

# Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

19 Aprile 2021



Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

# Lemma di Schwarz come risultato di rigidità

## Lemma di Schwarz

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| \leq 1$ ; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  oppure nella seconda allora  $f(z) = e^{i\theta}z$  per qualche  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

# Lemma di Schwarz come risultato di rigidità

## Lemma di Schwarz

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| \leq 1$ ; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  oppure nella seconda allora  $f(z) = e^{i\theta}z$  per qualche  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

## Osservazione

Dall'unicità seguono i seguenti risultati di rigidità: se  $|f'(z)| = 1 + o(1)$  per  $z$  che tende a 0, allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ; se  $f(z) = z + o(z - z_0)$  per  $z$  che tende a  $z_0 \in \mathbb{D}$ , allora  $f$  è proprio l'identità.

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

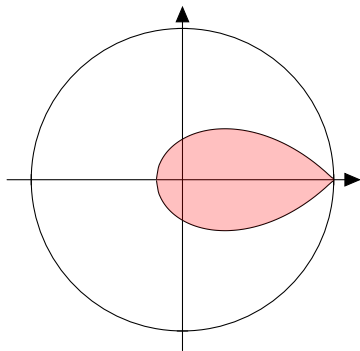
## Definizione

Dati  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e  $M > 1$ , chiamiamo *regione di Stolz*  $K(\sigma, M)$  l'insieme  $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$ .

# Teorema di Burns-Krantz

## Definizione

Dati  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e  $M > 1$ , chiamiamo *regione di Stolz*  $K(\sigma, M)$  l'insieme  $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$ .



La regione di Stolz  $K(1, 2)$ .

## Definizione

Dati  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e  $M > 1$ , chiamiamo *regione di Stolz*  $K(\sigma, M)$  l'insieme  $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$ .

## Definizione

Diciamo che una funzione  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$  ha *limite non-tangenziale*  $L \in \mathbb{C}$  in  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni  $M > 1$  si ha  $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$ .

## Definizione

Dati  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e  $M > 1$ , chiamiamo *regione di Stolz*  $K(\sigma, M)$  l'insieme  $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$ .

## Definizione

Diciamo che una funzione  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$  ha *limite non-tangenziale*  $L \in \mathbb{C}$  in  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni  $M > 1$  si ha  $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$ .

Notiamo che la definizione di limite non tangenziale è più debole di quella di limite classico; nel nostro caso rende il risultato più forte.



## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

## Esempio

Se  $f(z) = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$ , si ha  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - z}{(z - 1)^3} = -\frac{1}{4}$ ; dunque il termine  $o((z - \sigma)^3)$  nel teorema di Burns-Krantz non è migliorabile.

# Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

## Lemma di Schwarz-Pick

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.*

# Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

## Lemma di Schwarz-Pick

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.

## Definizione

Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}}{\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

# Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

## Lemma di Schwarz-Pick

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.

## Osservazione

Il lemma di Schwarz-Pick può essere visto come un risultato di rigidità per la derivata iperbolica: se  $|f^h(z)| = 1 + o(1)$  per  $z$  che tende a  $z_0 \in \mathbb{D}$ , allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

# Teorema di Bracci-Kraus-Roth

## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (2)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

# Teorema di Bracci-Kraus-Roth

## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (2)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

## Esempio

Prendiamo di nuovo  $f(z) = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$ . Si ha  $|f^h(z)| = \frac{2|z|}{1 + |z|^2}$ , perciò

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{|f^h(z)| - 1}{(|z| - 1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

# Risultato sui limiti non tangenziali

## Proposizione

*Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3)$$

*per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2)$$

*per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente.*



## Proposizione

Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente.

*Traccia della dimostrazione:* il punto è riuscire a stimare  $f'$ . Senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ . Dalla formula di Cauchy troviamo

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z).$$

## Proposizione

Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente.

All'interno delle regioni di Stolz, con ragionamenti geometrici si possono fare stime per dire che  $I(z) = o((z - 1)^2)$ . □

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (3)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (3)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ . Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente.

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (3)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ . Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente.

Per il teorema di Bracci-Kraus-Roth,  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ; per ipotesi dev'essere  $f(1) = 1$  e  $f''(1) = 0$ , perciò  $f(z) = z$ .  $\square$

# Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda.

# Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda.
- Dalla versione a quattro punti otterremo un Corollario riguardante la derivata iperbolica; esso avrà a sua volta, come caso particolare, una disuguaglianza dovuta a Golusin.

# Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda.
- Dalla versione a quattro punti otterremo un Corollario riguardante la derivata iperbolica; esso avrà a sua volta, come caso particolare, una disuguaglianza dovuta a Golusin.
- Dalla disuguaglianza di Golusin, scritta in forma opportuna, il teorema di Bracci-Kraus-Roth seguirà con una semplice dimostrazione per assurdo.



## Lemma di Schwarz-Pick

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.*

## Lemma di Schwarz-Pick

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.*

## Definizione

Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}}{\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w. \end{cases}$$

## Lemma di Schwarz-Pick

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.*

## Osservazione

Fissato  $w \in \mathbb{D}$ , si ha che  $f^*(z, w)$  è olomorfa in  $z$ . Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che, se  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ , allora  $f^*(\cdot, w) \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ .

# La distanza di Poincaré

Sia  $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$ ; ricordiamo la distanza iperbolica.

# La distanza di Poincaré

Sia  $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$ ; ricordiamo la distanza iperbolica.

## Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$  data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

# La distanza di Poincaré

Sia  $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$ ; ricordiamo la distanza iperbolica.

## Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$  data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di  $\omega$  il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w).$$

# Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

## Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$ .

# Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

## Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$ .

*Traccia della dimostrazione:* basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione  $f^*(\cdot, v)$ . □



# Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

## Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$ .

*Traccia della dimostrazione:* basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione  $f^*(\cdot, v)$ . □

## Osservazione

Se  $f(0) = 0$  troviamo  $\omega(f(z)/z, f'(0)) \leq \omega(z, 0)$ . Il disco iperbolico di centro  $f'(0)$  e raggio  $\omega(z, 0)$  è, in generale, strettamente contenuto in  $\mathbb{D}$ .

## Definizione

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado  $n$  la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{B}_n$  i prodotti di Blaschke di grado  $n$ .

## Definizione

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado  $n$  la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{B}_n$  i prodotti di Blaschke di grado  $n$ .

Notiamo che  $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

## Definizione

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado  $n$  la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{B}_n$  i prodotti di Blaschke di grado  $n$ .

Notiamo che  $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

## Proposizione

*Valgono le seguenti:*

- (i) *si ha che  $f \in \mathcal{B}_{n+1}$  se e solo se  $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$ , con  $w \in \mathbb{D}$  fissato;*
- (ii) *se  $f \in \mathcal{B}_2$  allora esiste un unico punto  $c \in \mathbb{D}$  in cui  $f$  ha molteplicità doppia.*

# Prodotti di Blaschke

## Definizione

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado  $n$  la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{B}_n$  i prodotti di Blaschke di grado  $n$ .

Notiamo che  $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

## Proposizione

*Valgono le seguenti:*

- (i) *si ha che  $f \in \mathcal{B}_{n+1}$  se e solo se  $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$ , con  $w \in \mathbb{D}$  fissato;*
- (ii) *se  $f \in \mathcal{B}_2$  allora esiste un unico punto  $c \in \mathbb{D}$  in cui  $f$  ha molteplicità doppia.*

Data  $f$ , indichiamo con  $R_f$  la rotazione iperbolica attorno a  $c$ .

# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Traccia della dimostrazione:*

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v))$$

# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$



# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$

# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \\ &\leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(u, v) + \omega(w, z). \end{aligned}$$



# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Prendendo  $v = z$  e  $u = w$  otteniamo

$$\omega(0, f^h(z)) \leq \omega(0, f^h(w)) + 2\omega(z, w)$$

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

# Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

*Traccia della dimostrazione:*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right)$$

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \end{aligned}$$

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \\ &= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w). \end{aligned}$$

□

# Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

Prendendo  $w = 0$  e raccogliendo i logaritmi otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq 2\omega(0, z)$$



## Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (7)$$

## Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (7)$$

*Traccia della dimostrazione:*

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

## Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (7)$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

da cui

$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.$$



## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Traccia della dimostrazione:* per assurdo  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Traccia della dimostrazione:* per assurdo  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ , per Schwarz-Pick  $|f^h(0)| < 1$  e dunque

## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Traccia della dimostrazione:* per assurdo  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ , per Schwarz-Pick  $|f^h(0)| < 1$  e dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty. \quad \square$$