Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

2* Aprile 2022

Scuola Normale Superiore di Pisa
Colloquio IV Anno

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting

Fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$. Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle\bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Assumiamo che Ω sia *strettamente pseudoconvesso*, cioè la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial\rho^2}{\partial z_\nu \partial\bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \Omega$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$, data $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa indichiamo con $Df(z)$ il differenziale di f in $z \in \mathbb{D}$. La *metrica di Kobayashi* su Ω è

$$K(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi* d_K.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* è $\partial_G X$ costruito come classe di equivalenza delle successioni (x_i) tali che $\lim_{i,j\to\infty}(x_i, x_j) = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim_{i\to\infty}(x_i, y_i) = \infty$.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* è $\partial_G X$ costruito come classe di equivalenza delle successioni (x_i) tali che $\lim\limits_{i,j\to\infty}(x_i, x_j) = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i) = \infty$.

Teorema

(Balogh-Bonk) (Ω, d_K) è Gromov iperbolico, e il bordo iperbolico $\partial_G\Omega$ può essere identificato con il bordo euclideo $\partial\Omega$.

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{1}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$*. Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*.*

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{1}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Esempio

Prendiamo di nuovo $f(z) = \dfrac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$. Si ha $|f^h(z)| = \dfrac{2|z|}{1 + |z|^2}$, perciò $\displaystyle\lim_{|z| \longrightarrow 1} \frac{|f^h(z)| - 1}{(|z| - 1)^2} = -\frac{1}{2}$.

Risultato sui limiti non tangenziali

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - \sigma)^2\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Risultato sui limiti non tangenziali

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z-\sigma)^3\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z-\sigma)^2\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Osservazione

Si ha che, in una data regione di Stolz, $z - \sigma$ e $1 - |z|$ sono uno O-grande dell'altro, e viceversa; allora, dalla tesi della Proposizione si ottiene che valgono le ipotesi del teorema di Bracci-Kraus-Roth.

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z-\sigma)^3\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z-\sigma)^2\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Traccia della dimostrazione: il punto è riuscire a stimare f'. Senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla formula di Cauchy troviamo

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w =: 1 + I(z).$$

Risultato sui limiti non tangenziali

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - \sigma)^2\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

All'interno delle regioni di Stolz, con ragionamenti geometrici si possono fare stime per dire che $I(z) = o\big((z - 1)^2\big)$. □

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{2}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{2}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - 1)^2\big)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{2}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - 1)^2\big)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.
Per il teorema di Bracci-Kraus-Roth, $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; per ipotesi dev'essere $f(1) = 1$ e $f''(1) = 0$, perciò $f(z) = z$. $\square$

Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda nel 2004.

Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda nel 2004.
- Dalla versione a quattro punti otterremo un Corollario riguardante la derivata iperbolica; esso avrà a sua volta, come caso particolare, una disuguaglianza dimostrata da Golusin nel 1945.

Strada per la dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda nel 2004.
- Dalla versione a quattro punti otterremo un Corollario riguardante la derivata iperbolica; esso avrà a sua volta, come caso particolare, una disuguaglianza dimostrata da Golusin nel 1945.
- Dalla disuguaglianza di Golusin, scritta in forma opportuna, il teorema di Bracci-Kraus-Roth seguirà con una semplice dimostrazione per assurdo.

L'idea di Beardon-Minda

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w} z}\right| \ \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

L'idea di Beardon-Minda

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right| \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \dfrac{\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)}}{\frac{z - w}{1 - \bar{w} z}} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w. \end{cases}$$

L'idea di Beardon-Minda

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right| \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Osservazione

Fissato $w \in \mathbb{D}$, si ha che $f^*(z, w)$ è olomorfa in z. Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che, se $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z, w) = \left| \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z,w) = \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z,w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z,w)\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)}\right).$$

La distanza di Poincaré

Sia $p(z,w) = \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0,+\infty)$ data da

$$\omega(z,w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z,w)\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)}\right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di ω il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega\big(f(z),f(w)\big) \leq \omega(z,w).$$

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{3}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$*.*

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{3}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{3}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$*.*

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Osservazione

Se $f(0) = 0$ troviamo $\omega\big(f(z)/z, f'(0)\big) \leq \omega(z, 0)$. Il disco iperbolico di centro $f'(0)$ e raggio $\omega(z, 0)$ è, in generale, strettamente contenuto in $\mathbb{D}$.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

(i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*

(ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora esiste un unico punto critico $c \in \mathbb{D}$ per f.*

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

(i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*

(ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora esiste un unico punto critico $c \in \mathbb{D}$ per f.*

Data f, indichiamo con R_f la rotazione iperbolica di π attorno a c.

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z, v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u, w)\big) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(0, f^*(z, v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(w, v)\big) + \omega\big(f^*(w, v), f^*(z, v)\big)$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \le \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\le \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big)\\ &\le \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z)\end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \\
&= \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(w,z)
\end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \\
&= \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(w,z) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(u,v) + \omega(w,z). \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Prendendo $v = z$ e $u = w$ otteniamo

$$\omega\big(0, f^h(z)\big) \leq \omega\big(0, f^h(w)\big) + 2\omega(z,w)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di* f*.*

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di* f*.*

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di* f.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{|f^h(z)|-|f^h(w)|}{1-|f^h(w)||f^h(z)|}}{1-\frac{|f^h(z)|-|f^h(w)|}{1-|f^h(w)||f^h(z)|}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(w)|}{1-|f^h(w)|}\right)\end{aligned}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di* f.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|}\right) \\
&= \omega\big(0, f^h(z)\big) - \omega\big(0, f^h(w)\big) \leq 2\omega(z, w). \qquad \square
\end{aligned}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di* f*.*

Prendendo $w = 0$ e raccogliendo i logaritmi otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right) \leq 2\omega(0, z)$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{6}$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{6}$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{6}$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right) \leq \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right),$$

da cui

$$\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|} \leq \frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2.$$

□

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{7}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{7}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$*. Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*.*

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)}\big(1 - |f^h(z_n)|\big) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{7}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$*. Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*.*

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)}\big(1 - |f^h(z_n)|\big) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{7}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)}\big(1 - |f^h(z_n)|\big) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)} = \frac{2\big(1 + |f^h(0)|\big)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty. \qquad \square$$

Grazie per l'attenzione!