

Lemma di Schwarz-Pick al bordo (titolo provvisorio)

Candidato: Marco Vergamini Relatore: Marco Abate

Indice

Introduzione	3
1 Prerequisiti	4
1.1 Risultati noti	4
1.2 Andamenti non tangenziali	6
1.3 Verso la disuguaglianza di Golusin	9
2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz	12
2.1 Lemma di Schwarz-Pick al bordo	12
2.2 Teorema di Burns-Krantz	13
Ringraziamenti	14

Introduzione

L'obiettivo di questo scritto è dimostrare un teorema del 1994, il teorema di Burns-Krantz (teorema 2.1 di [BK]), attraverso risultati elementari. L'enunciato del teorema riguarda le funzioni olomorfe sul disco unitario con un certo andamento vicino a 1: se la funzione dista dall'identità al più per un $\mathcal{O}((z-1)^4)$, allora è proprio l'identità.

La dimostrazione originale del teorema non è lunga, ma un po' tecnica. In un recente articolo di Bracci, Kraus e Roth ([BKR]) si trova una dimostrazione alternativa del teorema di Burns-Krantz. Come spiegato nel remark 2.2 dell'articolo, è possibile passare dalle ipotesi del teorema di Burns-Krantz a quelle del teorema 2.1 di [BKR] (come dimostrato nella proposizione 8.1 dello stesso articolo), dal quale poi è facile concludere. Il teorema 2.1 è sostanzialmente una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Bracci, Kraus e Roth dimostrano il teorema 2.1 usando risultati più generali visti nell'articolo, ma complicati. Tuttavia, nel remark 5.6 danno una traccia per una dimostrazione più elementare. L'idea è sfruttare una disuguaglianza dovuta a Golusin e vengono indicati vari articoli in cui è stata ridimostrata.

In particolare, l'articolo di Beardon e Minda del 2004 ([BM]) contiene una serie di disuguaglianze di facile dimostrazione, delle quali il corollario 3.7 ha a sua volta come corollario la disuguaglianza di Golusin. Queste disuguaglianze coinvolgono la distanza iperbolica sul disco unitario. In effetti, i vari risultati più generali di [BK] riguardano pseudometriche sul disco e lo stesso teorema 2.1 può essere riformulato in termini della distanza iperbolica, come spiegato nell'articolo.

1 Prerequisiti

1.1 Risultati noti

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in Ω se è derivabile in senso complesso per ogni $z \in \Omega$.

Definizione 1.1.2. Se $f : \Omega \rightarrow \Omega$ olomorfa è biettiva, allora si può dimostrare che anche f^{-1} è olomorfa. In tal caso f è detta *automorfismo* (in senso olomorfo di Ω).

Com'è noto, la condizione di olomorfia per funzioni a valori complessi è molto più forte della derivabilità in senso reale (in particolare, è equivalente all'analicità). Fra i vari risultati noti per le funzioni olomorfe, ci interessa studiare il lemma di Schwarz-Pick, fino a dimostrarne una versione alternativa al bordo.

Notazione: indichiamo il disco unitario con $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Lemma 1.1.3. (Schwarz) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguale nella prima per $z \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.1.4. (Schwarz-Pick) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|, \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguale nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora f è un automorfismo e vale l'uguale sempre.

Il lemma di Schwarz-Pick può essere riformulato usando due funzioni di due variabili sul disco, una delle quali è nota come distanza iperbolica (in realtà, anche l'altra è una distanza, ma questo non lo useremo). Con queste funzioni dimostreremo una serie di disuguaglianze che ci permetteranno di dimostrare la disuguaglianza di Golusin, dalla quale seguirà la versione al bordo del lemma.

Definizione 1.1.5. Dati $z, w \in \mathbb{D}$ poniamo

$$[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}, \quad p(z, w) := |[z, w]|, \quad d(z, w) := \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

d è ben definita, in quanto $p(z, w) < 1$. Infatti, dobbiamo verificare che

$$\frac{|z - w|}{|1 - \bar{w}z|} < 1$$
$$|z - w|^2 < |1 - \bar{w}z|^2$$

$$\begin{aligned}
|z|^2 + |w|^2 - \bar{w}z - w\bar{z} &< 1 + |wz|^2 - \bar{w}z - w\bar{z} \\
1 + |wz|^2 - |z|^2 - |w|^2 &> 0 \\
(1 - |w|^2)(1 - |z|^2) &> 0,
\end{aligned}$$

che è vera perché $z, w \in \mathbb{D}$.

Proposizione 1.1.6. d è una distanza (la sopracitata distanza iperbolica).

Dimostrazione. L'unica cosa non ovvia da dimostrare è la disuguaglianza triangolare. Osserviamo che $d(z, w) = 2 \operatorname{arctanh}(p(z, w))$. Dati $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, possiamo utilizzare il fatto che \tanh è strettamente crescente e l'uguaglianza $\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$ per scrivere la disuguaglianza triangolare per d in una forma equivalente:

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_2) &\leq d(z_1, z_0) + d(z_0, z_2) \\
\tanh\left(\frac{1}{2}d(z_1, z_2)\right) &\leq \tanh\left(\frac{1}{2}d(z_1, z_0) + \frac{1}{2}d(z_0, z_2)\right) \\
\tanh\left(\frac{1}{2}d(z_1, z_2)\right) &\leq \frac{\tanh(\frac{1}{2}d(z_1, z_0)) + \tanh(\frac{1}{2}d(z_0, z_2))}{1 + \tanh(\frac{1}{2}d(z_1, z_0))\tanh(\frac{1}{2}d(z_0, z_2))} \\
p(z_1, z_2) &\leq \frac{p(z_1, z_0) + p(z_0, z_2)}{1 + p(z_1, z_0)p(z_0, z_2)}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che il lemma di Schwarz-Pick implica che p è invariante sotto l'azione degli automorfismi olomorfi di \mathbb{D} . Vale il seguente fatto.

Fatto 1.1.7. Gli automorfismi olomorfi di \mathbb{D} agiscono in maniera transitiva su \mathbb{D} , cioè per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ esiste un automorfismo f tale che $f(z_1) = z_2$.

Mettendo insieme le due cose, possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che $z_0 = 0$. Osservando che $p(0, z) = |z|$, otteniamo che la disuguaglianza triangolare per d è equivalente a

$$\begin{aligned}
\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} &\leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|} \\
1 - \frac{|z_1 - z_2|^2}{|1 - \bar{z}_2 z_1|^2} &\geq 1 - \left(\frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|}\right)^2 \\
\frac{(1 - \bar{z}_2 z_1)(1 - z_2 \bar{z}_1) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{|1 - \bar{z}_2 z_1|^2} &\geq \frac{(1 + |z_1||z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2}{(1 + |z_1||z_2|)^2} \\
\frac{1 + |z_2|^2|z_1|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2}{|1 - \bar{z}_2 z_1|^2} &\geq \frac{1 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2}{(1 + |z_1||z_2|)^2} \\
\frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_2 z_1|^2} &\geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_1||z_2|)^2} \\
|1 - \bar{z}_2 z_1| &\leq 1 + |z_1||z_2|,
\end{aligned}$$

che è ovviamente vera (nell'ultimo passaggio abbiamo potuto semplificare perché $z_1, z_2 \in \mathbb{D} \Rightarrow 1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2 > 0$). \square

Definizione 1.1.8. Data una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, poniamo

$$f^*(z, w) := \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]}$$

e

$$f^h(z) := |f^*(z, z)| := \left| \lim_{w \rightarrow z} f^*(z, w) \right| = \left| \lim_{w \rightarrow z} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} \right| = \frac{|f'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}.$$

Osservazione 1.1.9.

- (i) la disuguaglianza del lemma di Schwarz-Pick può essere riscritta come $|f^*(z, w)| \leq 1$;
- (ii) un altro modo di scrivere la disuguaglianza del lemma di Schwarz-Pick è $p(f(z), f(w)) \leq p(z, w)$;
- (iii) $p(0, z) = |z| \Rightarrow d(0, z) = d(0, |z|)$;
- (iv) per definizione, $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$ e $f^h(z)$ è reale non negativo.

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

Riportiamo alcuni risultati noti di analisi complessa che verranno usati nelle dimostrazioni.

Teorema 1.1.10. (formula integrale di Cauchy) Sia f olomorfa sull'aperto Ω e D un disco chiuso di centro a contenuto in Ω . Allora

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (1)$$

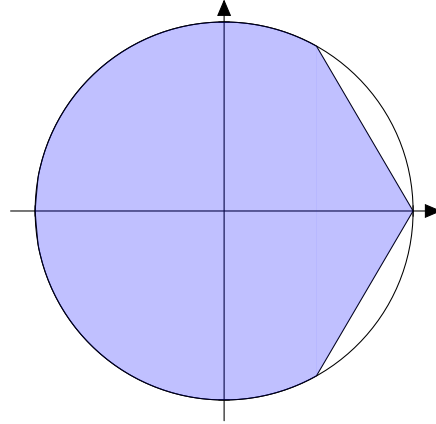
Proposizione 1.1.11. Sia f olomorfa sull'aperto $\Omega \setminus \{z_0\}$, con $z_0 \in \Omega$. Allora f si estende a una funzione olomorfa g definita su tutto Ω se e solo se è limitata in un intorno di z_0 . In tal caso, z_0 è detta *singolarità rimovibile*.

Proposizione 1.1.12. $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa è un automorfismo se e solo se esistono $\theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta}[z, a]$.

1.2 Andamenti non tangenziali

Definizione 1.2.1. Chiamiamo *settore di vertice 1 e angolo d'apertura 2α* l'insieme $S \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S$ l'angolo compreso tra l'asse reale e la retta congiungente 1 e z è minore di α .

Quando scriviamo $z \longrightarrow 1$ *non tangenzialmente*, s'intende che stiamo considerando i punti appartenenti a un settore S fissato.



In blu, il settore di angolo d'apertura $\frac{2}{3}\pi$

La seguente proposizione asserisce che, per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente, un certo andamento di f può essere tradotto nell'andamento di f^h . È questo che ci permetterà di dimostrare il teorema 2.1 di [BK] passando per la versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Proposizione 1.2.2. Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa tale che

$$f(z) = 1 + (z - 1) + o((z - 1)^3) \quad (2)$$

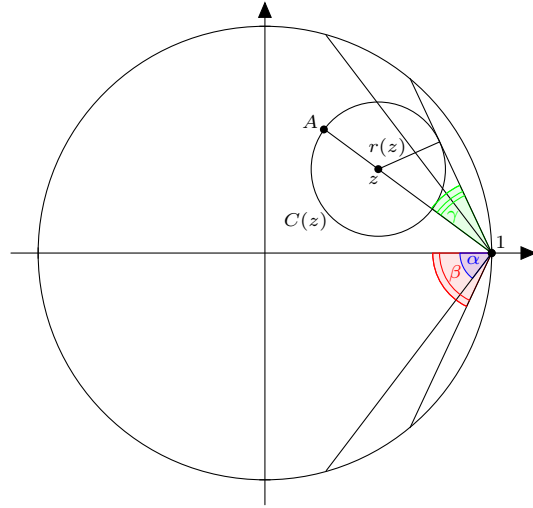
per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora

$$f^h(z) = 1 + o((z - 1)^2) \quad (3)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente.

Dimostrazione. Sia S un settore di vertice 1 e angolo d'apertura 2α , e S' uno un po' più grande di vertice 1 e angolo 2β , $\beta > \alpha$. Per $z \in S$, sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \text{dist}(z, \partial S')$ (la distanza di z dal bordo di S'). Allora per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{w - 1 + (f(w) - w)}{(w - z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{1}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{z - 1 + f(w) - w}{(w - z)^2} dw \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z). \end{aligned}$$



Dato $\varepsilon > 0$ fissato, per ipotesi esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w) - w| < \varepsilon|1 - w|^3$ per ogni $w \in S'$ con $|w - 1| < \delta$. $B(z, r(z)) \subset \mathbb{D} \Rightarrow r(z) \leq 1 - |z|$. Se $|z - 1| < \delta/2$, $r(z) \leq 1 - |z| = |z - 1 - z| - |z| \leq |z - 1| + |z| - |z| = |z - 1| < \delta/2$, dunque per ogni $w \in C(z)$ abbiamo $|w - 1| \leq |w - z| + |z - 1| = r(z) + |z - 1| < \delta$. Per questi z vale che

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z + r(z)e^{i\theta}) - z|^2} r(z) d\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3 \\ &= \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3. \end{aligned}$$

Il massimo è raggiunto per l'intersezione più lontana da 1 tra la circonferenza $C(z)$ e la retta passante per 1 e z (il punto A in figura), perciò, detto γ l'angolo tra $\partial S'$ (per essere precisi, la retta contenente il tratto affine più vicino a z) e la retta congiungente 1 e z :

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} (r(z) + |z - 1|)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2 \left(1 + \frac{|z - 1|}{r(z)}\right)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc \gamma)^3 \\ &\leq \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3 \\ &\leq \varepsilon |z - 1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3. \end{aligned}$$

La penultima disuguaglianza segue da $\gamma \geq \beta - \alpha$ e dal fatto che \csc è decrescente sui positivi, mentre l'ultima segue da quanto visto sopra. Otteniamo dunque $f'(z) = 1 + o((z - 1)^2)$ per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente.

Adesso ci servirà il seguente lemma.

Lemma 1.2.3. Per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente, $|z - 1|$ e $1 - |z|$ hanno gli stessi o -piccoli.

Dimostrazione. $1 - |z| \leq |z - 1|$ l'abbiamo già visto. Per concludere ci basta dunque mostrare che, per z appartenente a un settore S di angolo 2α fissato, vale una disuguaglianza opposta, a meno di una qualche costante.

$$|z - 1| = r(z) \frac{|z - 1|}{r(z)} \leq r(z) \csc(\beta - \alpha) \leq (1 - |z|) \csc(\beta - \alpha),$$

dove $\beta > \alpha$ è stato scelto come sopra e le disuguaglianze le abbiamo già viste. \square

Per ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z - 1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente (abbiamo usato il lemma 1.2.3 per poter usare indipendentemente $z - 1$ o $1 - |z|$ negli o -piccoli).

Possiamo quindi concludere che

$$f^h(z) = |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. \square

1.3 Verso la disuguaglianza di Golusin

Adesso possiamo procedere a dimostrare la serie di disuguaglianze di [BM], che coinvolgono la distanza iperbolica d e le funzioni olomorfe dal disco in sé che non sono automorfismi. L'ultima di esse, come già detto, ha come corollario la disuguaglianza di Golusin.

Proposizione 1.3.1. Siano $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo, $v \in \mathbb{D}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha che $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ e la funzione $z \mapsto f^*(z, v)$ è olomorfa.

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia, dalla definizione sappiamo che l'unico punto che potrebbe dar problemi è v , ma abbiamo visto che la funzione ammette limite finito per $z \rightarrow v$, perciò v è una singolarità rimovibile. Per il lemma di Schwarz-Pick, $|f^*(z, w)| \leq 1$, inoltre vale l'uguale in qualche punto solo se f è un automorfismo, dunque con le ipotesi su f abbiamo che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. \square

Teorema 1.3.2. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$d(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq d(z, w). \quad (4)$$

Dimostrazione. Poiché f non è un automorfismo, per la proposizione 1.3.1 la mappa $z \longmapsto f^*(z, v)$ è olomorfa dal disco unitario in sé, perciò il membro sinistro della disuguaglianza (4) è ben definito. Per quanto riguarda la disuguaglianza,

$$\begin{aligned} p(f^*(z, v), f^*(w, v)) &\leq p(z, w) \\ 2 \operatorname{arctanh}(p(f^*(z, v), f^*(w, v))) &\leq 2 \operatorname{arctanh}(p(z, w)) \\ d(f^*(z, v), f^*(w, v)) &\leq d(z, w), \end{aligned}$$

dove la prima riga segue dal lemma di Schwarz-Pick applicato alla funzione di cui sopra, il passaggio dalla prima alla seconda è perché $\operatorname{arctanh}$ è crescente e dalla seconda all'ultima è la definizione di d . \square

Corollario 1.3.3. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$d(0, f^*(z, v)) \leq d(0, f^*(w, v)) + d(z, w). \quad (5)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} d(0, f^*(z, v)) &\leq d(0, f^*(w, v)) + d(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq d(0, f^*(w, v)) + d(z, w), \end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per la distanza d e la seconda segue dal teorema 1.3.2. \square

Corollario 1.3.4. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$d(0, f^*(z, v)) \leq d(0, f^*(u, w)) + d(z, w) + d(v, u). \quad (6)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
d(0, f^*(z, v)) &\leq d(0, f^*(w, v)) + d(z, w) \\
&= d(0, |f^*(w, v)|) + d(z, w) \\
&= d(0, |f^*(v, w)|) + d(z, w) \\
&= d(0, f^*(v, w)) + d(z, w) \\
&\leq d(0, f^*(u, w)) + d(z, w) + d(v, u),
\end{aligned}$$

dove le due disuguaglianze seguono dal corollario 1.3.3. \square

Corollario 1.3.5. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$d(f^h(z), f^h(w)) \leq 2d(z, w). \quad (7)$$

Dimostrazione. Siano $z, w \in \mathbb{D}$, senza perdita di generalità possiamo supporre $f^h(z) \geq f^h(w)$. Allora

$$\begin{aligned}
d(f^h(z), f^h(w)) &= \log \left(\frac{1 + \frac{f^h(z) - f^h(w)}{1 - f^h(w)f^h(z)}}{1 - \frac{f^h(z) - f^h(w)}{1 - f^h(w)f^h(z)}} \right) \\
&= \log \left(\frac{1 - f^h(w)f^h(z) + f^h(z) - f^h(w)}{1 - f^h(w)f^h(z) + f^h(w) - f^h(z)} \right) \\
&= \log \left(\frac{1 + f^h(z)}{1 - f^h(z)} \cdot \frac{1 - f^h(w)}{1 + f^h(w)} \right) \\
&= \log \left(\frac{1 + f^h(z)}{1 - f^h(z)} \right) - \log \left(\frac{1 + f^h(w)}{1 - f^h(w)} \right) \\
&= d(0, f^h(z)) - d(0, f^h(w)) \leq 2d(z, w).
\end{aligned}$$

dove la disuguaglianza finale segue dal corollario 1.3.4 ponendo $u = w, v = z$. \square

Ponendo $w = 0$ in (7) otteniamo la disuguaglianza di Golusin.

2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

2.1 Lemma di Schwarz-Pick al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick, seguendo la traccia data nel remark 5.6 di [BKR].

Teorema 2.1.1. (lemma di Schwarz-Pick al bordo) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f^h(z_n) = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora f è un automorfismo.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia un automorfismo. Allora possiamo applicare il corollario 1.3.5, che per $w = 0$ ci dà

$$\begin{aligned} d(f^h(z), f^h(0)) &\leq 2d(z, 0) \\ \log \left(\frac{1 + \left| \frac{f^h(z) - f^h(0)}{1 - \overline{f^h(z)} f^h(0)} \right|}{1 - \left| \frac{f^h(z) - f^h(0)}{1 - \overline{f^h(z)} f^h(0)} \right|} \right) &\leq 2 \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) \\ \frac{|1 - f^h(z) f^h(0)| + |f^h(z) - f^h(0)|}{|1 - f^h(z) f^h(0)| - |f^h(z) - f^h(0)|} &\leq \frac{(1 + |z|)^2}{(1 - |z|)^2}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che per definizione $f^h(z) \geq 0$ e inoltre per il lemma di Schwarz-Pick $f^h(z) \leq 1$, per ogni $z \in \mathbb{D}$. Sempre per il lemma originale, se valesse $f^h(0) = 1$ avremmo che f è un automorfismo, contraddizione. Perciò dev'essere $f^h(0) < 1$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^h(z_n) = 1$, quindi definitivamente $f^h(z_n) - f^h(0) > 0$ e $1 - f^h(z_n) f^h(0) > 0$, da cui

$$\begin{aligned} \frac{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}{(1 - f^h(z_n))(1 + f^h(0))} &\leq \frac{(1 + |z_n|)^2}{(1 - |z_n|)^2} \\ \frac{1 + f^h(0)}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} (1 - f^h(z_n)) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}. \end{aligned}$$

Per ipotesi vale (8), dunque

$$\begin{aligned} \frac{1 + f^h(0)}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} o((|z_n| - 1)^2) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2} \\ \frac{(1 + f^h(0))(1 + |z_n|)^2}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} o(1) &\geq 1. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + f^h(0))(1 + |z_n|)^2}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} = \frac{2(1 + f^h(0))}{1 - f^h(0)} < +\infty$, otteniamo di nuovo una contraddizione. \square

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 2.1 di [BK].

2.2 Teorema di Burns-Krantz

Teorema 2.2.1. (Burns-Krantz, 1994) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f(z) = 1 + (z - 1) + \mathcal{O}((z - 1)^4) \quad (9)$$

per $z \rightarrow 1$. Allora f è l'identità sul disco.

Dimostrazione. Chiaramente, se vale (9) per $z \rightarrow 1$ vale anche (2), in particolare per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Dalla proposizione 1.2.2 segue che anche (3) vale per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del teorema 2.1.1 (usiamo di nuovo che, non tangenzialmente, $|z-1|$ e $1-|z|$ hanno gli stessi o -piccoli), dunque f è un automorfismo. Allora per la proposizione 1.1.12 esistono $\theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta}[z, a]$. Poiché vale (9), dev'essere $f''(1) = 0$. Un semplice conto mostra che $f''(z) = \frac{e^{i\theta}\bar{a}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}z)^3}$. Siccome $e^{i\theta} \neq 0, |a| < 1$, deve necessariamente essere $\bar{a} = 0$, perciò $f(z) = e^{i\theta}z$. Il fatto che $f(z) = z$ segue da, sempre per (9), $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$. \square

Esempio 2.2.2. $f(z) = \frac{1+3z^2}{3+z^2}$. Osserviamo che f è una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{3}\}$, quindi in particolare è ben definita su \mathbb{D} . Verifichiamo che l'immagine è contenuta in \mathbb{D} :

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &< 1 \\ \frac{(1+3z^2)(1+3\bar{z}^2)}{(3+z^2)(3+\bar{z}^2)} &< 1 \\ (1+3z^2)(1+3\bar{z}^2) &< (3+z^2)(3+\bar{z}^2) \\ 1+3z^2+3\bar{z}^2+9|z|^4 &< 9+3z^2+3\bar{z}^2+|z|^4 \\ 1-|z|^4 &< 9(1-|z|^4) \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata perché $z \in \mathbb{D} \Rightarrow |z| < 1 \Rightarrow 1 - |z|^4 > 0$. Ovviamente f non può essere iniettiva su \mathbb{D} perché $f(z) = f(-z)$, dunque non è un automorfismo. Adesso mostriamo che $f(z) - 1 - (z - 1)$ è $\mathcal{O}((z - 1)^3)$ ma non $\mathcal{O}((z - 1)^4)$ per $z \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} f(z) - z &= \frac{1+3z^2}{3+z^2} - z \\ &= \frac{1+3z^2-3z-z^3}{3+z^2} \\ &= \frac{(1-z)^3}{3+z^2} =: g(z). \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow 1} g(z)/(z-1)^3 = -1/4$, $g(z)$ è $\mathcal{O}((z-1)^3)$ ma non $\mathcal{O}((z-1)^4)$ per $z \rightarrow 1$. Dunque il termine $\mathcal{O}((z-1)^4)$ nel teorema 2.2.1 non è migliorabile.

Riferimenti bibliografici

- [BK] D. M. Burns, S. G. Krantz, *Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary*, (1994)
- [BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth, *A new Schwarz-Pick lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps*, (2020)
- [BM] A. F. Beardon, D. Minda, *A multi-point Schwarz-Pick lemma*, (2004)

Ringraziamenti

Da scrivere.