

Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Scuola Normale Superiore di Pisa



19 Aprile 2021

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Definizione

Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}}{\frac{z-w}{1-\bar{w}z}} = \frac{f'(w)(1-|w|^2)}{1-|f(w)|^2}.$$

Derivata e rapporto iperbolici

Definizione

Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}}{\frac{z-w}{1-\bar{w}z}} = \frac{f'(w)(1-|w|^2)}{1-|f(w)|^2}.$$

Definizione

Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}}{\frac{z-w}{1-\bar{w}z}} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w. \end{cases}$$

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

Per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $1 \leq \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|}$; all'interno delle regioni di Stolz vale una sorta di disuguaglianza opposta.

Definizione

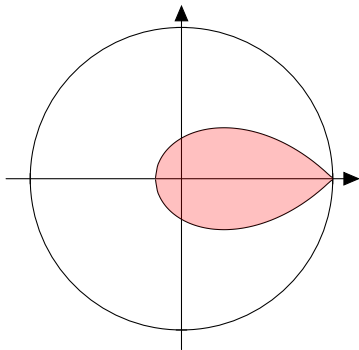
Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

Per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $1 \leq \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|}$; all'interno delle regioni di Stolz vale una sorta di disuguaglianza opposta.

Perciò, all'interno di una data regione, le quantità $|\sigma - z|$ e $1 - |z|$ sono vicendevolmente una O -grande dell'altra.

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.



La regione di Stolz $K(1, 2)$.

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Definizione

Date tre funzioni $f, g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o(h(z))$ per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\text{nt-}\lim_{z \rightarrow \sigma} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$.

Definizione

Date tre funzioni $f, g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o(h(z))$ per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\text{nt-}\lim_{z \rightarrow \sigma} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

Notiamo che la definizione di limite non tangenziale è più debole di quella di limite classico; nel nostro caso rende il risultato più forte.

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (1)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Teoremi di Bracci-Kraus-Roth e di Burns-Krantz

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o(|z_n| - 1)^2 \quad (1)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (2)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Teoremi di Bracci-Kraus-Roth e di Burns-Krantz

Ricordiamo il lemma di Schwarz-Pick.

Teoremi di Bracci-Kraus-Roth e di Burns-Krantz

Ricordiamo il lemma di Schwarz-Pick.

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$|f^*(z, w)| \leq 1.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza per $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Teoremi di Bracci-Kraus-Roth e di Burns-Krantz

Ricordiamo il lemma di Schwarz-Pick.

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$|f^*(z, w)| \leq 1.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza per $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Osservazione

I due Teoremi sono risultati di rigidità simili alla parte di unicità del lemma di Schwarz-Pick, ma per un punto sul bordo del disco; lo stesso Lemma è il punto di partenza per la dimostrazione elementare dei Teoremi.

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto; l'idea è che se $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto; l'idea è che se $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.
- Dalla versione a quattro punti seguirà un Corollario, che avrà a sua volta, come caso particolare, la disuguaglianza di Golusin.

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto; l'idea è che se $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.
- Dalla versione a quattro punti seguirà un Corollario, che avrà a sua volta, come caso particolare, la disuguaglianza di Golusin.
- Con Golusin dimostreremo il teorema di Bracci-Kraus-Roth e, sfruttando un risultato sui limiti non tangenziali, ne deriveremo il teorema di Burns-Krantz.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

La distanza di Poincaré

Sia $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di ω il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w).$$

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

- (i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*
- (ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora esiste un unico punto $c \in \mathbb{D}$ in cui f ha molteplicità doppia.*

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

- (i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*
- (ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora esiste un unico punto $c \in \mathbb{D}$ in cui f ha molteplicità doppia.*

Data f , indichiamo con R_f la rotazione iperbolica attorno a c .

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (3)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (3)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (3)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Osservazione

Se $f(0) = 0$ troviamo $\omega(f(z)/z, f'(0)) \leq \omega(z, 0)$. Il disco iperbolico di centro $f'(0)$ e raggio $\omega(z, 0)$ è, in generale, strettamente contenuto in \mathbb{D} .

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v))$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \\ &\leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(u, v) + \omega(w, z). \end{aligned}$$



Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Prendendo $v = z$ e $u = w$ otteniamo

$$\omega(0, f^h(z)) \leq \omega(0, f^h(w)) + 2\omega(z, w)$$

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Traccia della dimostrazione:

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right)$$

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \end{aligned}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \\ &= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w). \end{aligned}$$



Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Prendendo $w = 0$ e raccogliendo i logaritmi otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq 2\omega(0, z)$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (6)$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (6)$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (6)$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

da cui

$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.$$



Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (7)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (7)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (7)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (7)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty. \quad \square$$

Risultato sui limiti non tangenziali

Per poter dimostrare il teorema di Burns-Krantz passando dal teorema di Bracci-Kraus-Roth, dobbiamo vedere che le ipotesi di quest'ultimo siano verificate sotto le ipotesi del primo; la seguente proposizione ci garantisce che è vero.

Risultato sui limiti non tangenziali

Per poter dimostrare il teorema di Burns-Krantz passando dal teorema di Bracci-Kraus-Roth, dobbiamo vedere che le ipotesi di quest'ultimo siano verificate sotto le ipotesi del primo; la seguente proposizione ci garantisce che è vero.

Proposizione

Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (8)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (8)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2).$$

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (8)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2).$$

Per il teorema di Bracci-Kraus-Roth, $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$; per ipotesi dev'essere $f(1) = 1$ e $f''(1) = 0$, perciò $f(z) = z$. \square

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (8)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Esempio

Se $f(z) = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$, si ha $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - z}{(z - 1)^3} = -\frac{1}{4}$; dunque il termine $o((z - \sigma)^3)$ nel teorema di Burns-Krantz non è migliorabile.