Lemma di Schwarz-Pick al bordo (titolo provvisorio)

Marco Vergamini

Indice

Introduzione

Da scrivere alla fine

1 Prerequisiti

2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

2.1 Lemma di Schwarz-Pick al bordo

Ponendo $w = 0$ in refquasigolusin otteniamo la disuguaglianza di Golusin, dalla quale possiamo dimostrare una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick, seguendo la traccia data nel remark 5.6 di [BKR].

Teorema 2.1.1. (lemma di Scharz-Pick al bordo) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f^h(z_n) = 1 + o(|z_n - 1|^2) \tag{1}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \longrightarrow 1$. Allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia un automorfismo. Allora possiamo applicare refquasigolusin, che per $w = 0$ ci dà □

segue da Golusin, cioè tutta una serie di risultati che texerò nei giorni a venire

2.2 Teorema di Burns-Krantz

Proposizione 2.2.1. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione tale che

$$f(z) = 1 + (z-1) + o(|z-1|^3) \tag{2}$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora

$$f^h(z) = 1 + o(|z-1|^2) \tag{3}$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.

Magari dire qualcosa sull'utilità di questa proposizione, che forse verrà spostata nei prerequisiti

Dimostrazione. Da scrivere, praticamente va copiata. □

ricordati di definire f^h, con la notazione di BKR, quindi occhio quando scrivi tutti i risultati e le dimostrazioni in BM

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 2.1 di [BK].

Teorema 2.2.2. (Burns-Krantz, 1994) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f(z) = 1 + (z-1) + \mathcal{O}(|z-1|^4) \tag{4}$$

per $z \longrightarrow 1$. Allora f è l'identità sul disco.

Dimostrazione. Se vale l'ipotesi (4) per $z \longrightarrow 1$ vale anche (2), in particolare per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Dalla proposizione 2.2.1 segue che anche (3) vale per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del teorema 2.1.1, da cui la tesi. □

Servono i risultati visti in BKR; poi: è comprensibile? Da rivedere in seguito

Aggiungere controesempio

Riferimenti bibliografici

[BK] D. M. Burns, S. G. Krantz, *Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary*, (1994)

[BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth, *A new Schwarz-Pick lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps*, (2020)

[BM] A. F. Beardon, D. Minda, *A multi-point Schwarz-Pick lemma*, (2004)