Appunti di Elementi di Analisi Complessa

Marco Vergamini

Indice

1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Elementi di Analisi Complessa tenuto dal professor Marco Abate nel secondo semestre dell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) analisi in più variabili, topologia, concetto di gruppo fondamentale e le basi di analisi complessa in più variabili, che si vedono nei corsi Analisi 2 e Geometria 2. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc.... Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia...), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali...insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

2 Funzioni olomorfe

2.1 Notazioni e prerequisiti

Notazioni: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ indica un numero complesso, $\bar{z} = x - iy$ il suo complesso coniugato. Con il termine *dominio* si intende un aperto connesso. $\mathcal{O}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f \text{ è olomorfa}\}$. $\mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2) = \{f : \Omega_1 \to \Omega_2 | f \text{ è olomorfa}\}$.
$\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.
$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y, \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y, \mathrm{d}z\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = 1, \mathrm{d}z\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 0.$

Daremo ora una definizione di funzione olomorfa basata su quattro definizioni, l'equivalenza delle quali è un prerequisito del corso e dovrebbe essere quindi nota agli studenti.

Definizione 2.1.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, $f : \Omega \in \mathbb{C}$ si dice OLOMORFA se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

(i) f è $\mathbb{C}$-*differenziabile*, cioè per ogni $a \in \Omega$ esiste $f'(a) = \lim_{z \to a} = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$;

(ii) f è *analitica*, cioè per ogni $a \in \Omega$ esiste $U \subseteq \Omega$ aperto e intorno di a e $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ t.c. per ogni $z \in U$ $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$;

(iii) f è *olomorfa*, cioè f è continua, $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$ esistono su Ω e $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ (equazione di Cauchy-Riemann). Si noti che la condizione è $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, da cui si ricava $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'$;

(iv) f è continua e per ogni rettangolo (o disco) chiuso $D \subseteq \Omega$ si ha $\displaystyle\int_{\partial D} f \,\mathrm{d}z = 0$ (teorema di Cauchy-Goursat+Morera).

La seguente proposizione è anch'essa un risultato che dovrebbe essere noto agli studenti che seguono il corso.

Proposizione 2.1.2. Sia $\{c_n\} \in \mathbb{C}$. Allora:

(i) esiste $R \in [0, +\infty]$ t.c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ converge per $|z| < R$ e diverge per $|z| > R$. R è detto *raggio di convergenza*. La convergenza +è uniforme su $\Delta_r = \{|z| \leq r\}, r < R$. $\limsup_{n \to +\infty} |c_n|^{1/n} = \dfrac{1}{R}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n c_n z^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza;

(iii) se $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ allora $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$;

(iv) se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $a \in \Omega$, allora $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$. Questa formula è valida nel più grande disco aperto centrato in a e contenuto in Ω, cioè di raggio minore o uguale di $d(a, \partial\Omega)$.

Teorema 2.1.3. (Formula di Cauchy) Sia Ω aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega), D \subseteq \Omega$ disco/rettangolo chiuso. Per ogni $a \in D, f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\zeta}{\zeta - a} \mathrm{d}\zeta$. Si ha che $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$.

Corollario 2.1.4. (Disuguaglianze di Cauchy) $f \in \mathcal{O}(\Omega), D = D(a,r) \subseteq \Omega$ disco di centro $a \in \Omega$ e raggio $r > 0$. Sia $M = \max_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)|$. Allora per ogni $n \geq 1, |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M$.

Corollario 2.1.5. (Teorema di Liouville) Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ limitata. Allora f è costante.

Dimostrazione. Le disuguaglianze di Cauchy danno, per ogni $r > 0$, $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$ dove $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < +\infty \Rightarrow f' \equiv 0$. □

Teorema 2.1.6. (Principio di identità o del prolungamento analitico) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\{z \in \Omega | f(z) = g(z)\}$ ha un punto di accumulazione in Ω, allora $f \equiv g$.

Corollario 2.1.7. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla, allora $\{z \in \Omega | f(z) = 0\}$ è discreto in Ω.

Teorema 2.1.8. (Principio del massimo) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora:

(i) se U è aperto e $U \subset\subset \Omega$ (si legge "U relativamente compatto in Ω" e si intende $\overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ compatto) allora $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$. Inoltre, se $|f|$ ha un massimo locale in U, allora f è costante in Ω;

(ii) la stessa affermazione vale per $\mathfrak{Re} f$ e $\mathfrak{Im} f$;

(iii) se Ω è limitato poniamo $M = \sup_{x \in \partial D} \limsup_{z \to x} |f(z)| \in [0, +\infty]$. Allora per ogni $z \in \Omega$ $|f(z)| \leq M$ con uguaglianza in un punto se e solo se f è costante.

Esempio 2.1.9. Controesempio per vedere che serve Ω limitato per il punto (iii) del teorema 2.1.8: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re} z > 0\}, f(z) = e^z$. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(\Omega)$. $z \in \partial\Omega \Rightarrow z = iy \Rightarrow |f(iy)| = |e^{iy}| = 1$, ma f è illimitata in Ω. Per correggere questa cosa si aggiunge il punto all'infinito.

Teorema 2.1.10. (Applicazione aperta) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante $\Rightarrow f$ è un'applicazione aperta.

Siano X, Y spazi topologici e indichiamo con $C^0(X,Y)$ le funzioni continue da X in Y.
La *topologia della convergenza puntuale* è la restrizione a $C^0(X,Y) \subset Y^X = \{f : X \to Y\}$ della topologia prodotto. Una prebase è data da $\mathcal{F}(x,U) = \{f \in C^0(X,Y) | f(x) \in U\}$ dove $x \in X$ e $U \subseteq Y$ è un aperto.

Esercizio 2.1.11. $f_n \to f \in C^0(X,Y)$ per questa topologia se e solo se $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$.

La *topologia compatta-aperta* ha invece come prebase $\mathcal{F}(K,U) =$
$= \{f \in C^0(X,Y) | f(K) \subseteq U\}$ dove U è preso come sopra e $K \subseteq X$ è un compatto.

Proposizione 2.1.12.

(i) La topologia compatta-aperta è più fine della topologia della convergenza puntuale;
(ii) Y Hausdorff $\Rightarrow$ topologia compatta aperta Hausdorff.

Dimostrazione. (i) Ovvia (il singoletto è un compatto).
(ii) Prendiamo $f \not\equiv g$ continue, allora esiste $x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) \neq g(x_0)$, per cui, dato che Y è Hausdorff, esistono $U, V \subset Y$ aperti disgiunti con $f(x_0) \in U, g(x_0) \in V \Rightarrow f \in \mathcal{F}(x_0, U), g \in \mathcal{F}(x_0, V), \mathcal{F}(x_0,U) \cap \mathcal{F}(x_0,V) = \varnothing$. □

Teorema 2.1.13. (Ascoli-Arzelà) Siano X, Y spazi metrici con X localmente compatto, allora $\mathcal{F} \subseteq C^0(X,Y)$ è relativamente compatta rispetto alla topologia compatta-aperta se e solo se:

(i) per ogni $x \in X$ $\{f(x) | f \in \mathcal{F}\} \subset\subset Y$;
(ii) $\mathcal{F}$ è equicontinua.

La topologia compatta-aperta viene detta anche topologia della *convergenza uniforme sui compatti*: $\{f_n\} \subset C^0(X, \mathbb{R}^N)$. Se $K \subseteq X$ definiamo $\|f\|_K = \sup\limits_{z \in K} \|f(z)\|$. $f_n \to f$ uniformemente sui compatti se per ogni $K \subset\subset X$ compatto e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 t.c. $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_K < \varepsilon$.

Esercizio 2.1.14. $f_n \to f$ uniformemente sui compatti se e solo se $f_n \to f$ nella topologia compatta-aperta.

2.2 Risultati preliminari

Vediamo ora alcuni risultati e definizioni preliminari, da considerarsi comunque come prerequisiti per altri risultati più interessanti che vedremo più avanti nel corso.

Teorema 2.2.1. (Weierstrass) Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f \in C^0(\Omega, \mathcal{C})$ uniformemente sui compatti. Allora:

(i) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$;
(ii) $f'_n \to f'$ uniformemente sui compatti.

Dimostrazione. (i) Sia $a \in \Omega$, $0 < r < d(a, \partial\Omega)$ t.c. $D = D(a,r) \subset\subset \Omega$. $f_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$ per ogni $z \in D(a,\rho)$ per ogni $0 < \rho < r$. Allora $\dfrac{1}{|\zeta - z|} \leq \dfrac{1}{r-\rho}$ per ogni $z \in D(a,\rho), \zeta \in \partial D$. Per ogni $z \in D(a,\rho)$, $f(z) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$. Adesso, per uniforme convergenza e uniforme limitatezza si può portare il limite dentro, perciò $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$, ma questo, per il teorema di Cauchy-Goursat+Morera, implica $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(ii) $f'_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f'_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f'(z)$. $f'_n \to f'$ uniformemente sui dischi e ogni compatto è coperto da un numero finito di dischi $\Rightarrow f'_n \to f'$ uniformemente sui compatti.

□

Teorema 2.2.2. (Montel) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. per ogni $K \subset\subset C$ compatto esiste $M_K > 0$ t.c. $\|f\|_K \leq M_K$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ (si diche che $\mathcal{F}$ è *uniformemente limitata sui compatti*). Allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$.

Dimostrazione. Basta vedere che ogni successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ ha una sottosuccessione convergente (segue dal fatto che, nelle ipotesi del teorema di Montel, la topologia compatta aperta è metrizzabile).

Dati $a \in \Omega, 0 < r < d(a, \partial\Omega), f \in \mathcal{O}(\Omega)$, sia $c_n(f) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, allora $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)(z-a)^n$ in $\overline{D(a,r)}$. Inoltre, se $\|f\|_{\overline{D(a,r)}} \leq M$, allora per le disuguaglianze di Cauchy $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{r^n}$ per ogni $n \geq 0$. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$. Per ipotesi, esiste M t.c. $\|f_n\|_{\overline{D(a,r)}} \leq M$ per ogni $n \Rightarrow |c_0(f_n)| \leq M$ per ogni $n \Rightarrow$ esiste una sottosuccessione $c_0(f_{n_j^{(0)}})$ che tende a $c_0 \in \mathbb{C}$. Per induzione, da $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(k)}}\}$ t.c. $c_k(f_{n_j^{(k)}}) \to c_k \in \mathbb{C}$. Consideriamo $\{f_{n_j^{(j)}}\}$, allora $c_k(f_{n_j^{(j)}}) \to c_k \in \mathbb{C}$ per ogni k. Sia $f_{\nu_j} = f_{n_j^{(j)}}$. Poniamo $D_a = \overline{D(a, r/2)}$ e sia $z \in D_a$. Vogliamo $f_{\nu_j} \to f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ in D_a. Basta vedere che f_{ν_j} è di Cauchy uniformemente in D_a. $|f_{\nu_h}(z) - f_{\nu_k}(z)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n = \sum_{n=0}^{N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n + \sum_{n>N} |c_n(f_{\nu_h}) -$

$c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n$. Sappiamo che $|c_n(f_{\nu_k})| \leq \dfrac{M}{r^n}$ e $z \in D_a \Rightarrow |z-a| \leq \dfrac{r}{2}$. Allora $\displaystyle\sum_{n>N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n \leq \sum_{n>N} \frac{2M}{r^n}\left(\frac{r}{2}\right)^n = \frac{M}{2^{N-1}}$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\frac{r}{2}\right)^n$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $N >> 1$ t.c. $\dfrac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon/2$ e n_0 t.c. per ogni $h,k \geq n_0, |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\dfrac{r}{2}\right)^n < \dfrac{\varepsilon}{2(N+1)}$ (possiamo farlo, una volta fissato N, perché gli n tra 0 e N sono in numero finito e le successioni $c_n(f_{\nu_j})$ convergono, dunque si sceglie un indice per ogni successione e si prende come n_0 il massimo di questi indici). Mettendo insieme le disuguaglianze si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 t.c. per ogni $h,k \geq n_0$ e per ogni $z \in D_a$, $|f_{\nu_k}(z) - f_{\nu_k}(z)| < \varepsilon$, dunque la sottosuccessione f_{ν_j} è di Cauchy e converge uniformemente su D_a. Deve convergere a f perché, per il teorema di Weierstrass, le derivate convergono al valore della derivata limite, e questo ci dice che i coefficienti della serie della funzione limite sono proprio quelli di f.
Ω è a base numerabile, dunque possiamo estrarre un sottoricoprimento numerabile da $\{D_a | a \in \Omega\}$. Sia dunque $\{a_j\} \subseteq \Omega$ t.c. $\displaystyle\bigcup_j D_{a_j} = \Omega$. Per quanto dimostrato finora, possiamo estrarre da $\{f_n\}$ una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(0)}}\}$ convergente uniformemente in D_{a_0}. Per induzione, da $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$ estraiamo una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(k)}}\}$ convergente uniformemente in $D_{a_0} \cup \cdots \cup D_{a_k}$. Prendiamo $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ che converge uniformemente in ogni D_{a_k}. Adesso, ogni compatto è coperto da un numero finito di D_{a_k}, quindi (scegliendo per ogni ε il massimo degli indici t.c. le cose che vogliamo valgono in quei D_{a_k}) $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ converge uniformemente sui compatti. □

Teorema 2.2.3. (Vitali) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $A \subseteq \Omega$ con almeno un punto di accumulazione in Ω. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ uniformemente limitata sui compatti. Supponiamo che, per ogni $a \in A$, $\{f_n(a)\}$ converge (cioe f_n converge puntualmente). Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f$ uniformemente sui compatti di Ω.

Dimostrazione. Facciamola per assurdo. Supponiamo che esistono $K \subset\subset \Omega$, $\{n_k\}, \{m_k\} \subset \mathbb{N}, \{z_k\} \subset K, \delta > 0$ t.c. $|f_{n_k}(z_k) - f_{m_k}(z_k)| \geq \delta$. A meno di sottosuccessioni, $z_k \to z_0 \in K$. Per il teorema di Montel, a meno di sottosuccessioni $f_{n_k} \to g_1 \in \Omega$ e $f_{m_k} \to g_2 \in \Omega$ con $|g_1(z_0) - g_2(z_0)| \geq \delta$ (passando al limite). Per ipotesi, $g_1(a) = g_2(a)$ per ogni $a \in A$. Per il principio di identità, $g_1 \equiv g_2$, assurdo. □

Teorema 2.2.4. (Sviluppo di Laurent) Siano $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, $A(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\}$. Sia $f \in \mathcal{O}(A(r_1, r_2))$, allora $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ e converge uniformemente e assolutamente sui compatti di $A(r_1, r_2)$. In particolare, se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ in $\{0 < |z-a| < r\} \subset \Omega$.

Corollario 2.2.5. (Teorema di estensione di Riemann) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ si estende olomorficamente ad $a \Leftrightarrow \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$.

Dimostrazione. Per lo sviluppo di Laurent, $(z-a)f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+1} \to 0 \Leftrightarrow c_n = 0$ per ogni $n \leq -1$. □

Teorema 2.2.6.

(i) $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega_1)$ biettiva $\Rightarrow f^{-1}$ è olomorfa e f' non si annulla mai;

(ii) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ è iniettiva vicino a z_0.

Dimostrazione. (i) Per il teorema dell'applicazione aperta, f è aperta $\Rightarrow f$ omeomorfismo. $g = f^{-1}$. Sia $w_0 \in \Omega_1$ t.c. $f'(g(w_0)) \neq 0$. Allora

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

Quindi g è olomorfa in $\Omega_1 \setminus f(\{f' = 0\})$. Per il corollario 2.1.7 $\{f' = 0\}$ è discreto in Ω. f omeomorfismo $\Rightarrow f(\{f' = 0\})$ discreto in Ω_1. Ma g è continua (quindi localmente limitata) in Ω_1, dunque per il teorema di estensione di Riemann $g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$. $(f' \circ g) g' \equiv 1$ su $\Omega_1 \setminus f(\{f' = 0\}) \Rightarrow$ vale su $\Omega_1 \Rightarrow f' \circ g \neq 0$ sempre.

(ii) Possiamo supporre $z_0 = 0$. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Per ipotesi, $c_1 \neq 0$.

$f(z) - f(w) = c_1(z - w) + (z - w) \sum_{n=2}^{+\infty} c_n \sum_{k=1}^{n} w^{k-1} z^{n-k}$.

$|f(z) - f(w)| \geq |c_1||z - w| - |z - w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n} |w|^{k-1} |z|^{n-k}$.

Prendiamo $z, w \in D(0, r)$, allora

$|c_1||z - w| - |z - w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n} |w|^{k-1} |z|^{n-k} \geq$

$\geq |c_1||z-w| - |z-w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1} = (|c_1| - \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1})|z-w|$. Scegliamo r t.c. $\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1} \leq \frac{|c_1|}{2}$, allora $(|c_1| - \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1})|z-w| \geq \frac{|c_1|}{2}|z-w|$. Dato che $c_1 \neq 0$, si ha quindi (concatenando le disuguaglianze) che $z \neq w \Rightarrow |f(z) - f(w)| \geq \frac{|c_1|}{2}|z-w| > 0 \Rightarrow f(z) \neq f(w)$.

□

Definizione 2.2.7. Se $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ è olomorfa e biettiva (quindi con inversa olomorfa per il teorema 2.2.6) si chiama BIOLOMORFISMO.

Definizione 2.2.8. $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ è un BIOLOMORFISMO LOCALE se ogni $a \in \Omega_1$ ha un intorno $U \ni a$ t.c. $f|_U : U \to f(U)$ è un biolomorfismo.

Per il teorema 2.2.6, f è un biolomorfismo locale se e solo se f' non si annulla mai.

Definizione 2.2.9. Sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ in $D^* = D(a,r) \setminus \{a\}$. $ord_a(f) := \inf\{n \in \mathbb{Z} | c_n \neq 0\}$ è detto ORDINE DI f IN a. $ord_a(f) \geq 0 \Leftrightarrow f$ è olomorfa in a. Se $0 > ord_a(f) > -\infty$ diremo che a è un POLO di f. Se $ord_a(f) = -\infty$ a è una SINGOLARITÀ ESSENZIALE.

Teorema 2.2.10. (Casorati-Weierstrass) Se a è una singolarità essenziale, $f(D^*)$ è denso in $\mathbb{C}$.

Definizione 2.2.11. $c_{-1} =: res_f(a)$ è detto RESIDUO DI f IN a.

Osservazione 2.2.12. $\gamma(t) = a + \rho e^{2\pi i t}, 0 < \rho < r$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_\gamma (z-a)^n \, \mathrm{d}z =$$
$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^1 \rho^n e^{2\pi i n t} \rho 2\pi i e^{2\pi i t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \rho^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i (n+1) t} \, \mathrm{d}t = c_{-1}.$$

Proposizione 2.2.13. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto e chiuso in Ω, $D \subset\subset \Omega$ disco chiuso t.c. $E \cap \partial D = \varnothing$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$. Allora $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f \, \mathrm{d}z = \sum_{a \in D \cap E} res_f(a)$.

Dimostrazione. Traccia: si dimostra che $E \cap D$ è finito e si applica una versione leggermente più forte del teorema di Cauchy-Goursat+Morera, prendendo per ogni punto di E un dischetto tutto contenuto in D che lo isoli dagli altri e considerando la regione D meno quei dischetti. Il bordo di questa regione è considerato il bordo di D meno il bordo dei dischetti. Questo bordo, a meno di aggiungere dei tratti lineari che uniscono una circonferenza all'altra (che quindi verranno percorsi in entrambi i sensi nell'integrale e non daranno contributo), è percorribile con un solo cammino omotopo al cammino costante in $\Omega \setminus E$, il cui integrale fa 0 per la versione forte del teorema di C-G+M, dunque l'integrale sul bordo di D meno l'integrale sul bordo dei dischetti (occhio al verso di percorrenza di uno e degli altri!) deve essere uguale a 0. Per l'osservazione 2.2.12 si ha la tesi. □

Osservazione 2.2.14. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ chiusa ($\gamma(0) = \gamma(1)$), $a \notin \gamma([0,1])$. $p_s : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $p_a(z) = a + e^z$ è un rivestimento.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "p_a"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{C} \setminus \{a\} \end{tikzcd}$$

Sia $\tilde{\gamma}$ un sollevamento di γ rispetto a p_a, $p_a(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = \gamma(0) = p_a(\tilde{\gamma}(0)) \iff e^{\tilde{\gamma}(1)} = e^{\tilde{\gamma}(0)} \iff \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Definizione 2.2.15. L'INDICE DI AVVOLGIMENTO γ RISPETTO AD a (*winding number* in inglese) è dato dall'osservazione 2.2.14: $n(\gamma, a) := \dfrac{1}{2\pi i}(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)) \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.2.16.

(i) $n(\gamma, a)$ dipende solo da a e da γ e non dal sollevamento scelto;
(ii) $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$;
(iii) $n(\gamma, a) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a}\, \mathrm{d}z$;
(iv) $a \mapsto n(\gamma, a)$ è costante sulle componente connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$. In particolare $n(\gamma, a) = 0$ sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$;
(v) $\gamma(t) = a_0 + re^{2\pi i t} \Rightarrow n(a, \gamma) = 1$ per ogni $a \in D(a_0, r)$;
(vi) γ_1 e γ_2 chiuse con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0$ omotope (tramite omotopia che fissa il punto base p_0) e $a \notin \gamma_1([0,1]) \cup \gamma_2([0,1])$, se l'omotopia è in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ allora $n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$.

Teorema 2.2.17. (Teorema dei residui) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto e chiuso in Ω, γ curva chiusa in $\Omega \setminus E$ omotopa a una costante in Ω. Allora per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f\, \mathrm{d}z = \sum_{a \in E} res_f(a) \cdot n(\gamma, a)$.

Definizione 2.2.18. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, f è MEROMORFA in Ω se esiste $E \subset \Omega$ discreto e chiuso in Ω t.c. $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ e nessun punto di E è una singolarità essenziale. Scriveremo che $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Proposizione 2.2.19.

(i) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è meromorfa $\iff$ localmente è quoziente di due funzioni olomorfe;

(ii) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è meromorfa $\iff$ per ogni $a \in E$ o $|f|$ è limitato vicino ad a o $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.

Dimostrazione. (i) ($\Rightarrow$) Se $a \in \Omega \setminus E$ banalmente $f = \dfrac{f}{1}$ vicino ad a.

Se $a \in E$, $f(z) = \sum\limits_{n \geq n_0} c_n (z-a)^n = (z-a)^{n_0}(c_{n_0} + h(z))$, h olomorfa vicino ad a. Se $n_0 < 0$, $f(z) = \dfrac{c_{n_0} + h(z)}{(z-a)^{-n_0}}$.

($\Leftarrow$) Se $f(z) = \dfrac{h_1(z)}{h_2(z)} = \dfrac{\sum_{n \geq n_1} b_n (z-a)^n}{\sum_{m \geq n_2} c_m (z-a)^m} = (z-a)^{n_1 - n_2} k(z)$, k olomorfa vicino ad a.

(ii) Per Casorati-Weierstrass, $a \in E$ è singolarità essenziale $\iff \lim\limits_{z \to a} |f(z)|$ non esiste. Per lo stesso motivo, è un polo $\iff \lim\limits_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.

□

Teorema 2.2.20. (Principio dell'argomento) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. $Z_f := \{\text{zeri di } f\}, P_f := \{\text{poli di } f\}$. γ curva chiusa in $\Omega \setminus (Z_f \cup P_f)$ omotopa a una costante in Ω. Allora $\sum\limits_{a \in Z_f \cup P_f} n(\gamma, a) \cdot ord_a(f) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'}{f} \, \mathrm{d}z$.

Dimostrazione. $ord_a(f) = res_{f'/f}(a)$. Infatti $f(z) = (z-a)^m h(z)$ con $m = ord_a(f)$, $h(a) \neq 0$ e h olomorfa. $f'(z) = m(z-a)^{m-1}h(z) + (z-a)^m h'(z)$. Allora $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{m}{z-a} + \dfrac{h'(z)}{h(z)}$ e $\dfrac{h'}{h}$ è olomorfa $\Rightarrow res_{f'/f}(a) = m = ord_a(f)$. La tesi segue allora dal teorema dei residui. □

Proposizione 2.2.21. (Versione semplice del teorema di Rouché) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, D disco con $\overline{D} \subset \Omega$. Supponiamo che $|f - g| < |g|$ su ∂D (questo implica anche che non si annullano mai su ∂D). Allora f e g hanno lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità) su D.

Dimostrazione. Per $t \in [0,1]$ poniamo $f_t = g + t(f-g)$ ($f_0 = g$, $f_1 = f$). Se $z \in \partial D$, $0 < |g(z)| - |f(z) - g(z)| \leq |g(z)| - t|f(z) - g(z)| \leq |f_t(z)|$.

Sia $a_t = \sum_{a \in \overline{D}} ord_a(f_t) =$ numero di zeri di f_t in $\overline{D}$. Non ci sono poli, dunque $a_t \in \mathbb{N}$, quindi per il principio dell'argomento $a_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f_t'}{f_t}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{g' + t(f'-g')}{g+t(f-g)}\,\mathrm{d}z$, che dipende con continuità da $t \Rightarrow a_t$ è costante (è a valori in $\mathbb{N}$) $\Rightarrow a_0 = a_1$ come voluto. □

Corollario 2.2.22. (Teorema di Ritt) Sia $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ($\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$) t.c. $h(\mathbb{D}) \subset\subset \mathbb{D}$. Allora h ha un punto fisso.

Dimostrazione. Esiste $0 < r < 1$ t.c. $|h(z)| < r$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Sia $\mathbb{D}_r := \{|z| < r\}$. Su $\partial\mathbb{D}_r$, $|z - (z - h(z))| = |h(z)| < r = |z|$. Per il teorema di Rouché su $g(z) = z, f(z) = z - h(z)$, g e f hanno lo stesso numero di zeri in $\mathbb{D}$, ma g ha un unico zero $\Rightarrow f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}} - h$ ha un unico zero $z_0 \Rightarrow h(z_0) = z_0$. □

2.3 Teoremi di Hurwitz

Vediamo ora qualche risultato interessante.

Teorema 2.3.1. (Primo teorema di Hurwitz) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ convergente a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ uniformemente sui compatti. Supponiamo che f non sia costante sulle componenti connesse di Ω. Allora per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono $n_1 = n_1(z_0) \in \mathbb{N}$ e $z_n \in \Omega$ per ogni $n \geq n_1$ t.c. $f_n(z_n) = f(z_0)$ e $\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$. Senza la tesi sul limite di z_n, si può dire che per ogni $w = f(z_0) \in f(\Omega)$ esiste $n_1 = n_1(w)$ t.c. $w \in f_n(\Omega)$ per ogni $n \geq n_1$.

Dimostrazione. Vogliamo applicare Rocuhé a $f_n - w$ e $f - w$, $w = f(z_0)$ in dischetti centrati in z_0 di raggio arbitrariamente piccolo. f non costante sulle componenti connesse $\Rightarrow f^{-1}(w)$ è discreto $\Rightarrow$ esiste $\delta > 0$ t.c. $0 < |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow z \in \Omega$ e $f(z) \neq w$. Se $D = D(z_0, \delta)$ allora $\overline{D} \cap f^{-1}(w) = \{z_0\}$. Per ogni $k > 0$, $\gamma_k = \partial D(z_0, \delta/k)$. Poniamo $\delta_k = \min\{|f(\zeta) - w| \mid \zeta \in \gamma_k\} > 0$. Esiste $n_k \geq 1$ t.c. per ogni $n \geq n_k$ $\max_{\zeta\in\gamma_k} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2}$ (f_n converge a f uniformemente sui compatti). Possiamo supporre $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Fissato $k \geq 1$, se $n \geq n_k$ e $\zeta \in \gamma_k$, $|(f_n(\zeta) - w) - (f(\zeta) - w)| = |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \leq |f(\zeta) - w|$. Per il teorema di Rocuhé applicato a $f_n - w$ e $f - w$ in $\overline{D(z_0, \delta/k)}$, per ogni $n \geq n_k$ $f_n - w$ ha almeno uno zero in $D(z_0, \delta_k) \Rightarrow$ esiste $z_n \in D(z_0, \delta/k)$ t.c. $f_n(z_n) = w$. $z_n \to z_0$ per $n \to +\infty$. □

Corollario 2.3.2. (Secondo teorema di Hurwitz) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supponiamo che le f_n non si annullino mai (o, in generale, esiste $w_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $w_0 \notin f_n(\Omega)$ per ogni n), allora o $f \equiv 0$ o f non si annulla mai (in generale, o $f \equiv w_0$ o $w_0 \notin f(\Omega)$).

Dimostrazione. Per assurdo, $w_0 \in f(\Omega)$. Allora o f è costante ($f \equiv w_0$) oppure, per il primo teorema di Hurwitz, $w_0 \in f_n(\Omega)$ per ogni $n >> 1$, assurdo. $\square$

Corollario 2.3.3. (Terzo teorema di Hurwitz) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supponiamo che le f_n siano iniettive. Allora f è costante o iniettiva.

Dimostrazione. Per assurdo, sia f né costante né iniettiva. Allora esistono $z_1 \neq z_2$ t.c. $f(z_1) = f(z_2)$. Poniamo $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ e $h(z) = f(z) - f(z_2)$. $h_n \to h$ e le h_n non si annullano mai in $\Omega \setminus \{z_2\}$ (perché le f_n sono iniettive). Dato che per ipotesi f non è costante, pure h non è costante, dunque per il secondo teorema di Hurwitz non si annulla mai in $\Omega \setminus \{z_2\}$, ma $h(z_1) = 0$, assurdo. $\square$

2.4 La sfera di Riemann

Definizione 2.4.1. La SFERA DI RIEMANN è l'insieme $\hat{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (l'ultimo è la retta proiettiva complessa). Per noi sarà $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la seguente topologia: ristretta a $\mathbb{C}$ è la topologia usuale, mentre gli intorni aperti di ∞ sono della forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ con $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto.

Siano $U_0 = \mathbb{C}, U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ (si noti che U_1 è un intorno aperto di ∞). Sia $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ definita come

$$\varphi_1(w) = \begin{cases} 1/w & \text{se } w \neq \infty \\ 0 & \text{se } w = \infty. \end{cases}$$

φ_1 è un omeomorfismo fra U_1 e $\mathbb{C}$. Sia $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$, $\varphi_0(z) = z$ (l'identità); è un omeomorfismo fra U_0 e $\mathbb{C}$.
$U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*$, $\varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* = \varphi_0(U_0 \cap U_1)$.
$\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}, \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $(\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1})(w) = \dfrac{1}{w}, (\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(z) = \dfrac{1}{z}$ sono olomorfe.
φ_0 e φ_1 si chiamano *carte*. Una funzione definita a valori in $\hat{\mathbb{C}}$ è olomorfa se lo è letta tramite carte. Vediamo nello specifico cosa significa.
Sia $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua; quando è olomorfa?
Risposta:

(i) $f|_{\Omega \cap \mathbb{C}}$ è olomorfa in senso classico (notiamo che $\Omega \cap \mathbb{C} = \Omega \setminus \{\infty\}$);
(ii) $f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\Omega) \to \mathbb{C}$ è olomorfa vicino a $0 = \varphi_1(\infty)$.
$(f \circ \varphi_1^{-1})(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right)$.

Esempio 2.4.2. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. Quando è olomorfa in ∞? Se e solo se $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è olomorfa in 0. $f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n w^{-n}$ è olomorfa in 0 $\iff$ $c_n = 0$ per ogni $n > 0$.

Osservazione 2.4.3. $f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se è costante. Infatti, $\hat{\mathbb{C}}$ compatto $\Rightarrow$ $f(\hat{\mathbb{C}})$ compatto, cioè chiuso e limitato in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $|f|$ ha max in $x_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Se $z_0 \in \mathbb{C}$, allora per il teorema di Liouville 2.1.5 $f|_{\mathbb{C}}$ è costante $\Rightarrow$ f costante. Se $z_0 = \infty$, $f(1/w)$ ha massimo in 0, dunque ragionando come prima è costante.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ continua; quando è olomorfa?
Risposta:

(i) f è olomorfa in $\Omega \setminus f^{-1}(\infty)$ in senso classico;

(ii) se $f(z_0) = \infty$, $\varphi_1 \circ f = \frac{1}{f}$ è olomorfa vicino a z_0.

Esempio 2.4.4. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ è a valori in $\hat{\mathbb{C}}$ se 0 è un polo (ci interessa il caso in cui ∞ sia effettivamente nell'immagine, altrimenti è una comune funzione olomorfa a valori in $\mathbb{C}$), cioè consideriamo $f(0) = \infty$. Supponiamo allora $f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n = z^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^{n+k} = z^{-k} h(z)$, $h(0) = c_{-k} \neq 0$, h olomorfa. $\frac{1}{f}(z) = \frac{z^k}{h(z)}$ è olomorfa in 0. Viceversa, se f è olomorfa, $\frac{1}{f}$ è olomorfa in 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}(z) = z^k \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, $c_0 \neq 0, k \geq 1$ (la condizion $k \geq 1$ segue dal fatto che siamo nell'ipotesi $f(0) = \infty \Rightarrow (1/f)(0) = 0$). Allora $\frac{1}{f}(z) = z^k h(z) \Rightarrow$ $f(z) = z^{-k} \frac{1}{h(z)}$ e quindi ha un polo in 0.

Corollario 2.4.5. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ è olomorfa se e solo se è meromorfa.

Possiamo ora dare una definizione generale.

Definizione 2.4.6. $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ continua è *olomorfa* se e solo se $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è olomorfa vicino a 0 e $\frac{1}{f}$ è olomorfa vicino a $f^{-1}(\infty)$ (e ovviamente dev'essere normalmente olomorfa in tutti gli altri punti).
Se $f(\infty) = \infty$, la condizione è che $\frac{1}{f(1/w)}$ sia olomorfa in 0.

Esempio 2.4.7. $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d, a_d \neq 0$ (un polinomio). $p(\infty) = \infty$. È olomorfo in ∞? Sì: $\dfrac{1}{p(1/z)} = \dfrac{1}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_d z^{-d}} = \dfrac{1}{z^{-d}(a_0 z^d + \cdots + a_d)} = \dfrac{z^d}{a_d + \cdots + a_0 z^d}$ è olomorfo in 0. $\dfrac{1}{p(1/z)}$ ha uno zero di ordine d in 0 $\iff$ p ha un polo di ordine di $-d$ in ∞ (vedremo più avanti come è definito $ord_f(\infty)$).

Proposizione 2.4.8. $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}}) \iff f = \dfrac{P}{Q}$ con $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ senza fattori comuni, cioè f è una funzione razionale.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sappiamo che $\mathbb{C}[z] \subset \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ e quozienti di funzioni olomorfe sono olomorfi.
($\Rightarrow$) Sia $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ olomorfa non costante. $Z_f = f^{-1}(0)$ è chiuso e discreto in $\hat{\mathbb{C}}$ che è compatto, dunque è finito, perciò $Z_f \cap \mathbb{C} = \{z_1, \dots, z_k\} \subset \mathbb{C}$. Analogamente $P_f = f^{-1}(\infty) = Z_{1/f}$, $P_f \cap \mathbb{C} = \{w_1, \dots, w_h\} \subset \mathbb{C}$. Sia $g(z) = \dfrac{(z-w_1)\cdots(z-w_h)}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)} f(z)$, $g \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ (gli zeri e i poli compaiono con molteplicità nei prodotti al numeratore e al denominatore). In questo modo g non ha né zeri né poli in $\mathbb{C}$. Se $g(\infty) \in \mathbb{C}$, $g \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow g$ costante, diciamo $g \equiv c \Rightarrow f(z) = c\dfrac{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}{(z-w_1)\cdots(z-w_h)}$, come voluto. Se $g(\infty) = \infty \Rightarrow \dfrac{1}{g}(\infty) = 0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \dfrac{1}{g} \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow \dfrac{1}{g}$ costante e si conclude come sopra. □

Definizione 2.4.9. Sia $f = \dfrac{P}{Q} \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$. Il GRADO DI f è $\deg f = \max\{\deg P, \deg Q\}$.
La definizione dell'ordine di zeri e poli in $\mathbb{C}$ ce l'abbiamo.

$$f(\infty) = \lim_{w \to 0} \frac{P(1/w)}{Q(1/w)} = \lim_{w \to 0} \frac{a_m \left(\frac{1}{w}\right)^m + \cdots + a_0}{b_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + \cdots + b_0} =$$

$$\lim_{w \to 0} w^{n-m} \frac{a_m + \cdots + a_0 w^m}{b_n + \cdots + b_0 w^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n > m \\ \frac{a_m}{b_n} & \text{se } n = m \\ \infty & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Definiamo allora $ord_f(\infty)) = n - m = \deg Q - \deg P$.

Definizione 2.4.10. Siano $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$, $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. La MOLTEPLICITÀ DI f IN z_0 è $\delta_f(z_0)$ definita come segue: se $f(z_0) = w_0 \in \mathbb{C}$, z_0 è uno zero di $f - w_0$ e poniamo $\delta_f(z_0) = ord_{f-w_0}(z_0)$; se $f(z_0) = \infty$, z_0 è un polo di f e poniamo $\delta_f(z_0) = -ord_f(z_0)$. Si ha che $\delta_f(z_0) \in \mathbb{N}$.

Proposizione 2.4.11. Sia $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ non costante. Allora per ogni $q \in \hat{\mathbb{C}}$ $\displaystyle\sum_{f(p)=q} \delta_f(p) = \deg f$.

Dimostrazione. Sia $f = \dfrac{P}{Q}$. Se $q = 0$, $\sum_{f(p)=0} \delta_f(p) = \sum_{\substack{f(p)=0 \\ p\in\mathbb{C}}} \delta_f(p) + c \cdot \delta_f(\infty)$ dove $c = 1$ se $f(\infty) = 0$ e $c = 0$ altrimenti. Si noti che per il teorema fondamentale dell'algebra $\sum_{\substack{f(p)=0 \\ p\in\mathbb{C}}} \delta_f(p) = \deg P$. Per com'è definito c, $c \cdot \delta_f(\infty) = \max\{0, \deg Q - \deg P\}$. Allora $\sum_{f(p)=0} \delta_f(p) = \deg P + \max\{0, \deg Q - \deg P\} = \max\{\deg P, \deg Q\} = \deg f$. Se $q = \infty$, $\sum_{f(p)=\infty} \delta_f(p) = \sum_{\substack{f(p)=\infty \\ p\in\mathbb{C}}} \delta_f(p) + c \cdot \delta_f(\infty)$ dove stavolta $c = 1$ se $f(\infty) = \infty$ e $c = 0$ altrimenti. Dunque in questo caso la sommatoria vale, per il teorema fondamentale dell'algebra, $\deg Q$, mentre $c \cdot \delta_f(\infty) = \max\{0, \deg P - \deg Q\}$, per cui $\sum_{f(p)=\infty} \delta_f(p) = \deg Q + \max\{0, \deg P - \deg Q\} = \max\{\deg Q, \deg P\} = \deg f$. Se $q \in \mathbb{C}^*$, $\sum_{f(p)=q} \delta_f(p) = \sum_{f(p)=q} ord_{f-q}(p) = \sum_{f(p)-q} ord_{f-q}(p) = \deg(f-q)$. $f(z) - q = \dfrac{P(z) - qQ(z)}{Q(z)}$.

$$\deg(P - qQ) \begin{cases} = \max\{\deg P, \deg Q\} & \text{se sono diversi} \\ \leq \max\{\deg P, \deg Q\} & \text{se sono uguali} \end{cases}$$

$\Rightarrow \deg(f-q) = \deg f$. □

Corollario 2.4.12. Siano $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ non costante, $w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Allora $1 \leq card(f^{-1}(w_0)) \leq \deg f$.

Dimostrazione. ≥ 1: se $w_0 \neq \infty$, $f(z) = w_0 \iff f(z) - w_0 = 0 \iff P(z) - w_0 Q(z) = 0$ e per il teorema fondamentale dell'algebra esiste z che soddisfa; se $w_0 = \infty$, si considera $1/f$.
$card(f^{-1}(w_0)) \leq \sum_{f(p)=w_0} \delta_f(p) = \deg f$. □

Osservazione 2.4.13. $\delta_f(p) > 1 \Rightarrow f'(p) = 0 \vee \left(\dfrac{1}{f}\right)'(p) = 0$. Infatti, senza perdita di generalità $p = 0$ e $f(p) = 0$, allora se $\delta_f(p) = k > 1$ si ha che $f(z) = z^k h(z)$ con h olomorfa e $h(0) \neq 0 \Rightarrow f'(z) = [kz^{k-1}h(z) + z^k h'(z)]$. Ricordando che $k > 1$, si ha che $f'(0) = 0$.

Corollario 2.4.14. Sia $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$, $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \iff \deg f = 1 \iff f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = 1$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Ogni $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ è suriettiva per quanto appena dimostrato. Se $\deg f = 1$, allora f è iniettiva, quindi biettiva, per cui per il teorema 2.2.6 $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.
($\Rightarrow$) f automorfismo $\Rightarrow$ f iniettiva $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{f(p)=w_0} \delta_f(p)$ contiene un unico addendo con molteplicità uno (da cui la tesi). Infatti, da f non costante si ha che f' ha un insieme di zeri discreto C_f e $(1/f)'$ ha un insieme di zeri discreto $C_{1/f}$. Allora basta prendere $z_0 \notin C_f \cup C_{1/f}$ per ottenere, dall'osservazione precedente, che $\delta_f(z_0) = 1$.
Il secondo se e solo se è un banale esercizio lasciato al lettore. $\square$

Osservazione 2.4.15. Siccome numeratore e denominatore sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, possiamo suppore $ad - bc = 1$.

Esercizio 2.4.16. $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ è isomorfo a ${SL(2, \mathbb{C})}/{\{\pm I_2\}}$.