

Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Il lemma di Schwarz-Pick

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Il lemma di Schwarz-Pick

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Osservazione

Se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$.

Il lemma di Schwarz-Pick

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Osservazione

Se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$.

Dal lemma, si ha che la quantità $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$ è contratta dalle funzioni in $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. A partire da essa è possibile definire una distanza sul disco.

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Per stretta crescenza della tangente iperbolica, in termini di ω il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w).$$

Vale l'uguaglianza in qualche caso se e solo se $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$; in tal caso c'è sempre l'uguaglianza.

Definizione

Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Definizione

Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Derivata e rapporto iperbolici

Definizione

Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Fissato $w \in \mathbb{D}$, la funzione $z \mapsto f^*(z, w)$ è olomorfa sul disco unitario. Se $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora $f^*(\cdot, w) \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

Definizione

Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice σ e angolo 2α* l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α .

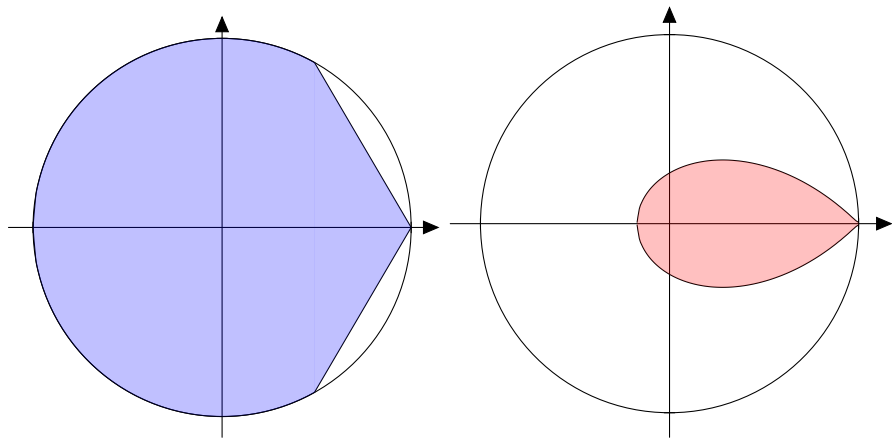
Definizione

Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice σ e angolo 2α* l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α .

Definizione

Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz $K(\sigma, M)$* l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.

regioni di Stolz e settori



A sinistra, il settore $S(1, 2\pi/3)$; a destra, la regione di Stolz $K(1, 2)$.

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.

Possiamo scrivere $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$.

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.

Possiamo scrivere $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$. Se $z \in K(1, M)$, da

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)}$$

Relazione tra regioni di Stolz e settori

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.

Possiamo scrivere $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$. Se $z \in K(1, M)$, da

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)}$$

troviamo

$$\frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{M^2 - 1} = \tan \alpha;$$

questo mostra la seconda inclusione.

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: sia $\alpha' < \alpha$ e supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$.

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: sia $\alpha' < \alpha$ e supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$. Si ha allora

$$\frac{1 - |z|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{M} \text{ e } \frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \tan \alpha'. \quad (1)$$

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: sia $\alpha' < \alpha$ e supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$. Si ha allora

$$\frac{1 - |z|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{M} \text{ e } \frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \tan \alpha'. \quad (1)$$

Dalla seconda disuguaglianza in (1) si ottiene

$$\frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} =: M' < M; \quad (2)$$

moltiplicando la (2) per la prima disuguaglianza della (1) troviamo

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$.

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$. Tuttavia, ponendo $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$ e riscrivendo la condizione $z \in S(1, \alpha')$ come $y/(1 - x) < \tan \alpha'$,

Proposizione

Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione: $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$. Tuttavia, ponendo $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$ e riscrivendo la condizione $z \in S(1, \alpha')$ come $y/(1 - x) < \tan \alpha'$, vediamo facilmente che

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1, \\ z \in S(1, \alpha')}} \frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} - 1 = 0,$$

da cui otteniamo una contraddizione. □

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Limiti non tangenziali

Definizione

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L.$

Definizione

Date tre funzioni $f, g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o(h(z))$ per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

Proposizione

Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2) \quad (2)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente.

Proposizione

Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (1)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2) \quad (2)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.

Consideriamo $z \in K(1, M) \subset S(1, \alpha)$, dove $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1}$.

Fissato $\beta > \alpha$, scriviamo $r(z) = \text{dist}(z, \partial S(1, \beta))$ e $C(z) = \partial B(1, r(z))$.

Dalla formula integrale di Cauchy applicata alla funzione $f(z) - z$ otteniamo

Limiti non tangenziali

Traccia della dimostrazione:

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z).$$

Traccia della dimostrazione:

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w) - w| \leq \varepsilon|1 - w|^3$ per $w \in C(z)$, con $z \in K(1, M) \cap B(1, \delta/2)$. Si ottiene

$$|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3.$$

Limiti non tangenziali

Traccia della dimostrazione:

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w) - w| \leq \varepsilon|1 - w|^3$ per $w \in C(z)$, con $z \in K(1, M) \cap B(1, \delta/2)$. Si ottiene

$$|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3.$$

Da considerazioni geometriche si ha $|I(z)| \leq \varepsilon|z - 1|^2(1 + \csc(\beta - \alpha))^3$, da cui $f'(z) = 1 + o((z - 1)^2)$. Inoltre, dalle ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z - 1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z - 1)^2).$$

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Definizione

Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Notiamo che $\mathcal{B}_1 = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposizione

Valgono le seguenti:

- (i) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(\cdot, w) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{D}$ fissato;*
- (ii) *se $f \in \mathcal{B}_2$ allora $f^*(R_f(w), w)$, dove R_f è la rotazione attorno al punto in cui f ha molteplicità doppia.*

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (1)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (1)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Lemma di Schwarz-Pick a tre punti

Teorema

(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (1)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Traccia della dimostrazione: basta applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(\cdot, v)$. □

Osservazione

Se $f(0) = 0$ troviamo $\omega(f(z)/z, f'(0)) \leq \omega(z, 0)$. Il disco di centro $f'(0)$ e raggio $\omega(z)$ è, in generale, strettamente contenuto in \mathbb{D} .

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v))$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \end{aligned}$$

Lemma di Schwarz-Pick a quattro punti

Teorema

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (2)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(w, z) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(w, z) \\ &\leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(u, v) + \omega(w, z). \end{aligned}$$



Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo $u = w$ nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che $\frac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$ e $\frac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$, otteniamo il seguente:

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo $u = w$ nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che $\frac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$ e $\frac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$, otteniamo il seguente:

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e siano $z, w \in \mathbb{D}$. Sia σ una geodetica con $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$ e sia $w = \sigma(t)$ con $t_1 < t < t_2$. Allora

$$2\omega(f(z), f(v)) \leq \log\left(\cosh(2\omega(z, v)) + |f^h(w)| \sinh(2\omega(z, v))\right). \quad (3)$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Prendendo $u = w$ nel lemma di Schwarz-Pick a quattro punti e usando che $\frac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega)$ e $\frac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega)$, otteniamo il seguente:

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e siano $z, w \in \mathbb{D}$. Sia σ una geodetica con $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$ e sia $w = \sigma(t)$ con $t_1 < t < t_2$. Allora

$$2\omega(f(z), f(v)) \leq \log\left(\cosh(2\omega(z, v)) + |f^h(w)| \sinh(2\omega(z, v))\right). \quad (3)$$

Osservazione

Poiché $|f^*| \leq 1$, anche $|f^h| \leq 1$; per stretta crescita del logaritmo, otteniamo che la disuguaglianza (3) è un altro miglioramento rispetto al lemma di Schwarz-Pick.

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Traccia della dimostrazione:

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right)$$

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \end{aligned}$$

Conseguenze dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Corollario

Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (4)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di R_f .

Traccia della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \\ &= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w). \end{aligned}$$



Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (5)$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (5)$$

Traccia della dimostrazione: prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (5)$$

Traccia della dimostrazione: prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

da cui

$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.$$

Teorema

(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (5)$$

Traccia della dimostrazione: prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (4) otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

da cui

$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.$$

La disuguaglianza di Golusin segue da rimaneggiamenti algebrici. 

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (6)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (6)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Teorema di Bracci-Kraus-Roth

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (6)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

Teorema

(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (6)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. La disuguaglianza di Golusin si riscrive come

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq (1 - |z_n|)^2.$$

Poiché $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per Schwarz-Pick $|f^h(0)| < 1$ e dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty. \quad \square$$

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$.

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziale segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2).$$

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Traccia della dimostrazione: senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione sui limiti non tangenziale segue che

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2).$$

Per il teorema di Bracci-Kraus-Roth, $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$; per ipotesi dev'essere $f(1) = 1$ e $f''(1) = 0$, perciò $f(z) = z$. □

Teorema di Burns-Krantz

Teorema

(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (7)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Esempio

Se $f(z) = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$, si ha $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - z}{(z - 1)^3} = -\frac{1}{4}$; dunque il termine $o((z - \sigma)^3)$ nel teorema di Burns-Krantz non è migliorabile.