

# Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

2\* Aprile 2022



Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$  un dominio limitato con bordo  $C^2$ , cioè esiste  $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$  tale che  $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$  e  $d\rho \neq 0$  in ogni punto di  $\partial\Omega$ . Come  $\rho$  si può prendere  $-\delta(x)$  per  $x \in \Omega$  e  $\delta(x)$  per  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$ , dove  $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ .

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

## Definizione

Dato  $p \in \partial\Omega$ , lo *spazio tangente complesso* a  $\partial\Omega$  in  $p$  è  $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$ . Diciamo che  $\Omega$  è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in  $H_p\partial\Omega$  per ogni  $p \in \partial\Omega$ .

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

## Definizione

Dato  $p \in \partial\Omega$ , lo *spazio tangente complesso* a  $\partial\Omega$  in  $p$  è  $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$ . Diciamo che  $\Omega$  è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in  $H_p\partial\Omega$  per ogni  $p \in \partial\Omega$ .

Nel seguito, lavoriamo sempre sotto l'ipotesi che  $\Omega$  sia strettamente pseudoconvesso.

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

## Definizione

Sia  $\mathbb{D}$  il disco unitario in  $\mathbb{C}$ , data  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$  olomorfa indichiamo con  $Df(z)$  il differenziale di  $f$  in  $z \in \mathbb{D}$ . La *metrica di Kobayashi* su  $\Omega$  è

$$K(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi*  $d_K$ .

# Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

## Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y \in X$  il *prodotto di Gromov* con punto base  $w$  è  $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$ . Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

# Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

## Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y \in X$  il *prodotto di Gromov* con punto base  $w$  è  $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$ . Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -*iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato  $w \in X$ , il *bordo iperbolico*  $\partial_G X$  è costruito come classe di equivalenza delle successioni  $(x_i)$  che convergono a infinito, cioè tali che  $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i, x_j)_w = \infty$ ; due tali successioni  $(x_i), (y_i)$  sono equivalenti se  $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, y_i)_w = \infty$ . %Implica che stanno a distanza limitata (per i raggi geodetici)? Non riesco a dimostrarlo

# Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

## Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y \in X$  il *prodotto di Gromov* con punto base  $w$  è  $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$ . Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -*iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se  $x, y \in \partial_G X$  e  $z \in X$ , poniamo

$$(x, y)_w = \sup \left\{ \liminf_{i \rightarrow +\infty} (x_i, y_i)_w \mid (x_i) \in x, (y_i) \in y \right\},$$
$$(x, z)_w = \sup \left\{ \liminf_{i \rightarrow +\infty} (x_i, z)_w \mid (x_i) \in x \right\}.$$



# Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

## Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y \in X$  il *prodotto di Gromov* con punto base  $w$  è  $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$ . Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -*iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

## Teorema (Balogh-Bonk, 2001)

$(\Omega, d_K)$  è Gromov iperbolico, e il bordo iperbolico  $\partial_G \Omega$  può essere identificato con il bordo euclideo  $\partial \Omega$ . Inoltre, la distanza di Carnot-Carathéodory  $d_H$  su  $\partial \Omega$  (quella indotta dalla forma di Levi) sta nella classe canonica di distanze su  $\partial_G X$ , cioè esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $d_H(a, b) \asymp \exp((a, b)_w)$  per ogni  $a, b \in \partial_G X$ .

## Corollario

*Siano  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$  che soddisfano le ipotesi del teorema di Balogh-Bonk, e sia  $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  una funzione olomorfa propria. Allora  $f$  si estende con continuità a  $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \longrightarrow \bar{\Omega}_2$  tale che  $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$  e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.*

## Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

*(Wolff-Denjoy) Sia  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $f^k \longrightarrow \tau$  uniformemente sui compatti.*

## Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

*(Wolff-Denjoy) Sia  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $f^k \rightarrow \tau$  uniformemente sui compatti.*

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé. %L'assioma 1 del paper è soddisfatto da tutti gli spazi iperbolici? Mi pare che sia soddisfatto dai nostri domini

## Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

*(Wolff-Denjoy) Sia  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $f^k \rightarrow \tau$  uniformemente sui compatti.*

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé. %L'assioma 1 del paper è soddisfatto da tutti gli spazi iperbolici? Mi pare che sia soddisfatto dai nostri domini

Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a  $d_K$ , si ottiene una generalizzazione del teorema di Wolff-Denjoy per domini strettamente pseudoconvessi.

# Conseguenze: dinamica olomorfa

## Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

*(Wolff-Denjoy) Sia  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $f^k \rightarrow \tau$  uniformemente sui compatti.*

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé. %L'assioma 1 del paper è soddisfatto da tutti gli spazi iperbolici? Mi pare che sia soddisfatto dai nostri domini

Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a  $d_K$ , si ottiene una generalizzazione del teorema di Wolff-Denjoy per domini strettamente pseudoconvessi.

## Corollario (Abate, 1991)

*Sia  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  una funzione olomorfa. Allora vale una delle seguenti:*

1. *le orbite di  $f$  sono limitate;*

## Altri risultati: (titolo da decidere)

% L'articolo di Zimmer, messo in contesto, mi pare che ci dica questo: se si paga il prezzo di aggiungere l'ipotesi di convessità, guadagnando però che il bordo non è più necessariamente liscio, si ottengono risultati analoghi a quelli delle precedenti conseguenze. Questi però non sono conseguenze di Balogh-Bonk, ma mostrano come l'iperbolicità è utile per risultati di questo tipo.

- Dato  $(Z, d)$  spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico  $(\text{Con}(Z), r)$  tale che  $Z$  è identificato con il bordo.



# Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato  $(Z, d)$  spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico  $(\text{Con}(Z), r)$  tale che  $Z$  è identificato con il bordo.
- Per una metrica che soddisfa certe ipotesi, la distanza indotta differisce per una costante da una funzione  $g$  simile alla  $r$  della suddetta costruzione; questo ci permette di dire che  $\Omega$  con tale distanza è iperbolico.

# Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato  $(Z, d)$  spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico  $(\text{Con}(Z), r)$  tale che  $Z$  è identificato con il bordo.
- Per una metrica che soddisfa certe ipotesi, la distanza indotta differisce per una costante da una funzione  $g$  simile alla  $r$  della suddetta costruzione; questo ci permette di dire che  $\Omega$  con tale distanza è iperbolico.
- La metrica di Kobayashi soddisfa le suddette ipotesi.

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

## Teorema

*Sia  $(Z, d)$  uno spazio metrico completo e limitato, e sia  $\text{Con}(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$ , dove  $D(Z)$  è il diametro di  $Z$ . La funzione  $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$  data da*

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left( \frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

*è una distanza su  $\text{Con}(Z)$  che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con  $Z$ . Inoltre, per ogni  $x, y \in Z$  si ha*

$$d(x, y) \asymp \exp \left( - (x, y)_w \right).$$

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

## Teorema

*Sia  $(Z, d)$  uno spazio metrico completo e limitato, e sia  $\text{Con}(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$ , dove  $D(Z)$  è il diametro di  $Z$ . La funzione  $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$  data da*

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left( \frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

*è una distanza su  $\text{Con}(Z)$  che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con  $Z$ . Inoltre, per ogni  $x, y \in Z$  si ha*

$$d(x, y) \asymp \exp \left( - (x, y)_w \right).$$

*Traccia della dimostrazione:* è facile verificare che  $r$  è una distanza.

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

## Teorema

*Sia  $(Z, d)$  uno spazio metrico completo e limitato, e sia  $\text{Con}(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$ , dove  $D(Z)$  è il diametro di  $Z$ . La funzione  $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$  data da*

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left( \frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

*è una distanza su  $\text{Con}(Z)$  che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con  $Z$ . Inoltre, per ogni  $x, y \in Z$  si ha*

$$d(x, y) \asymp \exp \left( - (x, y)_w \right).$$

*Traccia della dimostrazione:* è facile verificare che  $r$  è una distanza. Dati  $r_{ij} \geq 0$  per  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tali che  $r_{ij} = r_{ji}$  e  $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$ , allora  $r_{12}r_{34} \leq 4(\max\{(r_{13}r_{24}), (r_{14}r_{23})\})$ .

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Siano  $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$  per  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , poniamo  $d_{ij} = d(z_i, z_j)$  e  $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$ .

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Siano  $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$  per  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , poniamo  $d_{ij} = d(z_i, z_j)$  e  $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$ . Segue che

$$\begin{aligned} & (d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ & \leq 4 \left( ((d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\})) \right. \\ & \quad \left. \times ((d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})) \right), \end{aligned}$$

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Siano  $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$  per  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , poniamo  $d_{ij} = d(z_i, z_j)$  e  $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$ . Segue che

$$\begin{aligned} & (d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ & \leq 4 \left( ((d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\})) \right. \\ & \quad \left. \times ((d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})) \right), \end{aligned}$$

che ci dà

$$r(x_1, x_2) + r(x_3, x_4) \leq (r(x_1, x_3) + r(x_2, x_4))(r(x_1, x_4) + r(x_2, x_3)) + C,$$

da cui segue l'iperbolicità di  $(\text{Con}(Z), r)$ .



# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z, h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z, h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza  $(x_i)$  in  $(\text{Con}(Z), r)$  converge a infinito se e solo se la sequenza  $(z_i)$  è di Cauchy e  $h_i \rightarrow 0$ ; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito.

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z, h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza  $(x_i)$  in  $(\text{Con}(Z), r)$  converge a infinito se e solo se la sequenza  $(z_i)$  è di Cauchy e  $h_i \rightarrow 0$ ; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo  $Z$  completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$ .

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z, h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza  $(x_i)$  in  $(\text{Con}(Z), r)$  converge a infinito se e solo se la sequenza  $(z_i)$  è di Cauchy e  $h_i \rightarrow 0$ ; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo  $Z$  completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$ .

La disuguaglianza finale non è difficile, ma richiede un po' di passaggi che non vedremo.

# Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z, h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza  $(x_i)$  in  $(\text{Con}(Z), r)$  converge a infinito se e solo se la sequenza  $(z_i)$  è di Cauchy e  $h_i \rightarrow 0$ ; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo  $Z$  completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$ .

La disuguaglianza finale non è difficile, ma richiede un po' di passaggi che non vedremo. Mettendo su  $\text{Con}(Z) \cup \partial_G \text{Con}(Z)$  un'opportuna topologia, dalla disuguaglianza segue anche che  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$  sono identificati come spazi topologici. □

## Definizione

Una *metrica di Finsler* su  $\Omega$  è una funzione continua  $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$  tale che  $F(x; tZ) = |t|F(x; Z)$  per ogni  $x \in \Omega, Z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}$ .

## Definizione

Una *metrica di Finsler* su  $\Omega$  è una funzione continua  $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$  tale che  $F(x; tZ) = |t|F(x; Z)$  per ogni  $x \in \Omega, Z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}$ .

Poniamo anche

$$g(x, y) = 2 \log \left( \frac{d_H(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta(x)^{1/2}, \delta(y)^{1/2}\}}{\sqrt{\delta(x)^{1/2} \delta(y)^{1/2}}} \right).$$

## Teorema

*Sia  $F$  una metrica di Finsler su  $\Omega$  tale che esistono delle costanti  $\varepsilon_0 > 0, s > 0, C_1 > 0, C_2 \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha*

$$\begin{aligned} (1 - C_1 \delta^s(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1/C_2) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq F(x; Z) \\ &\leq (1 + C_1 \delta^s(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + C_2 \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$



## Teorema

*Sia  $F$  una metrica di Finsler su  $\Omega$  tale che esistono delle costanti  $\varepsilon_0 > 0, s > 0, C_1 > 0, C_2 \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha*

$$\begin{aligned} (1 - C_1 \delta^s(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1/C_2) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq F(x; Z) \\ &\leq (1 + C_1 \delta^s(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + C_2 \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

*Allora esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  vale*

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

## Teorema

*Allora esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  vale*

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

## Teorema

Allora esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  vale

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

*Idea della dimostrazione:* per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

## Teorema

Allora esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  vale

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

*Idea della dimostrazione:* per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.  
Per la minorazione, bisogna mostrare che le curve trovate sono ottimali.

## Proposizione

*Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha*

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

## Proposizione

*Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha*

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Traccia della dimostrazione:* si localizza a un intorno di un punto del bordo;

## Proposizione

Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Traccia della dimostrazione:* si localizza a un intorno di un punto del bordo;

con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in  $\mathbb{C}^n$ ;

## Proposizione

Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Traccia della dimostrazione:* si localizza a un intorno di un punto del bordo;

con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in  $\mathbb{C}^n$ ;

stringendo l'immagine del biolomorfismo tra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene, seguono le stime volute.  $\square$



# La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

## Proposizione

*Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha*

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

## Corollario

*Esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  si ha*

$$g(x, y) - C \leq d_K(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (3)$$

# Dimostrazione dell'estensione al bordo

*Traccia della dimostrazione:* siano  $d_1, d_2$  le metriche di Kobayashi su  $\Omega_1, \Omega_2$ , allora per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

# Dimostrazione dell'estensione al bordo

*Traccia della dimostrazione:* siano  $d_1, d_2$  le metriche di Kobayashi su  $\Omega_1, \Omega_2$ , allora per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché  $f$  è propria esiste  $C_1 \geq 1$  tale che per ogni  $x \in \Omega_1$  abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2(f(x)) \leq C_1 \delta_1(x),$$

dove  $\delta_j$  è la distanza dal bordo in  $\Omega_j$ .

# Dimostrazione dell'estensione al bordo

*Traccia della dimostrazione:* siano  $d_1, d_2$  le metriche di Kobayashi su  $\Omega_1, \Omega_2$ , allora per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché  $f$  è propria esiste  $C_1 \geq 1$  tale che per ogni  $x \in \Omega_1$  abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2(f(x)) \leq C_1 \delta_1(x),$$

dove  $\delta_j$  è la distanza dal bordo in  $\Omega_j$ . Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette  $d_H^j$  le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste  $C_2 \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_H^2(\pi(f(x)), \pi(f(y))) \leq C_2 \left( d_H^1(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\} \right).$$

# Dimostrazione dell'estensione al bordo

*Traccia della dimostrazione:* siano  $d_1, d_2$  le metriche di Kobayashi su  $\Omega_1, \Omega_2$ , allora per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché  $f$  è propria esiste  $C_1 \geq 1$  tale che per ogni  $x \in \Omega_1$  abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2(f(x)) \leq C_1 \delta_1(x),$$

dove  $\delta_j$  è la distanza dal bordo in  $\Omega_j$ . Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette  $d_H^j$  le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste  $C_2 \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_H^2(\pi(f(x)), \pi(f(y))) \leq C_2 \left( d_H^1(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\} \right).$$

Da queste disuguaglianze è facile concludere. □

Grazie per l'attenzione!