Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Il lemma di Schwarz-Pick

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right| \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Il lemma di Schwarz-Pick

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right| \ \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Osservazione

Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - a}{1 - \bar{a} z}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$.

Il lemma di Schwarz-Pick

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right| \; e \; \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Osservazione

Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$.

Dal lemma, si ha che la quantità $\left|\dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right|$ è contratta dalle funzioni in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. A partire da essa è possibile definire una distanza sul disco.

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z, w] := \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z, w] := \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z, w)\big) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)}\right).$$

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z, w] := \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z, w)\big) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)}\right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di ω il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega\big(f(z), f(w)\big) \leq \omega(z, w).$$

Vale l'uguaglianza in qualche caso se e solo se $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$; in tal caso c'è sempre l'uguaglianza.

Derivata e rapporto iperbolici

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Derivata e rapporto iperbolici

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Derivata e rapporto iperbolici

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Fissato $w \in \mathbb{D}$, la funzione $z \longmapsto f^*(z, w)$ è olomorfa sul disco unitario. Se $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

Regioni di Stolz e settori

Definizione

Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice* σ *e angolo* 2α l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α.

Regioni di Stolz e settori

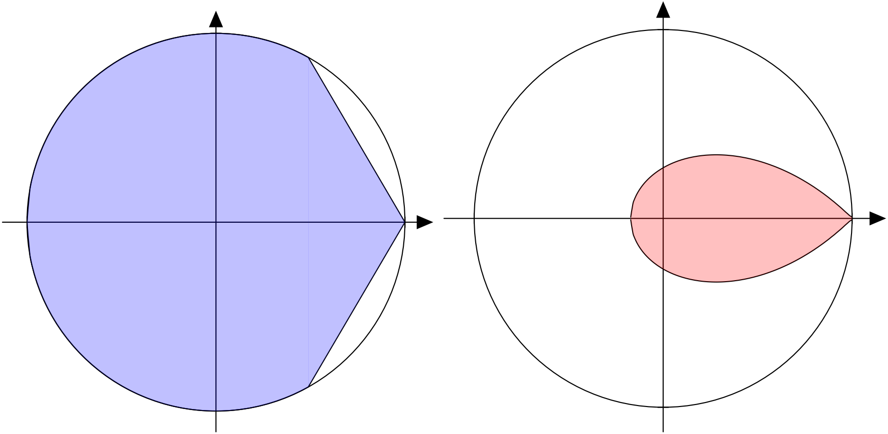
Definizione

Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice σ e angolo 2α* l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α.

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz $K(\sigma, M)$* l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \dfrac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

regioni di Stolz e settori



A sinistra, il settore $S(1, 2\pi/3)$; a destra, la regione di Stolz $K(1, 2)$.

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.
Possiamo scrivere $S(1, \alpha) = \big\{z \in \mathbb{D} \mid |\mathfrak{Im}(z)| < (\tan\alpha)\big(1 - \mathfrak{Re}(z)\big)\big\}$.

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2-1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.
Possiamo scrivere $S(1, \alpha) = \big\{z \in \mathbb{D} \mid |\mathfrak{Im}(z)| < (\tan\alpha)\big(1 - \mathfrak{Re}(z)\big)\big\}$. Se $z \in K(1, M)$, da

$$M > \frac{|1-z|}{1-|z|} \geq \frac{|1-z|}{1-\mathfrak{Re}(z)}$$

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$*, sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2-1} \in (0, \pi/2)$*. Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$*, si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Possiamo scrivere $S(1, \alpha) = \left\{z \in \mathbb{D} \mid |\mathfrak{Im}(z)| < (\tan\alpha)\big(1 - \mathfrak{Re}(z)\big)\right\}$. Se $z \in K(1, M)$, da

$$M > \frac{|1-z|}{1-|z|} \geq \frac{|1-z|}{1-\mathfrak{Re}(z)}$$

troviamo

$$\frac{|\mathfrak{Im}(z)|}{1-\mathfrak{Re}(z)} < \sqrt{M^2-1} = \tan\alpha;$$

questo mostra la seconda inclusione.

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: sia $\alpha' < \alpha$ e supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$.

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2-1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: sia $\alpha' < \alpha$ e supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$. Si ha allora

$$\frac{1-|z|}{|1-z|} \le \frac{1}{M} \text{ e } \frac{|\mathfrak{Im}(z)|}{1-\mathfrak{Re}(z)} < \tan\alpha'. \tag{1}$$

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$*, sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$*. Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$*, si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: sia $\alpha' < \alpha$ e supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$. Si ha allora

$$\frac{1 - |z|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{M} \text{ e } \frac{|\mathfrak{Im}(z)|}{1 - \mathfrak{Re}(z)} < \tan \alpha'. \tag{1}$$

Dalla seconda disuguaglianza in (1) si ottiene

$$\frac{|1 - z|}{1 - \mathfrak{Re}(z)} < \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} =: M' < M; \tag{2}$$

moltiplicando la (2) per la prima disuguaglianza della (1) troviamo

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: $\dfrac{1 - |z|}{1 - \mathfrak{Re}(z)} < \dfrac{M'}{M} < 1.$

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: $\dfrac{1 - |z|}{1 - \mathfrak{Re}(z)} < \dfrac{M'}{M} < 1$. Tuttavia, ponendo $x = \mathfrak{Re}(z)$ e $y = \mathfrak{Im}(z)$ e riscrivendo la condizione $z \in S(1, \alpha')$ come $y/(1 - x) < \tan\alpha'$,

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, *sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. *Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, *si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: $\dfrac{1 - |z|}{1 - \mathfrak{Re}(z)} < \dfrac{M'}{M} < 1$. Tuttavia, ponendo $x = \mathfrak{Re}(z)$ e $y = \mathfrak{Im}(z)$ e riscrivendo la condizione $z \in S(1, \alpha')$ come $y/(1 - x) < \tan\alpha'$, vediamo facilmente che

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow 1, \\ z \in S(1, \alpha')}} \frac{1 - |z|}{1 - \mathfrak{Re}(z)} - 1 = 0,$$

da cui otteniamo una contraddizione. $\square$

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim\limits_{\substack{z \longrightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\displaystyle\lim_{\substack{z \longrightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Definizione

Date tre funzioni $f, g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o\big(h(z)\big)$ per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

Limiti non tangenziali

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{1}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - \sigma)^2\big) \tag{2}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{1}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - \sigma)^2\big) \tag{2}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.
Consideriamo $z \in K(1, M) \subset S(1, \alpha)$, dove $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1}$.
Fissato $\beta > \alpha$, scriviamo $r(z) = \mathrm{dist}\big(z, \partial S(1, \beta)\big)$ e $C(z) = \partial B\big(1, r(z)\big)$.
Dalla formula integrale di Cauchy applicata alla funzione $f(z) - z$ otteniamo

Limiti non tangenziali

Traccia della dimostrazione:

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} \, \mathrm{d}w =: 1 + I(z).$$

Limiti non tangenziali

Traccia della dimostrazione:

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} \, \mathrm{d}w =: 1 + I(z).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w) - w| \leq \varepsilon |1 - w|^3$ per $w \in C(z)$, con $z \in K(1, M) \cap B(1, \delta/2)$. Si ottiene

$$|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3.$$

Limiti non tangenziali

Traccia della dimostrazione:

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} \, \mathrm{d}w =: 1 + I(z).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w) - w| \leq \varepsilon |1 - w|^3$ per $w \in C(z)$, con $z \in K(1, M) \cap B(1, \delta/2)$. Si ottiene

$$|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3.$$

Da considerazioni geometriche si ha $|I(z)| \leq \varepsilon |z - 1|^2 \big(1 + \csc(\beta - \alpha)\big)^3$, da cui $f'(z) = 1 + o\big((z - 1)^2\big)$. Inoltre, dalle ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o\big((z - 1)^3\big)}{1 - |z|} = 1 + o\big((z - 1)^2\big).$$

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

(i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*

(ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora $f^*\big(R_f(w), w\big)$, dove R_f è la rotazione attorno al punto in cui f ha molteplicità doppia.*

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{1}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$*.*

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{1}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$*.*

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{1}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Osservazione

Se $f(0) = 0$ troviamo $\omega\big(f(z)/z, f'(0)\big) \leq \omega(z, 0)$. Il disco di centro $f'(0)$ e raggio $\omega(z)$ è, in generale, strettamente contenuto in $\mathbb{D}$.

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \le \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \qquad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \le \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \le \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big)$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \le \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\le \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\ &\le \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z, v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u, w)\big) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(0, f^*(z, v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w, v)\big) + \omega\big(f^*(w, v), f^*(z, v)\big) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(w, v)\big) + \omega(w, z) \\
&= \omega\big(0, f^*(v, w)\big) + \omega(w, z)
\end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \\
&= \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(w,z) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(u,v) + \omega(w,z).
\end{aligned}$$

□

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo $u = w$ nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che $\dfrac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$ e $\dfrac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$, otteniamo il seguente:

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo $u = w$ nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che $\dfrac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$ e $\dfrac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$, otteniamo il seguente:

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e siano* $z, w \in \mathbb{D}$. *Sia* σ *una geodetica con* $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$ *e sia* $w = \sigma(t)$ *con* $t_1 < t < t_2$. *Allora*

$$2\omega\big(f(z), f(v)\big) \leq \log\Big(\cosh\big(2\omega(z,v)\big) + |f^h(w)| \sinh\big(2\omega(z,v)\big)\Big). \tag{3}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo $u = w$ nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che $\dfrac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$ e $\dfrac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$, otteniamo il seguente:

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e siano* $z, w \in \mathbb{D}$*. Sia* σ *una geodetica con* $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$ *e sia* $w = \sigma(t)$ *con* $t_1 < t < t_2$*. Allora*

$$2\omega\big(f(z), f(v)\big) \leq \log\Big(\cosh\big(2\omega(z,v)\big) + |f^h(w)| \sinh\big(2\omega(z,v)\big)\Big). \tag{3}$$

Osservazione

Poiché $|f^*| \leq 1$, anche $|f^h| \leq 1$; per stretta crescenza del logaritmo, otteniamo che la disuguaglianza (3) è un altro miglioramento rispetto al lemma di Schwarz-Pick.

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z,w). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{|f^h(z)|-|f^h(w)|}{1-|f^h(w)||f^h(z)|}}{1-\frac{|f^h(z)|-|f^h(w)|}{1-|f^h(w)||f^h(z)|}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(w)|}{1-|f^h(w)|}\right)\end{aligned}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|}\right) \\
&= \omega\big(0, f^h(z)\big) - \omega\big(0, f^h(w)\big) \leq 2\omega(z, w).
\end{aligned}$$

$\square$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{5}$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{5}$$

Traccia della dimostrazione: prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right) \leq \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right),$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \le \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{5}$$

Traccia della dimostrazione: prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right) \le \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right),$$

da cui

$$1 + |f^h(z)|1 - |f^h(z)| \le \frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2.$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{5}$$

Traccia della dimostrazione: prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right) \leq \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right),$$

da cui

$$1+|f^h(z)|1-|f^h(z)| \leq \frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2.$$

La disuguaglianza di Golusin segue da rimaneggiamenti algebrici.