Lemma di Schwarz-Pick al bordo (titolo provvisorio)

Marco Vergamini

Indice

Introduzione

Da scrivere alla fine

1 Prerequisiti

1.1 Verso la disuguaglianza di Golusin

Corollario 1.1.1. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$d(f^h(z), f^h(w)) \leq 2d(z, w). \tag{1}$$

c'è da farsi tutto il BM per arrivare a questa

ricordati di definire f^h, con la notazione di BKR, quindi occhio quando scrivi tutti i risultati e le dimostrazioni in BM

Dimostrazione. Da scrivere. $\square$

Ponendo $w = 0$ in (1) otteniamo la disuguaglianza di Golusin, che ci servirà per dimostrare il risultato a cui puntiamo.

2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

2.1 Lemma di Schwarz-Pick al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick, seguendo la traccia data nel remark 5.6 di [BKR].

Teorema 2.1.1. (lemma di Scharz-Pick al bordo) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f^h(z_n) = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \tag{2}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \longrightarrow 1$. Allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia un automorfismo. Allora possiamo applicare il corollario 1.1.1, che per $w = 0$ ci dà

$$\begin{aligned} d(f^h(z), f^h(0)) &\leq 2d(z,0) \\ \log\left(\frac{1 + \left|\frac{f^h(z)-f^h(0)}{1-f^h(z)f^h(0)}\right|}{1 - \left|\frac{f^h(z)-f^h(0)}{1-f^h(z)f^h(0)}\right|}\right) &\leq 2\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right) \\ \frac{|1-f^h(z)f^h(0)| + |f^h(z)-f^h(0)|}{|1-f^h(z)f^h(0)| - |f^h(z)-f^h(0)|} &\leq \frac{(1+|z|)^2}{(1-|z|)^2}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che per definizione $f^h(z) \geq 0$ e inoltre per il lemma di Schwarz-Pick $f^h(z) \leq 1$, per ogni $z \in \mathbb{D}$. Sempre per il lemma originale, se valesse $f^h(0) = 1$ avremmo che f è un automorfismo, contraddizione. Perciò dev'essere $f^h(0) < 1$, ma $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f^h(z_n) = 1$, quindi definitivamente $f^h(z_n) - f^h(0) > 0$ e $1 - f^h(z_n)f^h(0) > 0$, da cui

$$\begin{aligned} \frac{(1-f^h(0))(1+f^h(z_n))}{(1-f^h(z_n))(1+f^h(0))} &\leq \frac{(1+|z_n|)^2}{(1-|z_n|)^2} \\ \frac{1+f^h(0)}{(1-f^h(0))(1+f^h(z_n))}(1-f^h(z_n)) &\geq \frac{(1-|z_n|)^2}{(1+|z_n|)^2}. \end{aligned}$$

Per ipotesi vale (2), dunque

$$\begin{aligned} \frac{1+f^h(0)}{(1-f^h(0))(1+f^h(z_n))} o((|z_n|-1)^2) &\geq \frac{(1-|z_n|)^2}{(1+|z_n|)^2} \\ \frac{(1+f^h(0))(1+|z_n|)^2}{(1-f^h(0))(1+f^h(z_n))} o((|z_n|-1)^2) &\geq 1. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(1+f^h(0))(1+|z_n|)^2}{(1-f^h(0))(1+f^h(z_n))} = \frac{2(1+f^h(0))}{1-f^h(0)} < +\infty$, otteniamo di nuovo una contraddizione. $\square$

2.2 Teorema di Burns-Krantz

Proposizione 2.2.1. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione tale che

$$f(z) = 1 + (z-1) + o((z-1)^3) \tag{3}$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora

$$f^h(z) = 1 + o((z-1)^2) \tag{4}$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.

Magari dire qualcosa sull'utilità di questa proposizione, che forse verrà spostata nei prerequisiti

Dimostrazione. Sia S un settore (cono? non conosco il termine tecnico in italiano) di vertice 1 e angolo d'apertura 2α, e S' uno un po' più grande di vertice 1 e angolo 2β, $\beta > \alpha$. Per $z \in S$, sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \operatorname{dist}(z, \partial S')$ (la distanza di z dal bordo di S'). Allora per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{w - 1 + (f(w) - w)}{(w-z)^2}\, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{1}{w-z}\, \mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{z - 1 + f(w) - w}{(w-z)^2}\, \mathrm{d}w \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w-z)^2}\, \mathrm{d}w =: 1 + I(z).
\end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$ fissato, per ipotesi esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w) - w| < \varepsilon |1 - w|^3$ per ogni $w \in S'$ con $|w - 1| < \delta$. Per questi w vale che

Mettere un disegno. Qualche spiegazione in più?

$$\begin{aligned}
|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z + r(z)e^{i\theta}) - z|^2} r(z)\, \mathrm{d}\theta \leq \\
\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3 = \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3 = \\
= \varepsilon r(z)^2 \left(1 + \frac{|z-1|}{r(z)}\right)^3 \leq \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3 \leq \varepsilon |z-1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3,
\end{aligned}$$

da cui otteniamo $f'(z) = 1 + o((z-1)^2)$ per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Inoltre, per ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z-1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z-1)^2)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.
Possiamo quindi concludere che

Ok, bisogna chiarire questa cosa di $z - 1$ e $|z| - 1$, il claim è che non tangenzialmente hanno gli stessi o-piccoli

$$f^h(z) = |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = 1 + o((z-1)^2)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. □

gli ultimi passaggi mi sono un po' oscuri, per via degli o-piccoli

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 2.1 di [BK].

Teorema 2.2.2. (Burns-Krantz, 1994) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f(z) = 1 + (z - 1) + \mathcal{O}((z - 1)^4) \tag{5}$$

per $z \longrightarrow 1$. Allora f è l'identità sul disco.

Dimostrazione. Chiaramente, se vale (5) per $z \longrightarrow 1$ vale anche (3), in particolare per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Dalla proposizione 2.2.1 segue che anche (4) vale per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del teorema 2.1.1, da cui la tesi. $\square$

È comprensibile? E siamo sicuri che valgono le ipotesi di 2.1.1? (c'era quel discorso di $(z-1)^2$ e $(|z|-1)^2$)

Aggiungere controesempio

Riferimenti bibliografici

[BK] D. M. Burns, S. G. Krantz, *Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary*, (1994)

[BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth, *A new Schwarz-Pick lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps*, (2020)

[BM] A. F. Beardon, D. Minda, *A multi-point Schwarz-Pick lemma*, (2004)