Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

2* Aprile 2022

Scuola Normale Superiore di Pisa
Colloquio IV Anno

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$.

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial\rho^2}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \Omega$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$.

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial \rho^2}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \Omega$.

Nel seguito, lavoriamo sempre sotto l'ipotesi che Ω sia strettamente pseudoconvesso.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$, data $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa indichiamo con $Df(z)$ il differenziale di f in $z \in \mathbb{D}$. La *metrica di Kobayashi* su Ω è

$$K(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi* d_K.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ-*iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* è $\partial_G X$ costruito come classe di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim\limits_{i,j\to\infty} (x_i, x_j) = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim\limits_{i\to\infty} (x_i, y_i) = \infty$.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Teorema

(Balogh-Bonk) (Ω, d_K) è Gromov iperbolico, e il bordo iperbolico $\partial_G \Omega$ può essere identificato con il bordo euclideo $\partial\Omega$. Inoltre, la distanza di Carnot-Carathéodory d_H su $\partial\Omega$ (quella indotta dalla forma di Levi) sta nella classe canonica di distanze su $\partial_G X$, cioè esiste $\varepsilon > 0$ tale che $d_H(a, b) \asymp \exp\big((a, b)_w\big)$ per ogni $a, b \in \partial_G X$.

Devo trovare un modo rapido di riassumere la proposizione 5.3, con tutte le definizioni e conseguenze (compresi i corollari 6.1 e 6.2).

Conseguenze: dinamica olomorfa

Definizione

Un *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ è
$E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}$.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Definizione

Un *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ è
$E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}$.

Detta ω la distanza iperbolica su $\mathbb{D}$, si ha
$E(\tau, R) = \{ z \in \mathbb{D} \mid \lim_{w \to \tau} \big(\omega(z, w) - \omega(0, w) \big) < \frac{1}{2} \log R \}$.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Definizione

Un *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ è
$E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}$.

Teorema

(Wolff) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che per ogni $R > 0$ vale che $f\big(E(\tau, R)\big) \subseteq E(\tau, R)$.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Definizione

Un *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ è
$E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}$.

Teorema

(Wolff) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che per ogni $R > 0$ vale che $f\big(E(\tau, R)\big) \subseteq E(\tau, R)$.

Teorema

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \longrightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi iperbolici (è vera quest'affermazione?), valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi iperbolici (è vera quest'affermazione?), valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.
Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che i biolomorfismi sono delle isometrie rispetto a d_K, si ottengono delle generalizzazioni dei teoremi di Wolff e Wolff-Denjoy per i domini strettamente pseudoconvessi.