Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Scuola Normale Superiore di Pisa

19 Aprile 2021

Candidato: Marco Vergamini Relatore: Prof. Marco Abate

Lemma di Schwarz come risultato di rigidità

Lemma di Schwarz

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che* $f(0) = 0$. *Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *si ha* $|f(z)| \leq |z|$ *e* $|f'(0)| \leq 1$; *inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per* $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *oppure nella seconda allora* $f(z) = e^{i\theta} z$ *per qualche* $\theta \in \mathbb{R}$.

Lemma di Schwarz come risultato di rigidità

Lemma di Schwarz

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che* $f(0) = 0$*. Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *si ha* $|f(z)| \leq |z|$ *e* $|f'(0)| \leq 1$*; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per* $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *oppure nella seconda allora* $f(z) = e^{i\theta} z$ *per qualche* $\theta \in \mathbb{R}$*.*

Osservazione

Dall'unicità seguono i seguenti risultati di rigidità: se $|f'(z)| = 1 + o(1)$ per z che tende a 0, allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; se $f(z) = z + o(z - z_0)$ per z che tende a $z_0 \in \mathbb{D}$, allora f è proprio l'identità.

Teorema di Burns-Krantz e limiti non tangenziali

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{1}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Teorema di Burns-Krantz e limiti non tangenziali

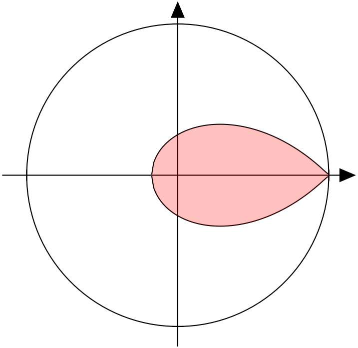
Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \dfrac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

Teorema di Burns-Krantz e limiti non tangenziali

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \dfrac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.



La regione di Stolz $K(1, 2)$.

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \dfrac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\displaystyle\lim_{\substack{z \longrightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Teorema di Burns-Krantz e limiti non tangenziali

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \dfrac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\underset{z \longrightarrow \sigma}{\text{nt--lim}}\, f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\displaystyle\lim_{\substack{z \longrightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$.

Notiamo che la definizione di limite non tangenziale è più debole di quella di limite classico; nel nostro caso rende il risultato più forte.

Teorema di Burns-Krantz e limiti non tangenziali

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{1}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Teorema di Burns-Krantz e limiti non tangenziali

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{1}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Esempio

Se $f(z) = \dfrac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$, si ha $\lim\limits_{z \longrightarrow 1} \dfrac{f(z) - z}{(z - 1)^3} = -\dfrac{1}{4}$; dunque il termine $o\big((z - \sigma)^3\big)$ nel teorema di Burns-Krantz non è migliorabile.

Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right| \;\; e \;\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right| \;\; e \;\; \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)}}{\frac{z - w}{1 - \bar{w} z}} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Lemma di Schwarz-Pick e derivata iperbolica

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right| \;\; e \;\; \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Osservazione

Il lemma di Schwarz-Pick può essere visto come un risultato di rigidità per la derivata iperbolica: se $|f^h(z)| = 1 + o(1)$ per z che tende a $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{2}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{2}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Esempio

Prendiamo di nuovo $f(z) = \dfrac{1+3z^2}{3+z^2}$. Si ha $|f^h(z)| = \dfrac{2|z|}{1+|z|^2}$, perciò $\lim\limits_{|z|\longrightarrow 1} \dfrac{|f^h(z)|-1}{(|z|-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Risultato sui limiti non tangenziali

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - \sigma)^2\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Risultato sui limiti non tangenziali

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - \sigma)^2\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Traccia della dimostrazione: il punto è riuscire a stimare f'. Senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla formula di Cauchy troviamo

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} \,\mathrm{d}w =: 1 + I(z).$$

Risultato sui limiti non tangenziali

Proposizione

Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - \sigma)^2\big)$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

All'interno delle regioni di Stolz, con ragionamenti geometrici si possono fare stime per dire che $I(z) = o\big((z - 1)^2\big)$. $\square$

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{3}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{3}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - 1)^2\big)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{3}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora* f *è l'identità del disco.*

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziali segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - 1)^2\big)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.
Per il teorema di Bracci-Kraus-Roth, $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; per ipotesi dev'essere $f(1) = 1$ e $f''(1) = 0$, perciò $f(z) = z$. $\square$

Strada della dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda.

Strada della dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda.
- Dalla versione a quattro punti segue un Corollario riguardante la derivata iperbolica; esso avrà a sua volta, come caso particolare, una disuguaglianza dovuta a Golusin.

Strada della dimostrazione del teorema di BKR

- Useremo il lemma di Schwarz-Pick per derivarne due versioni multipunto dimostrate da Beardon e Minda.
- Dalla versione a quattro punti segue un Corollario riguardante la derivata iperbolica; esso avrà a sua volta, come caso particolare, una disuguaglianza dovuta a Golusin.
- Dalla disuguaglianza di Golusin, scritta in forma opportuna, il teorema di Bracci-Kraus-Roth segue con una semplice dimostrazione per assurdo.

L'idea di Beardon-Minda

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right| \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

L'idea di Beardon-Minda

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right| \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \dfrac{\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}}{\frac{z-w}{1-\bar{w}z}} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w. \end{cases}$$

L'idea di Beardon-Minda

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right| \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Osservazione

Fissato $w \in \mathbb{D}$, si ha che $f^*(z, w)$ è olomorfa in z. Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che, se $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z,w) = \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

La distanza di Poincaré

Sia $p(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0,+\infty)$ data da

$$\omega(z,w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z,w)\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)}\right).$$

La distanza di Poincaré

Sia $p(z,w) = \left| \dfrac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|$; ricordiamo la distanza iperbolica.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z,w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z,w)\big) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)} \right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di ω il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega\big(f(z), f(w)\big) \leq \omega(z,w).$$

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \le \omega(z,w). \tag{4}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Osservazione

Se $f(0) = 0$ troviamo $\omega\big(f(z)/z, f'(0)\big) \le \omega(z, 0)$. Il disco iperbolico di centro $f'(0)$ e raggio $\omega(z,0)$ è, in generale, strettamente contenuto in $\mathbb{D}$.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

(i) *si ha che* $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ *se e solo se* $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, *con* $w \in \mathbb{D}$ *fissato;*

(ii) *se* $f \in \mathcal{B}_2$ *allora esiste un unico punto* $c \in \mathbb{D}$ *in cui* f *ha molteplicità doppia.*

Prodotti di Blaschke

Definizione

Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con $\mathcal{B}_n$ i prodotti di Blaschke di grado n.

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

(i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*

(ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora esiste un unico punto $c \in \mathbb{D}$ in cui f ha molteplicità doppia.*

Data f, indichiamo con R_f la rotazione iperbolica attorno a c.

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z, v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u, w)\big) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(0, f^*(z, v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(w, v)\big) + \omega\big(f^*(w, v), f^*(z, v)\big)$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big)\\ &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z)\end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \\
&= \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(w,z)
\end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(w,z) \\
&= \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(w,z) \\
&\leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(u,v) + \omega(w,z). \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(0, f^*(z, v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u, w)\big) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \tag{5}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* $R_f(v), R_f(u), w$ *e* z *giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.*

Prendendo $v = z$ e $u = w$ otteniamo

$$\omega\big(0, f^h(z)\big) \leq \omega\big(0, f^h(w)\big) + 2\omega(z, w)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{6}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{6}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Traccia della dimostrazione:

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{6}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|}\right)\end{aligned}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{6}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f*.*

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned}\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{|f^h(z)|-|f^h(w)|}{1-|f^h(w)||f^h(z)|}}{1-\frac{|f^h(z)|-|f^h(w)|}{1-|f^h(w)||f^h(z)|}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(w)|}{1-|f^h(w)|}\right)\\ &= \omega\big(0, f^h(z)\big) - \omega\big(0, f^h(w)\big) \leq 2\omega(z, w). \qquad \square\end{aligned}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z, w). \tag{6}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ *e* z *e* w *giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di* R_f.

Prendendo $w = 0$ e raccogliendo i logaritmi otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq 2\omega(0, z)$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{7}$$

Disuguaglianza di Golusin

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{7}$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right),$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*. Allora per ogni* $z \in \mathbb{D}$ *vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{7}$$

Traccia della dimostrazione:

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right),$$

da cui

$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2.$$

□

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{8}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{8}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)}\big(1 - |f^h(z_n)|\big) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{8}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1+|f^h(0)|\big)(1+|z_n|)^2}{\big(1-|f^h(0)|\big)\big(1+|f^h(z_n)|\big)}\big(1-|f^h(z_n)|\big) \geq (1-|z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{8}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ *con* $|z_n| \longrightarrow 1$. *Allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)}\big(1 - |f^h(z_n)|\big) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)} = \frac{2\big(1 + |f^h(0)|\big)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty. \qquad \square$$