

# Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

# Il lemma di Schwarz-Pick

## Lemma di Schwarz-Pick

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.*

# Il lemma di Schwarz-Pick

## Lemma di Schwarz-Pick

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.

## Osservazione

Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , allora  $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$  con  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{D}$ .

# Il lemma di Schwarz-Pick

## Lemma di Schwarz-Pick

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.

## Osservazione

Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , allora  $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$  con  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{D}$ .

Dal lemma, si ha che la quantità  $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$  è contratta dalle funzioni in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . A partire da essa è possibile definire una distanza sul disco.

# La distanza di Poincaré

Scriviamo  $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$  e  $p(z, w) := |[z, w]|$ .

# La distanza di Poincaré

Scriviamo  $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$  e  $p(z, w) := |[z, w]|$ .

## Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$  data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

# La distanza di Poincaré

Scriviamo  $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$  e  $p(z, w) := |[z, w]|$ .

## Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$  data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di  $\omega$  il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w).$$

Vale l'uguaglianza in qualche caso se e solo se  $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ ; in tal caso c'è sempre l'uguaglianza.

## Definizione

Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$



## Definizione

Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

## Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

# Derivata e rapporto iperbolici

## Definizione

Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

## Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Fissato  $w \in \mathbb{D}$ , la funzione  $z \mapsto f^*(z, w)$  è olomorfa sul disco unitario. Se  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ , allora  $f^*(\cdot, w) \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ .

## Definizione

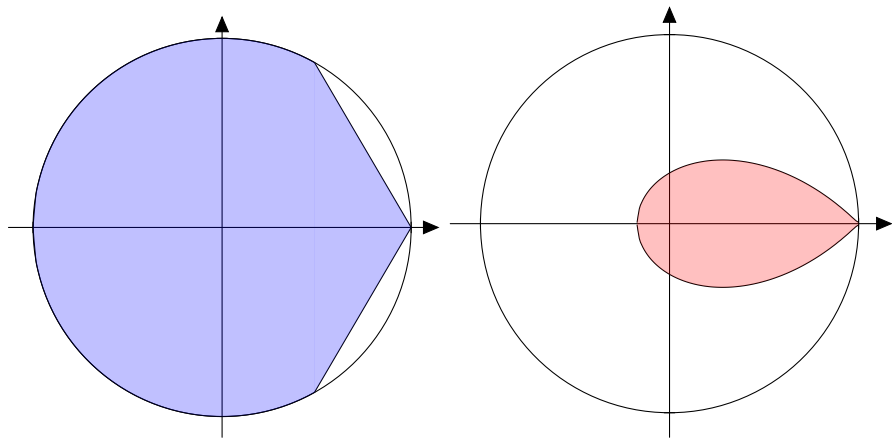
Dati  $\alpha \in (0, \pi/2)$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ , chiamiamo *settore di vertice  $\sigma$  e angolo  $2\alpha$*  l'insieme  $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$  tale che per ogni  $z \in S(\sigma, \alpha)$  l'angolo compreso tra la retta congiungente  $\sigma$  e  $0$  e la retta congiungente  $\sigma$  e  $z$  ha modulo minore di  $\alpha$ .

## Definizione

Dati  $\alpha \in (0, \pi/2)$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ , chiamiamo *settore di vertice  $\sigma$  e angolo  $2\alpha$*  l'insieme  $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$  tale che per ogni  $z \in S(\sigma, \alpha)$  l'angolo compreso tra la retta congiungente  $\sigma$  e 0 e la retta congiungente  $\sigma$  e  $z$  ha modulo minore di  $\alpha$ .

## Definizione

Dati  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e  $M > 1$ , chiamiamo *regione di Stolz  $K(\sigma, M)$*  l'insieme 
$$\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}.$$



A sinistra, il settore  $S(1, 2\pi/3)$ ; a destra, la regione di Stolz  $K(1, 2)$ .

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ .

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ .

Possiamo scrivere  $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$ .



# Relazione tra regioni di Stolz e settori

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ .

Possiamo scrivere  $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$ . Se  $z \in K(1, M)$ , da

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)}$$

# Relazione tra regioni di Stolz e settori

## Proposizione

Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ .

Possiamo scrivere  $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$ . Se  $z \in K(1, M)$ , da

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)}$$

troviamo

$$\frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{M^2 - 1} = \tan \alpha;$$

questo mostra la seconda inclusione.

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* sia  $\alpha' < \alpha$  e supponiamo per assurdo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esista  $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$  tale che  $z \notin K(1, M)$ .

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* sia  $\alpha' < \alpha$  e supponiamo per assurdo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esista  $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$  tale che  $z \notin K(1, M)$ . Si ha allora

$$\frac{1 - |z|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{M} \text{ e } \frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \tan \alpha'. \quad (1)$$

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* sia  $\alpha' < \alpha$  e supponiamo per assurdo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esista  $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$  tale che  $z \notin K(1, M)$ . Si ha allora

$$\frac{1 - |z|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{M} \text{ e } \frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \tan \alpha'. \quad (1)$$

Dalla seconda disuguaglianza in (1) si ottiene

$$\frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} =: M' < M; \quad (2)$$

moltiplicando la (2) per la prima disuguaglianza della (1) troviamo

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:  $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$ .*

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:*  $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$ . Tuttavia, ponendo  $x = \Re(z)$  e  $y = \Im(z)$  e riscrivendo la condizione  $z \in S(1, \alpha')$  come  $y/(1 - x) < \tan \alpha'$ ,

## Proposizione

Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione:  $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$ . Tuttavia, ponendo  $x = \Re(z)$  e  $y = \Im(z)$  e riscrivendo la condizione  $z \in S(1, \alpha')$  come  $y/(1 - x) < \tan \alpha'$ , vediamo facilmente che

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1, \\ z \in S(1, \alpha')}} \frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} - 1 = 0,$$

da cui otteniamo una contraddizione. □



## Definizione

Diciamo che una funzione  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$  ha *limite non-tangenziale*  $L \in \mathbb{C}$  in  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni  $M > 1$  si ha  $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

# Limiti non tangenziali

## Definizione

Diciamo che una funzione  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$  ha *limite non-tangenziale*  $L \in \mathbb{C}$  in  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni  $M > 1$  si ha  $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

## Definizione

Date tre funzioni  $f, g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$  scriviamo che  $f(z) = g(z) + o(h(z))$  per  $z \rightarrow \sigma$  *non tangenzialmente* se

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

## Proposizione

*Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

*per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2) \quad (2)$$

*per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente.*

## Proposizione

Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2) \quad (2)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente.

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ .

Consideriamo  $z \in K(1, M) \subset S(1, \alpha)$ , dove  $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1}$ .

Fissato  $\beta > \alpha$ , scriviamo  $r(z) = \text{dist}(z, \partial S(1, \beta))$  e  $C(z) = \partial B(1, r(z))$ .

Dalla formula integrale di Cauchy applicata alla funzione  $f(z) - z$  otteniamo

*Traccia della dimostrazione:*

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z).$$

*Traccia della dimostrazione:*

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z).$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(w) - w| \leq \varepsilon|1 - w|^3$  per  $w \in C(z)$ , con  $z \in K(1, M) \cap B(1, \delta/2)$ . Si ottiene

$$|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3.$$

# Limiti non tangenziali

*Traccia della dimostrazione:*

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z).$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(w) - w| \leq \varepsilon|1 - w|^3$  per  $w \in C(z)$ , con  $z \in K(1, M) \cap B(1, \delta/2)$ . Si ottiene

$$|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3.$$

Da considerazioni geometriche si ha  $|I(z)| \leq \varepsilon|z - 1|^2(1 + \csc(\beta - \alpha))^3$ , da cui  $f'(z) = 1 + o((z - 1)^2)$ . Inoltre, dalle ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z - 1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z - 1)^2).$$

## Definizione

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado  $n$  la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{B}_n$  i prodotti di Blaschke di grado  $n$ .



## Definizione

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado  $n$  la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{B}_n$  i prodotti di Blaschke di grado  $n$ .

Notiamo che  $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

## Definizione

Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado  $n$  la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{B}_n$  i prodotti di Blaschke di grado  $n$ .

Notiamo che  $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

## Proposizione

*Valgono le seguenti:*

- (i) *si ha che  $f \in \mathcal{B}_{n+1}$  se e solo se  $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$ , con  $w \in \mathbb{D}$  fissato;*
- (ii) *se  $f \in \mathcal{B}_2$  allora  $f^*(R_f(w), w)$ , dove  $R_f$  è la rotazione attorno al punto in cui  $f$  ha molteplicità doppia.*

# Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

## Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (1)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$ .

# Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

## Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (1)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$ .

*Traccia della dimostrazione:* basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione  $f^*(\cdot, v)$ . □

# Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

## Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (1)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$ .

*Traccia della dimostrazione:* basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione  $f^*(\cdot, v)$ . □

## Osservazione

Se  $f(0) = 0$  troviamo  $\omega(f(z)/z, f'(0)) \leq \omega(z, 0)$ . Il disco di centro  $f'(0)$  e raggio  $\omega(z)$  è, in generale, strettamente contenuto in  $\mathbb{D}$ .

# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

*Traccia della dimostrazione:*

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v))$$

# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$



# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$

# Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

## Teorema

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \\ &\leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(u, v) + \omega(w, z). \end{aligned}$$



# Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo  $u = w$  nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che  $\frac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$  e  $\frac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$ , otteniamo il seguente:

# Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo  $u = w$  nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che  $\frac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$  e  $\frac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$ , otteniamo il seguente:

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e siano  $z, w \in \mathbb{D}$ . Sia  $\sigma$  una geodetica con  $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$  e sia  $w = \sigma(t)$  con  $t_1 < t < t_2$ . Allora*

$$2\omega(f(z), f(v)) \leq \log\left(\cosh(2\omega(z, v)) + |f^h(w)| \sinh(2\omega(z, v))\right). \quad (3)$$

# Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo  $u = w$  nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che  $\frac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$  e  $\frac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$ , otteniamo il seguente:

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e siano  $z, w \in \mathbb{D}$ . Sia  $\sigma$  una geodetica con  $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$  e sia  $w = \sigma(t)$  con  $t_1 < t < t_2$ . Allora*

$$2\omega(f(z), f(v)) \leq \log\left(\cosh(2\omega(z, v)) + |f^h(w)| \sinh(2\omega(z, v))\right). \quad (3)$$

## Osservazione

Poiché  $|f^*| \leq 1$ , anche  $|f^h| \leq 1$ ; per stretta crescita del logaritmo, otteniamo che la disuguaglianza (3) è un altro miglioramento rispetto al lemma di Schwarz-Pick.

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (4)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (4)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

*Traccia della dimostrazione:*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right)$$

## Corollario

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (4)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

*Traccia della dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \end{aligned}$$



# Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

## Corollario

Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \\ &= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w). \end{aligned}$$



## Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (5)$$

## Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (5)$$

Traccia della dimostrazione: prendendo  $w = 0$  nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

## Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (5)$$

Traccia della dimostrazione: prendendo  $w = 0$  nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

da cui

$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.$$

## Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (5)$$

Traccia della dimostrazione: prendendo  $w = 0$  nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

da cui

$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.$$

La disuguaglianza di Golusin segue da rimaneggiamenti algebrici. 

# Teorema di Bracci-Kraus-Roth

## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (6)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

# Teorema di Bracci-Kraus-Roth

## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (6)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Traccia della dimostrazione:* per assurdo  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

# Teorema di Bracci-Kraus-Roth

## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (6)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Traccia della dimostrazione:* per assurdo  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ , per Schwarz-Pick  $|f^h(0)| < 1$  e dunque



## Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (6)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Traccia della dimostrazione:* per assurdo  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ , per Schwarz-Pick  $|f^h(0)| < 1$  e dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty,$$

contraddizione

# Teorema di Burns-Krantz

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ .

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ . Dalla Proposizione sui limiti non tangenziale segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2).$$

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ . Dalla Proposizione sui limiti non tangenziale segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2).$$

Per il teorema di Bracci-Kraus-Roth,  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ; per ipotesi dev'essere  $f(1) = 1$  e  $f''(1) = 0$ , perciò  $f(z) = z$ . □

# Teorema di Burns-Krantz

## Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

## Esempio

Se  $f(z) = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$ , si ha  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - z}{(z - 1)^3} = -\frac{1}{4}$ ; dunque il termine  $o((z - \sigma)^3)$  nel teorema di Burns-Krantz non è migliorabile.