

# Appunti di Elementi di Analisi Complessa

Marco Vergamini

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Funzioni olomorfe</b>	<b>4</b>
2.1	Notazioni e prerequisiti . . . . .	4
2.2	Risultati preliminari . . . . .	6
2.3	Teoremi di Hurwitz . . . . .	13
2.4	La sfera di Riemann . . . . .	14
2.5	Il disco unitario . . . . .	18
2.6	Dinamica del disco e del semipiano superiore . . . . .	21

## 1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Elementi di Analisi Complessa tenuto dal professor Marco Abate nel secondo semestre dell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) analisi in più variabili, topologia, concetto di gruppo fondamentale e le basi di analisi complessa in più variabili, che si vedono nei corsi Analisi 2 e Geometria 2. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc. . . . Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia. . . ), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali. . . insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

## 2 Funzioni olomorfe

### 2.1 Notazioni e prerequisiti

Notazioni:  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  indica un numero complesso,  $\bar{z} = x - iy$  il suo complesso coniugato. Con il termine *dominio* si intende un aperto connesso.  $\mathcal{O}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ è olomorfa}\}$ .  $\text{Hol}(\Omega_1, \Omega_2) = \{f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \mid f \text{ è olomorfa}\}$ .

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

$$dz = dx + i dy, d\bar{z} = dx - i dy, dz \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) = 1, dz \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 0.$$

Daremo ora una definizione di funzione olomorfa basata su quattro definizioni, l'equivalenza delle quali è un prerequisito del corso e dovrebbe essere quindi nota agli studenti.

**Definizione 2.1.1.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un aperto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  si dice OLOMORFA se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- (i)  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile, cioè per ogni  $a \in \Omega$  esiste  $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ ;
- (ii)  $f$  è *analitica*, cioè per ogni  $a \in \Omega$  esiste  $U \subseteq \Omega$  aperto e intorno di  $a$  e  $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$  t.c. per ogni  $z \in U$   $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ ;
- (iii)  $f$  è *olomorfa*, cioè  $f$  è continua,  $\partial f / \partial x$  e  $\partial f / \partial y$  esistono su  $\Omega$  e  $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$  (equazione di Cauchy-Riemann). Si noti che la condizione è  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ , da cui si ricava  $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$ ;
- (iv)  $f$  è continua e per ogni rettangolo (o disco) chiuso  $D \subseteq \Omega$  si ha  $\int_{\partial D} f dz = 0$  (teorema di Cauchy-Goursat+Morera).

La seguente proposizione è anch'essa un risultato che dovrebbe essere noto agli studenti che seguono il corso.

**Proposizione 2.1.2.** Sia  $\{c_n\} \in \mathbb{C}$ . Allora:

- (i) esiste  $R \in [0, +\infty]$  t.c.  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$  converge per  $|z| < R$  e diverge per  $|z| > R$ .  $R$  è detto *raggio di convergenza*. La convergenza è uniforme su  $\Delta_r = \{|z| \leq r\}, r < R$ .  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$ ;
- (ii)  $\sum_{n=0}^{+\infty} n c_n z^{n-1}$  ha lo stesso raggio di convergenza;
- (iii) se  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$  allora  $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$ ;

(iv) se  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  e  $a \in \Omega$ , allora  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$ . Questa formula è valida nel più grande disco aperto centrato in  $a$  e contenuto in  $\Omega$ , cioè di raggio minore o uguale di  $d(a, \partial\Omega)$ .

**Teorema 2.1.3.** (Formula di Cauchy) Sia  $\Omega$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ,  $D \subseteq \Omega$  disco/rettangolo chiuso. Per ogni  $a \in D$ ,  $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\zeta}{\zeta - a} d\zeta$ . Si ha che  $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$ .

**Corollario 2.1.4.** (Disuguaglianze di Cauchy)  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ,  $D = D(a, r) \subseteq \Omega$  disco di centro  $a \in \Omega$  e raggio  $r > 0$ . Sia  $M = \max_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)|$ . Allora per ogni

$$n \geq 1, |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

**Corollario 2.1.5.** (Teorema di Liouville) Sia  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  limitata. Allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Le disuguaglianze di Cauchy danno, per ogni  $r > 0$ ,  $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$  dove  $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < +\infty \Rightarrow f' \equiv 0$ .  $\square$

**Teorema 2.1.6.** (Principio di identità o del prolungamento analitico)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Se  $\{z \in \Omega | f(z) = g(z)\}$  ha un punto di accumulazione in  $\Omega$ , allora  $f \equiv g$ .

**Corollario 2.1.7.**  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  non identicamente nulla, allora  $\{z \in \Omega | f(z) = 0\}$  è discreto in  $\Omega$ .

**Teorema 2.1.8.** (Principio del massimo)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Allora:

- (i) se  $U$  è aperto e  $U \subset\subset \Omega$  (si legge "U relativamente compatto in  $\Omega$ " e si intende  $\overline{U} \subset \Omega$  e  $\overline{U}$  compatto) allora  $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$ . Inoltre, se  $|f|$  ha un massimo locale in  $U$ , allora  $f$  è costante in  $\Omega$ ;
- (ii) la stessa affermazione vale per  $\Re f$  e  $\Im f$ ;
- (iii) se  $\Omega$  è limitato poniamo  $M = \sup_{x \in \partial D} \limsup_{z \rightarrow x} |f(z)| \in [0, +\infty]$ . Allora per ogni  $z \in \Omega$   $|f(z)| \leq M$  con uguaglianza in un punto se e solo se  $f$  è costante.

**Esempio 2.1.9.** Controesempio per vedere che serve  $\Omega$  limitato per il punto (iii) del teorema 2.1.8:  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \Re z > 0\}$ ,  $f(z) = e^z$ .  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(\Omega)$ .  $z \in \partial\Omega \Rightarrow z = iy \Rightarrow |f(iy)| = |e^{iy}| = 1$ , ma  $f$  è illimitata in  $\Omega$ . Per correggere questa cosa si aggiunge il punto all'infinito.

**Teorema 2.1.10.** (Applicazione aperta)  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  non costante  $\Rightarrow f$  è un'applicazione aperta.

Siano  $X, Y$  spazi topologici e indichiamo con  $C^0(X, Y)$  le funzioni continue da  $X$  in  $Y$ .

La *topologia della convergenza puntuale* è la restrizione a  $C^0(X, Y) \subset Y^X = \{f : X \rightarrow Y\}$  della topologia prodotto. Una prebase è data da  $\mathcal{F}(x, U) = \{f \in C^0(X, Y) | f(x) \in U\}$  dove  $x \in X$  e  $U \subseteq Y$  è un aperto.

**Esercizio 2.1.11.**  $f_n \rightarrow f \in C^0(X, Y)$  per questa topologia se e solo se  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per ogni  $x \in X$ .

La *topologia compatta-aperta* ha invece come prebase  $\mathcal{F}(K, U) = \{f \in C^0(X, Y) | f(K) \subseteq U\}$  dove  $U$  è preso come sopra e  $K \subseteq X$  è un compatto.

**Proposizione 2.1.12.**

- (i) La topologia compatta-aperta è più fine della topologia della convergenza puntuale;
- (ii)  $Y$  Hausdorff  $\Rightarrow$  topologia compatta aperta Hausdorff.

*Dimostrazione.* (i) Ovvio (il singoletto è un compatto).

- (ii) Prendiamo  $f \neq g$  continue, allora esiste  $x_0 \in X$  t.c.  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , per cui, dato che  $Y$  è Hausdorff, esistono  $U, V \subset Y$  aperti disgiunti con  $f(x_0) \in U, g(x_0) \in V \Rightarrow f \in \mathcal{F}(x_0, U), g \in \mathcal{F}(x_0, V), \mathcal{F}(x_0, U) \cap \mathcal{F}(x_0, V) = \emptyset$ .

□

**Teorema 2.1.13.** (Ascoli-Arzelà) Siano  $X, Y$  spazi metrici con  $X$  localmente compatto, allora  $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$  è relativamente compatta rispetto alla topologia compatta-aperta se e solo se:

- (i) per ogni  $x \in X$   $\{f(x) | f \in \mathcal{F}\} \subset\subset Y$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}$  è equicontinua.

La topologia compatta-aperta viene detta anche topologia della *convergenza uniforme sui compatti*:  $\{f_n\} \subset C^0(X, \mathbb{R}^N)$ . Se  $K \subseteq X$  definiamo  $\|f\|_K = \sup_{z \in K} \|f(z)\|$ .  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sui compatti se per ogni  $K \subset\subset X$  compatto e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0$  t.c.  $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_K < \varepsilon$ .

**Esercizio 2.1.14.**  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sui compatti se e solo se  $f_n \rightarrow f$  nella topologia compatta-aperta.

## 2.2 Risultati preliminari

Vediamo ora alcuni risultati e definizioni preliminari, da considerarsi comunque come prerequisiti per altri risultati più interessanti che vedremo più avanti nel corso.

**Teorema 2.2.1.** (Weierstrass) Sia  $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  t.c.  $f_n \rightarrow f \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$  uniformemente sui compatti. Allora:

- (i)  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ;
- (ii)  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente sui compatti.

*Dimostrazione.* (i) Sia  $a \in \Omega$ ,  $0 < r < d(a, \partial\Omega)$  t.c.  $D = D(a, r) \subset\subset \Omega$ .

$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  per ogni  $z \in D(a, \rho)$  per ogni  $0 < \rho < r$ . Allora

$\frac{1}{|\zeta - z|} \leq \frac{1}{r - \rho}$  per ogni  $z \in D(a, \rho)$ ,  $\zeta \in \partial D$ . Per ogni  $z \in D(a, \rho)$ ,  $f(z) =$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ . Adesso, per uniforme convergenza e uniforme

limitatezza si può portare il limite dentro, perciò  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ ,

ma questo, per il teorema di Cauchy-Goursat+Morera, implica  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ .

- (ii)  $f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f'(z)$ .  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente sui dischi e ogni compatto è coperto da un numero finito di dischi  $\Rightarrow f'_n \rightarrow f'$  uniformemente sui compatti.

□

**Teorema 2.2.2.** (Montel)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$  t.c. per ogni  $K \subset\subset C$  compatto esiste  $M_K > 0$  t.c.  $\|f\|_K \leq M_K$  per ogni  $f \in \mathcal{F}$  (si dice che  $\mathcal{F}$  è *uniformemente limitata sui compatti*). Allora  $\mathcal{F}$  è relativamente compatta in  $\mathcal{O}(\Omega)$ .

*Dimostrazione.* Basta vedere che ogni successione  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  ha una sottosuccessione convergente (segue dal fatto che, nelle ipotesi del teorema di Montel, la topologia compatta aperta è metrizzabile).

Dati  $a \in \Omega$ ,  $0 < r < d(a, \partial\Omega)$ ,  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , sia  $c_n(f) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ , allora  $f(z) =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)(z - a)^n$  in  $\overline{D(a, r)}$ . Inoltre, se  $\|f\|_{\overline{D(a, r)}} \leq M$ , allora per le disugua-

glianze di Cauchy  $|c_n(f)| \leq \frac{M}{r^n}$  per ogni  $n \geq 0$ . Sia  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ . Per ipotesi, esiste

$M$  t.c.  $\|f_n\|_{\overline{D(a, r)}} \leq M$  per ogni  $n \Rightarrow |c_0(f_n)| \leq M$  per ogni  $n \Rightarrow$  esiste una sottosuccessione  $c_0(f_{n_j^{(0)}})$  che tende a  $c_0 \in \mathbb{C}$ . Per induzione, da  $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$  possiamo

estrarre una sottosuccessione  $\{f_{n_j^{(k)}}\}$  t.c.  $c_k(f_{n_j^{(k)}}) \rightarrow c_k \in \mathbb{C}$ . Consideriamo  $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ , allora  $c_k(f_{n_j^{(j)}}) \rightarrow c_k \in \mathbb{C}$  per ogni  $k$ . Sia  $f_{\nu_j} = f_{n_j^{(j)}}$ . Poniamo  $D_a =$

$\overline{D(a, r/2)}$  e sia  $z \in D_a$ . Vogliamo  $f_{\nu_j} \rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - a)^n$  in  $D_a$ . Basta ve-

dere che  $f_{\nu_j}$  è di Cauchy uniformemente in  $D_a$ .  $|f_{\nu_h}(z) - f_{\nu_k}(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) -$

$$c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n = \sum_{n=0}^N |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n + \sum_{n>N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n.$$

Sappiamo che  $|c_n(f_{\nu_k})| \leq \frac{M}{r^n}$  e  $z \in D_a \Rightarrow |z-a| \leq \frac{r}{2}$ . Allora  $\sum_{n>N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n \leq$

$$\sum_{n>N} \frac{2M}{r^n} \left(\frac{r}{2}\right)^n = \frac{M}{2^{N-1}} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n \leq$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\frac{r}{2}\right)^n. \text{ Dato } \varepsilon > 0, \text{ scegliamo } N \gg 1 \text{ t.c. } \frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon/2$$

e  $n_0$  t.c. per ogni  $h, k \geq n_0, |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\frac{r}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$  (possiamo

farlo, una volta fissato  $N$ , perché gli  $n$  tra 0 e  $N$  sono in numero finito e le successioni  $c_n(f_{\nu_j})$  convergono, dunque si sceglie un indice per ogni successione e si prende come  $n_0$  il massimo di questi indici). Mettendo insieme le disuguaglianze si ha che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0$  t.c. per ogni  $h, k \geq n_0$  e per ogni  $z \in D_a$ ,  $|f_{\nu_h}(z) - f_{\nu_k}(z)| < \varepsilon$ , dunque la sottosuccessione  $f_{\nu_j}$  è di Cauchy e converge uniformemente su  $D_a$ . Deve convergere a  $f$  perché, per il teorema di Weierstrass, le derivate convergono al valore della derivata limite, e questo ci dice che i coefficienti della serie della funzione limite sono proprio quelli di  $f$ .

$\Omega$  è a base numerabile, dunque possiamo estrarre un sottoricoprimento numerabile da  $\{D_a | a \in \Omega\}$ . Sia dunque  $\{a_j\} \subseteq \Omega$  t.c.  $\bigcup_j D_{a_j} = \Omega$ . Per quanto

dimostrato finora, possiamo estrarre da  $\{f_n\}$  una sottosuccessione  $\{f_{n_j^{(0)}}\}$  convergente uniformemente in  $D_{a_0}$ . Per induzione, da  $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$  estraiamo una sottosuccessione  $\{f_{n_j^{(k)}}\}$  convergente uniformemente in  $D_{a_0} \cup \dots \cup D_{a_k}$ . Prendiamo  $\{f_{n_j^{(j)}}\}$  che converge uniformemente in ogni  $D_{a_k}$ . Adesso, ogni compatto è coperto da un numero finito di  $D_{a_k}$ , quindi (scegliendo per ogni  $\varepsilon$  il massimo degli indici t.c. le cose che vogliamo valgono in quei  $D_{a_k}$ )  $\{f_{n_j^{(j)}}\}$  converge uniformemente sui compatti.  $\square$

**Teorema 2.2.3.** (Vitali)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $A \subseteq \Omega$  con almeno un punto di accumulazione in  $\Omega$ . Sia  $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  uniformemente limitata sui compatti. Supponiamo che, per ogni  $a \in A$ ,  $\{f_n(a)\}$  converge (cioè  $f_n$  converge puntualmente). Allora esiste  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  t.c.  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Facciamola per assurdo. Supponiamo che esistono  $K \subset\subset \Omega$ ,  $\{n_k\}, \{m_k\} \subset \mathbb{N}$ ,  $\{z_k\} \subset K$ ,  $\delta > 0$  t.c.  $|f_{n_k}(z_k) - f_{m_k}(z_k)| \geq \delta$ . A meno di sottosuccessioni,  $z_k \rightarrow z_0 \in K$ . Per il teorema di Montel, a meno di sottosuccessioni  $f_{n_k} \rightarrow g_1 \in \mathcal{O}$  e  $f_{m_k} \rightarrow g_2 \in \mathcal{O}$  con  $|g_1(z_0) - g_2(z_0)| \geq \delta$  (passando al limite). Per ipotesi,  $g_1(a) = g_2(a)$  per ogni  $a \in A$ . Per il principio di identità,  $g_1 \equiv g_2$ , assurdo.  $\square$



**Teorema 2.2.4.** (Sviluppo di Laurent) Siano  $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ ,  $A(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\}$ . Sia  $f \in \mathcal{O}(A(r_1, r_2))$ , allora  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$  e converge uniformemente e assolutamente sui compatti di  $A(r_1, r_2)$ . In particolare, se  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $a \in \Omega$  e  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ ,  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$  in  $\{0 < |z-a| < r\} \subset \Omega$ .

**Corollario 2.2.5.** (Teorema di estensione di Riemann)  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$  si estende olomorficamente ad  $a \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$ .

*Dimostrazione.* Per lo sviluppo di Laurent,  $(z-a)f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+1} \rightarrow 0 \Leftrightarrow c_n = 0$  per ogni  $n \leq -1$ .  $\square$

**Teorema 2.2.6.**

- (i)  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega_1)$  biettiva  $\Rightarrow f^{-1}$  è olomorfa e  $f'$  non si annulla mai;
- (ii)  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  t.c.  $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$  è iniettiva vicino a  $z_0$ .

*Dimostrazione.* (i) Per il teorema dell'applicazione aperta,  $f$  è aperta  $\Rightarrow f$  omeomorfismo.  $g = f^{-1}$ . Sia  $w_0 \in \Omega_1$  t.c.  $f'(g(w_0)) \neq 0$ . Allora

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w-w_0}{g(w)-g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(g(w))-f(g(w_0))}{g(w)-g(w_0)}} = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

Quindi  $g$  è olomorfa in  $\Omega_1 \setminus f(\{f' = 0\})$ . Per il corollario 2.1.7  $\{f' = 0\}$  è discreto in  $\Omega$ .  $f$  omeomorfismo  $\Rightarrow f(\{f' = 0\})$  discreto in  $\Omega_1$ . Ma  $g$  è continua (quindi localmente limitata) in  $\Omega_1$ , dunque per il teorema di estensione di Riemann  $g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ .  $(f' \circ g)g' \equiv 1$  su  $\Omega_1 \setminus f(\{f' = 0\}) \Rightarrow$  vale su  $\Omega_1 \Rightarrow f' \circ g \neq 0$  sempre.

- (ii) Possiamo supporre  $z_0 = 0$ .  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ . Per ipotesi,  $c_1 \neq 0$ .

$$f(z) - f(w) = c_1(z-w) + (z-w) \sum_{n=2}^{+\infty} c_n \sum_{k=1}^n w^{k-1} z^{n-k}.$$

$$|f(z) - f(w)| \geq |c_1||z-w| - |z-w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^n |w|^{k-1} |z|^{n-k}.$$

Prendiamo  $z, w \in D(0, r)$ , allora

$$|c_1||z-w| - |z-w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^n |w|^{k-1} |z|^{n-k} \geq$$

$\geq |c_1||z - w| - |z - w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|nr^{n-1} = (|c_1| - \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|nr^{n-1})|z - w|$ . Scegliamo  $r$  t.c.  $\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|nr^{n-1} \leq \frac{|c_1|}{2}$ , allora  $(|c_1| - \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|nr^{n-1})|z - w| \geq \frac{|c_1|}{2}|z - w|$ . Dato che  $c_1 \neq 0$ , si ha quindi (concatenando le disuguaglianze) che  $z \neq w \Rightarrow |f(z) - f(w)| \geq \frac{|c_1|}{2}|z - w| > 0 \Rightarrow f(z) \neq f(w)$ .

□

**Definizione 2.2.7.** Se  $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  è olomorfa e biettiva (quindi con inversa olomorfa per il teorema 2.2.6) si chiama BIOLOMORFISMO.

**Definizione 2.2.8.**  $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$  è un BIOLOMORFISMO LOCALE se ogni  $a \in \Omega_1$  ha un intorno  $U \ni a$  t.c.  $f|_U : U \longrightarrow f(U)$  è un biolomorfismo.

Per il teorema 2.2.6,  $f$  è un biolomorfismo locale se e solo se  $f'$  non si annulla mai.

**Definizione 2.2.9.** Sia  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - a)^n$  in  $D^* = D(a, r) \setminus \{a\}$ .  $ord_a(f) := \inf\{n \in \mathbb{Z} | c_n \neq 0\}$  è detto ORDINE DI  $f$  IN  $a$ .  $ord_a(f) \geq 0 \Leftrightarrow f$  è olomorfa in  $a$ . Se  $0 > ord_a(f) > -\infty$  diremo che  $a$  è un POLO di  $f$ . Se  $ord_a(f) = -\infty$   $a$  è una SINGOLARITÀ ESSENZIALE.

**Teorema 2.2.10.** (Casorati-Weierstrass) Se  $a$  è una singolarità essenziale,  $f(D^*)$  è denso in  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 2.2.11.**  $c_{-1} =: res_f(a)$  è detto RESIDUO DI  $f$  IN  $a$ .

**Osservazione 2.2.12.**  $\gamma(t) = a + \rho e^{2\pi i t}, 0 < \rho < r$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\gamma} (z - a)^n dz = \\
 \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^1 \rho^n e^{2\pi i n t} \rho 2\pi i e^{2\pi i t} dt &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \rho^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i (n+1)t} dt = c_{-1}.
 \end{aligned}$$

**Proposizione 2.2.13.**  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $E \subset \Omega$  discreto e chiuso in  $\Omega$ ,  $D \subset \subset \Omega$  disco chiuso t.c.  $E \cap \partial D = \emptyset$ ,  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ . Allora  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f dz = \sum_{a \in D \cap E} res_f(a)$ .

*Dimostrazione.* Traccia: si dimostra che  $E \cap D$  è finito e si applica una versione leggermente più forte del teorema di Cauchy-Goursat+Morera, prendendo per ogni punto di  $E$  un dischetto tutto contenuto in  $D$  che lo isoli dagli altri e considerando la regione  $D$  meno quei dischetti. Il bordo di questa regione è considerato il bordo di  $D$  meno il bordo dei dischetti. Questo bordo, a meno di aggiungere dei tratti lineari che uniscono una circonferenza all'altra (che quindi verranno percorsi in entrambi i sensi nell'integrale e non daranno contributo), è percorribile con un solo cammino omotopo al cammino costante in  $\Omega \setminus E$ , il cui integrale fa 0 per la versione forte del teorema di C-G+M, dunque l'integrale sul bordo di  $D$  meno l'integrale sul bordo dei dischetti (occhio al verso di percorrenza di uno e degli altri!) deve essere uguale a 0. Per l'osservazione 2.2.12 si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 2.2.14.**  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$  chiusa ( $\gamma(0) = \gamma(1)$ ),  $a \notin \gamma([0, 1])$ .  $p_s : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ ,  $p_a(z) = a + e^z$  è un rivestimento.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p_a \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{C} \setminus \{a\} \end{array}$$

Sia  $\tilde{\gamma}$  un sollevamento di  $\gamma$  rispetto a  $p_a$ ,  $p_a(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = \gamma(0) = p_a(\tilde{\gamma}(0)) \iff e^{\tilde{\gamma}(1)} = e^{\tilde{\gamma}(0)} \iff \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ .

**Definizione 2.2.15.** L'INDICE DI AVVOLGIMENTO  $\gamma$  RISPETTO AD  $a$  (*winding number* in inglese) è dato dall'osservazione 2.2.14:  $n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i}(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)) \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 2.2.16.**

- (i)  $n(\gamma, a)$  dipende solo da  $a$  e da  $\gamma$  e non dal sollevamento scelto;
- (ii)  $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ ;
- (iii)  $n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$ ;
- (iv)  $a \mapsto n(\gamma, a)$  è costante sulle componenti connesse di  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ . In particolare  $n(\gamma, a) = 0$  sulla componente connessa illimitata di  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ ;
- (v)  $\gamma(t) = a_0 + re^{2\pi i t} \Rightarrow n(a, \gamma) = 1$  per ogni  $a \in D(a_0, r)$ ;
- (vi)  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  chiuse con  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0$  omotope (tramite omotopia che fissa il punto base  $p_0$ ) e  $a \notin \gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_2([0, 1])$ , se l'omotopia è in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  allora  $n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$ .

**Teorema 2.2.17.** (Teorema dei residui)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $E \subset \Omega$  discreto e chiuso in  $\Omega$ ,  $\gamma$  curva chiusa in  $\Omega \setminus E$  omotopa a una costante in  $\Omega$ . Allora per ogni  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$   $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f dz = \sum_{a \in E} \text{res}_f(a) \cdot n(\gamma, a)$ .

**Definizione 2.2.18.**  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f$  è MEROMORFA in  $\Omega$  se esiste  $E \subset \Omega$  discreto e chiuso in  $\Omega$  t.c.  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$  e nessun punto di  $E$  è una singolarità essenziale. Scriveremo che  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ .

**Proposizione 2.2.19.**

- (i)  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$  è meromorfa  $\iff$  localmente è quoziente di due funzioni olomorfe;
- (ii)  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$  è meromorfa  $\iff$  per ogni  $a \in E$  o  $|f|$  è limitato vicino ad  $a$  o  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ .

*Dimostrazione.* (i)  $(\Rightarrow)$  Se  $a \in \Omega \setminus E$  banalmente  $f = \frac{f}{1}$  vicino ad  $a$ .

Se  $a \in E$ ,  $f(z) = \sum_{n \geq n_0} c_n (z-a)^n = (z-a)^{n_0} (c_{n_0} + h(z))$ ,  $h$  olomorfa

vicino ad  $a$ . Se  $n_0 < 0$ ,  $f(z) = \frac{c_{n_0} + h(z)}{(z-a)^{-n_0}}$ .

$(\Leftarrow)$  Se  $f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)} = \frac{\sum_{n \geq n_1} b_n (z-a)^n}{\sum_{m \geq n_2} c_m (z-a)^m} = (z-a)^{n_1-n_2} k(z)$ ,  $k$  olomorfa vicino ad  $a$ .

- (ii) Per Casorati-Weierstrass,  $a \in E$  è singolarità essenziale  $\iff \lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$  non esiste. Per lo stesso motivo, è un polo  $\iff \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ . □

**Teorema 2.2.20.** (Principio dell'argomento)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ .  $Z_f := \{\text{zeri di } f\}$ ,  $P_f := \{\text{poli di } f\}$ .  $\gamma$  curva chiusa in  $\Omega \setminus (Z_f \cup P_f)$  omotopa a una

costante in  $\Omega$ . Allora  $\sum_{a \in Z_f \cup P_f} n(\gamma, a) \cdot \text{ord}_a(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz$ .

*Dimostrazione.*  $\text{ord}_a(f) = \text{res}_{f'/f}(a)$ . Infatti  $f(z) = (z-a)^m h(z)$  con  $m = \text{ord}_a(f)$ ,  $h(a) \neq 0$  e  $h$  olomorfa.  $f'(z) = m(z-a)^{m-1} h(z) + (z-a)^m h'(z)$ . Allora  $\frac{f'}{f} = \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$  e  $\frac{h'}{h}$  è olomorfa  $\Rightarrow \text{res}_{f'/f}(a) = m = \text{ord}_a(f)$ . La tesi segue allora dal teorema dei residui. □

**Proposizione 2.2.21.** (Versione semplice del teorema di Rouché)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ,  $D$  disco con  $\overline{D} \subset \Omega$ . Supponiamo che  $|f-g| < |g|$  su  $\partial D$  (questo implica anche che non si annullano mai su  $\partial D$ ). Allora  $f$  e  $g$  hanno lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità) su  $D$ .

*Dimostrazione.* Per  $t \in [0, 1]$  poniamo  $f_t = g + t(f-g)$  ( $f_0 = g$ ,  $f_1 = f$ ). Se  $z \in \partial D$ ,  $0 < |g(z)| - |f(z) - g(z)| \leq |g(z)| - t|f(z) - g(z)| \leq |f_t(z)|$ .

Sia  $a_t = \sum_{a \in \overline{D}} \text{ord}_a(f_t) =$  numero di zeri di  $f_t$  in  $\overline{D}$ . Non ci sono poli, dunque

che  $a_t \in \mathbb{N}$ , quindi per il principio dell'argomento  $a_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'_t}{f_t} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g' + t(f' - g')}{g + t(f - g)} dz$ , che dipende con continuità da  $t \Rightarrow a_t$  è costante (è a valori in  $\mathbb{N}$ )  $\Rightarrow a_0 = a_1$  come voluto.  $\square$

**Corollario 2.2.22.** (Teorema di Ritt) Sia  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$  ( $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$ ) t.c.  $h(\mathbb{D}) \subset \subset \mathbb{D}$ . Allora  $h$  ha un punto fisso.

*Dimostrazione.* Esiste  $0 < r < 1$  t.c.  $|h(z)| < r$  per ogni  $z \in \mathbb{D}$ . Sia  $\mathbb{D}_r := \{|z| < r\}$ . Su  $\partial \mathbb{D}_r$ ,  $|z - (z - h(z))| = |h(z)| < r = |z|$ . Per il teorema di Rouché su  $g(z) = z$ ,  $f(z) = z - h(z)$ ,  $g$  e  $f$  hanno lo stesso numero di zeri in  $\mathbb{D}$ , ma  $g$  ha un unico zero  $\Rightarrow f = \text{id}_{\mathbb{D}} - h$  ha un unico zero  $z_0 \Rightarrow h(z_0) = z_0$ .  $\square$

## 2.3 Teoremi di Hurwitz

Vediamo ora qualche risultato interessante.

**Teorema 2.3.1.** (Primo teorema di Hurwitz)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  convergente a  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  uniformemente sui compatti. Supponiamo che  $f$  non sia costante sulle componenti connesse di  $\Omega$ . Allora per ogni  $z_0 \in \Omega$  esistono  $n_1 = n_1(z_0) \in \mathbb{N}$  e  $z_n \in \Omega$  per ogni  $n \geq n_1$  t.c.  $f_n(z_n) = f(z_0)$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$ . Senza la tesi sul limite di  $z_n$ , si può dire che per ogni  $w = f(z_0) \in f(\Omega)$  esiste  $n_1 = n_1(w)$  t.c.  $w \in f_n(\Omega)$  per ogni  $n \geq n_1$ .

*Dimostrazione.* Vogliamo applicare Rouché a  $f_n - w$  e  $f - w$ ,  $w = f(z_0)$  in dischetti centrati in  $z_0$  di raggio arbitrariamente piccolo.  $f$  non costante sulle componenti connesse  $\Rightarrow f^{-1}(w)$  è discreto  $\Rightarrow$  esiste  $\delta > 0$  t.c.  $0 < |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow z \in \Omega$  e  $f(z) \neq w$ . Se  $D = D(z_0, \delta)$  allora  $\overline{D} \cap f^{-1}(w) = \{z_0\}$ . Per ogni  $k > 0$ ,  $\gamma_k = \partial D(z_0, \delta/k)$ . Poniamo  $\delta_k = \min\{|f(\zeta) - w| \mid \zeta \in \gamma_k\} > 0$ . Esiste  $n_k \geq 1$  t.c. per ogni  $n \geq n_k$   $\max_{\zeta \in \gamma_k} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2}$  ( $f_n$  converge a  $f$  uniformemente sui compatti). Possiamo supporre  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Fissato  $k \geq 1$ , se  $n \geq n_k$  e  $\zeta \in \gamma_k$ ,  $|(f_n(\zeta) - w) - (f(\zeta) - w)| = |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \leq |f(\zeta) - w|$ . Per il teorema di Rouché applicato a  $f_n - w$  e  $f - w$  in  $D(z_0, \delta/k)$ , per ogni  $n \geq n_k$   $f_n - w$  ha almeno uno zero in  $D(z_0, \delta/k) \Rightarrow$  esiste  $z_n \in D(z_0, \delta/k)$  t.c.  $f_n(z_n) = w$ .  $z_n \rightarrow z_0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Corollario 2.3.2.** (Secondo teorema di Hurwitz)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  t.c.  $f_n \rightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Supponiamo che le  $f_n$  non si annullino mai (o, in generale, esiste  $w_0 \in \mathbb{C}$  t.c.  $w_0 \notin f_n(\Omega)$  per ogni  $n$ ), allora o  $f \equiv 0$  o  $f$  non si annulla mai (in generale, o  $f \equiv w_0$  o  $w_0 \notin f(\Omega)$ ).

*Dimostrazione.* Per assurdo,  $w_0 \in f(\Omega)$ . Allora o  $f$  è costante ( $f \equiv w_0$ ) oppure, per il primo teorema di Hurwitz,  $w_0 \in f_n(\Omega)$  per ogni  $n \gg 1$ , assurdo.  $\square$

**Corollario 2.3.3.** (Terzo teorema di Hurwitz)  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  t.c.  $f_n \rightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Supponiamo che le  $f_n$  siano iniettive. Allora  $f$  è costante o iniettiva.

*Dimostrazione.* Per assurdo, sia  $f$  né costante né iniettiva. Allora esistono  $z_1 \neq z_2$  t.c.  $f(z_1) = f(z_2)$ . Poniamo  $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$  e  $h(z) = f(z) - f(z_2)$ .  $h_n \rightarrow h$  e le  $h_n$  non si annullano mai in  $\Omega \setminus \{z_2\}$  (perché le  $f_n$  sono iniettive). Dato che per ipotesi  $f$  non è costante, pure  $h$  non è costante, dunque per il secondo teorema di Hurwitz non si annulla mai in  $\Omega \setminus \{z_2\}$ , ma  $h(z_1) = 0$ , assurdo.  $\square$

## 2.4 La sfera di Riemann

**Definizione 2.4.1.** La SFERA DI RIEMANN è l'insieme  $\hat{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  (l'ultimo è la retta proiettiva complessa). Per noi sarà  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  con la seguente topologia: ristretta a  $\mathbb{C}$  è la topologia usuale, mentre gli intorno aperti di  $\infty$  sono della forma  $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$  con  $K \subset \subset \mathbb{C}$  compatto.

Siano  $U_0 = \mathbb{C}, U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$  (si noti che  $U_1$  è un intorno aperto di  $\infty$ ). Sia  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  definita come

$$\varphi_1(w) = \begin{cases} 1/w & \text{se } w \neq \infty \\ 0 & \text{se } w = \infty. \end{cases}$$

$\varphi_1$  è un omeomorfismo fra  $U_1$  e  $\mathbb{C}$ . Sia  $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}, \varphi_0(z) = z$  (l'identità); è un omeomorfismo fra  $U_0$  e  $\mathbb{C}$ .

$U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*, \varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* = \varphi_0(U_0 \cap U_1)$ .

$\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}, \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, (\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1})(w) = \frac{1}{w}, (\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(z) = \frac{1}{z}$  sono olomorfe.

$\varphi_0$  e  $\varphi_1$  si chiamano *carte*. Una funzione definita a valori in  $\hat{\mathbb{C}}$  è olomorfa se lo è letta tramite carte. Vediamo nello specifico cosa significa.

Sia  $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  aperto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua; quando è olomorfa?

Risposta:

- (i)  $f|_{\Omega \cap \mathbb{C}}$  è olomorfa in senso classico (notiamo che  $\Omega \cap \mathbb{C} = \Omega \setminus \{\infty\}$ );
- (ii)  $f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa vicino a  $0 = \varphi_1(\infty)$ .  
 $(f \circ \varphi_1^{-1})(w) = f\left(\frac{1}{w}\right).$

**Esempio 2.4.2.**  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ . Quando è olomorfa in  $\infty$ ? Se e solo se  $f\left(\frac{1}{w}\right)$  è olomorfa in 0.  $f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n w^{-n}$  è olomorfa in 0  $\iff c_n = 0$  per ogni  $n > 0$ .

**Osservazione 2.4.3.**  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa se e solo se è costante. Infatti,  $\hat{\mathbb{C}}$  compatto  $\Rightarrow f(\hat{\mathbb{C}})$  compatto, cioè chiuso e limitato in  $\mathbb{C} \Rightarrow |f|$  ha max in  $x_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ . Se  $z_0 \in \mathbb{C}$ , allora per il teorema di Liouville 2.1.5  $f|_{\mathbb{C}}$  è costante  $\Rightarrow f$  costante. Se  $z_0 = \infty$ ,  $f(1/w)$  ha massimo in 0, dunque ragionando come prima è costante.

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  continua; quando è olomorfa?

Risposta:

- (i)  $f$  è olomorfa in  $\Omega \setminus f^{-1}(\infty)$  in senso classico;
- (ii) se  $f(z_0) = \infty$ ,  $\varphi_1 \circ f = \frac{1}{f}$  è olomorfa vicino a  $z_0$ .

**Esempio 2.4.4.**  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$  è a valori in  $\hat{\mathbb{C}}$  se 0 è un polo (ci interessa il caso in cui  $\infty$  sia effettivamente nell'immagine, altrimenti è una comune funzione olomorfa a valori in  $\mathbb{C}$ ), cioè consideriamo  $f(0) = \infty$ . Supponiamo allora  $f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n = z^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^{n+k} = z^{-k} h(z)$ ,  $h(0) = c_{-k} \neq 0$ ,  $h$  olomorfa.  $\frac{1}{f}(z) = \frac{z^k}{h(z)}$  è olomorfa in 0. Viceversa, se  $f$  è olomorfa,  $\frac{1}{f}$  è olomorfa in 0  $\Rightarrow \frac{1}{f}(z) = z^k \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ ,  $c_0 \neq 0, k \geq 1$  (la condizione  $k \geq 1$  segue dal fatto che siamo nell'ipotesi  $f(0) = \infty \Rightarrow (1/f)(0) = 0$ ). Allora  $\frac{1}{f}(z) = z^k h(z) \Rightarrow f(z) = z^{-k} \frac{1}{h(z)}$  e quindi ha un polo in 0.

**Corollario 2.4.5.**  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  è olomorfa se e solo se è meromorfa.

Possiamo ora dare una definizione generale.

**Definizione 2.4.6.**  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  continua è *olomorfa* se e solo se  $f\left(\frac{1}{w}\right)$  è olomorfa vicino a 0 e  $\frac{1}{f}$  è olomorfa vicino a  $f^{-1}(\infty)$  (e ovviamente dev'essere normalmente olomorfa in tutti gli altri punti).

Se  $f(\infty) = \infty$ , la condizione è che  $\frac{1}{f(1/w)}$  sia olomorfa in 0.

**Esempio 2.4.7.**  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_dz^d, a_d \neq 0$  (un polinomio).  $p(\infty) = \infty$ .  
È olomorfo in  $\infty$ ? Si:  $\frac{1}{p(1/z)} = \frac{1}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_dz^{-d}} = \frac{1}{z^{-d}(a_0z^d + \dots + a_d)} = \frac{z^d}{a_d + \dots + a_0z^d}$  è olomorfo in 0.  $\frac{1}{p(1/z)}$  ha uno zero di ordine  $d$  in 0  $\iff$   $p$  ha un polo di ordine di  $-d$  in  $\infty$  (vedremo più avanti come è definito  $ord_f(\infty)$ ).

**Proposizione 2.4.8.**  $f \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}}) \iff f = \frac{P}{Q}$  con  $P, Q \in \mathbb{C}[z]$  senza fattori comuni, cioè  $f$  è una funzione razionale.

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Sappiamo che  $\mathbb{C}[z] \subset \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$  e quozienti di funzioni olomorfe sono olomorfi.

( $\Rightarrow$ ) Sia  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  olomorfa non costante.  $Z_f = f^{-1}(0)$  è chiuso e discreto in  $\hat{\mathbb{C}}$  che è compatto, dunque è finito, perciò  $Z_f \cap \mathbb{C} = \{z_1, \dots, z_k\} \subset \mathbb{C}$ . Analogamente  $P_f = f^{-1}(\infty) = Z_{1/f}$ ,  $P_f \cap \mathbb{C} = \{w_1, \dots, w_h\} \subset \mathbb{C}$ . Sia  $g(z) = \frac{(z - w_1) \dots (z - w_h)}{(z - z_1) \dots (z - z_k)} f(z)$ ,  $g \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$  (gli zeri e i poli compaiono con molteplicità nei prodotti al numeratore e al denominatore). In questo modo  $g$  non ha né zeri né poli in  $\mathbb{C}$ . Se  $g(\infty) \in \mathbb{C}$ ,  $g \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow g$  costante, diciamo  $g \equiv c \Rightarrow f(z) = c \frac{(z - z_1) \dots (z - z_k)}{(z - w_1) \dots (z - w_h)}$ , come voluto. Se  $g(\infty) = \infty \Rightarrow \frac{1}{g}(\infty) = 0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{g} \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow \frac{1}{g}$  costante e si conclude come sopra.  $\square$

**Definizione 2.4.9.** Sia  $f = \frac{P}{Q} \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ . Il GRADO DI  $f$  è  $\deg f = \max\{\deg P, \deg Q\}$ .

La definizione dell'ordine di zeri e poli in  $\mathbb{C}$  ce l'abbiamo.

$$f(\infty) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{P(1/w)}{Q(1/w)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{a_m \left(\frac{1}{w}\right)^m + \dots + a_0}{b_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + \dots + b_0} =$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} w^{n-m} \frac{a_m + \dots + a_0 w^m}{b_n + \dots + b_0 w^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n > m \\ \frac{a_m}{b_n} & \text{se } n = m \\ \infty & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Definiamo allora  $ord_f(\infty) = n - m = \deg Q - \deg P$ .

**Definizione 2.4.10.** Siano  $f \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ ,  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ . La MOLTEPLICITÀ DI  $f$  IN  $z_0$  è  $\delta_f(z_0)$  definita come segue: se  $f(z_0) = w_0 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0$  è uno zero di  $f - w_0$  e poniamo  $\delta_f(z_0) = ord_{f-w_0}(z_0)$ ; se  $f(z_0) = \infty$ ,  $z_0$  è un polo di  $f$  e poniamo  $\delta_f(z_0) = -ord_f(z_0)$ . Si ha che  $\delta_f(z_0) \in \mathbb{N}$ .

**Proposizione 2.4.11.** Sia  $f \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$  non costante. Allora per ogni  $q \in \hat{\mathbb{C}}$

$$\sum_{f(p)=q} \delta_f(p) = \deg f.$$



*Dimostrazione.* Sia  $f = \frac{P}{Q}$ . Se  $q = 0$ ,  $\sum_{f(p)=0} \delta_f(p) = \sum_{\substack{f(p)=0 \\ p \in \mathbb{C}}} \delta_f(p) + c \cdot \delta_f(\infty)$

dove  $c = 1$  se  $f(\infty) = 0$  e  $c = 0$  altrimenti. Si noti che per il teorema fondamentale dell'algebra  $\sum_{\substack{f(p)=0 \\ p \in \mathbb{C}}} \delta_f(p) = \deg P$ . Per com'è definito  $c$ ,  $c \cdot \delta_f(\infty) =$

$\max\{0, \deg Q - \deg P\}$ . Allora  $\sum_{f(p)=0} \delta_f(p) = \deg P + \max\{0, \deg Q - \deg P\} =$

$\max\{\deg P, \deg Q\} = \deg f$ . Se  $q = \infty$ ,  $\sum_{f(p)=\infty} \delta_f(p) = \sum_{\substack{f(p)=\infty \\ p \in \mathbb{C}}} \delta_f(p) + c \cdot \delta_f(\infty)$

dove stavolta  $c = 1$  se  $f(\infty) = \infty$  e  $c = 0$  altrimenti. Dunque in questo caso la sommatoria vale, per il teorema fondamentale dell'algebra,  $\deg Q$ , mentre  $c \cdot \delta_f(\infty) = \max\{0, \deg P - \deg Q\}$ , per cui  $\sum_{f(p)=\infty} \delta_f(p) = \deg Q +$

$\max\{0, \deg P - \deg Q\} = \max\{\deg Q, \deg P\} = \deg f$ . Se  $q \in \mathbb{C}^*$ ,  $\sum_{f(p)=q} \delta_f(p) =$

$$\sum_{f(p)=q} \text{ord}_{f-q}(p) = \sum_{f(p)=q} \text{ord}_{f-q}(p) = \deg(f - q). \quad f(z) - q = \frac{P(z) - qQ(z)}{Q(z)}.$$

$$\deg(P - qQ) \begin{cases} = \max\{\deg P, \deg Q\} & \text{se sono diversi} \\ \leq \max\{\deg P, \deg Q\} & \text{se sono uguali} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \deg(f - q) = \deg f. \quad \square$$

**Corollario 2.4.12.** Siano  $f \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$  non costante,  $w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ . Allora  $1 \leq \text{card}(f^{-1}(w_0)) \leq \deg f$ .

*Dimostrazione.*  $\geq 1$ : se  $w_0 \neq \infty$ ,  $f(z) = w_0 \iff f(z) - w_0 = 0 \iff P(z) - w_0 Q(z) = 0$  e per il teorema fondamentale dell'algebra esiste  $z$  che soddisfa; se  $w_0 = \infty$ , si considera  $1/f$ .

$$\text{card}(f^{-1}(w_0)) \leq \sum_{f(p)=w_0} \delta_f(p) = \deg f. \quad \square$$

**Osservazione 2.4.13.**  $\delta_f(p) > 1 \Rightarrow f'(p) = 0 \vee \left(\frac{1}{f}\right)'(p) = 0$ . Infatti, senza perdita di generalità  $p = 0$  e  $f(p) = 0$ , allora se  $\delta_f(p) = k > 1$  si ha che  $f(z) = z^k h(z)$  con  $h$  olomorfa e  $h(0) \neq 0 \Rightarrow f'(z) = [kz^{k-1}h(z) + z^k h'(z)]$ . Ricordando che  $k > 1$ , si ha che  $f'(0) = 0$ .

**Corollario 2.4.14.**  $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \iff \deg f = 1 \iff f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $ad - bc = 1$ .

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Ogni  $f \in \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$  è suriettiva per quanto appena dimostrato. Se  $\deg f = 1$ , allora  $f$  è iniettiva, quindi biettiva, per cui per il teorema 2.2.6  $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ .

( $\Rightarrow$ )  $f$  automorfismo  $\Rightarrow f$  iniettiva  $\Rightarrow \sum_{f(p)=w_0} \delta_f(p)$  contiene un unico addendo

con molteplicità uno (da cui la tesi). Infatti, da  $f$  non costante si ha che  $f'$  ha un insieme di zeri discreto  $C_f$  e  $(1/f)'$  ha un insieme di zeri discreto  $C_{1/f}$ . Allora basta prendere  $z_0 \notin C_f \cup C_{1/f}$  per ottenere, dall'osservazione precedente, che  $\delta_f(z_0) = 1$ .

Il secondo se e solo se è un banale esercizio lasciato al lettore.  $\square$

**Osservazione 2.4.15.** Siccome numeratore e denominatore sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, possiamo supporre  $ad - bc = 1$ .

**Esercizio 2.4.16.**  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  è isomorfo a  $SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I_2\}$ .

**Corollario 2.4.17.**  $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \iff f(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ .

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Ovvio.

( $\Rightarrow$ )  $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \Rightarrow f$  è iniettiva, dunque per Casorati-Weierstrass  $\infty$  è un polo di  $f \Rightarrow f$  si estende a un automorfismo di  $\hat{\mathbb{C}}$  con  $f(\infty) = \infty \Rightarrow f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ .  $\square$

## 2.5 Il disco unitario

Come abbiamo già visto, il disco unitario (aperto) è definito come  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

**Lemma 2.5.1.** (Lemma di Schwarz) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  t.c.  $f(0) = 0$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$   $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| \leq 1$ ; inoltre, se vale l'uguale nella prima per  $z \neq 0$  oppure nella seconda allora  $f(z) = e^{i\theta}z, \theta \in \mathbb{R}$ , cioè  $f$  è una rotazione.

*Dimostrazione.*  $f(0) = 0 \Rightarrow$  possiamo costruire  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$  con  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  estendendola per continuità in 0 a  $g(0) = f'(0)$ . Fissiamo  $0 < r < 1$ . Per ogni  $|z| \leq r$ , per il principio del massimo  $|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}$ . Mandando  $r$  a 1 otteniamo che per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|g(z)| \leq 1$ , da cui  $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| \leq 1$ .

Se vale uno dei due uguali sopra, allora esiste  $z_0 \in \mathbb{D}$  t.c.  $|g(z_0)| = 1$ , per cui sempre per il principio del massimo  $g$  è costantemente uguale a un valore di modulo 1, cioè  $g(z) = e^{i\theta}$  con  $\theta \in \mathbb{R}$  da cui  $f(z) = e^{i\theta}z$ .  $\square$

**Corollario 2.5.2.** Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  è t.c.  $f(0) = 0$ , allora  $f(z) = e^{i\theta}z$ .

*Dimostrazione.*  $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .  $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$ . Per il lemma di Schwarz,  $|f'(0)| \leq 1$  e  $|(f^{-1})'(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| = 1$ , da cui la tesi sempre per il lemma di Schwarz.  $\square$

**Lemma 2.5.3.** Sia  $G$  un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio  $X$ , cioè per ogni  $g \in G$  è data una biezione  $\gamma_g : X \rightarrow X$  t.c.  $\gamma_e = \text{id}$  e  $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$ , inoltre  $\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2} \iff g_1 = g_2$ . Sia  $G_{x_0}$  il gruppo di isotropia di  $x_0 \in X$ , cioè  $G_{x_0} = \{g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0\}$ . Supponiamo che per ogni  $x \in X$  esiste  $g_x \in G$  t.c.  $\gamma_{g_x}(x) = x_0$  e sia  $\Gamma = \{g_x \mid x \in X\}$ . Allora  $G$  è generato da  $\Gamma$  e  $G_{x_0}$ , cioè ogni  $g \in G$  è della forma  $g = h g_x$  con  $x \in X$  e  $h \in G_{x_0}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $g \in G$  e  $x = \gamma_g(x_0)$ . Allora  $(\gamma_{g_x} \circ \gamma_g)(x_0) = x_0 \Rightarrow \gamma_{g_x} \circ \gamma_g = \gamma_{g_x g} = \gamma_h$  con  $h \in G_{x_0} \Rightarrow g_x g = h \Rightarrow g = g_x^{-1} h$ . Partendo da  $g^{-1}$  avremmo ottenuto  $g^{-1} = g_x^{-1} h \Rightarrow g = h^{-1} g_x$  con  $h \in G_{x_0}$ .  $\square$

**Proposizione 2.5.4.**  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \iff$  esistono  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{D}$  t.c.  $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ .

*Dimostrazione.*  $(\Leftarrow) 1 - \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}$ . Se  $a, z \in \mathbb{D}$ ,  $f(z) \in \mathbb{D}$ .

Se  $a \in \mathbb{D}, z \in \partial\mathbb{D}$ ,  $f(z) \in \partial\mathbb{D}$ . L'inversa è  $f^{-1}(z) = e^{-i\theta} \frac{z + a e^{i\theta}}{z + \bar{a} e^{-i\theta}}$  ed è della stessa forma. Si noti che  $f(a) = 0$ .

$(\Rightarrow)$  Scriviamo per semplicità  $f_{a,\theta} = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ . Vediamo  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  come gruppo che agisce su  $\mathbb{D}$ .  $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$  è, per il corollario del lemma di Schwarz,  $\{f_{0,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ .  $\Gamma = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D}\}$  ( $f_{a,0}(a) = 0$ ). Per il lemma 2.5.3,  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  è generato da  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  e  $\Gamma$ , cioè ogni  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  è della forma  $\gamma = f_{0,\theta} \circ f_{a,0} = f_{a,\theta}$ .  $\square$

**Corollario 2.5.5.**  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  agisce in modo transitivo su  $\mathbb{D}$ , cioè per ogni  $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$  esiste  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  t.c.  $\gamma(z_0) = z_1$ .

*Dimostrazione.*  $\gamma = f_{z_1,0}^{-1} \circ f_{z_0,0}$ .  $\square$

**Osservazione 2.5.6.** Dati  $z_0, z_1, w_0, w_1 \in \mathbb{D}$  ( $z_0 \neq z_1, w_0 \neq w_1$ ), in generale non esiste  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  t.c.  $\gamma(z_0) = w_0$  e  $\gamma(z_1) = w_1$ . Infatti, se poniamo  $z_0 = w_0 = 0, z_1, w_1 \neq 0$ , abbiamo che  $\gamma(0) = 0 \Rightarrow \gamma(z) = e^{i\theta} z \Rightarrow |\gamma(z_1)| = |z_1|$ , per cui se  $|w_1| \neq |z_1|$  non è possibile trovare un siffatto  $\gamma$ .

**Esercizio 2.5.7.** Per ogni  $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1 \in \partial\mathbb{D}$  con  $\sigma_0 \neq \sigma_1, \tau_0 \neq \tau_1$  esiste  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  t.c.  $\gamma(\sigma_0) = \tau_0$  e  $\gamma(\sigma_1) = \tau_1$ .

**Lemma 2.5.8.** (Lemma di Schwarz-Pick) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$   $\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$  e per ogni  $z \in \mathbb{D}$   $\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$ . Inoltre se vale l'uguale nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale l'uguale sempre.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $w \in \mathbb{D}$  e  $\gamma_1(z) = \frac{z + w}{1 + \bar{w}z}$ ,  $\gamma_2(z) = \frac{z - f(w)}{1 - \overline{f(w)}z}$ .  $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .  $\gamma_1(0) = w, \gamma_2(f(w)) = 0$ .  $\gamma_1^{-1}(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ . Per il lemma di Schwarz applicato a  $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$  abbiamo che per ogni  $z \in \mathbb{D}$   $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(z)| \leq |z| \Rightarrow |(\gamma_2 \circ f)(z)| \leq |\gamma_1^{-1}(z)|$  che è la prima disuguaglianza. Abbiamo poi  $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \leq 1 \Rightarrow |\gamma_2'(f(w))f'(w)\gamma_1'(0)| \leq 1$ .  $\gamma_1'(z) = \frac{1 + \bar{w}z - \bar{w}(z + w)}{(1 + \bar{w}z)^2} \Rightarrow \gamma_1'(0) = 1 - |w|^2$ .  $\gamma_2'(z) = \frac{1 - \overline{f(w)}z - \overline{f(w)}(z - f(w))}{(1 - \overline{f(w)}z)^2} \Rightarrow \gamma_2'(f(w)) = \frac{1}{1 - |f(w)|^2}$ . Sostituendo si ottiene la seconda disuguaglianza con  $w$  al posto di  $z$ . La seconda parte del lemma di Schwarz ci dà in automatico la seconda parte di questo lemma (l'affermazione sui casi di uguaglianza).  $\square$

Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che la quantità  $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$  è contratta dalle  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Vediamo adesso una distanza costruita a partire da questa quantità.

**Definizione 2.5.9.** La *distanza di Poincaré su  $\mathbb{D}$*  è  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow [0, +\infty)$  data

$$\text{da } \omega(z, w) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|}{1 - \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|} = \text{arctanh} \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|.$$

**Corollario 2.5.10.**  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}), z, w \in \mathbb{D} \Rightarrow \omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w)$  con l'uguale per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  se e solo se c'è l'uguale sempre e  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Dimostrazione.*  $\text{arctanh} t$  è strettamente crescente. La tesi segue allora dal lemma di Schwarz-Pick.  $\square$

**Esercizio 2.5.11.**  $\omega$  è una distanza (completa).

**Soluzione** L'unica cosa un po' complicata è la disuguaglianza triangolare.

Hint:  $\mu(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$  è una distanza. Per dimostrare che  $\mu(z_1, z_2) \leq \mu(z_1, z_0) + \mu(z_0, z_2)$  si applica  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  (gli automorfismi del disco sono isometrie per  $\mu$ ) t.c.  $\gamma(z_1) = 0$  e a quel punto è facile dimostrare quello che va dimostrato. Adesso si nota che  $\omega(z_1, z_2) = \text{arctanh}(\mu(z_1, z_2)) \leq \text{arctanh}(\mu(z_1, z_0) + \mu(z_0, z_2)) \leq \text{arctanh}(\mu(z_1, z_0)) + \text{arctanh}(\mu(z_0, z_2))$ .

**Esercizio 2.5.12.** Una *geodetica* per  $\omega$  è una curva  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$  t.c.  $\omega(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$ . Dimostrare che i raggi  $t \mapsto \tanh(t) \frac{z_0}{|z_0|}$  sono geodetiche.

**Corollario 2.5.13.** Per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  esiste una geodetica che collega  $z_1$  con  $z_2$ .

Per definizione, gli automorfismi mandano geodetiche in geodetiche.

**Esercizio 2.5.14.** Sia  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e  $\sigma$  una geodetica passante per 0 ( $\sigma$  è un diametro), allora  $\gamma \circ \sigma$  è un arco di circonferenza ortogonale al bordo del disco.

**Definizione 2.5.15.** La *palla di Poincaré* è  $B_\omega(z_0, r) = \{z \in \mathbb{D} \mid \omega(z, z_0) < r\} = \{z \in \mathbb{D} \mid \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| < \tanh r\}$ . Geometricamente è un disco euclideo con centro  $\tilde{z}_0 = \frac{1 - (\tanh r)^2}{1 - (\tanh r)^2 |z_0|^2} z_0$  e raggio  $\rho = \frac{\tanh r (1 - |z_0|^2)}{1 - (\tanh r)^2 |z_0|^2} < 1 - |\tilde{z}_0|$ .  $\overline{B_\omega(z_0, r)} \subset \subset \mathbb{D} \Rightarrow \omega$  è completa (le palle chiuse sono compatte).

## 2.6 Dinamica del disco e del semipiano superiore

Vogliamo adesso cercare di studiare qual è la "dinamica" delle funzioni olomorfe. Lo faremo nei casi del disco e del semipiano superiore.

**Proposizione 2.6.1.** Sia  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D}), \gamma \neq \text{id}_{\mathbb{D}}$ . Allora o

- (i)  $\gamma$  ha un unico punto fisso in  $\mathbb{D}$  (si parla in questo caso di automorfismo *ellittico*) o
- (ii)  $\gamma$  non ha punti fissi in  $\mathbb{D}$  e ha un unico punto fisso in  $\partial\mathbb{D}$  (*parabolico*) o
- (iii)  $\gamma$  non ha punti fissi in  $\mathbb{D}$  e ha due punti fissi distinti in  $\partial\mathbb{D}$  (*iperbolico*).

*Dimostrazione.*  $\gamma(z_0) = z_0 \iff e^{i\theta}(z_0 - a) = (1 - \bar{a}z_0)z_0 \iff \bar{a}z_0^2 + (e^{i\theta} - 1)z_0 - e^{i\theta}a = 0$ , equazione di secondo grado con radici  $z_1, z_2$  (può essere che  $z_1 = z_2$ ) t.c.  $z_1 \cdot z_2 = -e^{i\theta} \frac{a}{\bar{a}} \in \partial\mathbb{D} \Rightarrow |z_1||z_2| = 1$ . Se  $z_1 \neq z_2$ , o  $z_1 \in \mathbb{D}$  e  $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{D}\}$  (caso ellittico) e  $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}$  (caso iperbolico). Se  $z_1 = z_2$ ,  $|z_1| = |z_2| = 1$  (caso iperbolico).  $\square$

**Osservazione 2.6.2.** Se  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  è t.c.  $f(z_1) = z_1$  e  $f(z_2) = z_2$  con  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}, z_1 \neq z_2$ , allora  $f = \text{id}_{\mathbb{D}}$ . Infatti, possiamo supporre  $z_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$  e  $f(z_2) = z_2$ , quindi siamo nel caso del lemma di Schwarz in cui vale l'uguaglianza, per cui  $f(z) = e^{i\theta}z$ , ma  $f(z_2) = z_2 \Rightarrow e^{i\theta} = 1$ .

**Esempio 2.6.3.** Esempio di automorfismo ellittico: la rotazione intorno a 0  $\gamma_{0,\theta}(z) = e^{i\theta}z$ . Più in generale, se  $a \in \mathbb{D}$ ,  $\gamma_{a,0}(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ , allora  $\gamma_{a,0}^{-1} \circ \gamma_{0,\theta} \circ \gamma_{a,0}$  è ellittico con punto fisso  $a$ . Queste sono dette *rotazioni non euclidee* e caratterizzano tutti gli automorfismi ellittici (lo si può vedere coniugando opportunamente con  $\gamma_{a,0}$  o  $\gamma_{a,0}^{-1}$ ).

**Definizione 2.6.4.** Il SEMIPIANO SUPERIORE è  $\mathbb{H}^+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \Im w > 0\}$ . La TRASFORMATA DI CAYLEY è  $\Psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}^+$  t.c.  $\Psi(z) = i \frac{1+z}{1-z}$ .

Notiamo che possiamo vedere  $\mathbb{H}^+ \subset \hat{\mathbb{C}}$  e in questo caso  $\partial\mathbb{H}^+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .  
 $\Psi^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i}$ .  $\Psi(0) = 1, \Psi(1) = \infty$ .

$\Im \Psi(z) = \Im \left( i \frac{1+z}{1-z} \right) = \Re \left( \frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{1}{|1-z|^2} \Re((1+z)(1-\bar{z})) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$   
 che è  $> 0 \iff z \in \mathbb{D}$  e  $= 0 \iff z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ .

$\Psi$  è un biolomorfismo fra  $\mathbb{D}$  e  $\mathbb{H}^+$  che si estende continua a  $\partial\mathbb{D} \longrightarrow \partial\mathbb{H}^+$ . Se abbiamo  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ , abbiamo anche  $F = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} : \mathbb{H}^+ \longrightarrow \mathbb{H}^+$  e viceversa.

**Corollario 2.6.5.**  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^+) \iff \gamma(w) = \frac{aw+b}{cw+s}$  con  $ad-bc = 1$  e  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Si ha allora che  $\text{Aut}(\mathbb{H}^+) \cong SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I_2\} = PSL(2, \mathbb{R})$  (questo è detto *gruppo speciale lineare proiettivo*).

*Dimostrazione.*  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^+) \iff \Psi^{-1} \circ \gamma \circ \Psi \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \iff (\Psi^{-1} \circ \gamma \circ \Psi)(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ . Ponendo  $\Psi(z) = w$ , l'uguaglianza sopra equivale a  $\gamma(w) = \Psi \left( e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) = \Psi \left( e^{i\theta} \frac{\Psi^{-1}(w)-a}{1-\bar{a}\Psi^{-1}(w)} \right)$ . Facendo il conto si trova l'enunciato.  $\square$

**Esercizio 2.6.6.**  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^+)$  è t.c.  $\gamma(i) = i \iff \gamma(w) = \frac{w \cos \theta - \sin \theta}{w \sin \theta + \cos \theta}$ .

**Esempio 2.6.7.** Sia  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^+)$ ,  $\gamma(\infty) = \infty \iff \gamma(w) = \alpha w + \beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ . Se lo vogliamo parabolico non deve avere altri punti fissi in  $\mathbb{C}$  e questo è possibile se e solo se  $\alpha w + \beta = w$  non ha altre soluzioni  $\iff \alpha = 1, \beta \neq 0$ , cioè  $\gamma(w) = w + \beta$ . È una traslazione di  $\mathbb{H}^+$  parallela al suo bordo.

**Esercizio 2.6.8.** Sia  $\tau \in \partial\mathbb{D}$ . Dimostrare che tutti gli automorfismi  $\gamma$  parabolici di  $\mathbb{D}$  con  $\gamma(\tau) = \tau$  sono della forma  $\gamma(z) = \sigma_0 \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$  con  $z_0 = \frac{ic}{2-ic}\tau$  e  $\sigma_0 = \frac{2-ic}{2+ic}$  con  $c \in \mathbb{R}$ . Hint: a meno di una rotazione,  $\tau = 1$ .

**Esempio 2.6.9.**  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^+)$  è iperbolico con  $\gamma(\infty) = \infty$  e  $\gamma(0) = 0 \iff \gamma(w) = \alpha w$  con  $\alpha > 0$ .

Passiamo ora alla DINAMICA DI FUNZIONI ITERATE. Abbiamo uno spazio generico  $X$  e una funzione  $f : X \longrightarrow X$ . Le sue *iterate* sono  $f^2 = f \circ f$  e, induttivamente,  $f^{k+1} = f \circ f^k$ . Vogliamo capire il comportamento asintotico

di  $\{f^k\}$  (in relazione alla struttura presente su  $X$ ), per esempio, capire cosa succede all'*orbita*  $O^+(x) = \{f^k(x)\}$  con  $x \in X$ .

**Esempio 2.6.10.**  $\gamma(w) = \alpha w \Rightarrow \gamma^2(w) = \alpha(\alpha w) = \alpha^2 w \Rightarrow \gamma^k(w) = \alpha^k w$ . Quindi: se  $0 < \alpha < 1$ ,  $\gamma^k(w) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty \Rightarrow \gamma^k \rightarrow 0$  (costante) uniformemente sui compatti; se  $\alpha > 1$ ,  $\gamma^k(w) \rightarrow \infty$  per  $k \rightarrow +\infty \Rightarrow \gamma^k \rightarrow \infty$  (costante) uniformemente sui compatti.

**Esempio 2.6.11.**  $\gamma(w) = w + \beta \Rightarrow \gamma^k(w) = w + k\beta \Rightarrow \gamma^k(w) \rightarrow \infty$  per  $k \rightarrow +\infty \Rightarrow \gamma^k \rightarrow \infty$  (costante) uniformemente sui compatti.

**Osservazione 2.6.12.**

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \Psi \uparrow \cong & & \cong \uparrow \Psi \\ Y & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

$\Psi$  bigezione (omeomorfismo/bioloformismo/eccetera),  $F = \Psi^{-1} \circ f \circ \Psi$ , cioè  $F$  è *coniugata* a  $f$ . Allora  $f^k = \Psi^{-1} \circ f^k \circ \Psi$ , cioè  $F^k$  è coniugata a  $f^k$  per ogni  $k$ . In particolare, la "dinamica di  $F$ " è "uguale" alla "dinamica di  $f$ ".

**Corollario 2.6.13.** Sia  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  parabolico o iperbolico, allora  $\gamma^k$  converge uniformemente sui compatti a una funzione costantemente uguale a un punto fisso di  $\gamma$  sul bordo.

*Dimostrazione.* A meno di coniugio possiamo supporre  $\text{Fix}(\gamma) = \{1\}$  nel caso parabolico e  $\{1, -1\}$  nel caso iperbolico. Coniughiamo con  $\Psi$  e usiamo gli esempi.  $\square$

Sia  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  ellittico, a meno di coniugio  $\gamma(0) = 0 \Rightarrow \gamma(z) = e^{2\pi i\theta} z \Rightarrow \gamma^k(z) = e^{2k\pi i\theta} z$ . Se  $\theta \in \mathbb{Q}$ , esiste  $k_0$  t.c.  $k_0\theta \in \mathbb{Z} \Rightarrow \gamma^{k_0}(z) \equiv z \iff \gamma^{k_0} = \text{id}_{\mathbb{D}}$ .

**Esercizio 2.6.14.** Se  $\theta \notin \mathbb{Q}$ ,  $\gamma^k(z) \neq z$  per ogni  $z \neq 0$  e  $k \in \mathbb{N}^*$ , da cui si ha anche che  $\gamma^k(z) \neq \gamma^h(z)$  per ogni  $z \neq 0$  e  $h \neq k$ .

**Esercizio 2.6.15.** Se  $\theta \notin \mathbb{Q}$ ,  $\{\gamma^k(z_0) \mid k \in \mathbb{N}\}$  è densa nella circonferenza  $\{|z| = |z_0|\}$ .

Vogliamo adesso studiare la dinamica di una  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  qualunque.

**Definizione 2.6.16.** Sia  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ , un *punto limite* di  $\{f^k\}$  è  $g \in \text{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$  t.c. è il limite di una sottosuccessione  $\{f^{k_\nu}\}$ , cioè  $f^{k_\nu} \rightarrow g$ .

**Lemma 2.6.17.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ . Se  $\text{id}_\Omega$  è un punto limite di  $\{f^k\}$ , allora  $f \in \text{Aut}(\Omega)$ .

*Dimostrazione.*  $f^{k_\nu} \rightarrow \text{id}_\Omega \Rightarrow f$  è iniettiva (se  $z_1 \neq z_2$  sono t.c.  $f(z_1) = f(z_2)$ , allora  $f^{k_\nu}(z_1) = f^{k_\nu}(z_2)$ , ma la prima tende a  $z_1$  e la seconda a  $z_2$ , che sono diversi, assurdo). Se  $z_0 \in \Omega$ ,  $z_0 = \text{id}_\Omega(z_0)$ . Per il primo teorema di Hurwitz,  $\text{id}_\Omega(z_0) \in f^{k_\nu}(\Omega)$  per  $\nu \gg 1$ , ma  $f^{k_\nu}(\Omega) \subseteq f(\Omega) \Rightarrow f$  è suriettiva.  $\square$

**Proposizione 2.6.18.** Sia  $\Omega \subset \subset \mathbb{C}$  un dominio limitato,  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ . Sia  $h \in \text{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$  un punto limite di  $\{f^k\}$  (che esiste per il teorema di Montel). Allora o

- (i)  $h \equiv c \in \overline{\Omega}$  oppure
- (ii)  $h \in \text{Aut}(\Omega)$  e in questo caso  $f \in \text{Aut}(\Omega)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $h = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f^{k_\nu}$ . Poniamo  $m_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$ . Possiamo supporre  $m_\nu \rightarrow +\infty$ . Per Montel, a meno di una sottosuccessione possiamo supporre  $f^{m_\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} g \in \text{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ . Se  $h$  è costante abbiamo finito. Se  $h$  non è costante, per il teorema dell'applicazione aperta  $h$  è aperta  $\Rightarrow h(\Omega)$  è aperto in  $\Omega$ . Se  $z \in \Omega$ ,  $g(h(z)) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f^{m_\nu}(f^{k_\nu}(z)) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f^{k_{\nu+1}}(z) = h(z) \Rightarrow g|_{h(\Omega) \cap \Omega} = \text{id}_\Omega$ , ma per il principio di identità questo ci dà  $g|_\Omega \equiv \text{id}_\Omega$ , dunque per il lemma 2.6.17 abbiamo che  $f \in \text{Aut}(\Omega)$ . A meno di sottosuccessioni è facile vedere che  $f^{-k_\nu} = (f^{-1})^{k_\nu}$  converge a  $h^{-1}$ .  $\square$

**Proposizione 2.6.19.** Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ ,  $f(z_0) = z_0, z_0 \in \mathbb{D}$ ,  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora  $f^k \rightarrow z_0$  (costante) uniformemente sui compatti.

*Dimostrazione.* A meno di coniugio possiamo supporre  $z_0 = 0$ . Per il lemma di Schwarz,  $|f(z)| < |z|$  per ogni  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Fissiamo  $0 < r < 1$ . In  $\overline{\mathbb{D}}_r$ ,  $\left| \frac{f(z)}{z} \right|$  ha un massimo  $\lambda_r < 1$ . Per ogni  $z \in \overline{\mathbb{D}}_r$ ,  $|f(z)| \leq \lambda_r |z| \Rightarrow |f^2(z)| \leq \lambda_r |f(z)| \leq \lambda_r^2 |z| \Rightarrow |f^k(z)| \leq \lambda_r^k |z| \leq \lambda_r^k r \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty \Rightarrow f^k \rightarrow 0$  (costante) uniformemente sui compatti.  $\square$

**Teorema 2.6.20.** (Wolff-Denjoy) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  senza punti fissi in  $\mathbb{D}$ . Allora esiste un unico  $\tau_0 \in \partial\mathbb{D}$  t.c.  $f^k \rightarrow \tau_0$  (costante) uniformemente sui compatti.