Appunti di Elementi di Analisi Complessa

Marco Vergamini

Indice

1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Elementi di Analisi Complessa tenuto dal professor Marco Abate nel secondo semestre dell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) analisi in più variabili, topologia, concetto di gruppo fondamentale e le basi di analisi complessa in più variabili, che si vedono nei corsi Analisi 2 e Geometria 2. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc.... Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia...), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali...insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

2 Funzioni olomorfe

2.1 Notazioni e prerequisiti

Notazioni: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ indica un numero complesso, $\bar{z} = x - iy$ il suo complesso coniugato. Con il termine *dominio* si intende un aperto connesso. $\mathcal{O}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f \text{ è olomorfa}\}$. $\mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2) = \{f : \Omega_1 \to \Omega_2 | f \text{ è olomorfa}\}$.
$\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.
$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y, \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y, \mathrm{d}z\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = 1, \mathrm{d}z\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 0.$

Daremo ora una definizione di funzione olomorfa basata su quattro definizioni, l'equivalenza delle quali è un prerequisito del corso e dovrebbe essere quindi nota agli studenti.

Definizione 2.1.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, $f : \Omega \in \mathbb{C}$ si dice OLOMORFA se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

(i) f è $\mathbb{C}$-*differenziabile*, cioè per ogni $a \in \Omega$ esiste $f'(a) = \lim\limits_{z \to a} = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$;

(ii) f è *analitica*, cioè per ogni $a \in \Omega$ esiste $U \subseteq \Omega$ aperto e intorno di a e $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ t.c. per ogni $z \in U$ $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$;

(iii) f è *olomorfa*, cioè f è continua, $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$ esistono su Ω e $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ (equazione di Cauchy-Riemann). Si noti che la condizione è $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, da cui si ricava $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'$;

(iv) f è continua e per ogni rettangolo (o disco) chiuso $D \subseteq \Omega$ si ha $\displaystyle\int_{\partial D} f \, \mathrm{d}z = 0$ (teorema di Cauchy-Goursat+Morera).

La seguente proposizione è anch'essa un risultato che dovrebbe essere noto agli studenti che seguono il corso.

Proposizione 2.1.2. Sia $\{c_n\} \in \mathbb{C}$. Allora:

(i) esiste $R \in [0, +\infty]$ t.c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ converge per $|z| < R$ e diverge per $|z| > R$. R è detto *raggio di convergenza*. La convergenza +è uniforme su $\Delta_r = \{|z| \leq r\}, r < R$. $\limsup\limits_{n \to +\infty} |c_n|^{1/n} = \dfrac{1}{R}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n c_n z^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza;

(iii) se $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ allora $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$;

(iv) se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $a \in \Omega$, allora $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$. Questa formula è valida nel più grande disco aperto centrato in a e contenuto in Ω, cioè di raggio minore o uguale di $d(a, \partial\Omega)$.

Teorema 2.1.3. (Formula di Cauchy) Sia Ω aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega), D \subseteq \Omega$ disco/rettangolo chiuso. Per ogni $a \in D, f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\zeta}{\zeta - a} \mathrm{d}\zeta$. Si ha che $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$.

Corollario 2.1.4. (Disuguaglianze di Cauchy) $f \in \mathcal{O}(\Omega), D = D(a,r) \subseteq \Omega$ disco di centro $a \in \Omega$ e raggio $r > 0$. Sia $M = \max_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)|$. Allora per ogni $n \geq 1, |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M$.

Corollario 2.1.5. (Teorema di Liouville) Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ limitata. Allora f è costante.

Dimostrazione. Le disuguaglianze di Cauchy danno, per ogni $r > 0$, $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$ dove $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < +\infty \Rightarrow f' \equiv 0$. □

Teorema 2.1.6. (Principio di identità o del prolungamento analitico) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\{z \in \Omega | f(z) = g(z)\}$ ha un punto di accumulazione in Ω, allora $f \equiv g$.

Corollario 2.1.7. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla, allora $\{z \in \Omega | f(z) = 0\}$ è discreto in Ω.

Teorema 2.1.8. (Principio del massimo) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora:

(i) se U è aperto e $U \subset\subset \Omega$ (si legge "U relativamente compatto in Ω" e si intende $\overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ compatto) allora $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$. Inoltre, se $|f|$ ha un massimo locale in U, allora f è costante in Ω;

(ii) la stessa affermazione vale per $\mathfrak{Re} f$ e $\mathfrak{Im} f$;

(iii) se Ω è limitato poniamo $M = \sup_{x \in \partial D} \limsup_{z \to x} |f(z)| \in [0, +\infty]$. Allora per ogni $z \in \Omega$ $|f(z)| \leq M$ con uguaglianza in un punto se e solo se f è costante.

Esempio 2.1.9. Controesempio per vedere che serve Ω limitato per il punto (iii) del teorema 2.1.8: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re} z > 0\}, f(z) = e^z$. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(\Omega)$. $z \in \partial\Omega \Rightarrow z = iy \Rightarrow |f(iy)| = |e^{iy}| = 1$, ma f è illimitata in Ω. Per correggere questa cosa si aggiunge il punto all'infinito.

Teorema 2.1.10. (Applicazione aperta) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante $\Rightarrow f$ è un'applicazione aperta.