c: **lHc-bl "lo menor posible"** (residuo mínimo)

Dar significado a "menor posible"->métrica euclídea

Solución mínimos cuadrados

(Minimizar norma residuo cuadrado)

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

IN: Dado conjunto discreto de datos numéricos de una función (f(x)) o tabla datos (xi,yi)

OUT: Construir una función $\varphi(x)$ de un determinado tipo que

"AJUSTE LO MEJOR POSIBLE" los datos numéricos dados.

Datos entrada

xi					
yi					

n datos numéricos
(de una función (f(x))

→ AJUSTE DATOS →

$\varphi(x)$ tipo señalado:

$$\mathrm{Min}\left\|(\varphi(xi)-yi)_{i=1,\dots,n}\right\|$$

↓

$$\mathrm{Min}\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i)-y_i)^2$$

MÉTRICA:
norma 2 o euclidea

Minimizar norma al cuadrado:
AJUSTE MÍNIMOS CUADRADOS

Mejor aproximación (de tipo señalado) de f(x) en puntos (xi,yi) o función que **mejor ajusta los datos en el sentido de mínimos cuadrados**

8

1. **"Ajuste lo mejor posible" -> Métrica?-> Distancia 2 o euclídea->AJUSTE MÍNIMOS CUADRADOS**

2. **Tipo de función aproximante:** $\varphi \in$ clase de funciones admisibles

   - En general se trabaja con funciones "sencillas", fáciles de manejar desde el punto de vista computacional y que se representan y caracterizan por un número finito de **m** parámetros $c_1,\ldots,c_m$ con m <=n (**n**=nº datos numéricos).
   - En general, se trabaja con funciones aproximantes que se generan a partir de una base {b1(x),..,bm(x)} de funciones (dim=m):

$$\varphi(x)=\varphi(x,c_1,\ldots,c_n)=c_1b_1(x)+\ldots+c_mb_m(x)$$

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA:

Norma residuos al cuadrado

Se trata de encontrar los parámetros c1,…,cm tales que minimicen (norma del residuo al cuadrado)

$$\text{Min}\left\|\left(\varphi(xi)-yi\right)_{i=1..n}\right\|_2^2=\text{Min}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(x_i)-y_i\right)^2\right\}$$

$$\underbrace{\text{Min}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(c_1b_1(x_i)+\ldots+c_mb_m(x_i)-y_i\right)^2\right\}}_{F(c_1,\ldots,c_m)}$$

3. ¿RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA?

1. Como Problema Minimización:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(x_i)-y_i\right)^2=\text{Min}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(c_1b_1(x_i)+\ldots+c_mb_m(x_i)-y_i\right)^2}_{F(c_1,\ldots,c_m)}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial F(c_1..\,c_m)}{\partial c_j}=0\\ \text{j=1,...,m}\end{array}\right\}\rightarrow c_1,\ldots,c_m$$

$\updownarrow$

2. Como Sistema Lineal Sobredeterminado:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(xi)=\sum_{i=1}^{n}c_1b_1(x_i)+\ldots+c_mb_m(x_i)=y_i\\ \text{i=1,...,n}\end{array}\right.\rightarrow \text{Hc=b (1) Sistema lineal sobredeterm. nxm}$$

Con Matlab: $xi=[\,]';\ yi=[\,]';$ % si $\varphi(x)=c_1b_1(x)+\ldots+c_mb_m(x)$:

$H=[b_1(\text{evaluado en } x_i)\ \ldots\ b_m(\text{evaluado en } x_i)];$ b=yi;

$c=H\backslash b$

¿RESOLUCIÓN DEL SISTEMA Hc=b?

I. Si m=n (H matriz cuadrada) $\rightarrow$ Problema de interpolación

II. Si m>n $\rightarrow$ El sistema sobredeterminado (1) en general no tiene solución exacta

$\rightarrow$ Solución mínimos cuadrados:

Hc=b $\rightarrow$ $\boxed{\text{H'H c=H'b} \quad \text{Ecuaciones normales} \rightarrow \text{c=inv(H'H)H'b}}$

nxm

mxn nxm (matriz cuadrada)

Matlab:

$xi = [\ ]';$

$yi = [\ ]';$

$H = [b_1(\text{evaluado en } x_i) \ \ldots \ b_m(\text{evaluado en } x_i)]; \quad \% \text{si } \varphi(x) = c_1 b_1(x) + \ldots + c_m b_m(x)$

b=yi;

$c = H \backslash b = inv(H'*H)*H'*b$

- El comando \ proporciona la solución mínimos cuadrados de un sistema lineal (utiliza algoritmo para resolver ecuaciones normales)
- inv: aplicable sólo a matrices cuadradas invertibles

4. RESIDUOS. ERRORES

Calculada la función aproximante o los parámetros c1,..,cm de dicha función ¿Cuál es el error, las desviaciones o residuos respecto de los datos dados?:

- Error o residuo en dato i-ésimo: $e_i = |\varphi(x_i) - y_i| = |c_1 b_1(x_i) + \ldots + c_m b_m(x_i) - y_i|$
- Vector de residuos=R= $(e_1\ e_2 \ldots e_n) = |Hc - b|$

Residuo en ecuación i-ésima

(con H matriz de coeficientes y b vector términos independientes)

- Error cuadrático: E= $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (c_1 b_1(x_i) + \ldots + c_m b_m(x_i) - y_i)^2 = \|Hc - b\|_2^2$

$Error = e = \sqrt{E} = \|R\|$

MATLAB :

$R = abs(H*c - b);$ % vector de residuos

$Error = norm(H*c - b)$

12

EJEMPLO 1. Se considera la tabla de datos

xi	-1	0	1	2
yi	-2	-1	0	3

xi=[-1 0 1 2]'
yi =[-2 -1 0 3]'

A) Calcular la recta (recta de regresión lineal) que mejor ajusta los datos en el sentido de mínimos cuadrados

$$r(x) = a + bx \qquad \text{(2 parámetros para ajustar los 4 datos)}$$

1. Como problema de minimización: Hay que calcular a y b tales que

$$\text{Min}\sum_{i=1}^{n}(r(x_i)-y_i)^2 = \text{Min}\,\underbrace{((a-b+2)^2+(a+1)^2+(a+b-0)^2+(a+2b-3)^2)}_{F(a,b)}$$

Calculamos el mínimo de F(x), derivamos respecto de los parámetros:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} &= .... = 2(4a+2b)=0\\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} &= .... = 2(2a+6b-8)=0\end{aligned}\right\} \rightarrow a=-0.8,\ b=1.6 \rightarrow \boxed{r(x)=-0.8+1.6x}$$

13

2. Como sistema lineal sobredeterminado r(xi)=a+bxi=yi:

$$\left.\begin{aligned} r(-1) &= a-b=-2\\ r(0) &= a=-1\\ r(1) &= a+b=0\\ r(2) &= a+2b=3\end{aligned}\right\} \text{Sistema lineal sobredeterm. 4 (ecuaciones) x 2 (incógnitas)}$$

Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}}_{H}\underbrace{\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}}_{c}=\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}}_{yi}$$

(Sist. sobredeterminado, no tiene solución exacta)

matriz 4x2

Ecuaciones normales: H'Hc=H'b:

matriz 2x2

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 0\\ 3\end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix} \rightarrow \boxed{a=-0.8,\, b=1.6}$$

Matlab: $H=[xi.\wedge 0 \quad xi.\wedge 1];\ c = H \backslash yi;$

14

EJEMPLO 1. Se considera la tabla de datos

xi	-1	0	1	2
yi	-2	-1	0	3

B) Calcular la función $p(x) = a + bx^2$ **que mejor ajusta los datos en el sentido de mínimos cuadrados (2 parámetros para ajustar 4 datos)**

1. Lo resolvemos, por ejemplo como problema de minimización: Calcular a y b tales que

$$\text{Min}\sum_{i=1}^{n}(p(x_i)-y_i)^2 = \text{Min}\underbrace{((a+b+2)^2+(a+1)^2+(a+b-0)^2+(a+4b-3)^2)}_{F(a,b)}$$

Calculamos el mínimo de F(a,b), derivamos respecto de los parámetros:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} &= .... = 0\\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} &= .... = 0\end{aligned}\right\} \to a = -1.6667,\ \text{b} = 1.1111 \to \boxed{p(x) = -1.6667 + 1.1111x^2}$$

2. Como sistema sobredeterminado con Matlab $\to$ Resolver sistema Hc=yi:

$H = [xi.\hat{}\,0 \quad xi.\hat{}\,2];$

c=H\yi;

15

EJEMPLO 1. Se considera la tabla de datos

xi	-1	0	1	2
yi	-2	-1	0	3

C) Plantear el sistema lineal sobredeterminado y las ecuaciones normales (sin resolver) de ajustar (en el sentido mínimos cuadrados) los datos por una función del tipo $q(x) = a + bx + cx^2$ (3 parámetros para ajustar 4 datos)

- Planteamos el sistema lineal sobredeterminado q(xi)=a+bxi+cxi^2=yi:

$$\left.\begin{aligned} q(-1) &= a - b + c = -2\\ q(0) &= a = -1\\ q(1) &= a + b + c = 0\\ q(2) &= a + 2b + 4c = 3\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}}_{H}\underbrace{\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}}_{B}$$

Sistema lineal 4(ecuaciones)x3(incognitas)

- Ecuaciones normales: H'HC=H'B

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 2 & 6 & 8\\ 6 & 8 & 18\end{pmatrix} C = \begin{pmatrix}0\\ 8\\ 10\end{pmatrix}$$

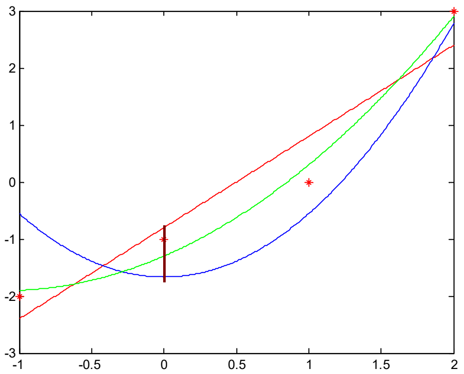
- Con Matlab: $H = [xi.\hat{}\,0 \quad xi.\hat{}\,1 \quad xi.\hat{}\,2];\quad B = yi;\quad C = H \setminus b$

(Solución: a=-1.3, b=1.1, c=0.5)

16

D) Resolución con Matlab. Residuos. Gráficas

```
%Datos a ajustar:
xi=[-1 0  1 2]';
fi=[-2 -1 0 3]';

%Ajuste por r(x):
H1=[xi.^0 xi.^1];
c1=H1\fi

%Ajuste por p(x):
H2=[xi.^0 xi.^2];
c2=H2\fi

%Ajuste por q(x):
H3=[xi.^0 xi.^1 xi.^2];
c3=H3\fi

% Residuos y errores
R1=abs(fi-H1*c1);
R2=abs(fi-H2*c2);
R3=abs(fi-H3*c3);
e1=norm(R1)
e2=norm(R2)
e3=norm(R3)
% Gráficas
xx=-1:0.01:2;
p1=c1(1)+c1(2)*xx;
p2=c2(1)+c2(2)*xx.^2;
p3=c3(1)+c3(2)*xx+c3(3)*xx.^2
plot(xxx,p1,'r', xx,p2,'b', xx,p3,'g',xi,fi,'ro')
```



17

EJEMPLO 1. Se considera la tabla de datos

xi	-1	0	1	2
yi	-2	-1	0	3

E) ¿Cuál de las funciones anteriores ajusta mejor? Esto es, ¿cuál produce un menor error?

A) $\mathrm{r}(x) = a + bx$ (2 parámetros)

B) $\mathrm{p}(x) = a + bx^2$ (2 parámetros)

C) $\mathrm{q}(x) = a + bx + cx^2$ (3 parámetros)

$$\left.\begin{array}{l}\text{FUNCIÓN TIPO A} \subset \text{FUNCIÓN TIPO C}\\ \text{FUNCIÓN TIPO B} \subset \text{FUNCIÓN TIPO C}\end{array}\right\} \rightarrow$$

Mejor opción, menor error: FUNCIÓN TIPO C (salvo r(x)=q(x) o p(x)=q(x))

Entre función aproximante tipo A y función tipo B ¿cuál es la mejor? -> Calcular el error y ver cuál es menor.

18

EJEMPLO 1. Se considera la tabla de datos

xi	-1	0	1	2
yi	-2	-1	0	3

E) ¿Cuál de las funciones anteriores ajusta mejor? Esto es, ¿cuál produce un menor error?

A) $\mathrm{r}(x) = a + bx$ (2 parámetros)

B) $\mathrm{p}(x) = a + bx^2$ (2 parámetros)

C) $\mathrm{q}(x) = a + bx + cx^2$ (3 parámetros)

$$e_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (r(x_i) - y_i)^2} = [(-0.8 - 1.6 + 2)^2 + (-0.8 + 1)^2 + (-0.8 + 1.6 - 0)^2 + (-0.8 + 21.6 - 3)^2]^{1/2} = 1.0954$$

$$e_B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p(x_i) - y_i)^2} = 1.6997$$

$$e_C = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (q(x_i) - y_i)^2} = 0.44721$$

ec<ea<eb -> Por tanto la función q(x) es la que mejor ajuste produce en los datos dados, seguida de r(x) y por último p(x).

19

EJEMPLO 2. A) Se quiere hallar el polinomio de grado 3 que mejor ajusta los datos de la tabla, con la restricción de que valga 3 en x=0 y su segunda derivada en x=0 sea 1. Dar el sistema sobredeterminado resultante.

xi	-1	1	2	3	4
yi	4	2	1	1	2

1. Función aproximante: $\mathrm{p}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ +condición $\mathrm{p}(0)=3$+condición $\mathrm{p}''(0)=1$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{p}(0) &= c_0 = 3 \\ \mathrm{p}''(0) &= 2c_2 = 1 \to c_2 = 0.5 \end{aligned}\right\} \to \boxed{\mathrm{p}(x) = 3 + c_1 x + 0.5x^2 + c_3 x^3}$$

(2 parámetros para ajustar los 5 datos)

2. Escribimos el sistema lineal sobredeterminado Hc=b

$$\begin{cases} \mathrm{p}(x_i) = 3 + c_1 x_i + 0.5x_i^2 + c_3 x_i^3 = y_i \to c_1 x_i + c_3 x_i^3 = y_i - 3 - 0.5x_i^2 \\ i = 1,\ldots,5 \end{cases} \leftrightarrow \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 8 \\ 3 & 27 \\ 4 & 64 \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ -4 \\ -13/2 \\ -9 \end{bmatrix}}_{b}}$$

```
MATLAB:  xi=[-1 1 2 3 4]';   yi=[4 2 1 1 2 ]';
         H=[xi   xi.^3];    b=yi - 3 - 0.5 * xi.^2
         c = H \ b     ->  c1 = c(1),  c3 = c(2)
```

20

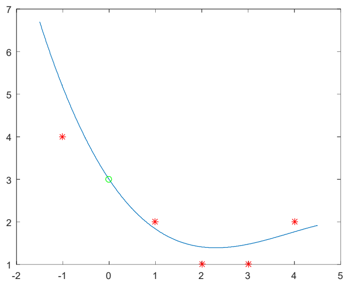
EJEMPLO 2 **(con la ayuda de Matlab):**

B) Resolver el problema.

C) Dar el vector de residuos y el error.

D) Dar una estimación del valor de la función en x=1.2.

E) Mostrar la gráfica de la función aproximante y los puntos de la tabla



B)
```
xi=[-1 1 2 3 4]';
yi=[4 2 1 1 2 ]';
H=[xi   xi.^3];
b=yi - 3 - 0.5 * xi.^2
c = H \ b
```

Observación: $c_1 = c(1),\ c_3 = c(2) \rightarrow p(x) = 3 + c_1 x + 0.5x^2 + c_3 x$

C)
```
% R: Vector de residuos
R=abs(H*c-b);     %abs(p(xi)-yi)
% E: Error
E=norm(R);
```

D)
```
% v_ap: Valor aproximado en 1.2
a=1.2;    v_ap=3 + c(1) * a + 0.5 * a ^ 2 + c(2) * a ^ 3
```

E)
```
% Vector auxiliar en intervalo [-1,4]:
v_aux=-1:0.1:4;
% p_aux : Valor del polinomio obtenido en v_aux:
p_aux=3 + c(1) * v_aux + 0.5 * v_aux.^2 + c(2) * v_aux.^3
plot(v_aux, p_aux, xi, yi, '*r')
```

21

<u>EJEMPLO 3</u>. Se considera una función aproximante del tipo u(x)= A+Bcos(x)+Csin(x) con la restricción de u'(0)=1 que mejor ajusta los datos de la tabla. Dar el sistema lineal sobredeterminado resultante.

xi: -pi/2 0 pi/2 pi
yi: 1 2 -1 1

1. Espacio aproximante: $u(x) = A + B\cos(x) + C\sin(x)$ +condición $u'(0)=1$

$u'(0)=C=1$

Por tanto las funciones aproximantes son del tipo: $\boxed{u(x) = A + B\cos(x) + \sin(x)}$

(2 parámetros para ajustar los 4 datos)

2. Escribimos el sistema lineal sobredeterminado Hc=b

$$\begin{cases} u(x_i) = A + B\cos(x_i) + \sin(x_i) = y_i \\ i = 1,\dots,4 \end{cases} \rightarrow \boxed{A + B\cos(x_i) = y_i - \sin(x_i) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{yi-\sin(x_i)}}$$

MATLAB:
```
xi=[-pi/2:pi/2:pi]';
yi=[1 2 -1 1 ]';
H=[xi.^0   cos(xi)];
b=yi - sin(xi)
c = H \ b     →  A = c(1), B = c(2)
```

Resolvemos las <u>ecuaciones normales</u>: H'Hc=H'b:

Solución: A=0.75, B=0.5

$\boxed{u(x)=0.75+0.25\cos(x)+\sin(x)}$

22

<u>EJEMPLO 4</u> (Examen Nov. 2019). **Ajustar los datos de la Tabla por un polinomio del tipo u(x)=ax²+x.**

xi	1	2	3
yi	1	2	8

- **Escribir sistema lineal sobredeterminado. Matriz coeficientes y véctor término independiente.**
- **Ecuaciones normales y resolver (calcular valor de parámetro a).**
- **Si se hubiera considerado la familia de polinomios de la forma u(x)=ax²+bx, sin hacer cálculos ¿mejoraría la aproximación? Justificar.**

1. Función aproximante: $u(x)=ax^2+x$ $\rightarrow$ 1 parámetro para ajustar los datos

2. Escribimos el sistema lineal sobredeterminado Hc=b

$$\begin{cases} u(x_i)=ax_i^2+x_i = y_i \rightarrow ax_i^2 = y_i - x_i \\ i=1,2,3 \end{cases} \leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1\\4\\9\end{bmatrix}}_{\substack{x_i^2\\H}} a = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix}}_{\substack{y_i-x_i\\b}}$$

MATLAB: xi=[1 : 3]'; yi=[1 2 8]';

H=[xi.^2]; b=yi – xi;

a = H \ b

23

3. Ecuaciones normales: H'Ha=H'b

$$[1\ 4\ 9]\begin{bmatrix}1\\4\\9\end{bmatrix} a = [1\ 4\ 9]\begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix} \rightarrow 98a=45 \rightarrow a=0.4591 \rightarrow u(x)=0.4591x^2+x$$

4. El tipo de función considerada anteriormente es un <u>subtipo</u> de la familia de funciones aproximantes u(x)=ax²+bx, donde el parámetro b se asume igual a 1. Por tanto, si se considerasen funciones del tipo u(x)=ax²+bx, en las que se dispone de los dos parámetros a y b para ajustar los datos, se conseguiría una aproximación con un error menor o igual que el de la función obtenida inicialmente.

5. Vector de Residuos. Error

$$\text{vector\_residuos}=(|u(x_i)-y_i|)=(|0.4591x_i^2+x_i-y_i|)=\ldots$$

$$Error=\left(\sum_{i=1}^{3}|0.4591x_i^2+x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$$

Matlab: vector_residuos=abs(a*xi.^2+xi-yi) = abs(H*a-b);

Error=norm(vector_residuos)

24

5. CLASES DE FUNCIONES APROXIMANTES QUE NO SON ESPACIOS VECTORIALES. ALGUNAS TRANSFORMACIONES DE INTERÉS

- DATOS NUMÉRICOS: Tabla (xi,yi)
- ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES APROXIMANTES DE INTERÉS:

1. $\varphi(x) = ae^{bx}$
2. $\varphi(x) = axe^{bx}$
3. $\varphi(x) = \dfrac{a\mathrm{x}^2}{b + \mathrm{x}^2}$
4. $\varphi(x) = \dfrac{a}{1 + b\cos(\mathrm{x})}$

....

Observación: Estos conjuntos de funciones no son espacios vectoriales, las funciones no son combinaciones lineales de una base-> Directamente no conducen a sistemas LINEALES -> Efectuar transformaciones oportunas

25

---

1. $\boxed{\varphi(x) = ae^{bx}}$ NO lineal (variables a y b) Aplicamos logaritmos

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = ae^{bx_i} = y_i \;\rightarrow\; \underbrace{\log a}_{A} + \mathrm{b}x_i = \underbrace{\log y_i}_{\tilde{y}_i} \\ \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n} \end{cases}$$

Lineal (en variables A y b)

- Se resuelve el sistema lineal $A + \mathrm{b}x_i = \tilde{y}_i$

Observación: Los elementos de este sistema son:

- Matriz de coeficientes: H=[xi.^0 xi]
- Término independiente: $\tilde{y}_i = \log(y_i)$
- c=H\\$\tilde{y}_i$ (A=c(1) y b=c(2))

- Una vez calculados $\boxed{\text{A y b,}}$ se deshace la transformación logarítmica y se obtiene $\boxed{a = e^{A}}$.
- También se puede plantear como problema de minimización:

$$\mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} (A + \mathrm{b}x_i - \tilde{y}_i)^2$$

- Residuo i=$\left|\varphi(x_i) - y_i\right| = \left|ae^{bx_i} - y_i\right|$

26

2. $\boxed{\varphi(x) = axe^{bx}}$ NO LINEAL en variables a y b. Aplicamos logaritmos

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = ax_i e^{bx_i} = y_i \rightarrow \underbrace{\log a}_{A} + \log x_i + bx_i = \underbrace{\log y_i}_{\tilde{y}_i} \rightarrow \underbrace{\log a}_{A} + bx_i = \underbrace{\log(y_i / x_i)}_{\tilde{y}_i} \\ i=1,\ldots,n \end{cases}$$

LINEAL
(en variables A y b)

- Se resuelve el sistema lineal anterior $A + bx_i = \tilde{y}_i$

Observación: Los elementos de este sistema son:

- Matriz de coeficientes: H=[xi.^0 xi]
- Término independiente: $\tilde{y}_i = \log(y_i ./ x_i)$
- c=H\\$\tilde{y}_i$ (A=c(1) y b=c(2))

- Una vez calculados A y b, se deshace la transformación logarítmica y se obtiene a= e^A (a=exp(c(1)).

- Residuo i=$|\varphi(x_i) - y_i| = |ax_i e^{bx_i} - y_i|$

27

3. $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{ax^2}{b + x^2}}$

Ecuación NO lineal

Ecuación Lineal

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = \dfrac{ax_i^2}{b + x_i^2} = y_i \rightarrow \ldots \rightarrow ax_i^2 - by_i = \underbrace{x_i^2 y_i}_{\tilde{y}_i} \\ i=1,\ldots,n \end{cases}$$

Se resuelve el sistema lineal anterior con elementos:

- Matriz de coeficientes: H=[xi.^2 -yi]
- Término independiente: $\tilde{y}_i = x_i^2 y_i = (x_i .\wedge 2) .* y_i$
- c=H\\$\tilde{y}_i$ (a=c(1) y b=c(2))

Residuo i=$|\varphi(x_i) - y_i| = \left| \dfrac{ax_i^2}{b + x_i^2} - y_i \right|$

28

EJEMPLO (Examen Nov. 2019). **Ajustar los datos de la Tabla por una función del tipo u(x)=ax/(1+bx²).**

xi	1	2	3
yi	1	2	8

- **Transformar el problema resultante en un sistema lineal.**
- **Dar matriz coeficientes y vector términos independiente.**

1. Función aproximante: $u(x) = \dfrac{ax}{1+bx^2}$ $\rightarrow$ 2 parámetros para ajustar los datos

2. Escribimos el sistema NO lineal resultante:

$$\begin{cases} u(x_i) = \dfrac{ax_i}{1+bx_i^2} = y_i \\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

3. A partir de él un posible sistema lineal Hc=B

$$\begin{cases} ax_i = (1+bx_i^2)y_i \rightarrow ax_i - bx_i^2 y_i = y_i \\ i = 1,2,3 \end{cases} \leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -8 \\ 3 & -72 \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}}_{B}$$

Se pueden efectuar otras transformaciones conducentes a otros sistemas lineales. (Ver en Exámenes Moodle)

MATLAB: xi=[1 : 3]'; yi=[1 2 8]';

H=[xi -(xi.^2).*yi]; B=yi; c = H \ B

3. Residuos. Error.

- Vector residuos= $(|u(x_i) - y_i|) = \left(\left|\dfrac{ax_i}{1+bx_i^2} - y_i\right|\right)$

Obs. No coincide con |Hc-B|

- Error: $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left|\dfrac{ax_i}{1+bx_i^2} - y_i\right|^2\right)^{1/2}$

MATLAB: vector_residuos=abs((c(1)*xi./(1+c(2)*xi.^2))-yi);

error=norm(vector_residuos);

4. ¿Mejoraría el ajuste si hubiéramos considerado la familia de funciones aproximantes:

- u(x)= $\dfrac{ax}{c+bx^2}$
- u(x)= $\dfrac{c+ax}{1+bx^2}$

(Examen Nov-2016) Se quiere ajustar por mínimos cuadrados los datos de la tabla:
con una función del tipo

-1	0	1	2
-2	-1	0	3

$$\varphi(x)=\frac{a+bx}{1+c\,x^2} \text{ con la condición de que } \varphi'(0)=1.$$

Imponer la condición previa, linealizar el problema y escribir matricialmente el sistema lineal sobredeterminado. Dar las ecuaciones normales correspondientes.

* Tipo función aproximante: $\varphi(x)=\dfrac{a+bx}{1+c\,x^2}$ con condición $\varphi'(0)=1$

Imponiendo que $\varphi'(0)=1$, resulta b=1.

Por tanto la función aproximante es del tipo: $\boxed{\varphi(x)=\dfrac{a+x}{1+c\,x^2}}$

* Con esta función se ajustan los datos de la tabla:

$$\frac{a+x_i}{1+cx_i^2}\approx y_i,\ \ \text{i=1,2,3.4}$$

Una forma de linealizar el problema es la siguiente:

$$\begin{cases} a+x_i=y_i(1+cx_i^2)\rightarrow a-cx_i^2y_i=y_i-x_i \\ \text{i=1,2,3.4} \end{cases}$$

Escribiendo matricialemnte el sistema lineal sobredeterminado HC=B resultante:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & -12\end{pmatrix}}_{H}\underbrace{\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}}_{C}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}}_{B}$$

* Las ecuaciones normales vendrán dadas por H'HC=H'B, que operando resultan:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

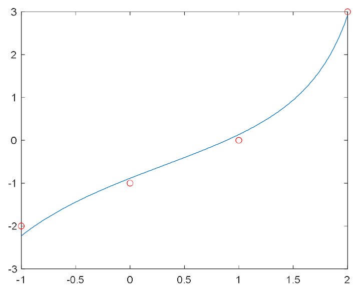
..... a=-0.8862; c=-0.1545

31

* Con Matlab

```
%Datos
xi=[-1:2]';
yi=[-2 -1 0 3]';

% Sistema lineal
H=[xi.^0 -(xi.^2).*yi];
term_ind=yi-xi;
C=H\term_ind;
a=C(1);
c=C(2);

% Vector residuos. Error
res=abs(((C(1)+xi)./(1+C(2)*xi.^2))-yi);
error=norm(res)

%Estimación en x=2. Cifras significativas garantizadas:
x=2;
fi_2=(C(1)+x)/(1+C(2)*x^2)
cif_2=floor(-log10(abs(fi_2-yi(end))));

% Gráfica
xx=-1:0.01:2;
fi=(C(1)+xx)./(1+C(2)*xx.^2);
plot(xx,fi,xi,yi,'or')
```

(fi_2 = 2.9149)



32

4. $\boxed{\varphi(x)=\dfrac{a}{1+b\cos(x)}}$

Ecuación NO lineal

Ecuación Lineal

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1+b\cos(x_i)}=y_i \\ \text{i=1,...,n}\end{cases} \rightarrow \ldots \rightarrow a-b\cos(x_i)y_i=y_i$$

Se resuelve el sistema lineal anterior con elementos:

- Matriz de coeficientes: H=[xi.^0 -cos(xi).*y_i]
- Término independiente: y_i
- c=H\y_i (a=c(1) y b=c(2))

Residuo i=$\left|\varphi(x_i)-y_i\right|=\left|\dfrac{a}{1+b\cos(x_i)}-y_i\right|$

33

Otra posibilidad para llegar a un sistema lineal:

Ecuación Lineal (en A y B)

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1+b\cos(x_i)}\approx y_i \\ \text{i=1,...,n}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{y_i}\approx\dfrac{1+b\cos(x_i)}{a}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a}\cos(x_i) \rightarrow \text{A}+\text{B}\cos(x_i)=\dfrac{1}{y_i} \\ \text{i=1,...,n}\end{cases}$$

Se resuelve el sistema lineal anterior con elementos:

- Matriz de coeficientes: H=[xi.^0 cos(xi)]
- Término independiente: $y_i.\hat{}-1$
- c=H\(y_i.^-1) A=c(1) y B=c(2) → $\boxed{\text{a=1/A} \quad \text{b=aB}}$

34

(Examen Nov-2017) Se quiere ajustar por mínimos cuadrados los datos de la tabla:
con una función del tipo

xi	$-\pi$	$-\pi/2$	0
yi	2	-1	1

$$\varphi(x)=\frac{a+sen(x)}{b+\cos(x)} \text{ con la condición de que } \varphi'(\pi/2)=0.$$

Imponer la condición previa, linealizar el problema y resolver las ecuaciones normales correspondientes.

$*$ Tipo función aproximante: $\varphi(x)=\dfrac{a+sen(x)}{b+\cos(x)}$ con condición $\varphi'(\pi/2)=0$

Se impone que $\varphi(x)=\dfrac{a+sen(x)}{b+\cos(x)}$ sea tal que $\varphi'(\pi/2)=\dfrac{a+1}{b^2}=0 \Rightarrow a=-1, \quad b\neq 0.$

Por tanto la función aproximante es del tipo: $\boxed{\varphi(x)=\dfrac{-1+sen(x)}{b+\cos(x)}}$

$*$ Con esta función se ajustan los datos de la tabla:

$$\begin{cases}\dfrac{-1+sen(x_i)}{b+\cos(x_i)}=y_i \\ \text{i=1,2,3}\end{cases} \rightarrow -1+sen(x_i)=(b+\cos(x_i))y_i \rightarrow y_i\, b=-1+sen(x_i)-\cos(x_i)y_i$$

Escribiendo matricialemnte el sistema lineal sobredeterminado Hb=t resultante:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}_{H} b=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}}_{t}$$

$*$ Las ecuaciones normales vendrán dadas por H'Hb=H't, que operando resultan:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} b=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow 6b=2 \Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$$

Por tanto la función pedida es: $\varphi(x)=\dfrac{-1+sen(x)}{(1/3)+\cos(x)}$

Otra forma de llegar a un sistema lineal:

- Tipo función aproximante: $\varphi(x)=\dfrac{-1+sen(x)}{b+\cos(x)}$

- Con esta función se ajustan los datos de la tabla:

$$\begin{cases}\dfrac{-1+sen(x_i)}{b+\cos(x_i)}\approx y_i \\ \text{i=1,2,3}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{y_i}\approx\dfrac{b+\cos(x_i)}{-1+sen(x_i)}\approx b\dfrac{\cos(x_i)}{-1+sen(x_i)}+\dfrac{\cos(x_i)}{-1+sen(x_i)} \\ \text{i=1,2,3}\end{cases}$$

Escribiendo matricialemnte el sistema lineal sobredeterminado Hb=t resultante:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{\cos(x_i)}{-1+sen(x_i)}\end{pmatrix}}_{H} b=\underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{1}{y_i}-\dfrac{\cos(x_i)}{-1+sen(x_i)}\end{pmatrix}}_{t}$$

- Matlab: xi=[-pi -pi/2 0]'; yi=[2 -1 1]';

```
H=cos(xi)./(-1+sin(xi));
t=(yi.^-1)-(cos(xi)./((-1+sin(xi)));
b=H\t;
```

- ¿Cuál de las dos soluciones planteadas es mejor?

6. AJUSTE DE DATOS CON PESOS

- Tabla de datos (xi,yi)
- Tipo de función aproximante: u(x)
- Pesos: wi >=0 asignados a los distintos puntos

PROBLEMA DE AJUSTE CON PESOS:

$$\text{Min}\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i\,(u(x_i)-y_i)^2\right\}$$

Peso importancia error en dato i-ésimo

Error/desviación/residuo en dato i-ésimo

- Resolución mínimos cuadrados del sistema lineal 'con pesos': Multiplicamos las ecuaciones por la raíz cuadrada de los correspondientes pesos:

$\boxed{W^{1/2}\,Hc = W^{1/2}\,b}$ (1) con $W=\begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ & & \dots \\ 0 & 0 & w_n \end{pmatrix}$ (matriz diagonal)

- Ecuaciones normales: Multiplicamos (1) por $(W^{1/2}H)'$

$H'W^{1/2}W^{1/2}Hc = H'W^{1/2}W^{1/2}b \;\leftrightarrow\; H'WHc = H'Wb$

- Residuos: abs(u(xi)-yi)=abs(Hc-b)

EJEMPLO **Ajustar los datos de la Tabla por un polinomio de grado 1 atendiendo a los pesos wi.**

- **Plantear sistema a resolver.**
- **Plantear ecuaciones normales.**
- **Resolver con Matlab.**

xi	-1	0	1
yi	2	3	7
wi	1	1	1/2

1. Función aproximante: $p(x)=a+bx \quad \rightarrow$ 2 parámetros para ajustar los datos

2. Ecuaciones lineales incluyendo pesos ($\sqrt{W}H\,c=\sqrt{W}b$):

$$\begin{cases}\sqrt{w_i}\,(a+bx_i)=\sqrt{w_i}\,y_i \\ i=1,2,3\end{cases} \leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{1} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{1} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{0.5}\end{bmatrix}}_{\sqrt{W}} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{1} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{1} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{0.5}\end{bmatrix}}_{\sqrt{W}} \underbrace{\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 7\end{bmatrix}}_{B}$$

3. Ecuaciones normales (incluyendo pesos): $(\sqrt{W}H)'\sqrt{W}H\,c=(\sqrt{W}H)'\sqrt{W}b \Leftrightarrow H'WHc = H'Wb$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{H'} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}}_{W} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{H'} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}}_{W} \underbrace{\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 7\end{bmatrix}}_{B}$$

4. Con Matlab:

```
% Datos
xi=[-1:1]';
yi=[2 3 7]';
wi=[1 1 0.5];

% Sistema lineal (con pesos) a  resolver: sqrt(W)*H*c=sqrt(W)*yi
H=[xi.^0 xi];
W=diag(wi)    % W matriz diagonal con los pesos en la diagonal
c=(sqrt(W)*H)\(sqrt(W)*yi)
a=c(1)
b=c(2)

% Vector de residuos, errores en los puntos considerados:
res=abs(H*c-yi)
```

5. Comentarios:

- ¿El error que produce la recta calculada en el punto x=1 será mayor o menor que si se hubiera calculado la recta considerando todos los datos con el mimo peso?

- ¿La resolución mínimos cuadrados de los siguientes sistemas lineales será la misma?

1)	2)
$2x+2y=2$	$x+y=1$
$x+3y=2$	$x+3y=2$
$-x-5y=1$	$-x-5y=1$