V0.02

TEMA 2. INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES/DATOS

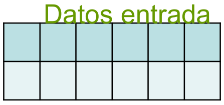
1. INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA GENERAL DE INTERPOLACIÓN. GENERALIDADES.
2. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS. TIPOS USUALES DE INTERPOLACIÓN
3. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL CLÁSICA
4. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE HERMITE
5. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL A TROZOS. FUNCIONES SPLINE

BIBLIOGRAFÍA

- Infante-Rey
- Cheney-Kincaid

1. Introducción. Problema general interpolación. Elementos

Datos entrada



→ INTERP. →

$\varphi(x)$

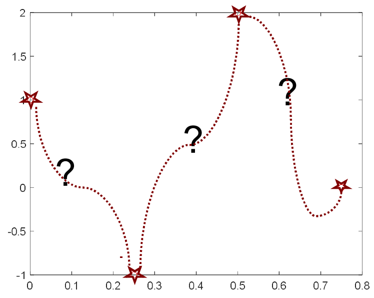
función coincide (con f(x)) en datos dados

Datos numéricos

Tabla de medidas, registro de valores de una cierta función f(x),..

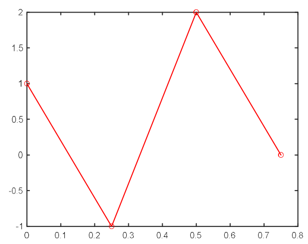
Por ejemplo:

x_i	0	0.25	0.5	0.75
$y_i=f(x_i)$	1	-1	2	0

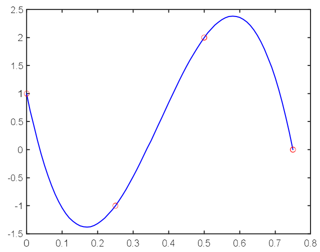


Función que "pase por" (coincida con) datos dados

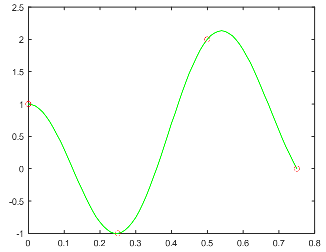
1. Interpolación por una <u>poligonal</u>



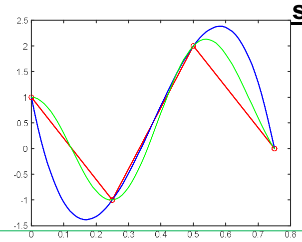
2. interpolación <u>por un polinomio de grado 3</u>



3. Interpolación por una función trigonométrica

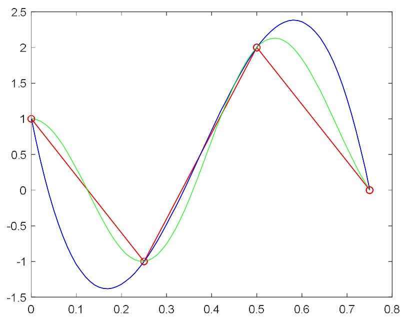


4. interpolación por una **<u>función del tipo señalado</u>**



<u>Función tipo señalado</u> <u>que "pase" por (</u>**<u>coincide</u>** <u>con)</u> **<u>datos dados</u>**

3



- Tenemos unos datos numéricos de partida
- Todas son funciones que pasan por los datos dados (<u>verifican los datos dados</u>)

¿Cuál es la función interpolante a considerar?

<u>ELEMENTOS</u> PROBLEMA INTERPOLACIÓN:

- **Datos numéricos** ('a coincidir')
- **Tipo función interpolante**

<u>INTERPOLAR</u>: Consiste en proporcionar una <u>función de tipo señalado</u> que **coincida** con los <u>datos numéricos dados</u>

4

EJEMPLO 1 (Caso 2 en ejemplo)

Interpolar por un polinomio de grado 3

$$\varphi(x) = c_1 1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

los datos de la tabla.

xi	0	1/4	1/2	3/4
yi	1	-1	2	0

Tipo función interpolante

Base: $\{1, x, x^2, x^3\}$

Dimensión 4

Datos numéricos

(4 condiciones interpol)

Plantamiento problema interpolación:

$\varphi(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$

Imponemos verifique condiciones de interpolación:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(0) &= c_1 + c_2 0 + c_3 0^2 + c_4 0^3 = c_1 = 1\\
\varphi(0.25) &= c_1 + c_2 0.25 + c_3 0.25^2 + c_4 0.25^3 = -1\\
\varphi(0.5) &= c_1 + c_2 0.5 + c_3 0.5^2 + c_4 0.5^3 = 2\\
\varphi(0.75) &= c_1 + c_2 0.75 + c_3 0.75^2 + c_4 0.75^3 = 0
\end{aligned}\right\}$$

$\uparrow$ 1 $\quad\uparrow$ xi $\quad\uparrow$ xi^2 $\quad\uparrow$ xi^3 $\quad\uparrow$ yi

Se resuelve el sistema lineal resultante y se calculan los valores de c_1, c_2, c_3 y c_4

(1 -31.33 120 -106.66).

Función interpolante:

$\varphi(x) =$ 1-31.33x+120x^2-106.66x^3

5

EJEMPLO 2 (Caso 3 en ejemplo)

Interpolar por una función trigonométrica del tipo

$$\varphi(x) = c_1 1 + c_2 \cos(2\pi x) + c_3 sen(2\pi x) + c_4 \cos(4\pi x)$$

los datos de la tabla.

xi	0	1/4	1/2	3/4
yi	1	-1	2	0

Tipo función interpolante

Base: $\{1, \cos(2\pi x), sen(2\pi x), \cos(4\pi x)\}$

Dimensión 4

Datos numéricos

(4 datos interpolar)

Plantamiento problema interpolación:

$\varphi(x) = c_1 + c_2 \cos(2\pi x) + c_3 \mathrm{sen}(2\pi x) + c_4 \cos(4\pi x)$

Imponemos verifique condiciones de interpolación:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(0) &= c_1 + c_2 \cos(2\pi 0) + c_3 sen(2\pi 0) + c_4 \cos(4\pi 0) = c_1 + c_2 + c_4 = 1\\
\varphi(1/4) &= c_1 + c_2 \cos(2\pi/4) + c_3 sen(2\pi/4) + c_4 \cos(4\pi/4) = c_1 + c_3 - c_4 = -1\\
\varphi(1/2) &= c_1 + c_2 \cos(2\pi/2) + c_3 sen(2\pi/2) + c_4 \cos(4\pi/2) = c_1 - c_2 + c_4 = 2\\
\varphi(3/4) &= c_1 + c_2 \cos(2\pi 3/4) + c_3 sen(2\pi 3/4) + c_4 \cos(4\pi 3/4) = c_1 - c_3 - c_4 = 0
\end{aligned}\right\}$$

$\uparrow$ 1 $\quad\uparrow$ $\cos(2\pi xi)$ $\quad\uparrow$ $\mathrm{sen}(2\pi xi)$ $\quad\uparrow$ $\cos(4\pi xi)$ $\quad\uparrow$ yi

Se resuelve el sistema lineal resultante y se calculan los valores de c_1,c_2,c_3 y c_4

y se sustituye en $\varphi(x)$

6

OBSERVACIONES:

1. En Ejemplo 1 y 2 resolver el problema interpolación equivale a resolver los sistemas de ecuaciones lineales 4x4 (datos numéricos=4=dimensión espacio funciones interpolante=nº parámetros libres a determinar=4).

2. Los problemas 1 y 2 tienen solución y es única en cada caso porque los sistemas lineales resultantes tienen solución y es única en cada caso -> Sistemas compatibles y determinados (determinante de la matriz de coeficientes del sistema es NO NULO).
3. ¿Qué ocurriría si nos hubieran dado los siguientes datos y nos pidieran interpolarlos por el mismo tipo de funciones:

-

xi	0	¼	½
yi	1	-1	2

-> Faltan datos!! No solución única

-

xi	0	0	¼	½
yi	1	2	-1	2

-> Datos incompatibles

-

xi	0	¼	½	¾	1
yi	1	-1	2	0	0

-> ¿En ejemplo 1?
-> ¿En ejemplo 2? (cos(2kpi)=1, sen(2kpi)=0, k=0,1,2,..)

-

xi	0	¼	½	1
yi	1	-1	2	1

-> En ejemplo 1: Sin problemas
-> En ejemplo 2: Dos parejas de datos equivalentes (dato redundante)
No solución única (cos(2kpi)=1, sen(2kpi)=0, k=0,1,2,..)

7

Problema general de interpolación

IN: Dado un conjunto discreto de datos numéricos de una función (f(x))

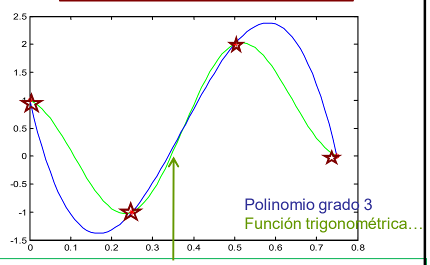
OUT: Construir una función de una determinada clase que coincida con f(x) en los datos numéricos dados

Datos entrada

-> INTERP. ->

Función interpolante tipo determinado que coincide con datos dados

x_i	0	0.25	0.5	0.75
$y_i=f(x_i)$	1	-1	2	0



Datos numéricos
(de una función f(x) en general)

Función interpolante
de una **clase determinada**
que coincide (con f(x)) en datos in

8

Elementos del problema

Elementos fundamentales que intervienen en un problema de interpolación:

1. Datos numéricos a interpolar (dados).

Por ejemplo:

- Valores de la función en un conjunto de puntos dados (tabla de datos):

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n).$$

x_0	x_1	....	x_n
y_0	y_1	....	y_n

- Valores de la función y su derivada en dos puntos (interpolación Hermite):

$$\left.\begin{matrix} f(x_0),\ f(x_1) \\ f'(x_0),\ f'(x_1) \end{matrix}\right\} \text{ conocidos.}$$

- Valores de la función en los puntos 0 y 1 y su valor medio en el intervalo [0,1]:

$$f(0) = y_0,\ f(1) = y_1,\ \int_0^1 f(x)dx = m, \text{ con } y_0,\ y_1 \text{ y } m \text{ conocidos.}$$

- Valores de la función y sus derivadas en un punto a (interpolación Taylor):
  f(a), f'(a),f''(a) conocidos.

9

2. Tipo de función interpolante: $\varphi \in$ clase de funciones admisibles

En general se trabaja con funciones "sencillas", fáciles de manejar desde el punto de vista computacional y que se representan y caracterizan por un número finito de parámetros $c_1,\ldots,c_n$ $\longrightarrow$ $\varphi(x) = \varphi(x; c_1,\ldots,c_n) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$

En general, se trabaja con funciones interpolantes que son combinaciones lineales (se generan a partir) de un conjunto finito de patrones o de una base de funciones.
-> En general se trabaja con conjuntos de funciones interpolantes con estructura de espacio vectorial de dimensión finita.

Algunos tipos de funciones interpolantes usuales:

- Polinomios de grado **n**: $\varphi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots c_nx^n$
  (Obs: Espacio de dimensión **n+1**. Base = {1, x, x^2, … ,x^n}).
- Funciones trigonométricas $\varphi(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k sen(kx).$
  (Obs: Espacio de dimensión 2n+1. Base = {1, cos(kx), sen(kx) con k=1:n}).
- Funciones polinómicas a trozos
- …..

10

Problema general interpolación

Problema general de interpolación:

Dados un conjunto discreto de datos numéricos (de una función f), se trata de construir una función $\varphi(x)$ de un tipo señalado que coincida con f(x) en el conjunto de datos numéricos dados →

$\varphi(x)$ FUNCIÓN INTERPOLANTE DE f(x) en el conjunto de datos dados.

Objetivos:

- Estudiar problema interpolación: Existencia y unicidad de solución del problema (nº de datos numéricos necesarios "no redundantes", nº parámetros libres del tipo de función interpol.,dimensión del espacio de funciones interpol.). En general estudiar sistema lineal.

- Calcular función interpolante pedida (analítica y computacionalmente).

- Estudiar el error de interpolación: $e(x) = \left| f(x) - \varphi(x) \right|.$

Función Interpolada (f(x)) — Función interpolante ($\varphi(x)$)

- Visualizar función interpolante.

11

2. Ejemplos ilustrativos. Tipos usuales de interpolación

EJEMPLO 1. Interpolar una función f(x) en los datos f(0)=0, f(1)=2, f(2)=0, por un polinomio de grado 2 (o polinomio de grado <=2 o polinomio de grado mínimo).

• **Elementos del problema:**

1. **Datos numéricos: f(0)=0, f(1)=2, f(2)=0** **(3 datos)**

Equivalente a dar la tabla de datos:

xi	0	1	2
yi=f(xi)	0	2	0

2. Tipo función interpolante: Polinomio grado 2

Conjunto polinomios grado 2 (o <=2) es esp. vectorial de dimensión 3 -> Cualquier polinomio de grado 2 se escribe como combinación lineal de los elementos de una base, por ejemplo {1, x, x^2}. Cualquier polinomio de grado 3 se escribe como:

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

PROBLEMA:
Calcular c_0, c_1 y c_2 (3 parámetros) tales que φ(xi)=yi ($\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=0$)

12

• **Plantamiento problema interpolación, estudio y resolución:**

Buscamos c_0, c_1 y c_2 tales que $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ verifique los datos de de interpolación:

$$\boxed{\begin{aligned}
\varphi(0) &= c_0 + c_1 0 + c_2 0 = f(0) = 0 \\
\varphi(1) &= c_0 + c_1 + c_2 = f(1) = 2 \\
\varphi(2) &= c_0 + c_1 2 + c_2 4 = f(2) = 0
\end{aligned}}$$

xi.^0 xi.^1 xi.^2 f(xi)

(1) SISTEMA LINEAL 3x3
(3 datos, 3 parámetros libres)

Escrito matricialmente Hc=b:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\substack{xi^0 \; xi^1 \; xi^2 \\ H}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{f(xi) \\ b}}$$

H: matriz coeficientes de las incógnitas
b: vector términos independientes
c: vector de incógnitas

Se resuelve el sistema, se calculan los valores c_0, c_1 y c_2 y se sustituyen en $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

13

OBSERVACIONES:

1. (1) es un sistema de ecuaciones lineales 3x3 (datos numéricos=3=dimensión espacio funciones interpolante=nº parámetros libres a determinar=3).

2. El problema planteado tiene solución y es única porque el sistema lineal (1) tiene solución y esta es única (sistema compatible y determinado) por ser

$$\det(H) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Si escribimos el sistema lineal (1) en forma matricial Hc=b:

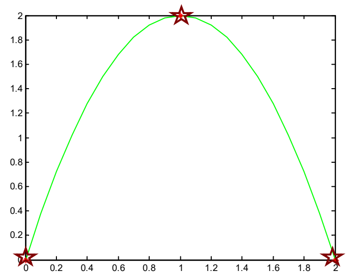
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\substack{xi^0 \; xi^1 \; xi^2 \\ H}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{f(xi) \\ b}}$$

- xi=[0 1 2]' vector columna de los valores x`s donde se va a interpolar
- Matriz H de coeficientes de las incógnitas del sistema H=[xi.^0 xi.^1 xi.^2]. Nótese que $\{x^0, x^1, x^2\}$ es una base del espacio funciones interpolantes
- b: Vector término independiente b=[0 2 0]' (f(0)=0 f(1)=2 f(2)=0)
- c: Vector de incógnitas (c=[c_0 c_1 c_2]')

14

• **Calculamos la solución:** Resolviendo el sistema lineal (1) se obtiene:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 4, \quad c_2 = -2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi(x) = 4x - 2x^2}$$



• ¿Qué ocurriría si nos piden interpolar en un dato más?:

- Por ejemplo f(0)=1. No solución. Incompatible con f(0)=0
- Por ejemplo f(0.5)=1.5. Se observa $\varphi(0.5)=1.5$ la función ya interpola en ese dato. Es un dato redundante respecto de los dados inicialmente, no aporta nueva información de la función.
- ¿Y si fuera el dato f(0.5)=1? No existe un polinomio de grado 2 que pase por los puntos dados inicialmente y además por este nuevo. Habría que buscar un polinomio de grado 3 (4 parámetros).

• **Resolvemos con Matlab:**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{H}^{xi.^0 \;\; xi.^1 \;\; xi.^2} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}^{f(xi)}$$

```
% 1. DATOS IN: Información numérica dada

% Vector columna con los nodos sobre los que tenemos los datos numéricos
xi=[0:2]';

% Vector columna con los valores de la función sobre los nodos anteriores:
yi=[0 2 0 ]';

% 2. MATRIZ COEFICIENTES (H) Y TÉRMINO INDEPENDIENTE (b) DEL SISTEMA LINEAL:

H=[xi.^0 xi.^1 xi.^2];
b=yi;

% 3. RESOLVEMOS EL SISTEMA, obteniendo los coeficientes del polinomio en el vector c:

c=H\b;  % Resolvemos el sistema y obtenemos vector c con los valores de los coeficientes (incógnitas)
c0=c(1);
c1=c(2);
c2=c(3);

% 4. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN INTERPOLANTE  en [0,2]:

% Primero definimos un conjunto de puntos auxiliares (bastante resolución) en el intervalo [0,2] sobre los que haremos la gráfica:
xx=0:0.1:2;
% Creamos el vector de valores del polinomio obtenido en dichos puntos:
yy=c0* xx.^0+c1* xx.^1 +c2*xx.^2;
% Pintamos la gráfica del polinomio interpolante en verde, señalando los puntos en los que se interpola con * rojos:
plot (xx, yy, ‘g’, xi, yi,’*r’);
```

EJEMPLO 2. Interpolar por una función trigonométrica del tipo

$$\varphi(x) = c_1 1 + c_2 \cos(2\pi x) + c_3 sen(2\pi x) + c_4 \cos(4\pi x)$$

Tipo función interpolante
Base: $\{1, \cos 2\pi x, sen 2\pi x, \cos 4\pi x\}$
Dimensión 4

los datos de la tabla.

xi	0	1/4	1/2	3/4
yi	1	-1	2	0

Datos numéricos (4 condiciones interpol)

Plantamiento problema interpolación:

Imponemos que $\varphi(x) = c_1 + c_2 \cos(2\pi x) + c_3 sen(2\pi x) + c_4 \cos(4\pi x)$ verifique las condiciones de interpolación y obtenemos el sistema lineal:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= c_1 + c_2 \cos(2\pi 0) + c_3\, sen(2\pi 0) + c_4 \cos(4\pi 0) = & c_1 + c_2 \quad + c_4 &= 1\\
\varphi(1/4) &= c_1 + c_2 \cos(2\pi/4) + c_3\, sen(2\pi/4) + c_4 \cos(4\pi/4) = & c_1 \quad + c_3 - c_4 &= -1\\
\varphi(1/2) &= c_1 + c_2 \cos(2\pi/2) + c_3\, sen(2\pi/2) + c_4 \cos(4\pi/2) = & c_1 - c_2 + \quad c_4 &= 2\\
\varphi(3/4) &= \underset{\uparrow\atop 1}{c_1} + c_2 \underset{\uparrow\atop \cos(2\pi xi)}{\cos(2\pi 3/4)} + c_3\, \underset{\uparrow\atop \mathrm{sen}(2\pi xi)}{sen(2\pi 3/4)} + c_4 \underset{\uparrow\atop \cos(4\pi xi)}{\cos(4\pi 3/4)} = & c_1 \quad - c_3 - c_4 &= \underset{\uparrow\atop yi}{0}
\end{aligned}$$

Escribimos el sistema lineal en forma matricial **Hc=b** con

- **H:** matriz de coeficientes del sistema

  H=[xi.^0 cos(2*pi*xi) sin(2*pi*xi) cos(4*pi*xi)]

  con xi=[0:1/4:3/4]' (vector columna)
  Nota: {x^0, cos(2*pi*x), sin(2*pi*x), cos(4*pi*x) } base del espacio de funciones interpolantes

- **b:** término independiente b=[1 -1 2 0]'
  (vector columna con datos yi)

- **c** es el vector de incógnitas (c=[c1,c2,c3,c4]', c1=c(1),…,c4=c(4))

Notas:
1. Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal 4x4 (datos numéricos=4, =dimensión espacio funciones interpolantes=nº parámetros libres a determinar).

2. El problema planteado tiene solución y es única porque el sistema lineal tiene solución y ésta es única (sistema compatible y determinado) por ser $\det(H) \neq 0$.

• **Calculamos la solución:** Resolviendo el sistema lineal se obtiene:

$c_1 = 0.5, \quad c_2 = -0.5, \quad c_3 = -0.5 \quad c_4 = 1 \rightarrow \boxed{\varphi(x) = 0.5 - 0.5(\cos 2\pi x) - 0.5 sen(2\pi x) + \cos(4\pi x)}$

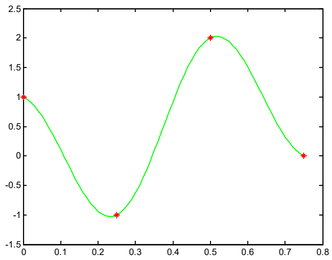
• **Resolvemos con Matlab:**

```
% Datos in:
xi=[0:0.25:3/4]';
yi=[1 -1 2 0]';

% Construimos  y resolvemos el  sistema lineal Hc=b:
H=[xi.^0 cos(2*pi*xi) sin(2*pi*xi) cos(4*pi*xi)];
b=yi;
c=H\b    %Resolvemos sistema lineal

% Gráfica de la función interpolante en [0,3/4] y puntos donde interpola
xx=0:0.01:3/4;
yy=c(1)+c(2)*cos(2*pi*xx)+c(3)*sin(2*pi*xx)+c(4)*cos(4*pi*xx);
plot(xx,yy,'g',xi,yi,'*r')

% Estimación que proporciona la función interpolante en el punto 0.4
x=0.4;
Val_Interp=c(1)+c(2)*cos(2*pi*x)+c(3)*sin(2*pi*x)+c(4)*cos(4*pi*x);
```



• **¿Cuál es la estimación** del valor de la función que proporciona la función interpolante en x=0.4?

$$\varphi(0.4) = 0.5 - 0.5\cos(2\pi 0.4) - 0.5 sen(2\pi 0.4) + \cos(4\pi 0.4) = 1.3241$$

OBSERVACIONES:

1. Las ecuaciones usadas forman un sistema lineal 4x4 (<u>datos numéricos=4, =dimensión espacio funciones interpolantes=nº parámetros libres a determinar</u>).

2. El problema planteado tiene solución y es única porque el sistema lineal tiene solución y ésta es única (sistema compatible y determinado) por ser $\det(H) \neq 0$.

3. ¿Qué ocurriría si en los datos a interpolar se sustituye en la tabla el último nodo de interpolación (3/4,0) por (1,0)? NO EXISTE SOLUCIÓN.

Sistema indeterminado det(H)=0. ¿Qué está ocurriendo?

$\varphi(x)$ es periódica, de período 1: $\varphi(x) = \varphi(x+1) = \varphi(x+k)$, k entero

$\rightarrow \varphi(0) = \varphi(1)!!!$

4. ¿Qué pasaría si se amplía la tabla con un dato más?

xi	0	1/4	1/2	3/4	
yi	1	-1	2	0	

Funciones interpol.: $\varphi(x) = c_1 1 + c_2 \cos(2\pi x) + c_3 sen(2\pi x) + c_4 \cos(4\pi x)$

- Por ejemplo, si queremos que además pase por el punto (0.8,1): Necesitaríamos un parámetro más.
- Por ejemplo, si queremos que además pase por el punto (1,1): Dato adicional redundante (misma información que primer dato de la tabla por ser las funciones interpolantes periódicas, de período 1)

EJEMPLO 3. Interpolar por una función del tipo

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 x^3 + c_4 \frac{1}{1+x^2}$$

Tipo función interpolante
Base $\left\{ e^x, \cos x, x^3, \frac{1}{1+x^2} \right\}$
Dimensión=4

los datos de la tabla

xi	0	1	2	3
yi	0	1	1.2	1.5

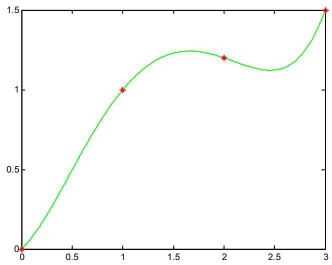
Datos numéricos (**4 condiciones interpol**)

Plantamiento problema interpolación: Imponemos las condiciones de interpolación, resultando el sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_i) = c_1 \boxed{e^{x_i}} + c_2 \boxed{\cos(x_i)} + c_3 \boxed{x_i^3} + c_4 \boxed{\frac{1}{1+x_i^2}} = y_i \\ \qquad i = 1,..,4 \end{array} \right.$$

Resolución con Matlab

```
% Datos:
xi=[0:3]'; yi=[0 1 1.2 1.5]';
% Sistema lineal, resolución
H=[exp(xi) cos(xi) xi.^3 1./(1+xi.^2)]; b=yi;
c=H\b;
% Gráfica de la función interpolante y nodos interpolación
xx=0:0.01:3;
yy=c(1)*exp(xx)+c(2)*cos(xx)+c(3)*xx.^3+c(4)*(1./(1+xx.^2));
plot(xx,yy,'g',xi,yi,'*r')
% Solución c =  6.3079e-01  1.4980e-01  -4.0531e-01  -7.8060e-01
```



21

EJEMPLO 4. Se considera un móvil cuyas posiciones (yi) se han medido en determinados instantes de tiempo (ti). Se trata de calcular una función u(t) de tipo polinómico grado menor posible que interpole los datos de las posiciones del móvil de la tabla

ti	0	1
yi	0	2

sabiendo además que u'(0)=0.
Observación: - Datos numéricos: 3 condiciones interpolación (2 datos tabla + u'(0)=0)
- Tipo función interpolante: Polinomio grado ?

• **Planteamiento problema interpolación:**

$$u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$

Imponemos verifique condiciones de interpolación:

$$\left. \begin{array}{l} u(0) = \quad c_1 = 0 \\ u(1) = c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ u'(0) = c_2 = \ 0 \end{array} \right\} (1)$$

• **Existencia y unicidad de la solución:** El problema tiene solución y es única porque es lo que le ocurre al sistema lineal (1), por ser el determinante de la matriz de coeficientes distinto de 0.

• **Cálculo de la solución**: Resolviendo el sistema lineal (1) obtenemos que c1=c2=0, c3=2. Por tanto: u(t)= 2t^2

• **Estimar la posición aproximada** del móvil en el instante 0.25: u(0.25)=0.125

22

Nota. Otro posible enunciado y resolución para Ejemplo 4:

Se quiere interpolar los datos de la Tabla del problema anterior (posiciones del móvil en los instantes 0 y 1) por un polinomio u(t) de grado dos cuya derivada en t=0 es cero (u'(0)=0, velocidad inicial del móvil es 0).

1. Tipo de función interpolante: Veamos cuál es la forma general de las funciones interpolantes a considerar:

$$\left.\begin{array}{l} u(t)=c_0+c_1t+c_2t^2 \\ + \\ u'(0)=0 \end{array}\right\} \rightarrow u'(0)=c_1=0 \rightarrow \boxed{u(t)=c_0+c_2t^2} \;\; (2 \text{ parámetros libres para interpolar})$$

2. Datos a interpolar: Tabla dada (2 datos)

3. Planteamos el problema interpolación:

$$u(t)=c_1+c_3t^2$$

Imponemos verifique condiciones de interpolación:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l} u(0)=\quad c_1=0 \\ u(1)=c_1+c_3=2 \end{array}\right\}}_{\text{sistema 2x2}} \rightarrow \ldots.\; u(t)=2t^2$$

EJEMPLO 5 Se trata de interpolar los datos de la tabla

xi	0	1
yi	0	2

por una función p(x) polinomial de grado mínimo con derivada igual a 1 en x=0.

1.Tipo función interpolante: polinomio grado mínimo +p'(0)=1

- Grado mínimo: 2 datos interpolación +1 restricción -> necesito en principio 3 parámetros -> grado 2
- Forma general de los polinomios de grado 2+p' (0)=1:

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2 \\ + \\ p'(0)=1 \end{array}\right\} \rightarrow p'(0)=c_1=1 \rightarrow \boxed{p(x)=c_0+x+c_2x^2}$$

No lleva incógnita

2. Planteamos problema interpolación:

$$\begin{cases} p(x_i)=c_0+x_i+c_2x_i^2=\mathrm{y_i} \rightarrow c_0+c_2x_i^2=\mathrm{y_i}-x_i \\ i=1,2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(0)=c_0+0+c_2 0^2=0 \\ p(1)=c_0+1+c_2 1^2=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} c_0+c_2 0=0 \\ c_0+c_2 1^2=2-1 \end{array}\right\} \rightarrow \ldots\, c_0=0, c_2=1 \rightarrow p(x)=x+x^2$$

3. Con Matlab:

```
xi=[0 1]';  %Datos
yi=[0 2]';
H=[xi.^0  xi.^2]; b=yi-xi; %matrix coeficientes y término independiente sistema
c=H\b; %Resolvemos sistema y obtenemos dos coeficientes
xx=0:0.01:1;  %Gráfica de la función y de los puntos donde interpola
yy=c(1)*xx.^0+xx+c(2)*xx.^2;
plot(xx,yy,'g',xi,yi,'*r')
```

EJEMPLO 6. Se quiere interpolar una función f(x) dada por un polinomio del tipo $p(x)=a+bx^2$ en los puntos x_0 y x_1.

1. ¿Qué condiciones tienen que cumplir x_0 y x_1 para que el problema de interpolación tenga solución única?

Tipo función interpolante: $\boxed{p(x)=a+bx^2}$ Imponemos verifique condiciones de interpolación:

Datos:

$$\left.\begin{array}{l} p(x_0)=a+bx_0^2=f(x_0) \\ p(x_1)=a+bx_1^2=f(x_1) \end{array}\right\}(1)$$

$(f(x_0), f(x_1)$ dados)

El sistema lineal (1) tiene solución y es única si el determinante de la matriz de coeficientes del sistema es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0^2 \\ 1 & x_1^2 \end{vmatrix} = x_1^2 - x_0^2 = (x_1-x_0)(x_1+x_0) \neq 0.$$

Por tanto, el problema tiene solución única si $\boxed{x_1 \neq \pm x_0}$

Obs.: Si $x_1 = \pm x_0$ y $f(x_1) = f(\pm x_0) \rightarrow$ Hay infinitas soluciones

Si $x_1 = \pm x_0$ y $f(x_1) \neq f(\pm x_0) \rightarrow$ No existe solución

Notas.

1. La familia de funciones interpolantes es un subtipo de los polinomios de grado 2. Concretamente es la familia de polinomios de grado 2 con derivada 0 en x=0 (p'(0)=0). 2 parámetros libres.
2. Las funciones interpolantes son pares p(x)=p(-x). Gráficamente: parábolas simétricas respecto eje y.

2. Aplicar a los siguientes casos y calcular la solución o soluciones, si existen:

2. 1. Caso f(x)=sen(x), x_0=0, x_1=pi/2.

Resolviendo el sistema resultante en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} a+b0=0 \\ a+b\pi^2/4=1 \end{array}\right\} \rightarrow a=0, b=4/\pi^2 \rightarrow \boxed{p(x)=\frac{4}{\pi^2}x^2} \rightarrow \text{El problema tiene solución y es única}$$

Observación: Se cumple $x_1 \neq \pm x_0$

2.2. Caso f(x)=sen(x), x_0=-pi/2, x_1=pi/2.

Resolviendo el sistema resultante en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} a+(\frac{-\pi}{2})^2 b=-1 \\ a+(\frac{\pi}{2})^2 b=1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Ecuaciones incompatibles.} \rightarrow \text{No existe solución}$$

Observación:

1. La función f(x)=sen(x) es una función impar (f(x)=-f(-x))
2. Caso $\boxed{x_1=-x_0, f_1=-f_0,}$

2.3. Caso f(x)=cos(x), x_0=0, x_1=pi/2.

Resolviendo el sistema resultante en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} a+b0=1 \\ a+b\pi^2/4=0 \end{array}\right\} \rightarrow a=1, b=-4/\pi^2 \rightarrow \boxed{p(x)=1-\frac{4}{\pi^2}x^2} \rightarrow \text{El problema tiene solución y es única}$$

Observación: Se cumple $x_1 \neq \pm x_0$

2.4. Caso f(x)=cos(x), x_0=-pi/2, x_1=pi/2.

Resolviendo el sistema resultante en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} a+(\frac{-\pi}{2})^2 b=0 \\ a+(\frac{\pi}{2})^2 b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a=-(\frac{\pi}{2})^2 b \rightarrow \boxed{p(x)=b(\frac{\pi}{2})^2(-1+x^2)} \rightarrow \text{Infinitas soluciones}$$

Observación:

- La función f(x)=cos(x) es una función par. En este caso cos(-pi/2)=cos(pi/2).
- Caso: $\boxed{x_1=-x_0, f_1=f_0,}$

EJEMPLO 7 (Interpolación de Taylor)

- **Elementos del problema:**

1. **Datos numéricos:**

$$f(a)=f_a, \quad f'(a)=f'_a, \quad f''(a)=f''_a \quad (a, f_a, f'_a, f''_a \text{ conocidos})$$

2. **Tipo función interpolante:** $\varphi(x)=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$

Generada a partir de las funciones {1,exp(x),exp(-x)} (base)

- **Plantamiento problema interpolación:**

$\varphi(x)=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$

Imponemos verifique condiciones de interpolación:

$$\begin{array}{l} \varphi(a)=c_1+c_2e^a+c_3e^{-a}=f_a \\ \varphi'(a)=c_2e^a-c_3e^{-a}=f'_a \\ \varphi''(a)=c_2e^a+c_3e^{-a}=f''_a \end{array} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & e^a & e^{-a} \\ 0 & e^a & -e^{-a} \\ 0 & e^a & e^{-a} \end{pmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_a \\ f'_a \\ f''_a \end{pmatrix}}_{b}$$

• **Existencia y unicidad de la solución:**

$$\det(\mathrm{H}) \neq 0.$$

• **Resolvemos el sistema y calculamos la solución:**

$$c_1 = f_a - f'_a, \quad c_2 = \frac{1}{2}(f_a + f'_a)e^{-a}, \quad c_3 = \frac{1}{2}(f''_a - f'_a)e^{a}$$

<u>Aplicación</u>: Interpolar la función f(x)=sin(x) con a=0. Además con la ayuda de Matlab:

- Pintar en una misma gráfica f(x) y $\varphi(x)$ en el intervalo [-0.5, 0.5] (subplot(1,2,1)).
- Pintar la función error

$$error(x) = |f(x) - \varphi(x)|$$

en el intervalo *[-0.5, 0.5]* (subplot(1,2,2)).

- Si se aproxima sin(0.2) por la simulación que produce la función interpolante en 0.2 ($\varphi(0.2)$) ¿cuántas cifras decimales significativas se obtienen?

29

EJEMPLO 8 (Interpolación de Taylor por funciones racionales. Sistema no lineal)

• **<u>Elementos del problema:</u>**

1. Datos numéricos:

$$f(a) = f_a, \quad f'(a) = f'_a, \quad f''(a) = f''_a \quad (a, f_a, f'_a, f''_a \text{ conocidos})$$

2. Tipo función interpolante: $\varphi(\mathrm{x}) = \dfrac{c_1 + c_2(\mathrm{x-a})}{1 + c_3(\mathrm{x-a})}$

• **<u>Planteamiento problema interpolación:</u>**

Imponemos $\varphi(\mathrm{x})$ verifique condiciones de interpolación:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{a}) &= c_1 &&= f(\mathrm{a}) \quad (1)\\
\varphi'(\mathrm{a}) &= c_2 - c_1c_3 &&= f'(\mathrm{a}) \quad (2)\\
\varphi''(\mathrm{a}) &= -2c_3(c_2 - c_1c_3) &&= f''(\mathrm{a}) \quad (3)
\end{aligned}$$

SISTEMA **NO** LINEAL

30

$$\text{Tenemos el sistema no lineal: } \begin{cases} c_1 & = f(\mathrm{a}) \quad (1) \\ c_2 - c_1 c_3 & = f'(\mathrm{a}) \quad (2) \\ -2c_3 \underbrace{(c_2 - c_1 c_3)}_{f'(\mathrm{a})} & = f''(\mathrm{a}) \quad (3) \end{cases}$$

1. Caso $f'(\mathrm{a}) \neq 0$. Resolviendo el sistema se obtiene:

$$c_1 = f(\mathrm{a}), \quad c_3 = \frac{-f''(\mathrm{a})}{2f'(\mathrm{a})}, \quad c_2 = f'(\mathrm{a}) - \frac{f(\mathrm{a})f''(\mathrm{a})}{2f'(\mathrm{a})}$$

Por tanto: existe solución y es única (dada por los coeficientes anteriores)

2. Caso $f'(\mathrm{a}) = 0$. Distinguimos dos subcasos:

2.1. Caso $f''(\mathrm{a})=0$, se obtiene $c_1 = f(\mathrm{a})$, $c_2 = c_1 c_3 = f(\mathrm{a})c_3$

Por tanto, en este caso existen infinitas soluciones.

2.2. Caso $f''(\mathrm{a}) \neq 0$, no existe solución al ser incompatibles las ecuaciones (2) y (3).

3. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL CLÁSICA

3.1. Problema de interpolación polinomial clásica:

Construcción preliminar

Existencia y unicidad de la solución

3.2. Fórmula de Newton. Diferencias divididas

3.3. Error de interpolación polinomial clásica (en laboratorio)

3.1. Problema de interpolación POLINOMIAL CLÁSICA

- DATOS NUMÉRICOS: $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \ldots, f(x_n)=y_n$ n+1 datos

Se conocen los valores de una función $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \ldots, f(x_n)=y_n$ en un conjunto de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos.

(La expresión de la función f(x) no necesariamente es conocida)

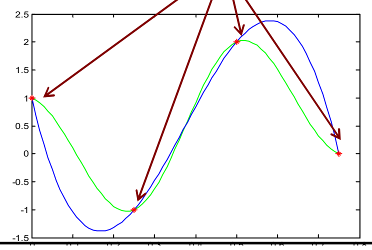
- TIPO DE FUNCIÓN INTERPOLANTE: p(x) polinomio de grado n Espacio de dimensión n+1

PROBLEMA: Encontrar polinomio grado n (o polinomio de grado <= n, o polinomio de menor grado) que coincida con f(x) en los datos dados, esto es, cuya gráfica pase por los puntos $(x_i, y_i), i=0,\ldots,n$

$$\boxed{p(x_0)=f(x_0)=y_0, \ldots, p(x_n)=f(x_n)=y_n}$$

$\downarrow$

p(x) interpola a f(x) en los puntos xi, i=0,..,n



33

3. 1. Interpolación polinomial clásica: Elementos del problema

1. Datos numéricos dados a interpolar.
Nos los pueden dar de alguna de las siguientes formas:

- Valores de la función en un conjunto de puntos dados

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1), \ldots, y_n=f(x_n).$$

- Tabla de datos:

xi	x0	…	xn
yi	y0	…	yn

- Valores del polinomio en los puntos

$$y_0=p(x_0),\ y_1=p(x_1), \ldots, y_n=p(x_n).$$

- Puntos por los que tiene que pasar la gráfica de la función pedida

$$(x_0,y_0),\ (x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$$

34

2. Tipo de función interpolante: p(x) polinomio de grado n

$$p(x) = c_0 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots c_n x^n$$

$$\{1, \quad x, \quad x^2, \dots, x^n\} \ \underline{una\ \text{base}} \text{ del espacio polinomios grado n}$$

- {polinomios de grado n (ó <=n)} espacio vectorial de **dimensión n+1**
- n+1 parámetros libres ($c_0, c_1, \dots, c_n$) para interpolar n+1 datos

Observ. La expresión general de p(x) se podría expresar en términos de otras bases, por ejemplo $\{1, \quad x-1, \quad (x-1)^2, \dots, (x-1)^n\}$,

$\{1, \quad (x-x_0), \ (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\}$

....

35

3.1. Interpolación polinomial clásica: Construcción preliminar

Expresión general polinomio de grado n:
(en base {1,x,…,xⁿ})

$$\boxed{p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n}$$

n+1 INCOGNITAS

Imponemos p(x) verifique los datos de interpolación (n+1) :

$$\left.\begin{array}{l} p(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_n x_0^n = y_0 \\ p(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_1^n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p(x_n) = c_0 + c_1 x_n + \dots + c_n x_n^n = y_n \end{array}\right\}$$

SISTEMA LINEAL
(n+1)x(n+1) ECUACIONES:

Dimensión espacio vect. polinomios grado n = nº de incógnitas = n+1.
Nº de condiciones de interpolación= n+1

Si escribimos el sistema lineal en forma matricial Hc=b:
- Matriz H de coeficientes del sistema H=[xi.^0 xi.^1 … xi.^n] con xi=[xo x1 … xn]'
- Término independiente b=[y0 y1 … yn]'
- c =H\b es el vector de incógnitas (co=c(1),…,cn=c(n+1))

36

Observación: Estamos usando la base {1, x,…,x^n} para expresar el polinomio

OBSERVACIONES:

1. Se obtiene un sistema de (n+1)x(n+1) ecuaciones lineales (datos numéricos "independientes"= dimensión espacio polinomios de grado n=nº parámetros libres en polinomio=n+1).

2. El problema planteado tiene solución y es única porque el sistema lineal planteado tiene solución y esta es única (sistema compatible y determinado) por ser el determinante de la matriz de coeficientes no nulo:

$$\det(H)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0 \quad \text{si} \quad x_i \neq x_j \quad \forall\, i \neq j \quad \text{(puntos distintos)}$$

(Determinante Vandermonde)

3. En la construcción anterior estamos usando la base de polinomios de grado n $\{1, x, \dots, x^n\}$. Se pueden utilizar otras bases (de interés si proporcionan un cálculo mas eficiente).

37

Ejemplo 1. Construir el polinomio p(x) de menor grado que interpola los datos f(0)=0, f(1)=2, f(2)=0.

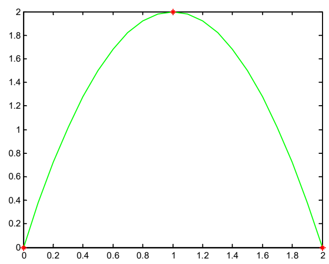
- **Tipo función interpolante**: En principio 3 parámetros para interpolar 3 datos: Polinomio grado 2:

$$\boxed{p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2}$$

- **Planteamiento y resolución del problema:**

Calcular c_0, c_1 y c_2 tales que $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ verifique las condiciones de interpolación:

$$\left.\begin{array}{l} p(0) = c_0 + c_1 0 + c_2 0 = f(0) = 0 \\ p(1) = c_0 + c_1 + c_2 = f(1) = 2 \\ p(2) = c_0 + c_1 2 + c_2 4 = f(2) = 0 \end{array}\right\}$$



Resolviendo el sistema lineal:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 4, \quad c_2 = -2 \quad \rightarrow \quad \underline{p_2(x) = 4x - 2x^2}$$

38

- **Resolvemos con Matlab:**

```
% 1. DATOS IN:
% Vector columna con los nodos sobre los que tenemos los datos numéricos
xi=[0:2]';
% Vector columna con los valores de la función sobre los nodos anteriores:
yi=[0 2 0] ';

% 2. MATRIZ COEFICIENTES (H) Y TÉRMINO INDEPENDIENTE (b) DEL SISTEMA:
H=[xi.^0 xi.^1 xi.^2];
b=yi;

% 3. RESOLVEMOS EL SISTEMA, obteniendo los coeficientes del polinomio en el vector c:
c=H\b;
c0=c(1);
c1=c(2);
c2=c(3);
```

Coeficientes de p(x) en base {1,x,x^2,x^3}

```
% 4. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN INTERPOLANTE: Queremos representar gráficamente el polinomio p(x) y
 %los puntos dónde interpola:

% Primero definimos un conjunto de puntos auxiliares en el intervalo [0,2] sobre los que haremos la gráfica:
xx=0:0.1:2;
% Creamos el vector de valores del polinomio obtenido en dichos puntos:
yy=c0* xx.^0+c1* xx.^1 +c2*xx.^2; (o  polyval(c(end:-1:1), xx);)
% Pintamos la gráfica del polinomio interpolante en verde, señalando los puntos en los que se interpola con * rojos:
plot (xx, yy, 'g', xi, yi,'*r');

% 5. ESTIMAMOS f(1.1)  vía su polinomio de interpolación  f(1.1)~p(1.1).  Evaluamos p(1.1):
Veremos técnicas más  eficientes
a=1.1; faprox=c0*+c1* a +c2*a^2;  (o polyval(c(end:-1:1), a);)
```

39

Ejemplo 2. Construir el polinomio de menor grado que interpole los datos de la siguiente tabla (o cuya gráfica pase por los puntos dados en la tabla):

xi	0	0.25	0.5	0.75
fi	1	-1	2	0

- **Construir el polinomio** mas sencillo que pasa por los puntos de la tabla (4 datos a interpolar, necesitamos en principio 4 parámetros->grado 3) $\rightarrow p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

- **Evaluar** el polinomio en x=0.3 $\longrightarrow \; p(0.3) = ?$

Solución

$$p(xi) = fi \;\rightarrow\; \begin{cases} p(0)=1 \\ p(0.25)=-1 \\ p(0.5)=2 \\ p(0.75)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + c_3 0^3 = 1 \\ c_0 + c_1 0.25 + c_2 0.25^2 + c_3 0.25^3 = -1 \\ c_0 + c_1 0.5 + c_2 0.5^2 + c_3 0.5^3 = 2 \\ c_0 + c_1 0.75 + c_2 0.75^2 + c_3 0.75^3 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.25^2 & 0.25^3 \\ 1 & 0.5 & 0.5^2 & 0.5^3 \\ 1 & 0.75 & 0.75^2 & 0.75^3 \end{array}\right) & \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{xi.^0} \;\; \text{xi.^1} \;\; \text{xi.^2} \;\; \text{xi.^3} & & \text{fi} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -31.33 \\ 120 \\ -106.66 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{p(x) = 1 - 31.33\,x + 120\,x^2 - 106.66\,x^3}$$

$$p(0.3) = 1 - 31.33 \times 0.3 + 120 \times 0.3^2 - 106.66 \times 0.3^3 = -0.48 \;\rightarrow\; \boxed{p(0.3) = -0.48}$$

3.2. Fórmula de Newton. Diferencias divididas

Ejemplo 1+dato nuevo: Construir el polinomio p(x) de grado 3 que interpole los datos:

$$\underbrace{\mathrm{f}(0)=0,\ \mathrm{f}(1)=2,\ \mathrm{f}(2)=0}_{\downarrow} \qquad \mathrm{f}(3)=1$$

$$\underbrace{\mathrm{p}_2(x)\ \text{calculado Ejemplo 1} \quad + \quad ?}_{\downarrow}$$

$$p(x) = \mathrm{p}_2(x) + ??$$

Veremos una fórmula recurrente que permite calcular el polinomio de interpolación de grado n en los puntos $x_0,...,x_{n-1},x_n$ a partir del polinomio de interpolac. de grado n-1 en $x_0,...,x_{n-1}$:

$$p_n(x) \quad = \quad p_{n-1}(x) \quad + \quad A \,*(x-x_0)*...*(x-x_{n-1})$$

Polinomio grado n interpola en $x_0,..,x_{n-1},x_n$

Polinomio grado n-1 interpola en $x_0,..,x_{n-1}$

Diferencias divididas

41

Diferencias divididas. Definición

DEFINICIÓN:

Sean $x_0,...,x_n$ puntos distintos.

- <u>Diferencias divididas de grado 0</u> de f en x_0 :

$$f\left[x_0\right] = f(x_0).$$

- <u>Diferencias divididas de grado 1</u> de f en x_0 y x_1 :

$$f\left[x_0,x_1\right] = \frac{f\left[x_1\right]-f\left[x_0\right]}{x_1-x_0}, \quad (x_0 \neq x_1).$$

....

- <u>Diferencias divididas de grado n</u> de f en $x_0, x_1,..,x_n$:

$$f\underbrace{\left[x_0, x_1,..,x_n\right]}_{n+1\,puntos} = \frac{f\left[x_1,..,x_n\right]-f\left[x_0,..,x_{n-1}\right]}{x_n-x_0}, \quad (x_0 \neq x_n).$$

42

Diferencias divididas. Construcción Tabla Diferencias Divididas

TABLA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS:

$$
\begin{array}{llllll}
x_k & f[x_k] & f[\bullet,\bullet] & f[\bullet,\bullet,\bullet] & \dots & f[x_0,x_1,\dots,x_n] \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & \dots & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1,x_2]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} & & \\
.. & .. & \dots & \dots & & \\
x_n & f(x_n) & f[x_{n-1},x_n]=\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & & f[x_0,x_1,\dots,x_n]
\end{array}
$$

Observación: Los elementos de la diagonal serán los coeficientes de la Fórmula de Newton que veremos más adelante

43

Diferencias divididas. Ejemplo

EJEMPLO. Calculamos la tabla de diferencias dividias de función f(x), relativa a los datos $f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(2)=0$

$$
\begin{array}{llll}
x_i & f[x_i] & f[x_j,x_k] & f[x_j,x_k,x_l] \\
\hline
0 & f(0)=0 & & \\
1 & f(1)=2 & f[0,1]=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=2 & \\
2 & f(2)=0 & f[1,2]=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=-2 & f[0,1,2]=\dfrac{f[1,2]-f[0,1]}{2-0}=-2
\end{array}
$$

Diferencias div grado 0 — Diferencias div. grado 1 — Diferencias div. grado 2

44

FÓRMULA DE NEWTON

Fórmula de Newton del polinomio de interpolación polinomial clásico:

$$p_n(x)=\underbrace{\underbrace{\underbrace{f[x_0]}_{p_0(x)}+f[x_0,x_1](x-x_0)}_{p_1(x)}+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)}_{p_2(x)}+\ldots+f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

con:

$p_0(x)$: polinomio grado 0 que interpola a f en x_0

$p_1(x)$: polinomio grado 1 que interpola a f en x_0, x_1

...

$p_n(x)$: polinomio grado n que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Observaciones:

1. Fórmula recurrente, permite calcular el polinomio de interpolación de grado n a partir de polinomios de interpolación de grado inferior.
2. Polinomio expresado en base $\{1, x-x_0, \ldots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$.

45

Ejemplo 3: Construir el polinomio p(x) de grado 3 que interpole los datos:

f(0)=0, f(1)=2, f(2)=0, f(3)=1

• Tabla de diferencias divididas:

x_k	$f[x_k]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	0			
1	2	$f[0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2$		
2	0	$f[1,2]=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-2$	$f[0,1,2]=\frac{f[1,2]-f[0,1]}{2-0}=-2$	
3	1	$f[2,3]=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=1$	$f[1,2,3]=\frac{f[2,3]-f[1,2]}{3-1}=\frac{3}{2}$	$f[0,1,2,3]=\frac{f[1,2,3]-f[0,1,2]}{3-0}=\frac{\frac{3}{2}+2}{3}=\frac{7}{6}$

· Fórmula de Newton del polinomio de interpolación:

$$p_3(x)=\underbrace{\underbrace{\underbrace{f[0]}_{p_0(x)}+f[0,1](x-0)}_{p_1(x)}+f[0,1,2](x-0)(x-1)}_{p_2(x)}+f[0,1,2,3](x-0)(x-1)(x-2)=$$

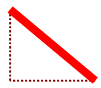
$$=\underbrace{2(x-0)-2(x-0)(x-1)}_{p_2(x)}+\frac{7}{6}(x-0)(x-1)(x-2)$$

46

Código diferencias divididas, coeficientes Fórmula de Newton

```
function dd=difdiv(xi,fi)
%  función  difdiv: calcula la tabla de diferencias divididas
%  Argumentos de entrada: xi nodos
%                                     fi valores en los nodos
%  Argumento de salida: dd coeficientes polinomio interpolación usando F. Newton

N=length(xi);
% Creamos una matriz donde guardaremos las diferencias divididas
 D=zeros(N,N);
%  Rellenamos la primera columna con los valores en los nodos
 D(:,1)=fi;
 for k=2:N
     for j=k:N
         D(j,k)=(D(j,k-1)-D(j-1,k-1))/(xi(j)-xi(j-k+1));
     end
 end
```



Observación: D matriz triangular inferior.
Coeficientes F. Newton en diagonal

```
%  Extraemos los coeficientes del polinomio de interpolación según fórmula de Newton
                                dd=diag(D);
```

Fórmula Newton: p(x)=dd(1)+dd(2)(x-xi(1))+…+dd(N)(x-xi(1)) ⋯(x-xi(N-1))

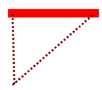
(En laboratorio veremos otra forma más eficiente de evaluar el polinomio)

47

Código 2 diferencias divididas, coeficientes Fórmula de Newton

```
function dd=difdiv(xi,fi)
%  función  difdiv: calcula la tabla de diferencias divididas
%  Argumentos de entrada: xi nodos
%                                     fi valores en los nodos
%  Argumento de salida: dd coeficientes polinomio interpolación usando F. Newton

N=length(xi);
% Creamos una matriz donde guardaremos las diferencias divididas
 D=zeros(N,N);
%  Rellenamos la primera columna con los valores en los nodos a interpolar
 D(:,1)=fi;
 for k=2:N
     for j=1:N-k+1
         dif=D(j,k-1)-D(j+1,k-1);
         dx=xi(j)-xi(j+k-1);
         D(j,k)=dif/dx;
     end
 end
```



Observación: D matriz triangular superior.
Coeficientes F. Newton en 1ª fila.

```
%  Extraemos los coeficientes del polinomio de interpolación según fórmula de Newton
                                dd=D(1,:);
```

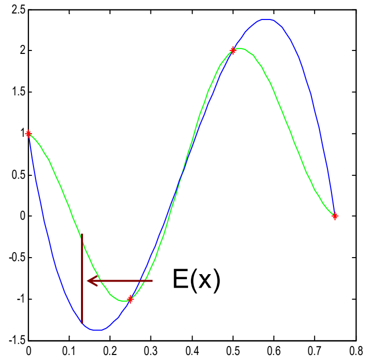
48

3. 3. Error de interpolación polinomial clásica (en laboratorio)

$$E(x) = |f(x) - p(x)|$$

Función original

Función interpolante



Observación: $E(x_i) = 0$, el error de interpolación es cero en los puntos x_i en los que p(x) interpola a la función f(x).

49

Ejemplo

1. Visualizar en el intervalo [0,1.2] cómo se parecen los polinomios p1(x) y p2(x) que interpolan a la función f(x)=cos(x) en los puntos {0, 1.2} y {0,0.6, 1.2}, respectivam..

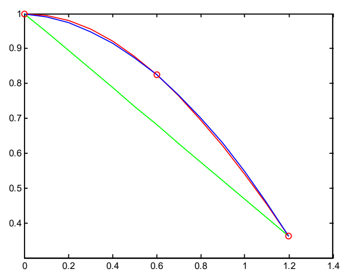
```
% Caso 1: Interpol. por polinomio grado 1:
xi1=[0 1.2]';
yi1=cos(xi1);
H1=[xi1.^0 xi1.^1];
c1=H1\yi1;

% Caso  2: Interpol. por polinomio grado 2:
xi2=[0 0.6 1.2]';
yi2=cos(xi2);
H2=[xi2.^0 xi2.^1 xi2.^2];
c2=H2\yi2;

% Gráficas de la función y los polinomios de interpolación:
xx=0:0.1:1.2;
yy1=c1(1)+c1(2)*xx;
yy2=c2(1)+c2(2)*xx+c2(3)*xx.^2;
plot(xx,cos(xx),'r',xx,yy1,'g',xx,yy2,'b',xi2,yi2,'or')

% Gráficas de la función error de interpolación en los casos 1 y 2 respectivamente.
E1=abs(cos(xx)-yy1);
E2=abs(cos(xx)-yy2);
plot(xx,E1,'r',xx,E2,'g')
```

¿Cuál es el valor de E1 en 0 y 1.2? ¿Y el de E2 en 0, 0.6 y 1.2?

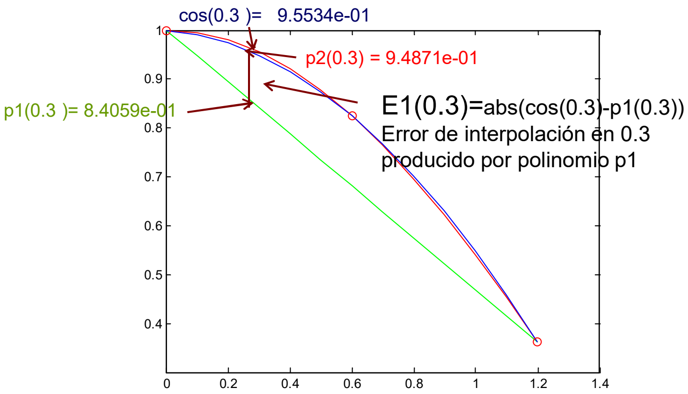


2. Número de cifras decimales significativas que se obtienen al aproximar cos(0.3) por p1(0.3) y p2(0.3) respectivamente.

```
ncif1=floor(-log10(abs(cos(0.3)-(c1(1)+c1(2)*0.3))/cos(0.3)))
ncif2=floor(-log10(abs(cos(0.3)-(c2(1)+c2(2)*0.3+c2(3)*0.3^2))/cos(0.3)))
```

ncif1 = 0

ncif2 = 2



4. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL HERMITE

4.1. Problema de interpolación polinomial Hermite.

Elementos del problema

4.2. Diferencias divididas con nodos repetidos

4.3. Fórmula generalizada de Newton

4. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL HERMITE

• DATOS NUMÉRICOS: $f(x_i)=y_i,\ f'(x_i)=y_i',\ i=0,..,n$

2(n+1) datos conocidos

Se conocen los valores de la función y su derivada en un conjunto de <u>puntos distintos</u>:

$$f(x_0)=y_0,\ldots,f(x_n)=y_n,\ f'(x_0)=y_0',\ldots,f'(x_n)=y_n',$$

(La expresión de la función f(x) no necesariamente es conocida)

• TIPO DE FUNCIÓN INTERPOLANTE: p(x) polinomio de grado 2n +1

(o polinomio de grado <=2n+1, o polinomio de menor grado) que coincida con f(x) en los datos dados. Gráficamente: la gráfica pasa por los puntos $(x_i, y_i), i=0,\ldots,n$

y con pendiente tangente y_i' en dichos puntos, $i=0,\ldots,n.$

$$\boxed{\begin{array}{l} p(x_0)=f(x_0)=y_0,\ldots,p(x_n)=f(x_n)=y_n \\ p'(x_0)=f'(x_0)=y_0',\ldots,p'(x_n)=f'(x_n)=y_n' \end{array}}$$

x_i, y_i, y_i' dados

p(x): **POLINOMIO INTERPOLACIÓN DE HERMITE** de f(x) en los puntos xi, i=0,..,n

53

4.1. Interpolación polinomial Hermite: Elementos del problema

Datos numéricos dados a interpolar:

- Valores de la función en un conjunto de puntos dados

$$f(x_0)=y_0,\ldots,f(x_n)=y_n,$$
$$f'(x_0)=y_0',\ldots,f'(x_n)=y_n',$$

- Tabla de datos:

xi	x0	x1	…	xn
yi	y0	y1	…	yn
y’i	y’0	y’1		y’n

- Valores del polinomio y su derivada en los puntos xi: p(xi)=yi, p’(xi)=y’i.

Tipo función interpolante: Polinomio de grado 2n+1 (o polinomio de grado<=2n+1, o polinomio de menor grado que interpola los datos anteriores).

<u>Observación</u>: El polinomio p(x) de grado 2n+1 que interpola los datos anteriores (p(xi)=yi, p’(xi)=y’i) <u>existe</u> y es <u>único</u> si los <u>nodos xi son distintos</u>.

54

Ejemplo 1: Construir el polinomio p(x) de interpolación de Hermite de f(x)=ln(x) en los puntos 1 y 2.

$*$ Datos numéricos (4 datos):

$p(1)=f(1)=\ln(1)=0,\ \ \mathrm{p}(2)=f(2)=\ln(2)=0.69$

$p'(1)=f'(1)=1/1=1,\ \ \mathrm{p}'(2)=f'(2)=1/2$

$*$ Tipo función interpolante: p(x) polinomio grado 3

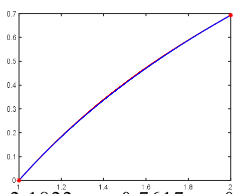
Construcción preliminar $\mathrm{p}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ (usando la base $\{1,x,x^2,x^3\}$)

Im ponemos verifique los datos de interpolación:

$$\left.\begin{aligned} p(1) &= c_0+c_1+c_2+c_3 = \ln(1)=0 \\ p(2) &= c_0+2c_1+4c_2+8c_3=\ln(2)=0.69 \\ p'(1) &= c_1+2c_2+3c_3 = f'(1)=1 \\ p'(2) &= c_1+4c_2+12c_3 = f'(2)=1/2 \end{aligned}\right\}\ \text{Sistema lineal 4x4}$$

- El problema tienen solución y es única, por ser el deteminante de la matriz de coeficientes distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$$



- Resolviendo el sistema se obtiene la solución c_0=-1.5343, c_1=2.1822,c_2=-0.7617,c_3=0.1137

¿Si nos facilitaran ahora el valor de la función y la derivada en un punto adicional?
-> Rehacer todos los cálculos -> De interés fórmula recurrente

4.2. Diferencias divididas con nodos repetidos

Definición

Recordamos diferencias divididas de grado 1 de f en x_0 y x_1 :

$$f\left[x_0,x_1\right]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

- Diferencias divididas de grado 1 de f en x_0 y x_0 :

$$f\left[x_0,x_0\right]=\lim_{x_1\to x_0} f\left[x_0,x_1\right]=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(x_0).$$

- Diferencias divididas de grado n de f en $x_0, x_0,.., x_0$:

$$\boxed{f\left[\underbrace{x_0,x_0,..,x_0}_{n+1}\right]=\frac{f^n(x_0)}{n!}}$$

Diferencias divididas con nodos repetidos. Construcción

TABLA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS CON NODOS REPETIDOS:

x_k	$f[x_k]$	$f[\bullet,\bullet]$	$f[\bullet,\bullet,\bullet]$	...
x_0	$f(x_0)$			...
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_0]=f'(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_1]=f'(x_1)$	$f[x_0,x_1,x_1]=\frac{f[x_1,x_1]-f[x_0,x_1]}{x_1-x_0}$..	

Observación: Los elementos de la diagonal serán los coeficientes de la Fórmula de Newton generalizada del polinomio de interpolación de Hermite

4.3. FÓRMULA DE NEWTON GENERALIZADA

Fórmula de Newton generalizada del polinomio de interpolación de **Hermite**:

$$p_{2n+1}(x)=\underbrace{\underbrace{\underbrace{f[x_0]}_{p_0(x)}+f[x_0,x_0](x-x_0)}_{p_1(x)}+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_0)}_{p_2(x)}+f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)$$

$$+\ldots+f[x_0,x_0,x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n](x-x_0)^2(x-x_1)^2\ldots(x-x_n)$$

con: $p_0(x)$: polinomio grado 0 que interpola a f en x_0

$p_1(x)$: polinomio grado 1 que interpola a f y f′ en x_0

$p_2(x)$: polinomio grado 1 que interpola a f en x_0, x_1 y a f′ en x_0

...

$p_{2n+1}(x)$: polinomio grado 2n+1 que interpola a f y f′ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Observación: Fórmula recurrente, permite calcular el polinomio de interpolación a partir de polinomios de interpolación de grado inferior.

59

Ejemplo 1: Construir el polinomio p(x) de interpolación de Hermite de f(x)=ln(x) en los puntos 1 y 2, usando la F. de Newton generalizada.

$*$ Datos numéricos (4 datos):

$$p(1)=f(1)=\ln(1)=0,\ \ p(2)=f(2)=\ln(2)=0.69$$

$$p'(1)=f'(1)=1/1=1,\ \ p'(2)=f'(2)=1/2$$

$*$ Tipo función interpolante: p(x) polinomio grado 3

Observación:
- Anteriormente resolvimos este problema usando la base $\{1,x,x^2,x^3\}$. La construcción no era una fórmula recurrente.
- El polinomio final tiene que ser el mismo en ambos casos (independientemente de la construcción), pero estará expresado de distintas formas, en distintas bases. En el caso de la F. Newton generalizada se escribe en términos de la base $\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^2(x-2)\}$

60

Fórmula de Newton generalizada

(usando la base $\left\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^2(x-2)\right\}$)

1. Tabla de diferencias divididas:

x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	0			
1	0	$f[1,1]=f'(1)=1$		
2	$\ln(2)=0.69$	$f[1,2]=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=0.69$	$f[1,1,2]=\dfrac{f[1,2]-f[1,1]}{2-1}=-0.31$	
2	$\ln(2)=0.69$	$f[2,2]=f'(2)=\dfrac{1}{2}=0.5$	$f[1,2,2]=\dfrac{f[2,2]-f[1,2]}{2-1}=-0.19$	$f[1,1,2,2]=\dfrac{f[1,2,2]-f[1,1,2]}{2-1}=0.12$

2. Fórmula de Newton generalizada polinomio interpolación Hermite:

$$\boxed{\begin{aligned} p_3(x) &= f[1]+f[1,1](x-1)+f[1,1,2](x-1)^2+f[1,1,2,2](x-1)^2(x-2)= \\ &= 0 \;+1\,(x-1)\; -0.31(x-1)^2\; +0.12(x-1)^2(x-2) \end{aligned}}$$

¿Si se añadiera como dato de interpolación f''(2)? ¿Grado polinomio? ¿Construcción?

61

Ejemplo 2: Construir el polinomio p(x) de menor grado cuya gráfica pase por los puntos (0,10), (1,15), (2,5) y con tangente 1 en x=0.

$*$ Datos numéricos:

$p(0)=10,\; p(1)=15,\; \mathrm{p}(2)=5$

$p'(0)=1$

$*$ Tipo función interpolante: p(x) polinomio grado 3?

62

1. Construcción preliminar $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

(usando la base $\{1, x, x^2, x^3\}$)

Imponemos verifique condiciones de interpolación:

$$\left.\begin{aligned} p(0) &= c_0 = 10 \\ p(1) &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 15 \\ p(2) &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 5 \\ p'(0) &= c_1 = 1 \end{aligned}\right\} \text{Sistema lineal 4x4} \rightarrow \left\{\begin{aligned} c_0 &= 10 \\ c_1 &= 1 \\ c_2 &= 9.75 \\ c_3 &= -5.75 \end{aligned}\right.$$

- El problema tienen solución y es única, por ser el deteminante de la matriz de coeficientes distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Se resuelve el sistema lineal y se obtiene la solución: $p(x) = 10 + 1x + 9.75x^2 - 5.75x^3$

63

2. Fórmula de Newton generalizada

(usando la base $\{1, x, x^2, x^2(x-1)\}$)

* Tabla de diferencias divididas:

x_k	$p[x_k]$	$p[\cdot,\cdot]$	$p[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	10			
0	10	$p[0,0] = p'(0) = 1$		
1	15	$p[0,1] = 5$	$p[0,0,1] = 4$	
2	5	$p[1,2] = -10$	$p[0,1,2] = -15/2$	$f[0,0,1,2] = -23/4$

* Fórmula de Newton generalizada polinomio pedido:

$$\boxed{\begin{aligned} p_3(x) &= p[0] + p[0,0]x + p[0,0,1]x^2 + p[0,0,1,2]x^2(x-1) = \\ &= 10 + 1\,x + 4x^2 + (-23/4)x^2(x-1) \end{aligned}}$$

64

Ejemplo 3: Construir el polinomio p(x) de menor grado que interpola los datos de la siguiente tabla

xi	1	2
f(xi)	2	6
f'(xi)	3	7
f''(xi)	No dado	8

- Grado del polinomio de interpolación?

- Construir la tabla de diferencias divididas incluyendo los datos de la tabla dada.

- Expresión del polinomio p(x) usando la fórmula de Newton generalizada.

65

- Tabla de diferencias divididas:

1	2				
1	2	$f[1,1] = f'(1) = 3$			
2	6	$f[1,2] = 4$	$f[1,1,2] = 1$		
2	6	$f[2,2] = f'(2) = 7$	$f[1,2,2] = 3$	$f[1,1,2,2] = 2$	
2	6	$f[2,2] = f'(2) = 7$	$f[2,2,2] = \dfrac{f''(2)}{2!} = 4$	$f[1,2,2,2] = 1$	$f[1,1,2,2,2] = -1$
xi	f(xi)	f'(xi)	f''(xi)		

- Fórmula generalizada de Newton del polinomio interpolador:

$$p(x) = f[1] + f[1,1](x-1) + f[1,1,2](x-1)^2 + f[1,1,2,2](x-1)^2(x-2) + f[1,1,2,2,2](x-1)^2(x-2)^2$$
$$= 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2$$

66

REGLA DE HORNER. EVALUACIÓN RECURSIVA DE UN POLINOMIO

Queremos evaluar el siguiente polinomio en x:

- $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n$

- Regla de Horner (cálculo recursivo):

$$\boxed{p(x)=(..((c_nx+c_{n-1})x+c_{n-2})x+...+c_1)x+c_0}$$

Algoritmos:

% x y c dados previamente.

```
p=c(1)
for k=1:n
p = p + c(k+1)*x.^k;
end
------------
p=c(n+1)
for k=n:-1:1,
p = p .* x + c(k);
 end
```

Observ. Usando comando polyval de Matlab:

```
c_inv=c(end:-1:1);
p=polyval(c_inv,x);
```

67

REGLA DE HORNER APLICADA FÓRMULA DE NEWTON

- Fórmula de Newton (interpolación en nodos $x_0,..,x_n$):

$$p(x)=d_0+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)(x-x_1)+...+d_n(x-x_0)...(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})$$

con $d_i=\mathrm{f}\left[x_0,...,x_i\right]$ (diferencias divididas)

Algoritmo (xi vector de nodos de interpolación) :

```
pp=x-xi(1);
p=d(1)+d(2)*(x-xi(1))=d(1)+d(2)*pp;
pp=pp*(x-xi(2));
p=p+d(3)*(x-xi(1))*(x-xi(2))=p+d(3)*pp;
…
```

- Aplicación Regla de Horner:

$$\boxed{p(x)=(..((d_n(x-x_{n-1})+d_{n-1})(x-x_{n-2})+d_{n-2})(x-x_{n-3})+...+d_1)(x-x_0)+d_0}$$

Algoritmo:

```
p=d(end));
p=d(end-1)+p.*(x-xi(end-1));
…
p=d(1)+p.*(x-xi(1))
```

NOTA: En los algorit. anteriores suponemos previamente creados los vectores xi (nodos interpolación), d (coficientes de F. Newton, diferencias divididas) y x).
Lo veremos en la clase computacional.

68