Appunti di Elementi di Analisi Complessa

Marco Vergamini

Indice

1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Elementi di Analisi Complessa tenuto dal professor Marco Abate nel secondo semestre dell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) analisi in più variabili, topologia, concetto di gruppo fondamentale e le basi di analisi complessa in più variabili, che si vedono nei corsi Analisi 2 e Geometria 2. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc.... Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia...), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali...insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

2 Funzioni olomorfe

2.1 Notazioni e prerequisiti

Notazioni: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ indica un numero complesso, $\bar{z} = x - iy$ il suo complesso coniugato. Con il termine *dominio* si intende un aperto connesso. $\mathcal{O}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f \text{ è olomorfa}\}$. $\mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2) = \{f : \Omega_1 \to \Omega_2 | f \text{ è olomorfa}\}$.
$\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.
$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y, \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y, \mathrm{d}z\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = 1, \mathrm{d}z\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 0.$

Daremo ora una definizione di funzione olomorfa basata su quattro definizioni, l'equivalenza delle quali è un prerequisito del corso e dovrebbe essere quindi nota agli studenti.

Definizione 2.1.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, $f : \Omega \in \mathbb{C}$ si dice OLOMORFA se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

(i) f è $\mathbb{C}$-*differenziabile*, cioè per ogni $a \in \Omega$ esiste $f'(a) = \lim_{z \to a} = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$;

(ii) f è *analitica*, cioè per ogni $a \in \Omega$ esiste $U \subseteq \Omega$ aperto e intorno di a e $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ t.c. per ogni $z \in U$ $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$;

(iii) f è *olomorfa*, cioè f è continua, $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ esistono su Ω e $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ (equazione di Cauchy-Riemann). Si noti che la condizione è $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, da cui si ricava $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'$;

(iv) f è continua e per ogni rettangolo (o disco) chiuso $D \subseteq \Omega$ si ha $\displaystyle\int_{\partial D} f \,\mathrm{d}z = 0$ (teorema di Cauchy-Goursat+Morera).

La seguente proposizione è anch'essa un risultato che dovrebbe essere noto agli studenti che seguono il corso.

Proposizione 2.1.2. Sia $\{c_n\} \in \mathbb{C}$. Allora:

(i) esiste $R \in [0, +\infty]$ t.c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ converge per $|z| < R$ e diverge per $|z| > R$. R è detto *raggio di convergenza*. La convergenza +è uniforme su $\Delta_r = \{|z| \leq r\}, r < R$. $\limsup_{n \to +\infty} |c_n|^{1/n} = \dfrac{1}{R}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n c_n z^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza;

(iii) se $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ allora $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$;

(iv) se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $a \in \Omega$, allora $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$. Questa formula è valida nel più grande disco aperto centrato in a e contenuto in Ω, cioè di raggio minore o uguale di $d(a, \partial\Omega)$.

Teorema 2.1.3. (Formula di Cauchy) Sia Ω aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega), D \subseteq \Omega$ disco/rettangolo chiuso. Per ogni $a \in D, f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\zeta}{\zeta - a} \mathrm{d}\zeta$. Si ha che $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$.

Corollario 2.1.4. (Disuguaglianze di Cauchy) $f \in \mathcal{O}(\Omega), D = D(a, r) \subseteq \Omega$ disco di centro $a \in \Omega$ e raggio $r > 0$. Sia $M = \max_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)|$. Allora per ogni $n \geq 1, |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M$.

Corollario 2.1.5. (Teorema di Liouville) Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ limitata. Allora f è costante.

Dimostrazione. Le disuguaglianze di Cauchy danno, per ogni $r > 0$, $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$ dove $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < +\infty \Rightarrow f' \equiv 0$. □

Teorema 2.1.6. (Principio di identità o del prolungamento analitico) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\{z \in \Omega | f(z) = g(z)\}$ ha un punto di accumulazione in Ω, allora $f \equiv g$.

Corollario 2.1.7. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla, allora $\{z \in \Omega | f(z) = 0\}$ è discreto in Ω.

Teorema 2.1.8. (Principio del massimo) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora:

(i) se U è aperto e $U \subset\subset \Omega$ (si legge "U relativamente compatto in Ω" e si intende $\overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ compatto) allora $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$. Inoltre, se $|f|$ ha un massimo locale in U, allora f è costante in Ω;

(ii) la stessa affermazione vale per $\mathfrak{Re} f$ e $\mathfrak{Im} f$;

(iii) se Ω è limitato poniamo $M = \sup_{x \in \partial D} \limsup_{z \to x} |f(z)| \in [0, +\infty]$. Allora per ogni $z \in \Omega$ $|f(z)| \leq M$ con uguaglianza in un punto se e solo se f è costante.

Esempio 2.1.9. Controesempio per vedere che serve Ω limitato per il punto (iii) del teorema 2.1.8: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re} z > 0\}, f(z) = e^z$. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(\Omega)$. $z \in \partial\Omega \Rightarrow z = iy \Rightarrow |f(iy)| = |e^{iy}| = 1$, ma f è illimitata in Ω. Per correggere questa cosa si aggiunge il punto all'infinito.

Teorema 2.1.10. (Applicazione aperta) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante $\Rightarrow f$ è un'applicazione aperta.

Siano X, Y spazi topologici e indichiamo con $C^0(X, Y)$ le funzioni continue da X in Y.
La *topologia della convergenza puntuale* è la restrizione a $C^0(X,Y) \subset Y^X = \{f : X \to Y\}$ della topologia prodotto. Una prebase è data da $\mathcal{F}(x, U) = \{f \in C^0(X,Y) | f(x) \in U\}$ dove $x \in X$ e $U \subseteq Y$ è un aperto.

Esercizio 2.1.11. $f_n \to f \in C^0(X,Y)$ per questa topologia se e solo se $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$.

La *topologia compatta aperta* ha invece come prebase $\mathcal{F}(K, U) =$
$= \{f \in C^0(X,Y) | f(K) \subseteq U\}$ dove U è preso come sopra e $K \subseteq X$ è un compatto.

Proposizione 2.1.12.

(i) La topologia compatta aperta è più fine della topologia della convergenza puntuale;
(ii) Y Hausdorff $\Rightarrow$ topologia compatta aperta Hausdorff.

Dimostrazione. (i) Ovvia (il singoletto è un compatto).
(ii) Prendiamo $f \not\equiv g$ continue, allora esiste $x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) \neq g(x_0)$, per cui, dato che Y è Hausdorff, esistono $U, V \subset Y$ aperti disgiunti con $f(x_0) \in U, g(x_0) \in V \Rightarrow f \in \mathcal{F}(x_0, U), g \in \mathcal{F}(x_0, V), \mathcal{F}(x_0, U) \cap \mathcal{F}(x_0, V) = \varnothing$. □

Teorema 2.1.13. (Ascoli-Arzelà) Siano X, Y spazi metrici con X localmente compatto, allora $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ è relativamente compatta rispetto alla topologia compatta aperta se e solo se:

(i) per ogni $x \in X$ $\{f(x) | f \in \mathcal{F}\} \subset\subset Y$;
(ii) $\mathcal{F}$ è equicontinua.

La topologia compatta aperta viene detta anche topologia della *convergenza uniforme sui compatti*: $\{f_n\} \subset C^0(X, \mathbb{R}^N)$. Se $K \subseteq X$ definiamo $\|f\|_K = \sup\limits_{z \in K} \|f(z)\|$. $f_n \to f$ uniformemente sui compatti se per ogni $K \subset\subset X$ compatto e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 t.c. $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_K < \varepsilon$.

Esercizio 2.1.14. $f_n \to f$ uniformemente sui compatti se e solo se $f_n \to f$ nella topologia compatta aperta.

2.2 Primi risultati

Vediamo ora alcuni risultati e definizioni preliminari, da considerarsi comunque come prerequisiti per altri risultati più interessanti che vedremo più avanti nel corso.

Teorema 2.2.1. (Weierstrass) Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f \in C^0(\Omega, \mathcal{C})$ uniformemente sui compatti. Allora:

(i) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$;
(ii) $f_n' \to f'$ uniformemente sui compatti.

Dimostrazione. (i) Sia $a \in \Omega$, $0 < r < d(a, \partial\Omega)$ t.c. $D = D(a,r) \subset\subset \Omega$. $f_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$ per ogni $z \in D(a,\rho)$ per ogni $0 < \rho < r$. Allora $\dfrac{1}{|\zeta - z|} \leq \dfrac{1}{r - \rho}$ per ogni $z \in D(a,\rho), \zeta \in \partial D$. Per ogni $z \in D(a,\rho)$, $f(z) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$. Adesso, per uniforme convergenza e uniforme limitatezza si può portare il limite dentro, perciò $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$, ma questo, per il teorema di Cauchy-Goursat+Morera, implica $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
(ii) $f_n'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f'(z)$. $f_n' \to f'$ uniformemente sui dischi e ogni compatto è coperto da un numero finito di dischi $\Rightarrow f_n' \to f'$ uniformemente sui compatti.

□

Teorema 2.2.2. (Montel) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. per ogni $K \subset\subset C$ compatto esiste $M_K > 0$ t.c. $\|f\|_K \leq M_K$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ (si diche che $\mathcal{F}$ è *uniformemente limitata sui compatti*). Allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$.

Dimostrazione. Basta vedere che ogni successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ ha una sottosuccessione convergente (segue dal fatto che, nelle ipotesi del teorema di Montel, la topologia compatta aperta è metrizzabile).

Dati $a \in \Omega, 0 < r < d(a, \partial\Omega), f \in \mathcal{O}(\Omega)$, sia $c_n(f) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, allora $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)(z-a)^n$ in $\overline{D(a,r)}$. Inoltre, se $\|f\|_{\overline{D(a,r)}} \leq M$, allora per le disuguaglianze di Cauchy $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{r^n}$ per ogni $n \geq 0$. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$. Per ipotesi, esiste M t.c. $\|f_n\|_{\overline{D(a,r)}} \leq M$ per ogni $n \Rightarrow |c_0(f_n)| \leq M$ per ogni $n \Rightarrow$ esiste una sottosuccessione $c_0(f_{n_j^{(0)}})$ che tende a $c_0 \in \mathbb{C}$. Per induzione, da $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(k)}}\}$ t.c. $c_k(f_{n_j^{(k)}}) \to c_k \in \mathbb{C}$. Consideriamo $\{f_{n_j^{(j)}}\}$, allora $c_k(f_{n_j^{(j)}}) \to c_k \in \mathbb{C}$ per ogni k. Sia $f_{\nu_j} = f_{n_j^{(j)}}$. Poniamo $D_a = \overline{D(a, r/2)}$ e sia $z \in D_a$. Vogliamo $f_{\nu_j} \to f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ in D_a. Basta vedere che f_{ν_j} è di Cauchy uniformemente in D_a. $|f_{\nu_h}(z) - f_{\nu_k}(z)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n = \sum_{n=0}^{N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n + \sum_{n>N} |c_n(f_{\nu_h}) -$

$c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n$. Sappiamo che $|c_n(f_{\nu_k})| \leq \frac{M}{r^n}$ e $z \in D_a \Rightarrow |z-a| \leq \frac{r}{2}$. Allora $\sum_{n>N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n \leq \sum_{n>N} \frac{2M}{r^n}\left(\frac{r}{2}\right)^n = \frac{M}{2^{N-1}}$. $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\frac{r}{2}\right)^n$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $N >> 1$ t.c. $\frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon/2$ e n_0 t.c. per ogni $h,k \geq n_0, |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\frac{r}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$ (possiamo farlo, una volta fissato N, perché gli n tra 0 e N sono in numero finito e le successioni $c_n(f_{\nu_j})$ convergono, dunque si sceglie un indice per ogni successione e si prende come n_0 il massimo di questi indici). Mettendo insieme le disuguaglianze si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 t.c. per ogni $h,k \geq n_0$ e per ogni $z \in D_a$, $|f_{\nu_k}(z) - f_{\nu_k}(z)| < \varepsilon$, dunque la sottosuccessione f_{ν_j} è di Cauchy e converge uniformemente su D_a. Deve convergere a f perché, per il teorema di Weierstrass, le derivate convergono al valore della derivata limite, e questo ci dice che i coefficienti della serie della funzione limite sono proprio quelli di f.
Ω è a base numerabile, dunque possiamo estrarre un sottoricoprimento numerabile da $\{D_a | a \in \Omega\}$. Sia dunque $\{a_j\} \subseteq \Omega$ t.c. $\bigcup_j D_{a_j} = \Omega$. Per quanto dimostrato finora, possiamo estrarre da $\{f_n\}$ una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(0)}}\}$ convergente uniformemente in D_{a_0}. Per induzione, da $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$ estraiamo una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(k)}}\}$ convergente uniformemente in $D_{a_0} \cup \cdots \cup D_{a_k}$. Prendiamo $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ che converge uniformemente in ogni D_{a_k}. Adesso, ogni compatto è coperto da un numero finito di D_{a_k}, quindi (scegliendo per ogni ε il massimo degli indici t.c. le cose che vogliamo valgono in quei D_{a_k}) $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ converge uniformemente sui compatti. $\square$

Teorema 2.2.3. (Vitali) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $A \subseteq \Omega$ con almeno un punto di accumulazione in Ω. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ uniformemente limitata sui compatti. Supponiamo che, per ogni $a \in A$, $\{f_n(a)\}$ converge (cioe f_n converge puntualmente). Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f$ uniformemente sui compatti di Ω.

Dimostrazione. Facciamola per assurdo. Supponiamo che esistono $K \subset\subset \Omega$, $\{n_k\}, \{m_k\} \subset \mathbb{N}, \{z_k\} \subset K, \delta > 0$ t.c. $|f_{n_k}(z_k) - f_{m_k}(z_k)| \geq \delta$. A meno di sottosuccessioni, $z_k \to z_0 \in K$. Per il teorema di Montel, a meno di sottosuccessioni $f_{n_k} \to g_1 \in \Omega$ e $f_{m_k} \to g_2 \in \Omega$ con $|g_1(z_0) - g_2(z_0)| \geq \delta$ (passando al limite). Per ipotesi, $g_1(a) = g_2(a)$ per ogni $a \in A$. Per il principio di identità, $g_1 \equiv g_2$, assurdo. $\square$

Teorema 2.2.4. (Sviluppo di Laurent) Siano $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, $A(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\}$. Sia $f \in \mathcal{O}(A(r_1, r_2))$, allora $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ e converge uniformemente e assolutamente sui compatti di $A(r_1, r_2)$. In particolare, se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ in $\{0 < |z-a| < r\} \subset \Omega$.

Corollario 2.2.5. (Teorema di estensione di Riemann) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ si estende olomorficamente ad $a \Leftrightarrow \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$.

Dimostrazione. Per lo sviluppo di Laurent, $(z-a)f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+1} \to 0 \Leftrightarrow c_n = 0$ per ogni $n \leq -1$. $\square$

Teorema 2.2.6.

(i) $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega_1)$ biettiva $\Rightarrow f^{-1}$ è olomorfa e f' non si annulla mai;
(ii) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ è iniettiva vicino a z_0.

Dimostrazione. (i) Per il teorema dell'applicazione aperta, f è aperta $\Rightarrow f$ omeomorfismo. $g = f^{-1}$. Sia $w_0 \in \Omega_1$ t.c. $f'(g(w_0)) \neq 0$. Allora

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

Quindi g è olomorfa in $\Omega_1 \setminus f(\{f' = 0\})$. Per il corollario 2.1.7 $\{f' = 0\}$ è discreto in Ω. f omeomorfismo $\Rightarrow f(\{f' = 0\})$ discreto in Ω_1. Ma g è continua (quindi localmente limitata) in Ω_1, dunque per il teorema di estensione di Riemann $g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$. $(f' \circ g) g' \equiv 1$ su $\Omega_1 \setminus f(\{f' = 0\}) \Rightarrow$ vale su $\Omega_1 \Rightarrow f' \circ g \neq 0$ sempre.

(ii) Possiamo supporre $z_0 = 0$. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Per ipotesi, $c_1 \neq 0$.

$f(z) - f(w) = c_1(z - w) + (z - w) \sum_{n=2}^{+\infty} c_n \sum_{k=1}^{n} w^{k-1} z^{n-k}$.

$|f(z) - f(w)| \geq |c_1||z - w| - |z - w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n} |w|^{k-1} |z|^{n-k}$.

Prendiamo $z, w \in D(0, r)$, allora

$|c_1||z - w| - |z - w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n} |w|^{k-1} |z|^{n-k} \geq$

$\geq |c_1||z-w| - |z-w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1} = (|c_1| - \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1})|z-w|$. Scegliamo r t.c. $\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1} \leq \frac{|c_1|}{2}$, allora $(|c_1| - \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1})|z-w| \geq \frac{|c_1|}{2}|z-w|$. Dato che $c_1 \neq 0$, si ha quindi (concatenando le disuguaglianze) che $z \neq w \Rightarrow |f(z) - f(w)| \geq \frac{|c_1|}{2}|z-w| > 0 \Rightarrow f(z) \neq f(w)$.

□

Definizione 2.2.7. Se $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ è olomorfa e biettiva (quindi con inversa olomorfa per il teorema 2.2.6) si chiama BIOLOMORFISMO.

Definizione 2.2.8. $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ è un BIOLOMORFISMO LOCALE se ogni $a \in \Omega_1$ ha un intorno $U \ni a$ t.c. $f|_U : U \to f(U)$ è un biolomorfismo.

Per il teorema 2.2.6, f è un biolomorfismo locale se e solo se f' non si annulla mai.

Definizione 2.2.9. Sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ in $D^* = D(a,r) \setminus \{a\}$. $ord_a(f) := \inf\{n \in \mathbb{Z} | c_n \neq 0\}$ è detto ORDINE DI f IN a. $ord_a(f) \geq 0 \Leftrightarrow f$ è olomorfa in a. Se $0 > ord_a(f) > -\infty$ diremo che a è un POLO di f. Se $ord_a = -\infty$ a è una SINGOLARITÀ ESSENZIALE.

Teorema 2.2.10. (Casorati-Weierstrass) Se a è una singolarità essenziale, $f(D^*)$ è denso in $\mathbb{C}$.

Definizione 2.2.11. $c_{-1} =: res_f(a)$ è detto RESIDUO DI f IN a.

Osservazione 2.2.12. $\gamma(t) = a + \rho e^{2\pi i t}, 0 < \rho < r$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_\gamma (z-a)^n \, \mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^1 \rho^n e^{2\pi i n t} \rho 2\pi i e^{2\pi i t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \rho^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i (n+1) t} \, \mathrm{d}t = c_{-1}.$$

Proposizione 2.2.13. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto, $D \subset\subset \Omega$ disco chiuso t.c. $E \cap \partial D = \varnothing$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$. Allora $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f \, \mathrm{d}z = \sum_{a \in D \cap E} res_f(a)$.

Dimostrazione. Traccia: si tratta di applicare una versione leggermente più forte del teorema di Cauchy-Goursat+Morera, prendendo per ogni punto di E un dischetto tutto contenuto in D che lo isoli dagli altri (qui si usa che E è discreto) e considerare la regione D meno quei dischetti. Il bordo di questa regione è considerato il bordo di D meno il bordo dei dischetti. A questo punto l'integrale lungo questo bordo può essere approssimato con l'integrale di cammini che via via lo approssimano, i quali fanno tutti 0 per la versione forte del teorema di C-G+M, dunque l'integrale sul bordo di D meno l'integrale sul bordo dei dischetti (occhio al verso di percorrenza di uno e degli altri!) deve essere uguale a 0. Per l'osservazione 2.2.12 si ha la tesi. $\square$