Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Derivata e rapporto iperbolici

Scriviamo $[z, w] := \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}$.

Derivata e rapporto iperbolici

Scriviamo $[z, w] := \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}$.

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Derivata e rapporto iperbolici

Scriviamo $[z, w] := \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}$.

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w. \end{cases}$$

Regioni di Stolz e settori

Definizione

Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice* σ *e angolo* 2α l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α.

Regioni di Stolz e settori

Definizione

Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice* σ *e angolo* 2α l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α.

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \dfrac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

Regioni di Stolz e settori

Definizione

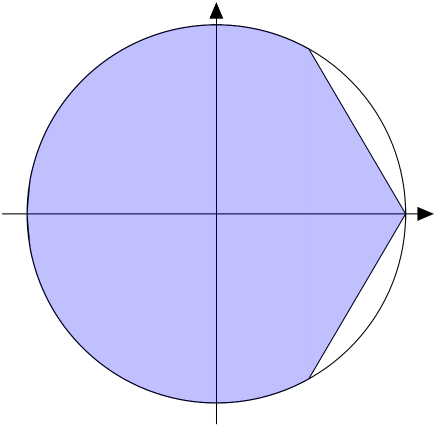
Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice* σ *e angolo* 2α l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α.

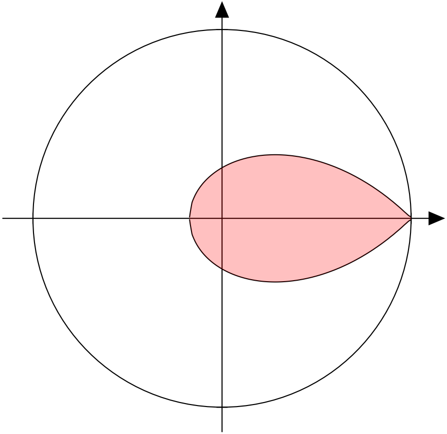
Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

Vicino a σ, regioni di Stolz e settori sono "intercambiabili".

Regioni di Stolz e settori





A sinistra, il settore $S(1, 2\pi/3)$; a destra, la regione di Stolz $K(1, 2)$.

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\underset{z \longrightarrow \sigma}{\text{nt–lim}}\, f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\displaystyle\lim_{\substack{z \longrightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\displaystyle\lim_{\substack{z \longrightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Definizione

Date tre funzioni $f, g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o\big(h(z)\big)$ per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\displaystyle\lim_{\substack{z \longrightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Definizione

Date tre funzioni $f, g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o\big(h(z)\big)$ per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

Notiamo che la definizione di limite non tangenziale è più debole di quella di limite classico; nel nostro caso rende il risultato più forte.

Teoremi di Bracci-Kraus-Roth e di Burns-Krantz

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{1}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Teoremi di Bracci-Kraus-Roth e di Burns-Krantz

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{1}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{2}$$

per $z \longrightarrow 1$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Teoremi di Bracci-Kraus-Roth e di Burns-Krantz

Ricordiamo il lemma di Schwarz-Pick.

Ricordiamo il lemma di Schwarz-Pick.

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$|f^*(z, w)| \leq 1 \ \text{e} \ |f^h(z)| \leq 1.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Teoremi di Bracci-Kraus-Roth e di Burns-Krantz

Ricordiamo il lemma di Schwarz-Pick.

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$|f^*(z, w)| \leq 1 \text{ e } |f^h(z)| \leq 1.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Osservazione

I due Teoremi sono risultati di rigidità simili alla parte di unicità del lemma di Schwarz-Pick, ma per un punto sul bordo del disco; lo stesso Lemma è il punto di partenza per la dimostrazione elementare dei Teoremi.

Strada della dimostrazione

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto; l'idea è che se $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

Strada della dimostrazione

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto; l'idea è che se $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.
- Dalla versione a quattro punti seguirà un Corollario, che avrà a sua volta, come caso particolare, la disuguaglianza di Golusin.

Strada della dimostrazione

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto; l'idea è che se $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.
- Dalla versione a quattro punti seguirà un Corollario, che avrà a sua volta, come caso particolare, la disuguaglianza di Golusin.
- Con Golusin dimostreremo il teorema di Bracci-Kraus-Roth e, sfruttando un risultato sui limiti non tangenziali, ne deriveremo il teorema di Burns-Krantz.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z, w) = |[z, w]|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z,w) = |[z,w]|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z,w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z,w)\big) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z,w)}{1 - p(z,w)} \right).$$

La distanza di Poincaré

Sia $p(z,w) = |[z,w]|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0,+\infty)$ data da

$$\omega(z,w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z,w)\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)}\right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di ω il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega\big(f(z),f(w)\big) \leq \omega(z,w).$$

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

(i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*

(ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora $f^*\big(R_f(w), w\big) = 0$, dove R_f è la rotazione attorno al punto in cui f ha molteplicità doppia.*

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{1}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$*.*

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z, v), f^*(w, v)\big) \leq \omega(z, w). \tag{1}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{1}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Osservazione

Se $f(0) = 0$ troviamo $\omega\big(f(z)/z, f'(0)\big) \leq \omega(z, 0)$. Il disco di centro $f'(0)$ e raggio $\omega(z)$ è, in generale, strettamente contenuto in $\mathbb{D}$.

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big)$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\ &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \\
&= \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(w,z)
\end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{2}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \\
&= \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(w,z) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(u,v) + \omega(w,z).
\end{aligned}$$

□

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{3}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f*.*

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z,w). \tag{3}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f*.*

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{|f^h(z)|-|f^h(w)|}{1-|f^h(w)||f^h(z)|}}{1-\frac{|f^h(z)|-|f^h(w)|}{1-|f^h(w)||f^h(z)|}}\right)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z,w). \tag{3}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|}\right)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{3}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|}\right) \\
&= \omega\big(0, f^h(z)\big) - \omega\big(0, f^h(w)\big) \leq 2\omega(z, w).
\end{aligned}$$

$\square$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{4}$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{4}$$

Traccia della dimostrazione: prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (3) otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right) \leq \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right),$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{4}$$

Traccia della dimostrazione: prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (3) otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right) \leq \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right),$$

da cui

$$\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|} \leq \frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2. \qquad \square$$

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{5}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$*. Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*.*

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{5}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$*. Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*.*

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)}\big(1 - |f^h(z_n)|\big) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{5}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1+|f^h(0)|\big)(1+|z_n|)^2}{\big(1-|f^h(0)|\big)\big(1+|f^h(z_n)|\big)}\big(1-|f^h(z_n)|\big) \geq (1-|z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{5}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$*. Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*.*

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)}\big(1 - |f^h(z_n)|\big) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)} = \frac{2\big(1 + |f^h(0)|\big)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty. \qquad \square$$

Risultato sui limiti non tangenziali

Per poter dimostrare il teorema di Burns-Krantz passando dal teorema di Bracci-Kraus-Roth, dobbiamo vedere che le ipotesi di quest'ultimo siano verificate sotto le ipotesi del primo; la seguente proposizione ci garantisce che è vero.

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z-\sigma)^3\big) \tag{6}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z-\sigma)^2\big) \tag{7}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{8}$$

per $z \longrightarrow 1$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{8}$$

per $z \longrightarrow 1$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{8}$$

per $z \longrightarrow 1$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - 1)^2\big).$$

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z-\sigma) + o\big((z-\sigma)^3\big) \tag{8}$$

per $z \longrightarrow 1$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z-1)^2\big).$$

Per il teorema di Bracci-Kraus-Roth, $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; per ipotesi dev'essere $f(1) = 1$ e $f''(1) = 0$, perciò $f(z) = z$. $\square$

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{8}$$

per $z \longrightarrow 1$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Esempio

Se $f(z) = \dfrac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$, si ha $\displaystyle\lim_{z \longrightarrow 1} \frac{f(z) - z}{(z-1)^3} = -\frac{1}{4}$; dunque il termine $o\big((z - \sigma)^3\big)$ nel teorema di Burns-Krantz non è migliorabile.