

Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

19 Aprile 2021



Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Lemma di Schwarz come risultato di rigidità

Lemma di Schwarz

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta}z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

Lemma di Schwarz come risultato di rigidità

Lemma di Schwarz

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta}z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

Osservazione

Dai casi di uguaglianza seguono i seguenti risultati di rigidità: se $|f'(z)| = 1 + o(1)$ per z che tende a 0, allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$; se $f(z) = z + o(z)$ per z che tende a 0, allora f è proprio l'identità.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* l'insieme

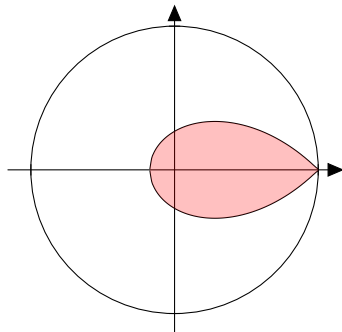
$$K(\sigma, M) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}.$$

Teorema di Burns-Krantz

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* l'insieme

$$K(\sigma, M) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}.$$



La regione di Stolz $K(1, 2)$.

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* l'insieme

$$K(\sigma, M) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}.$$

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* l'insieme

$$K(\sigma, M) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}.$$

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$.

Notiamo che la definizione di limite non tangenziale è più debole di quella di limite classico; nel nostro caso rende il risultato più forte.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Esempio

Se $f(z) = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$, si ha $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - z}{(z - 1)^3} = -\frac{1}{4}$; dunque il termine $o((z - \sigma)^3)$ nel teorema di Burns-Krantz non è migliorabile.

Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Definizione

Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}}{\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Osservazione

Il lemma di Schwarz-Pick può essere visto come un risultato di rigidità per la derivata iperbolica: se $|f^h(z)| = 1 + o(1)$ per z che tende a $z_0 \in \mathbb{D}$, allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (2)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (2)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Esempio

Prendiamo di nuovo $f(z) = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$. Si ha $|f^h(z)| = \frac{2|z|}{1 + |z|^2}$, perciò

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{|f^h(z)| - 1}{(|z| - 1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Proposizione

Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente.

Risultato sui limiti non tangenziali

Proposizione

Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente.

Osservazione

Si ha che, in una data regione di Stolz, $z - \sigma$ e $1 - |z|$ sono uno O -grande dell'altro, e viceversa; allora, dalla tesi della Proposizione si ottiene che valgono le ipotesi del teorema di Bracci-Kraus-Roth.

Proposizione

Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente.

Traccia della dimostrazione: il punto è riuscire a stimare f' . Senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla formula di Cauchy troviamo

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z).$$

Proposizione

Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente.

All'interno delle regioni di Stolz, con ragionamenti geometrici si possono fare stime per dire che $I(z) = o((z - 1)^2)$. □

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente.

Per il teorema di Bracci-Kraus-Roth, $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$; per ipotesi dev'essere $f(1) = 1$ e $f''(1) = 0$, perciò $f(z) = z$. \square

Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda nel 2004.

Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda nel 2004.
- Dalla versione a quattro punti otterremo un Corollario riguardante la derivata iperbolica; esso avrà a sua volta, come caso particolare, una disuguaglianza dimostrata da Golusin nel 1945.

Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda nel 2004.
- Dalla versione a quattro punti otterremo un Corollario riguardante la derivata iperbolica; esso avrà a sua volta, come caso particolare, una disuguaglianza dimostrata da Golusin nel 1945.
- Dalla disuguaglianza di Golusin, scritta in forma opportuna, il teorema di Bracci-Kraus-Roth seguirà con una semplice dimostrazione per assurdo.

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Definizione

Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, il rapporto iperbolico è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}}{\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w. \end{cases}$$

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Osservazione

Fissato $w \in \mathbb{D}$, si ha che $f^*(z, w)$ è olomorfa in z . Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che, se $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

La distanza di Poincaré

Sia $p(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di ω il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w).$$

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Osservazione

Se $f(0) = 0$ troviamo $\omega(f(z)/z, f'(0)) \leq \omega(z, 0)$. Il disco iperbolico di centro $f'(0)$ e raggio $\omega(z, 0)$ è, in generale, strettamente contenuto in \mathbb{D} .

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

- (i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*
- (ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora esiste un unico punto critico $c \in \mathbb{D}$ per f .*

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

- (i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*
- (ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora esiste un unico punto critico $c \in \mathbb{D}$ per f .*

Data f , indichiamo con R_f la rotazione iperbolica di π attorno a c .

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v))$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \\ &\leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(u, v) + \omega(w, z). \end{aligned}$$



Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (5)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Prendendo $v = z$ e $u = w$ otteniamo

$$\omega(0, f^h(z)) \leq \omega(0, f^h(w)) + 2\omega(z, w)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di f .

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di f .

Traccia della dimostrazione:

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di f .

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \end{aligned}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di f .

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \\ &= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w). \end{aligned}$$

□

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (6)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di f .

Prendendo $w = 0$ e raccogliendo i logaritmi otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq 2\omega(0, z)$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (7)$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (7)$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (7)$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

da cui

$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.$$



Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (8)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty. \quad \square$$

Grazie per l'attenzione!