Appunti di Elementi di Analisi Complessa

Marco Vergamini

Indice

Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Elementi di Analisi Complessa tenuto dal professor Marco Abate nel secondo semestre dell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) analisi in più variabili, topologia, concetto di gruppo fondamentale e le basi di analisi complessa in più variabili, che si vedono nei corsi Analisi 2 e Geometria 2. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc.... Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia...), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali...insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

1 Funzioni olomorfe in una variabile

1.1 Notazioni e prerequisiti

Notazioni: $z = x+iy \in \mathbb{C}$ indica un numero complesso, $\bar{z} = x-iy$ il suo complesso coniugato. Con il termine *dominio* si intende un aperto connesso. $\mathcal{O}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} | f \text{ è olomorfa}\}$. $\mathrm{Hol}(\Omega_1, \Omega_2) = \{f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 | f \text{ è olomorfa}\}$.
$\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.
$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y, \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y, \mathrm{d}z\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = 1, \mathrm{d}z\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 0.$

Daremo ora una definizione di funzione olomorfa basata su quattro definizioni, l'equivalenza delle quali è un prerequisito del corso e dovrebbe essere quindi nota agli studenti.

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, $f : \Omega \in \mathbb{C}$ si dice OLOMORFA se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

(i) f è $\mathbb{C}$-*differenziabile*, cioè per ogni $a \in \Omega$ esiste $f'(a) = \lim_{z \longrightarrow a} = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$;

(ii) f è *analitica*, cioè per ogni $a \in \Omega$ esiste $U \subseteq \Omega$ aperto e intorno di a e $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ t.c. per ogni $z \in U$ $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$;

(iii) f è *olomorfa*, cioè f è continua, $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ esistono su Ω e $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ (equazione di Cauchy-Riemann). Si noti che la condizione è $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, da cui si ricava $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'$;

(iv) f è continua e per ogni rettangolo (o disco) chiuso $D \subseteq \Omega$ si ha $\displaystyle\int_{\partial D} f\,\mathrm{d}z = 0$ (teorema di Cauchy-Goursat+Morera).

La seguente proposizione è anch'essa un risultato che dovrebbe essere noto agli studenti che seguono il corso.

Proposizione 1.1.2. Sia $\{c_n\} \in \mathbb{C}$. Allora:

(i) esiste $R \in [0, +\infty]$ t.c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ converge per $|z| < R$ e diverge per $|z| > R$. R è detto *raggio di convergenza*. La convergenza è uniforme su $\Delta_r = \{|z| \leq r\}, r < R$. $\limsup_{n \longrightarrow +\infty} |c_n|^{1/n} = \dfrac{1}{R}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nc_n z^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza;

(iii) se $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ allora $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$;

(iv) se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $a \in \Omega$, allora $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$. Questa formula è valida nel più grande disco aperto centrato in a e contenuto in Ω, cioè di raggio minore o uguale di $d(a, \partial\Omega)$.

Teorema 1.1.3. (Formula di Cauchy) Sia Ω aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega), D \subseteq \Omega$ disco/rettangolo chiuso. Per ogni $a \in D, f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \mathrm{d}\zeta$. Si ha che $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$.

Corollario 1.1.4. (Disuguaglianze di Cauchy) $f \in \mathcal{O}(\Omega), D = D(a,r) \subseteq \Omega$ disco di centro $a \in \Omega$ e raggio $r > 0$. Sia $M = \max_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)|$. Allora per ogni $n \geq 1, |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M$.

Corollario 1.1.5. (Teorema di Liouville) Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ limitata. Allora f è costante.

Dimostrazione. Le disuguaglianze di Cauchy danno, per ogni $r > 0$, $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$ dove $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < +\infty \Rightarrow f' \equiv 0$. □

Teorema 1.1.6. (Principio di identità o del prolungamento analitico) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\{z \in \Omega | f(z) = g(z)\}$ ha un punto di accumulazione in Ω, allora $f \equiv g$.

Corollario 1.1.7. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla, allora $\{z \in \Omega | f(z) = 0\}$ è discreto in Ω.

Teorema 1.1.8. (Principio del massimo) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora:

(i) se U è aperto e $U \subset\subset \Omega$ (si legge "U relativamente compatto in Ω" e si intende $\overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ compatto) allora $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$. Inoltre, se $|f|$ ha un massimo locale in U, allora f è costante in Ω;

(ii) la stessa affermazione vale per $\mathfrak{Re} f$ e $\mathfrak{Im} f$;

(iii) se Ω è limitato poniamo $M = \sup_{x \in \partial\Omega} \limsup_{z \longrightarrow x} |f(z)| \in [0, +\infty]$. Allora per ogni $z \in \Omega$ $|f(z)| \leq M$ con uguaglianza in un punto se e solo se f è costante.

Esempio 1.1.9. Controesempio per vedere che serve Ω limitato per il punto (iii) del teorema 1.1.8: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re} z > 0\}, f(z) = e^z$. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(\Omega)$. $z \in \partial\Omega \Rightarrow z = iy \Rightarrow |f(iy)| = |e^{iy}| = 1$, ma f è illimitata in Ω. Per correggere questa cosa si aggiunge il punto all'infinito.

Teorema 1.1.10. (Applicazione aperta) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante $\Rightarrow f$ è un'applicazione aperta.

Siano X, Y spazi topologici e indichiamo con $C^0(X,Y)$ le funzioni continue da X in Y.
La *topologia della convergenza puntuale* è la restrizione a $C^0(X,Y) \subset Y^X = \{f : X \longrightarrow Y\}$ della topologia prodotto. Una prebase è data da $\mathcal{F}(x,U) = \{f \in C^0(X,Y) | f(x) \in U\}$ dove $x \in X$ e $U \subseteq Y$ è un aperto.

Esercizio 1.1.11. $f_n \longrightarrow f \in C^0(X,Y)$ per questa topologia se e solo se $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$.

La *topologia compatta-aperta* ha invece come prebase $\mathcal{F}(K,U) =$
$= \{f \in C^0(X,Y) | f(K) \subseteq U\}$ dove U è preso come sopra e $K \subseteq X$ è un compatto.

Proposizione 1.1.12.

(i) La topologia compatta-aperta è più fine della topologia della convergenza puntuale;
(ii) Y Hausdorff $\Rightarrow$ topologia compatta aperta Hausdorff.

Dimostrazione. (i) Ovvia (il singoletto è un compatto).
(ii) Prendiamo $f \not\equiv g$ continue, allora esiste $x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) \neq g(x_0)$, per cui, dato che Y è Hausdorff, esistono $U, V \subset Y$ aperti disgiunti con $f(x_0) \in U, g(x_0) \in V \Rightarrow f \in \mathcal{F}(x_0, U), g \in \mathcal{F}(x_0, V), \mathcal{F}(x_0,U) \cap \mathcal{F}(x_0,V) = \varnothing$. □

Teorema 1.1.13. (Ascoli-Arzelà) Siano X, Y spazi metrici con X localmente compatto, allora $\mathcal{F} \subseteq C^0(X,Y)$ è relativamente compatta rispetto alla topologia compatta-aperta se e solo se:

(i) per ogni $x \in X$ $\{f(x) | f \in \mathcal{F}\} \subset\subset Y$;
(ii) $\mathcal{F}$ è equicontinua.

La topologia compatta-aperta viene detta anche topologia della *convergenza uniforme sui compatti*: $\{f_n\} \subset C^0(X, \mathbb{R}^N)$. Se $K \subseteq X$ definiamo $\|f\|_K = \sup\limits_{z \in K} \|f(z)\|$. $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti se per ogni $K \subset\subset X$ compatto e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 t.c. $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_K < \varepsilon$.

Esercizio 1.1.14. $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti se e solo se $f_n \longrightarrow f$ nella topologia compatta-aperta.

1.2 Risultati preliminari

Vediamo ora alcuni risultati e definizioni preliminari, da considerarsi comunque come prerequisiti per altri risultati più interessanti che vedremo più avanti nel corso.

Teorema 1.2.1. (Weierstrass) Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \longrightarrow f \in C^0(\Omega, \mathcal{C})$ uniformemente sui compatti. Allora:

(i) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$;
(ii) $f_n' \longrightarrow f'$ uniformemente sui compatti.

Dimostrazione. (i) Sia $a \in \Omega$, $0 < r < d(a, \partial\Omega)$ t.c. $D = D(a, r) \subset\subset \Omega$. $f_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$ per ogni $z \in D(a, \rho)$ per ogni $0 < \rho < r$. Allora $\dfrac{1}{|\zeta - z|} \leq \dfrac{1}{r - \rho}$ per ogni $z \in D(a, \rho), \zeta \in \partial D$. Per ogni $z \in D(a, \rho)$, $f(z) = \displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$. Adesso, per uniforme convergenza e uniforme limitatezza si può portare il limite dentro, perciò $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$, ma questo, per il teorema di Cauchy-Goursat+Morera, implica $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(ii) $f_n'(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D} \frac{f_n'(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\zeta \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = f'(z)$. $f_n' \longrightarrow f'$ uniformemente sui dischi e ogni compatto è coperto da un numero finito di dischi $\Rightarrow f_n' \longrightarrow f'$ uniformemente sui compatti.

□

Teorema 1.2.2. (Montel) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. per ogni $K \subset\subset C$ compatto esiste $M_K > 0$ t.c. $\|f\|_K \leq M_K$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ (si diche che $\mathcal{F}$ è *uniformemente limitata sui compatti*). Allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$.

Dimostrazione. Basta vedere che ogni successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ ha una sottosuccessione convergente (segue dal fatto che, nelle ipotesi del teorema di Montel, la topologia compatta aperta è metrizzabile).

Dati $a \in \Omega, 0 < r < d(a, \partial\Omega), f \in \mathcal{O}(\Omega)$, sia $c_n(f) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, allora $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)(z - a)^n$ in $\overline{D(a, r)}$. Inoltre, se $\|f\|_{\overline{D(a,r)}} \leq M$, allora per le disuguaglianze di Cauchy $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{r^n}$ per ogni $n \geq 0$. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$. Per ipotesi, esiste M t.c. $\|f_n\|_{\overline{D(a,r)}} \leq M$ per ogni $n \Rightarrow |c_0(f_n)| \leq M$ per ogni $n \Rightarrow$ esiste una sottosuccessione $c_0(f_{n_j^{(0)}})$ che tende a $c_0 \in \mathbb{C}$. Per induzione, da $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(k)}}\}$ t.c. $c_k(f_{n_j^{(k)}}) \longrightarrow c_k \in \mathbb{C}$. Consideriamo $\{f_{n_j^{(j)}}\}$, allora $c_k(f_{n_j^{(j)}}) \longrightarrow c_k \in \mathbb{C}$ per ogni k. Sia $f_{\nu_j} = f_{n_j^{(j)}}$. Poniamo $D_a = \overline{D(a, r/2)}$ e sia $z \in D_a$. Vogliamo $f_{\nu_j} \longrightarrow f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ in D_a. Basta vedere che f_{ν_j} è di Cauchy uniformemente in D_a. $|f_{\nu_h}(z) - f_{\nu_k}(z)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) -$

$c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n = \sum_{n=0}^{N} |c_n(f_{\nu_h})-c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n + \sum_{n>N} |c_n(f_{\nu_h})-c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n$.
Sappiamo che $|c_n(f_{\nu_k})| \leq \frac{M}{r^n}$ e $z \in D_a \Rightarrow |z-a| \leq \frac{r}{2}$. Allora $\sum_{n>N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n \leq \sum_{n>N} \frac{2M}{r^n}\left(\frac{r}{2}\right)^n = \frac{M}{2^{N-1}}$. $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})||z-a|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\frac{r}{2}\right)^n$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $N >> 1$ t.c. $\frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon/2$ e n_0 t.c. per ogni $h, k \geq n_0, |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\frac{r}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$ (possiamo farlo, una volta fissato N, perché gli n tra 0 e N sono in numero finito e le successioni $c_n(f_{\nu_j})$ convergono, dunque si sceglie un indice per ogni successione e si prende come n_0 il massimo di questi indici). Mettendo insieme le disuguaglianze si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 t.c. per ogni $h, k \geq n_0$ e per ogni $z \in D_a$, $|f_{\nu_k}(z) - f_{\nu_k}(z)| < \varepsilon$, dunque la sottosuccessione f_{ν_j} è di Cauchy e converge uniformemente su D_a. Deve convergere a f perché, per il teorema di Weierstrass, le derivate convergono al valore della derivata limite, e questo ci dice che i coefficienti della serie della funzione limite sono proprio quelli di f.
Ω è a base numerabile, dunque possiamo estrarre un sottoricoprimento numerabile da $\{D_a | a \in \Omega\}$. Sia dunque $\{a_j\} \subseteq \Omega$ t.c. $\bigcup_j D_{a_j} = \Omega$. Per quanto dimostrato finora, possiamo estrarre da $\{f_n\}$ una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(0)}}\}$ convergente uniformemente in D_{a_0}. Per induzione, da $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$ estraiamo una sottosuccessione $\{f_{n_j^{(k)}}\}$ convergente uniformemente in $D_{a_0} \cup \cdots \cup D_{a_k}$. Prendiamo $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ che converge uniformemente in ogni D_{a_k}. Adesso, ogni compatto è coperto da un numero finito di D_{a_k}, quindi (scegliendo per ogni ε il massimo degli indici t.c. le cose che vogliamo valgono in quei D_{a_k}) $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ converge uniformemente sui compatti. □

Teorema 1.2.3. (Vitali) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $A \subseteq \Omega$ con almeno un punto di accumulazione in Ω. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ uniformemente limitata sui compatti. Supponiamo che, per ogni $a \in A$, $\{f_n(a)\}$ converge (cioe f_n converge puntualmente). Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti di Ω.

Dimostrazione. Facciamola per assurdo. Supponiamo che esistono $K \subset\subset \Omega$, $\{n_k\}, \{m_k\} \subset \mathbb{N}, \{z_k\} \subset K, \delta > 0$ t.c. $|f_{n_k}(z_k) - f_{m_k}(z_k)| \geq \delta$. A meno di sottosuccessioni, $z_k \longrightarrow z_0 \in K$. Per il teorema di Montel, a meno di sottosuccessioni $f_{n_k} \longrightarrow g_1 \in \Omega$ e $f_{m_k} \longrightarrow g_2 \in \Omega$ con $|g_1(z_0) - g_2(z_0)| \geq \delta$ (passando al limite). Per ipotesi, $g_1(a) = g_2(a)$ per ogni $a \in A$. Per il principio di identità, $g_1 \equiv g_2$, assurdo. □

Teorema 1.2.4. (Sviluppo di Laurent) Siano $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, $A(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\}$. Sia $f \in \mathcal{O}(A(r_1, r_2))$, allora $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ e converge uniformemente e assolutamente sui compatti di $A(r_1, r_2)$. In particolare, se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ in $\{0 < |z-a| < r\} \subset \Omega$.

Corollario 1.2.5. (Teorema di estensione di Riemann) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ si estende olomorficamente ad $a \Leftrightarrow \lim_{z \longrightarrow a} (z-a) f(z) = 0$.

Dimostrazione. Per lo sviluppo di Laurent, $(z-a)f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+1} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow c_n = 0$ per ogni $n \leq -1$. □

Teorema 1.2.6.

(i) $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega_1)$ biettiva $\Rightarrow f^{-1}$ è olomorfa e f' non si annulla mai;
(ii) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ è iniettiva vicino a z_0.

Dimostrazione. (i) Per il teorema dell'applicazione aperta, f è aperta $\Rightarrow f$ omeomorfismo. $g = f^{-1}$. Sia $w_0 \in \Omega_1$ t.c. $f'(g(w_0)) \neq 0$. Allora

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

Quindi g è olomorfa in $\Omega_1 \setminus f(\{f' = 0\})$. Per il corollario 1.1.7 $\{f' = 0\}$ è discreto in Ω. f omeomorfismo $\Rightarrow f(\{f' = 0\})$ discreto in Ω_1. Ma g è continua (quindi localmente limitata) in Ω_1, dunque per il teorema di estensione di Riemann $g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$. $(f' \circ g)g' \equiv 1$ su $\Omega_1 \setminus f(\{f' = 0\}) \Rightarrow$ vale su $\Omega_1 \Rightarrow f' \circ g \neq 0$ sempre.

(ii) Possiamo supporre $z_0 = 0$. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Per ipotesi, $c_1 \neq 0$.

$f(z) - f(w) = c_1(z - w) + (z - w) \sum_{n=2}^{+\infty} c_n \sum_{k=1}^{n} w^{k-1} z^{n-k}$.

$|f(z) - f(w)| \geq |c_1||z - w| - |z - w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n} |w|^{k-1} |z|^{n-k}$.

Prendiamo $z, w \in D(0, r)$, allora

$|c_1||z - w| - |z - w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n} |w|^{k-1} |z|^{n-k} \geq$

$\geq |c_1||z-w| - |z-w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1} = (|c_1| - \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1})|z-w|$. Scegliamo r t.c. $\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1} \leq \frac{|c_1|}{2}$, allora $(|c_1| - \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1})|z-w| \geq \frac{|c_1|}{2}|z-w|$. Dato che $c_1 \neq 0$, si ha quindi (concatenando le disuguaglianze) che $z \neq w \Rightarrow |f(z) - f(w)| \geq \frac{|c_1|}{2}|z-w| > 0 \Rightarrow f(z) \neq f(w)$.

□

Definizione 1.2.7. Se $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ è olomorfa e biettiva (quindi con inversa olomorfa per il teorema 1.2.6) si chiama BIOLOMORFISMO.

Definizione 1.2.8. $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ è un BIOLOMORFISMO LOCALE se ogni $a \in \Omega_1$ ha un intorno $U \ni a$ t.c. $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ è un biolomorfismo.

Per il teorema 1.2.6, f è un biolomorfismo locale se e solo se f' non si annulla mai.

Definizione 1.2.9. Sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ in $D^* = D(a,r) \setminus \{a\}$. $ord_a(f) := \inf\{n \in \mathbb{Z} | c_n \neq 0\}$ è detto ORDINE DI f IN a. $ord_a(f) \geq 0 \Leftrightarrow f$ è olomorfa in a. Se $0 > ord_a(f) > -\infty$ diremo che a è un POLO di f. Se $ord_a(f) = -\infty$ a è una SINGOLARITÀ ESSENZIALE.

Teorema 1.2.10. (Casorati-Weierstrass) Se a è una singolarità essenziale, $f(D^*)$ è denso in $\mathbb{C}$.

Definizione 1.2.11. $c_{-1} =: res_f(a)$ è detto RESIDUO DI f IN a.

Osservazione 1.2.12. $\gamma(t) = a + \rho e^{2\pi i t}, 0 < \rho < r$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_\gamma (z-a)^n \, \mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^1 \rho^n e^{2\pi i n t} \rho 2\pi i e^{2\pi i t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \rho^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i (n+1) t} \, \mathrm{d}t = c_{-1}.$$

Proposizione 1.2.13. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto e chiuso in Ω, $D \subset\subset \Omega$ disco chiuso t.c. $E \cap \partial D = \varnothing$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$. Allora $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f \, \mathrm{d}z = \sum_{a \in D \cap E} res_f(a)$.

Dimostrazione. Traccia: si dimostra che $E \cap D$ è finito e si applica una versione leggermente più forte del teorema di Cauchy-Goursat+Morera, prendendo per ogni punto di E un dischetto tutto contenuto in D che lo isoli dagli altri e considerando la regione D meno quei dischetti. Il bordo di questa regione è considerato il bordo di D meno il bordo dei dischetti. Questo bordo, a meno di aggiungere dei tratti lineari che uniscono una circonferenza all'altra (che quindi verranno percorsi in entrambi i sensi nell'integrale e non daranno contributo), è percorribile con un solo cammino omotopo al cammino costante in $\Omega \setminus E$, il cui integrale fa 0 per la versione forte del teorema di C-G+M, dunque l'integrale sul bordo di D meno l'integrale sul bordo dei dischetti (occhio al verso di percorrenza di uno e degli altri!) deve essere uguale a 0. Per l'osservazione 1.2.12 si ha la tesi. □

Osservazione 1.2.14. $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ chiusa ($\gamma(0) = \gamma(1)$), $a \notin \gamma([0,1])$. $p_s : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $p_a(z) = a + e^z$ è un rivestimento.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "p_a"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{C} \setminus \{a\} \end{tikzcd}$$

Sia $\tilde{\gamma}$ un sollevamento di γ rispetto a p_a, $p_a(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = \gamma(0) = p_a(\tilde{\gamma}(0)) \iff e^{\tilde{\gamma}(1)} = e^{\tilde{\gamma}(0)} \iff \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Definizione 1.2.15. L'INDICE DI AVVOLGIMENTO γ RISPETTO AD a (*winding number* in inglese) è dato dall'osservazione 1.2.14: $n(\gamma, a) := \dfrac{1}{2\pi i}(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)) \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.2.16.

(i) $n(\gamma, a)$ dipende solo da a e da γ e non dal sollevamento scelto;
(ii) $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$;
(iii) $n(\gamma, a) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z$;
(iv) $a \longmapsto n(\gamma, a)$ è costante sulle componente connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$. In particolare $n(\gamma, a) = 0$ sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$;
(v) $\gamma(t) = a_0 + re^{2\pi i t} \Rightarrow n(a, \gamma) = 1$ per ogni $a \in D(a_0, r)$;
(vi) γ_1 e γ_2 chiuse con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0$ omotope (tramite omotopia che fissa il punto base p_0) e $a \notin \gamma_1([0,1]) \cup \gamma_2([0,1])$, se l'omotopia è in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ allora $n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$.

Teorema 1.2.17. (Teorema dei residui) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto e chiuso in Ω, γ curva chiusa in $\Omega \setminus E$ omotopa a una costante in Ω. Allora per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in E} res_f(a) \cdot n(\gamma, a)$.

Definizione 1.2.18. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, f è MEROMORFA in Ω se esiste $E \subset \Omega$ discreto e chiuso in Ω t.c. $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ e nessun punto di E è una singolarità essenziale. Scriveremo che $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Proposizione 1.2.19.

(i) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è meromorfa $\iff$ localmente è quoziente di due funzioni olomorfe;

(ii) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è meromorfa $\iff$ per ogni $a \in E$ o $|f|$ è limitato vicino ad a o $\lim\limits_{z \longrightarrow a} |f(z)| = +\infty$.

Dimostrazione. (i) ($\Rightarrow$) Se $a \in \Omega \setminus E$ banalmente $f = \dfrac{f}{1}$ vicino ad a.

Se $a \in E$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n \geq n_0} c_n (z-a)^n = (z-a)^{n_0}(c_{n_0} + h(z))$, h olomorfa vicino ad a. Se $n_0 < 0$, $f(z) = \dfrac{c_{n_0} + h(z)}{(z-a)^{-n_0}}$.

($\Leftarrow$) Se $f(z) = \dfrac{h_1(z)}{h_2(z)} = \dfrac{\sum_{n \geq n_1} b_n (z-a)^n}{\sum_{m \geq n_2} c_m (z-a)^m} = (z-a)^{n_1 - n_2} k(z)$, k olomorfa vicino ad a.

(ii) Per Casorati-Weierstrass, $a \in E$ è singolarità essenziale $\iff$ $\lim\limits_{z \longrightarrow a} |f(z)|$ non esiste. Per lo stesso motivo, è un polo $\iff$ $\lim\limits_{z \longrightarrow a} |f(z)| = +\infty$. □

Teorema 1.2.20. (Principio dell'argomento) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. $Z_f := \{\text{zeri di } f\}, P_f := \{\text{poli di } f\}$. γ curva chiusa in $\Omega \setminus (Z_f \cup P_f)$ omotopa a una costante in Ω. Allora $\displaystyle\sum_{a \in Z_f \cup P_f} n(\gamma, a) \cdot ord_a(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} \, \mathrm{d}z$.

Dimostrazione. $ord_a(f) = res_{f'/f}(a)$. Infatti $f(z) = (z-a)^m h(z)$ con $m = ord_a(f)$, $h(a) \neq 0$ e h olomorfa. $f'(z) = m(z-a)^{m-1}h(z) + (z-a)^m h'(z)$. Allora $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{m}{z-a} + \dfrac{h'(z)}{h(z)}$ e $\dfrac{h'}{h}$ è olomorfa $\Rightarrow res_{f'/f}(a) = m = ord_a(f)$. La tesi segue allora dal teorema dei residui. □

Proposizione 1.2.21. (Versione semplice del teorema di Rouché) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, D disco con $\overline{D} \subset \Omega$. Supponiamo che $|f - g| < |g|$ su ∂D (questo implica anche che non si annullano mai su ∂D). Allora f e g hanno lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità) su D.

Dimostrazione. Per $t \in [0,1]$ poniamo $f_t = g + t(f - g)$ ($f_0 = g$, $f_1 = f$). Se $z \in \partial D$, $0 < |g(z)| - |f(z) - g(z)| \leq |g(z)| - t|f(z) - g(z)| \leq |f_t(z)|$.

Sia $a_t = \sum_{a \in \overline{D}} ord_a(f_t) =$ numero di zeri di f_t in $\overline{D}$. Non ci sono poli, dunque $a_t \in \mathbb{N}$, quindi per il principio dell'argomento $a_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f_t'}{f_t}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{g' + t(f' - g')}{g + t(f - g)}\,\mathrm{d}z$, che dipende con continuità da $t \Rightarrow a_t$ è costante (è a valori in $\mathbb{N}$) $\Rightarrow a_0 = a_1$ come voluto. $\square$

Corollario 1.2.22. (Teorema di Ritt) Sia $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ($\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$) t.c. $h(\mathbb{D}) \subset\subset \mathbb{D}$. Allora h ha un punto fisso.

Dimostrazione. Esiste $0 < r < 1$ t.c. $|h(z)| < r$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Sia $\mathbb{D}_r := \{|z| < r\}$. Su $\partial\mathbb{D}_r$, $|z - (z - h(z))| = |h(z)| < r = |z|$. Per il teorema di Rouché su $g(z) = z, f(z) = z - h(z)$, g e f hanno lo stesso numero di zeri in $\mathbb{D}$, ma g ha un unico zero $\Rightarrow f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}} - h$ ha un unico zero $z_0 \Rightarrow h(z_0) = z_0$. $\square$

1.3 Teoremi di Hurwitz

Vediamo ora qualche risultato interessante.

Teorema 1.3.1. (Primo teorema di Hurwitz) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ convergente a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ uniformemente sui compatti. Supponiamo che f non sia costante sulle componenti connesse di Ω. Allora per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono $n_1 = n_1(z_0) \in \mathbb{N}$ e $z_n \in \Omega$ per ogni $n \geq n_1$ t.c. $f_n(z_n) = f(z_0)$ e $\lim_{n \longrightarrow +\infty} z_n = z_0$. Senza la tesi sul limite di z_n, si può dire che per ogni $w = f(z_0) \in f(\Omega)$ esiste $n_1 = n_1(w)$ t.c. $w \in f_n(\Omega)$ per ogni $n \geq n_1$.

Dimostrazione. Vogliamo applicare Rocuhé a $f_n - w$ e $f - w$, $w = f(z_0)$ in dischetti centrati in z_0 di raggio arbitrariamente piccolo. f non costante sulle componenti connesse $\Rightarrow f^{-1}(w)$ è discreto $\Rightarrow$ esiste $\delta > 0$ t.c. $0 < |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow z \in \Omega$ e $f(z) \neq w$. Se $D = D(z_0, \delta)$ allora $\overline{D} \cap f^{-1}(w) = \{z_0\}$. Per ogni $k > 0$, $\gamma_k = \partial D(z_0, \delta/k)$. Poniamo $\delta_k = \min\{|f(\zeta) - w| \mid \zeta \in \gamma_k\} > 0$. Esiste $n_k \geq 1$ t.c. per ogni $n \geq n_k$ $\max_{\zeta \in \gamma_k} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2}$ (f_n converge a f uniformemente sui compatti). Possiamo supporre $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Fissato $k \geq 1$, se $n \geq n_k$ e $\zeta \in \gamma_k$, $|(f_n(\zeta) - w) - (f(\zeta) - w)| = |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \leq |f(\zeta) - w|$. Per il teorema di Rocuhé applicato a $f_n - w$ e $f - w$ in $\overline{D(z_0, \delta/k)}$, per ogni $n \geq n_k$ $f_n - w$ ha almeno uno zero in $D(z_0, \delta_k) \Rightarrow$ esiste $z_n \in D(z_0, \delta/k)$ t.c. $f_n(z_n) = w$. $z_n \longrightarrow z_0$ per $n \longrightarrow +\infty$. $\square$

Corollario 1.3.2. (Secondo teorema di Hurwitz) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \longrightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supponiamo che le f_n non si annullino mai (o, in generale, esiste $w_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $w_0 \notin f_n(\Omega)$ per ogni n), allora o $f \equiv 0$ o f non si annulla mai (in generale, o $f \equiv w_0$ o $w_0 \notin f(\Omega)$).

Dimostrazione. Per assurdo, $w_0 \in f(\Omega)$. Allora o f è costante ($f \equiv w_0$) oppure, per il primo teorema di Hurwitz, $w_0 \in f_n(\Omega)$ per ogni $n >> 1$, assurdo. $\square$

Corollario 1.3.3. (Terzo teorema di Hurwitz) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \longrightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supponiamo che le f_n siano iniettive. Allora f è costante o iniettiva.

Dimostrazione. Per assurdo, sia f né costante né iniettiva. Allora esistono $z_1 \neq z_2$ t.c. $f(z_1) = f(z_2)$. Poniamo $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ e $h(z) = f(z) - f(z_2)$. $h_n \longrightarrow h$ e le h_n non si annullano mai in $\Omega \setminus \{z_2\}$ (perché le f_n sono iniettive). Dato che per ipotesi f non è costante, pure h non è costante, dunque per il secondo teorema di Hurwitz non si annulla mai in $\Omega \setminus \{z_2\}$, ma $h(z_1) = 0$, assurdo. $\square$

1.4 La sfera di Riemann

Definizione 1.4.1. La SFERA DI RIEMANN è l'insieme $\hat{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (l'ultimo è la retta proiettiva complessa). Per noi sarà $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la seguente topologia: ristretta a $\mathbb{C}$ è la topologia usuale, mentre gli intorni aperti di ∞ sono della forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ con $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto.

Siano $U_0 = \mathbb{C}, U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ (si noti che U_1 è un intorno aperto di ∞). Sia $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$\varphi_1(w) = \begin{cases} 1/w & \text{se } w \neq \infty \\ 0 & \text{se } w = \infty. \end{cases}$$

φ_1 è un omeomorfismo fra U_1 e $\mathbb{C}$. Sia $\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_0(z) = z$ (l'identità); è un omeomorfismo fra U_0 e $\mathbb{C}$.
$U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*$, $\varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* = \varphi_0(U_0 \cap U_1)$.
$\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}, \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $(\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1})(w) = \dfrac{1}{w}, (\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(z) = \dfrac{1}{z}$ sono olomorfe.
φ_0 e φ_1 si chiamano *carte*. Una funzione definita a valori in $\hat{\mathbb{C}}$ è olomorfa se lo è letta tramite carte. Vediamo nello specifico cosa significa.
Sia $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua; quando è olomorfa?
Risposta:

(i) $f|_{\Omega \cap \mathbb{C}}$ è olomorfa in senso classico (notiamo che $\Omega \cap \mathbb{C} = \Omega \setminus \{\infty\}$);
(ii) $f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa vicino a $0 = \varphi_1(\infty)$.
$(f \circ \varphi_1^{-1})(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right)$.

Esempio 1.4.2. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. Quando è olomorfa in ∞? Se e solo se $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è olomorfa in 0. $f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n w^{-n}$ è olomorfa in 0 $\iff$ $c_n = 0$ per ogni $n > 0$.

Osservazione 1.4.3. $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se è costante. Infatti, $\hat{\mathbb{C}}$ compatto $\Rightarrow f(\hat{\mathbb{C}})$ compatto, cioè chiuso e limitato in $\mathbb{C} \Rightarrow |f|$ ha max in $x_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Se $z_0 \in \mathbb{C}$, allora per il teorema di Liouville 1.1.5 $f|_{\mathbb{C}}$ è costante $\Rightarrow f$ costante. Se $z_0 = \infty$, $f(1/w)$ ha massimo in 0, dunque ragionando come prima è costante.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ continua; quando è olomorfa?
Risposta:

(i) f è olomorfa in $\Omega \setminus f^{-1}(\infty)$ in senso classico;

(ii) se $f(z_0) = \infty$, $\varphi_1 \circ f = \frac{1}{f}$ è olomorfa vicino a z_0.

Esempio 1.4.4. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ è a valori in $\hat{\mathbb{C}}$ se 0 è un polo (ci interessa il caso in cui ∞ sia effettivamente nell'immagine, altrimenti è una comune funzione olomorfa a valori in $\mathbb{C}$), cioè consideriamo $f(0) = \infty$. Supponiamo allora $f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n = z^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^{n+k} = z^{-k} h(z)$, $h(0) = c_{-k} \neq 0$, h olomorfa. $\frac{1}{f}(z) = \frac{z^k}{h(z)}$ è olomorfa in 0. Viceversa, se f è olomorfa, $\frac{1}{f}$ è olomorfa in 0 $\Rightarrow \frac{1}{f}(z) = z^k \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, $c_0 \neq 0, k \geq 1$ (la condizion $k \geq 1$ segue dal fatto che siamo nell'ipotesi $f(0) = \infty \Rightarrow (1/f)(0) = 0$). Allora $\frac{1}{f}(z) = z^k h(z) \Rightarrow f(z) = z^{-k} \frac{1}{h(z)}$ e quindi ha un polo in 0.

Corollario 1.4.5. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ è olomorfa se e solo se è meromorfa.

Possiamo ora dare una definizione generale.

Definizione 1.4.6. $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ continua è *olomorfa* se e solo se $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è olomorfa vicino a 0 e $\frac{1}{f}$ è olomorfa vicino a $f^{-1}(\infty)$ (e ovviamente dev'essere normalmente olomorfa in tutti gli altri punti).
Se $f(\infty) = \infty$, la condizione è che $\frac{1}{f(1/w)}$ sia olomorfa in 0.

Esempio 1.4.7. $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d, a_d \neq 0$ (un polinomio). $p(\infty) = \infty$. È olomorfo in ∞? Sì: $\dfrac{1}{p(1/z)} = \dfrac{1}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_d z^{-d}} = \dfrac{1}{z^{-d}(a_0 z^d + \cdots + a_d)} = \dfrac{z^d}{a_d + \cdots + a_0 z^d}$ è olomorfo in 0. $\dfrac{1}{p(1/z)}$ ha uno zero di ordine d in 0 $\iff$ p ha un polo di ordine di $-d$ in ∞ (vedremo più avanti come è definito $ord_f(\infty)$).

Proposizione 1.4.8. $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}}) \iff f = \dfrac{P}{Q}$ con $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ senza fattori comuni, cioè f è una funzione razionale.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sappiamo che $\mathbb{C}[z] \subset \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ e quozienti di funzioni olomorfe sono olomorfi.
($\Rightarrow$) Sia $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ olomorfa non costante. $Z_f = f^{-1}(0)$ è chiuso e discreto in $\hat{\mathbb{C}}$ che è compatto, dunque è finito, perciò $Z_f \cap \mathbb{C} = \{z_1, \ldots, z_k\} \subset \mathbb{C}$. Analogamente $P_f = f^{-1}(\infty) = Z_{1/f}$, $P_f \cap \mathbb{C} = \{w_1, \ldots, w_h\} \subset \mathbb{C}$. Sia $g(z) = \dfrac{(z - w_1) \cdots (z - w_h)}{(z - z_1) \cdots (z - z_k)} f(z)$, $g \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ (gli zeri e i poli compaiono con molteplicità nei prodotti al numeratore e al denominatore). In questo modo g non ha né zeri né poli in $\mathbb{C}$. Se $g(\infty) \in \mathbb{C}$, $g \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow g$ costante, diciamo $g \equiv c \Rightarrow f(z) = c\dfrac{(z - z_1) \cdots (z - z_k)}{(z - w_1) \cdots (z - w_h)}$, come voluto. Se $g(\infty) = \infty \Rightarrow \dfrac{1}{g}(\infty) = 0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \dfrac{1}{g} \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow \dfrac{1}{g}$ costante e si conclude come sopra. $\square$

Definizione 1.4.9. Sia $f = \dfrac{P}{Q} \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$. Il GRADO DI f è $\deg f = \max\{\deg P, \deg Q\}$.
La definizione dell'ordine di zeri e poli in $\mathbb{C}$ ce l'abbiamo.

$$f(\infty) = \lim_{w \longrightarrow 0} \frac{P(1/w)}{Q(1/w)} = \lim_{w \longrightarrow 0} \frac{a_m \left(\frac{1}{w}\right)^m + \cdots + a_0}{b_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + \cdots + b_0} =$$

$$\lim_{w \longrightarrow 0} w^{n-m} \frac{a_m + \cdots + a_0 w^m}{b_n + \cdots + b_0 w^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n > m \\ \frac{a_m}{b_n} & \text{se } n = m \\ \infty & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Definiamo allora $ord_f(\infty)) = n - m = \deg Q - \deg P$.

Definizione 1.4.10. Siano $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$, $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. La MOLTEPLICITÀ DI f IN z_0 è $\delta_f(z_0)$ definita come segue: se $f(z_0) = w_0 \in \mathbb{C}$, z_0 è uno zero di $f - w_0$ e poniamo $\delta_f(z_0) = ord_{f-w_0}(z_0)$; se $f(z_0) = \infty$, z_0 è un polo di f e poniamo $\delta_f(z_0) = -ord_f(z_0)$. Si ha che $\delta_f(z_0) \in \mathbb{N}$.

Proposizione 1.4.11. Sia $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ non costante. Allora per ogni $q \in \hat{\mathbb{C}}$

$$\sum_{f(p)=q} \delta_f(p) = \deg f.$$

Dimostrazione. Sia $f = \dfrac{P}{Q}$. Se $q = 0$, $\displaystyle\sum_{f(p)=0} \delta_f(p) = \sum_{\substack{f(p)=0 \\ p\in\mathbb{C}}} \delta_f(p) + c \cdot \delta_f(\infty)$ dove $c = 1$ se $f(\infty) = 0$ e $c = 0$ altrimenti. Si noti che per il teorema fondamentale dell'algebra $\displaystyle\sum_{\substack{f(p)=0 \\ p\in\mathbb{C}}} \delta_f(p) = \deg P$. Per com'è definito c, $c \cdot \delta_f(\infty) = \max\{0, \deg Q - \deg P\}$. Allora $\displaystyle\sum_{f(p)=0} \delta_f(p) = \deg P + \max\{0, \deg Q - \deg P\} = \max\{\deg P, \deg Q\} = \deg f$. Se $q = \infty$, $\displaystyle\sum_{f(p)=\infty} \delta_f(p) = \sum_{\substack{f(p)=\infty \\ p\in\mathbb{C}}} \delta_f(p) + c \cdot \delta_f(\infty)$ dove stavolta $c = 1$ se $f(\infty) = \infty$ e $c = 0$ altrimenti. Dunque in questo caso la sommatoria vale, per il teorema fondamentale dell'algebra, $\deg Q$, mentre $c \cdot \delta_f(\infty) = \max\{0, \deg P - \deg Q\}$, per cui $\displaystyle\sum_{f(p)=\infty} \delta_f(p) = \deg Q + \max\{0, \deg P - \deg Q\} = \max\{\deg Q, \deg P\} = \deg f$. Se $q \in \mathbb{C}^*$, $\displaystyle\sum_{f(p)=q} \delta_f(p) = \sum_{f(p)=q} ord_{f-q}(p) = \sum_{f(p)-q} ord_{f-q}(p) = \deg(f - q)$. $f(z) - q = \dfrac{P(z) - qQ(z)}{Q(z)}$.

$$\deg(P - qQ) \begin{cases} = \max\{\deg P, \deg Q\} & \text{se sono diversi} \\ \leq \max\{\deg P, \deg Q\} & \text{se sono uguali} \end{cases}$$

$\Rightarrow \deg(f - q) = \deg f$. □

Corollario 1.4.12. Siano $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ non costante, $w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Allora $1 \leq card(f^{-1}(w_0)) \leq \deg f$.

Dimostrazione. ≥ 1: se $w_0 \neq \infty$, $f(z) = w_0 \iff f(z) - w_0 = 0 \iff P(z) - w_0 Q(z) = 0$ e per il teorema fondamentale dell'algebra esiste z che soddisfa; se $w_0 = \infty$, si considera $1/f$.
$card(f^{-1}(w_0)) \leq \displaystyle\sum_{f(p)=w_0} \delta_f(p) = \deg f$. □

Osservazione 1.4.13. $\delta_f(p) > 1 \Rightarrow f'(p) = 0 \vee \left(\dfrac{1}{f}\right)'(p) = 0$. Infatti, senza perdita di generalità $p = 0$ e $f(p) = 0$, allora se $\delta_f(p) = k > 1$ si ha che $f(z) = z^k h(z)$ con h olomorfa e $h(0) \neq 0 \Rightarrow f'(z) = [kz^{k-1}h(z) + z^k h'(z)]$. Ricordando che $k > 1$, si ha che $f'(0) = 0$.

Corollario 1.4.14. $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \iff \deg f = 1 \iff f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ con $ad - bc = 1$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Ogni $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ è suriettiva per quanto appena dimostrato. Se $\deg f = 1$, allora f è iniettiva, quindi biettiva, per cui per il teorema 1.2.6 $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.
($\Rightarrow$) f automorfismo $\Rightarrow$ f iniettiva $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{f(p)=w_0} \delta_f(p)$ contiene un unico addendo con molteplicità uno (da cui la tesi). Infatti, da f non costante si ha che f' ha un insieme di zeri discreto C_f e $(1/f)'$ ha un insieme di zeri discreto $C_{1/f}$. Allora basta prendere $z_0 \notin C_f \cup C_{1/f}$ per ottenere, dall'osservazione precedente, che $\delta_f(z_0) = 1$.
Il secondo se e solo se è un banale esercizio lasciato al lettore. □

Osservazione 1.4.15. Siccome numeratore e denominatore sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, possiamo suppore $ad - bc = 1$.

Esercizio 1.4.16. $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ è isomorfo a ${SL(2,\mathbb{C})}/{\{\pm I_2\}}$.

Corollario 1.4.17. $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \iff f(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Ovvia.
($\Rightarrow$) $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \Rightarrow f$ è iniettiva, dunque per Casorati-Weierstrass ∞ è un polo di $f \Rightarrow f$ si estende a un automorfismo di $\hat{\mathbb{C}}$ con $f(\infty) = \infty \Rightarrow f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. □

1.5 Il disco unitario

Come abbiamo già visto, il disco unitario (aperto) è definito come $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Lemma 1.5.1. (Lemma di Schwarz) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ t.c. $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguale nella prima per $z \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta}z, \theta \in \mathbb{R}$, cioè f è una rotazione.

Dimostrazione. $f(0) = 0 \Rightarrow$ possiamo costruire $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ con $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ estendendola per continuità in 0 a $g(0) = f'(0)$. Fissiamo $0 < r < 1$. Per ogni $|z| \leq r$, per il principio del massimo $|g(z)| \leq \displaystyle\max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}$.
Mandando r a 1 otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|g(z)| \leq 1$, da cui $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$.
Se vale uno dei due uguali sopra, allora esiste $z_0 \in \mathbb{D}$ t.c. $|g(z_0)| = 1$, per cui sempre per il principio del massimo g è costantemente uguale a un valore di modulo 1, cioè $g(z) = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ da cui $f(z) = e^{i\theta}z$. □

Corollario 1.5.2. Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è t.c. $f(0) = 0$, allora $f(z) = e^{i\theta}z$.

Dimostrazione. $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)}$. Per il lemma di Schwarz, $|f'(0)| \leq 1$ e $|(f^{-1})'(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| = 1$, da cui la tesi sempre per il lemma di Schwarz. $\square$

Lemma 1.5.3. Sia G un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio X, cioè per ogni $g \in G$ è data una biezione $\gamma_g : X \longrightarrow X$ t.c. $\gamma_e = \mathrm{id}$ e $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$, inoltre $\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2} \iff g_1 = g_2$. Sia G_{x_0} il gruppo di isotropia di $x_0 \in X$, cioè $G_{x_0} = \{g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0\}$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esiste $g_x \in G$ t.c. $\gamma_{g_x}(x) = x_0$ e sia $\Gamma = \{g_x \mid x \in X\}$. Allora G è generato da Γ e G_{x_0}, cioè ogni $g \in G$ è della forma $g = hg_x$ con $x \in X$ e $h \in G_{x_0}$.

Dimostrazione. Sia $g \in G$ e $x = \gamma_g(x_0)$. Allora $(\gamma_{g_x} \circ \gamma_g)(x_0) = x_0 \Rightarrow \gamma_{g_x} \circ \gamma_g = \gamma_{g_x g} = \gamma_h$ con $h \in G_{x_0} \Rightarrow g_x g = h \Rightarrow g = g_x^{-1} h$. Partendo da g^{-1} avremmo ottenuto $g^{-1} = g_x^{-1} h \Rightarrow g = h^{-1} g_x$ con $h \in G_{x_0}$. $\square$

Proposizione 1.5.4. $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \iff$ esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$ t.c. $f(z) = e^{i\theta} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) $1 - \left| \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}$. Se $a, z \in \mathbb{D}$, $f(z) \in \mathbb{D}$. Se $a \in \mathbb{D}, z \in \partial\mathbb{D}$, $f(z) \in \partial\mathbb{D}$. L'inversa è $f^{-1}(z) = e^{-i\theta} \dfrac{z + ae^{i\theta}}{z + \bar{a}e^{-i\theta} z}$ ed è della stessa forma. Si noti che $f(a) = 0$.
($\Rightarrow$) Scriviamo per semplicità $f_{a,\theta} = e^{i\theta} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Vediamo $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ come gruppo che agisce su $\mathbb{D}$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})_0$ è, per il corollario del lemma di Schwarz, $\{f_{0,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. $\Gamma = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D}\}$ ($f_{a,0}(a) = 0$). Per il lemma 1.5.3, $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è generato da $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ e Γ, cioè ogni $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è della forma $\gamma = f_{0,\theta} \circ f_{a,0} = f_{a,\theta}$. $\square$

Corollario 1.5.5. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su $\mathbb{D}$, cioè per ogni $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ esiste $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ t.c. $\gamma(z_0) = z_1$.

Dimostrazione. $\gamma = f_{z_1,0}^{-1} \circ f_{z_0,0}$. $\square$

Osservazione 1.5.6. Dati $z_0, z_1, w_0, w_1 \in \mathbb{D}$ ($z_0 \neq z_1, w_0 \neq w_1$), in generale non esiste $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ t.c. $\gamma(z_0) = w_0$ e $\gamma_(z_1) = w_1$. Infatti, se poniamo $z_0 = w_0 = 0, z_1, w_1 \neq 0$, abbiamo che $\gamma(0) = 0 \Rightarrow \gamma(z) = e^{i\theta} z \Rightarrow |\gamma(z_1)| = |z_1|$, per cui se $|w_1| \neq |z_1|$ non è possibile trovare un siffatto γ.

Esercizio 1.5.7. Per ogni $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1 \in \partial\mathbb{D}$ con $\sigma_0 \neq \sigma_1, \tau_0 \neq \tau_1$ esiste $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ t.c. $\gamma(\sigma_0) = \tau_0$ e $\gamma(\sigma_1) = \tau_1$.

Lemma 1.5.8. (Lemma di Schwarz-Pick) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$. Allora per ogni $z,w \in \mathbb{D}$ $\left|\dfrac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$ e per ogni $z \in \mathbb{D}$ $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1-|z|^2}$. Inoltre se vale l'uguale nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ e vale l'uguale sempre.

Dimostrazione. Fissiamo $w \in \mathbb{D}$ e $\gamma_1(z) = \dfrac{z+w}{1+\bar{w}z}$, $\gamma_2(z) = \dfrac{z-f(w)}{1-\overline{f(w)}z}$. $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. $\gamma_1(0) = w, \gamma_2(f(w)) = 0$. $\gamma_1^{-1}(z) = \dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}$. Per il lemma di Schwarz applicato a $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$ abbiamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(z)| \leq z \Rightarrow |(\gamma_2 \circ f)(z)| \leq \gamma_1^{-1}(z)|$ che è la prima disuguaglianza. Abbiamo poi $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \leq 1 \Rightarrow |\gamma_2'(f(w))f'(w)\gamma_1'(0)| \leq 1$. $\gamma_1'(z) = \frac{1+\bar{w}z-\bar{w}(z+w)}{(1+\bar{w}z)^2} \Rightarrow \gamma_1'(0) = 1-|w|^2$. $\gamma_2'(z) = \frac{1-\overline{f(w)}z-\overline{f(w)}(z-f(w))}{(1-\overline{f(w)}z)^2} \Rightarrow \gamma_2'(f(w)) = \dfrac{1}{1-|f(w)|^2}$. Sostituendo si ottiene la seconda disuguaglianza con w al posto di z. La seconda parte del lemma di Schwarz ci dà in automatico la seconda parte di questo lemma (l'affermazione sui casi di uguaglianza). □

Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che la quantità $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$ è contratta dalle $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$. Vediamo adesso una distanza costruita a partire da questa quantità.

Definizione 1.5.9. La *distanza di Poincaré su* $\mathbb{D}$ è $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0,+\infty)$ data da $\omega(z,w) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|} = \mathrm{arctanh}\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$.

Corollario 1.5.10. $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}), z,w \in \mathbb{D} \Rightarrow \omega(f(z),f(w)) \leq \omega(z,w)$ con l'uguale per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ se e solo se c'è l'uguale sempre e $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. $\mathrm{arctanh}t$ è strettamente crescente. La tesi segue allora dal lemma di Schwarz-Pick. □

Esercizio 1.5.11. ω è una distanza (completa).

Soluzione L'unica cosa un po' complicata è la disuguaglianza triangolare.
Hint: $\mu(z,w) = \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$ è una distanza. Per dimostrare che $\mu(z_1,z_2) \leq \mu(z_1,z_0)+\mu(z_0,z_2)$ si applica $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ (gli automorfismi del disco sono isometrie per μ) t.c. $\gamma(z_1) = 0$ e a quel punto è facile dimostrare quello che va dimostrato. Adesso si nota che $\omega(z_1,z_2) = \mathrm{arctanh}(\mu(z_1,z_2)) \leq \mathrm{arctanh}(\mu(z_1,z_0) + \mu(z_0,z_2)) \leq \mathrm{arctanh}(\mu(z_1,z_0)) + \mathrm{arctanh}(\mu(z_0,z_2))$.

Esercizio 1.5.12. Una *geodetica* per ω è una curva $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{D}$ t.c. $\omega(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$. Dimostrare che i raggi $t \longmapsto \tanh(t) \frac{z_0}{|z_0|}$ sono geodetiche.

Corollario 1.5.13. Per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ esoste una geodetica che collega z_1 con z_2.

Per definizione, gli automorfismi mandano geodetiche in geodetiche.

Esercizio 1.5.14. Sia $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ e σ una geodetica passante per 0 (σ è un diametro), allora $\gamma \circ \sigma$ è un arco di circonferenza ortogonale al bordo del disco.

Definizione 1.5.15. La *palla di Poincaré* è $B_\omega(z_0, r) = \{z \in \mathbb{D} \mid \omega(z, z_0) < r\} = \{z \in \mathbb{D} \mid \left|\dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right| < \tanh r\}$. Geometricamente è un disco euclideo con centro $\tilde{z}_0 = \dfrac{1 - (\tanh r)^2}{1 - (\tanh r)^2 |z_0|^2} z_0$ e raggio $\rho = \dfrac{\tanh r(1 - |z_0|^2)}{1 - (\tanh r)^2 |z_0|^2} < 1 - |\tilde{z}_0|$.
$\overline{B_\omega(z_0, r)} \subset\subset \mathbb{D} \Rightarrow \omega$ è completa (le palle chiuse sono compatte).

1.6 Dinamica del disco e del semipiano superiore

Vogliamo adesso cercare di studiare qual è la "dinamica" delle funzioni olomorfe. Lo faremo nei casi del disco e del semipiano superiore.

Proposizione 1.6.1. Sia $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}), \gamma \neq \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Allora o

(i) γ ha un unico punto fisso in $\mathbb{D}$ (si parla in questo caso di automorfismo *ellittico*) o
(ii) γ non ha punti fissi in $\mathbb{D}$ e ha un unico punto fisso in $\partial\mathbb{D}$ (*parabolico*) o
(iii) γ non ha punti fissi in $\mathbb{D}$ e ha due punti fissi distinti in $\partial\mathbb{D}$ (*iperbolico*).

Dimostrazione. $\gamma(z_0) = z_0 \iff e^{i\theta}(z_0 - a) = (1 - \bar{a}z_0)z_0 \iff \bar{a}z_0^2 + (e^{i\theta} - 1)z_0 - e^{i\theta}a = 0$, equazione di secondo grado con radici z_1, z_2 (può essere che $z_1 = z_2$) t.c. $z_1 \cdot z_2 = -e^{i\theta}\dfrac{a}{\bar{a}} \in \partial\mathbb{D} \Rightarrow |z_1||z_2| = 1$. Se $z_1 \neq z_2$, o $z_1 \in \mathbb{D}$ e $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{\overline{\mathbb{D}}\}$ (caso ellittico) e $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}$ (caso iperbolico). Se $z_1 = z_2$, $|z_1| = |z_2| = 1$ (caso iperbolico). ☐

Osservazione 1.6.2. Se $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ è t.c. $f(z_1) = z_1$ e $f(z_2) = z_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{D}, z_1 \neq z_2$, allora $f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Infatti, possiamo supporre $z_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ e $f(z_2) = z_2$, quindi siamo nel caso del lemma di Schwarza in cui vale l'uguaglianza, per cui $f(z) = e^{i\theta}z$, ma $f(z_2) = z_2 \Rightarrow e^{i\theta} = 1$.

Esempio 1.6.3. Esempio di automorfismo ellittico: la rotazione intorno a 0 $\gamma_{0,\theta}(z) = e^{i\theta}z$. Più in generale, se $a \in \mathbb{D}$, $\gamma_{a,0}(z) = \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$, allora $\gamma_{a,0}^{-1} \circ \gamma_{0,\theta} \circ \gamma_{a,0}$ è ellittico con punto fisso a. Queste sono dette *rotazioni non euclidee* e caratterizzano tutti gli automorfismi ellittici (lo si può vedere coniugando opportunamente con $\gamma_{a,0}$ o $\gamma_{a,0}^{-1}$).

Definizione 1.6.4. Il SEMIPIANO SUPERIORE è $\mathbb{H}^+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im} w > 0\}$. La TRASFORMATA DI CAYLEY è $\Psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}^+$ t.c. $\Psi(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$.

Notiamo che possiamo vedere $\mathbb{H}^+ \subset \hat{\mathbb{C}}$ e in questo caso $\partial\mathbb{H}^+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. $\Psi^{-1}(w) = \dfrac{w-i}{w+i}$. $\Psi(0) = 1, \Psi(1) = \infty$.
$\mathfrak{Im}\Psi(z) = \mathfrak{Im}\left(i\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \mathfrak{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{1}{|1-z|^2}\mathfrak{Re}((1+z)(1-\bar{z})) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$
che è $> 0 \iff z \in \mathbb{D}$ e $= 0 \iff z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$.
Ψ è un biolomorfismo fra $\mathbb{D}$ e $\mathbb{H}^+$ che si estende continua a $\partial\mathbb{D} \longrightarrow \partial\mathbb{H}^+$. Se abbiamo $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, abbiamo anche $F = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} : \mathbb{H}^+ \longrightarrow \mathbb{H}^+$ e viceversa.

Corollario 1.6.5. $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^+) \iff \gamma(w) = \dfrac{aw+b}{cw+s}$ con $ad - bc = 1$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si ha allora che $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^+) \cong {SL(2,\mathbb{R})}/{\{\pm I_2\}} = PSL(2, \mathbb{R})$ (questo è detto *gruppo speciale lineare proiettivo*).

Dimostrazione. $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^+) \iff \Psi^{-1} \circ \gamma \circ \Psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \iff (\Psi^{-1} \circ \gamma \circ \Psi)(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Ponendo $\Psi(z) = w$, l'uguaglianza sopra equivale a $\gamma(w) = \Psi\left(e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) = \Psi\left(e^{i\theta}\dfrac{\Psi^{-1}(w)-a}{1-\bar{a}\Psi^{-1}(w)}\right)$. Facendo il conto si trova l'enunciato. □

Esercizio 1.6.6. $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^+)$ è t.c. $\gamma(i) = i \iff \gamma(w) = \dfrac{w\cos\theta - \sin\theta}{w\sin\theta + \cos\theta}$.

Esempio 1.6.7. Sia $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^+)$, $\gamma(\infty) = \infty \iff \gamma(w) = \alpha w + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. Se lo vogliamo parabolico non deve avere altri punti fissi in $\mathbb{C}$ e questo è possibile se e solo se $\alpha w + \beta = w$ non ha altre soluzioni $\iff \alpha = 1, \beta \neq 0$, cioè $\gamma(w) = w + \beta$. È una traslazione di $\mathbb{H}^+$ parallela al suo bordo.

Esercizio 1.6.8. Sia $\tau \in \partial\mathbb{D}$. Dimostrare che tutti gli automorfismi γ parabolici di $\mathbb{D}$ con $\gamma(\tau) = \tau$ sono della forma $\gamma(z) = \sigma_0\dfrac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ con $z_0 = \dfrac{ic}{2-ic}\tau$ e $\sigma_0 = \dfrac{2-ic}{2+ic}$ con $c \in \mathbb{R}$. Hint: a meno di una rotazione, $\tau = 1$.

Esempio 1.6.9. $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^+)$ è iperbolico con $\gamma(\infty) = \infty$ e $\gamma(0) = 0 \iff \gamma(w) = \alpha w$ con $\alpha > 0$.

Passiamo ora alla DINAMICA DI FUNZIONI ITERATE. Abbiamo uno spazio generico X e una funzione $f : X \longrightarrow X$. Le sue *iterate* sono $f^2 = f \circ f$ e, induttivamente, $f^{k+1} = f \circ f^{k-1}$. Vogliamo capire il comportamento asintotico di $\{f^k\}$ (in relazione alla struttura presente su X), per esempio, capire cosa succede all'*orbita* $O^+(x) = \{f^k(x)\}$ con $x \in X$.

Esempio 1.6.10. $\gamma(w) = \alpha w \Rightarrow \gamma^2(w) = \alpha(\alpha w) = \alpha^2 w \Rightarrow \gamma^k(w) = \alpha^k w$. Quindi: se $0 < \alpha < 1$, $\gamma^k(w) \longrightarrow 0$ per $k \longrightarrow +\infty \Rightarrow \gamma^k \longrightarrow 0$ (costante) uniformemente sui compatti; se $\alpha > 1$, $\gamma^k(w) \longrightarrow \infty$ per $k \longrightarrow +\infty \Rightarrow \gamma^k \longrightarrow \infty$ (costante) uniformemente sui compatti.

Esempio 1.6.11. $\gamma(w) = w + \beta \Rightarrow \gamma^k(w) = w + k\beta \Rightarrow \gamma^k(w) \longrightarrow \infty$ per $k \longrightarrow +\infty \Rightarrow \gamma^k \longrightarrow \infty$ (costante) uniformemente sui compatti.

Osservazione 1.6.12.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & X \\ Y \arrow[u, "\Psi", "\cong"'] \arrow[r, "F"] & Y \arrow[u, "\cong", "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

Ψ bigezione (omeomorfismo/biolomorfismo/eccetera), $F = \Psi^{-1} \circ f \circ \Psi$, cioè F *è coniugata a* f. Allora $f^k = \Psi^{-1} \circ f^k \circ \Psi$, cioè F^k è coniugata a f^k per ogni k. In particolare, la "dinamica di F" è "uguale" alla "dinamica di f".

Corollario 1.6.13. Sia $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ parabolico o iperbolico, allora γ^k converge uniformemente sui compatti a una funzione costantemente uguale a un punto fisso di γ sul bordo.

Dimostrazione. A meno di coniugio possiamo supporre $\mathrm{Fix}(\gamma) = \{1\}$ nel caso parabolico e $\{1, -1\}$ nel caso iperbolico. Coniughiamo con Ψ e usiamo gli esempi. $\square$

Sia $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ ellittico, a meno di coniugio $\gamma(0) = 0 \Rightarrow \gamma(z) = e^{2\pi i\theta} z \Rightarrow \gamma^k(z) = e^{2k\pi i\theta} z$. Se $\theta \in \mathbb{Q}$, esiste k_0 t.c. $k_0\theta \in \mathbb{Z} \Rightarrow \gamma^{k_0}(z) \equiv z \iff \gamma^{k_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$.

Esercizio 1.6.14. Se $\theta \notin \mathbb{Q}$, $\gamma^k(z) \neq z$ per ogni $z \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}^*$, da cui si ha anche che $\gamma^k(z) \neq \gamma^h(z)$ per ogni $z \neq 0$ e $h \neq k$.

Esercizio 1.6.15. Se $\theta \notin \mathbb{Q}$, $\{\gamma^k(z_0) \mid k \in \mathbb{N}\}$ è densa nella circonferenza $\{|z| = |z_0|\}$.

Vogliamo adesso studiare la dinamica di una $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ qualunque.

Definizione 1.6.16. Sia $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$, un *punto limite* di $\{f^k\}$ è $g \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ t.c. è il limite di una sottosuccessione $\{f^{k_\nu}\}$, cioè $f^{k_\nu} \longrightarrow g$.

Lemma 1.6.17. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$. Se id_Ω è un punto limite di $\{f^k\}$, allora $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

Dimostrazione. $f^{k_\nu} \longrightarrow \mathrm{id}_\Omega \Rightarrow f$ è iniettiva (se $z_1 \neq z_2$ sono t.c. $f(z_1) = f(z_2)$, allora $f^{k_\nu}(z_1) = f^{k_\nu}(z_2)$, ma la prima tende a z_1 e la seconda a z_2, che sono diversi, assurdo). Se $z_0 \in \Omega$, $z_0 = \mathrm{id}_\Omega(z_0)$. Per il primo teorema di Hurwitz, $\mathrm{id}_\Omega(z_0) \in f^{k_\nu}(\Omega)$ per $\nu \gg 1$, ma $f^{k_\nu}(\Omega) \subseteq f(\Omega) \Rightarrow f$ è suriettiva. □

Proposizione 1.6.18. Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ un dominio limitato, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$. Sia $h \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ un punto limite di $\{f^k\}$ (che esiste per il teorema di Montel). Allora o

(i) $h \equiv c \in \overline{\Omega}$ oppure
(ii) $h \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ e in questo caso $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $h = \lim\limits_{\nu \longrightarrow +\infty} f^{k_\nu}$. Poniamo $m_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$. Possiamo supporre $m_\nu \longrightarrow +\infty$. Per Montel, a meno di una sottosuccessione possiamo supporre $f^{m_\nu} \xrightarrow{\nu \longrightarrow +\infty} g \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$. Se h è costante abbiamo finito. Se h non è costante, per il teorema dell'applicazione aperta h è aperta $\Rightarrow h(\Omega)$ è aperto e per il primo teorema di Hurwitz è contenuto in Ω. Se $z \in \Omega$, $g(h(z)) = \lim\limits_{\nu \longrightarrow +\infty} f^{m_\nu}(f^{k_\nu}(z)) = \lim\limits_{\nu \longrightarrow +\infty} f^{k_{\nu+1}}(z) = h(z) \Rightarrow g|_{h(\Omega)} = \mathrm{id}_\Omega$, ma per il principio di identità questo ci dà $g \equiv \mathrm{id}_\Omega$, dunque per il lemma 1.6.17 abbiamo che $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. A meno di sottosuccessioni è facile vedere che $f^{-k_\nu} = (f^{-1})^{k_\nu}$ converge a h^{-1}. □

Proposizione 1.6.19. Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, $f(z_0) = z_0, z_0 \in \mathbb{D}$, $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora $f^k \longrightarrow z_0$ (costante) uniformemente sui compatti.

Dimostrazione. A meno di coniugio possiamo supporre $z_0 = 0$. Per il lemma di Schwarz, $|f(z)| < |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Fissiamo $0 < r < 1$. In $\overline{\mathbb{D}}_r$, $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|$ ha un massimo $\lambda_r < 1$. Per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}}_r$, $|f(z)| \leq \lambda_r |z| \Rightarrow |f^2(z)| \leq \lambda_r |f(z)| \leq \lambda_r^2 |z| \Rightarrow |f^k(z)| \leq \lambda_r^k |z| \leq \lambda_r^k r \longrightarrow 0$ per $k \longrightarrow +\infty \Rightarrow f^k \longrightarrow 0$ (costante) uniformemente sui compatti. □

Definizione 1.6.20. Chiamiamo *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ l'insieme $E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \,\middle|\, \dfrac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}$. Geometricamente, è un disco di raggio $\dfrac{R}{R+1}$ tangente a $\partial\mathbb{D}$ in τ.

Esercizio 1.6.21. $E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \,\middle|\, \lim\limits_{w \longrightarrow \tau} [\omega(z, w) - \omega(0, w)] < \dfrac{1}{2} \log R \right\}$.

Lemma 1.6.22. (Lemma di Wolff) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ t.c. per ogni $z \in \mathbb{D}$ $\dfrac{|\tau - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \dfrac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2}$ $(\star)$. In altre parole, per ogni $R > 0$ $f(E(\tau, R)) \subseteq E(\tau, R)$.

Dimostrazione. Unicità: se ce ne fossero due, τ e τ_1, prendiamo un orociclo centrato in τ e uno centrato in τ_1 tangenti, allora il punto di tangenza verrebbe mandato in sé e sarebbe dunque un punto fisso in $\mathbb{D}$, assurdo.
Esistenza: prendiamo $\{r_\nu\} \subset (0,1)$ t.c. $r_\nu \nearrow 1^-$ e poniamo $f_\nu = r_\nu f \Rightarrow f_\nu(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}_{r_\nu} \subset\subset \mathbb{D}$, allora per il teorema di Ritt esiste $w_\nu \in \mathbb{D}$ t.c. $f_\nu(w_\nu) = w_\nu$. A meno di sottosuccessioni, possiamo suppore $w_\nu \longrightarrow \in \overline{\mathbb{D}}$. Se $\tau \in \mathbb{D}$, $f(\tau) = \lim\limits_{\nu\longrightarrow+\infty} f_\nu(w_\nu) = \lim\limits_{\nu\longrightarrow+\infty} w_\nu = \tau$, assurdo $\Rightarrow \tau \in \partial\mathbb{D}$. Per Schwarz-Pick, $\left|\dfrac{f_\nu(z) - w_\nu}{1-\bar{w}_\nu f_\nu(z)}\right|^2 \leq \left|\dfrac{z-w_\nu}{1-\bar{w}_\nu z}\right|^2 \Rightarrow 1 - \left|\dfrac{f_\nu(z) - w_\nu}{1-\bar{w}_\nu f_\nu(z)}\right|^2 \geq 1 - \left|\dfrac{z-w_\nu}{1-\bar{w}_\nu z}\right|^2 \Rightarrow$ $\dfrac{|1-\bar{w}_\nu f_\nu(z)|^2}{1-|f_\nu(z)|^2} \leq \dfrac{|1-\bar{w}_\nu z|^2}{1-|z|^2}$. Mandando $\nu \longrightarrow +\infty$ otteniamo $\dfrac{|1-\bar{\tau} f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \dfrac{|1-\bar{\tau} z|^2}{1-|z|^2}$ che moltiplicando per τ ($\tau\bar{\tau} = 1$) dà la tesi. $\square$

Esercizio 1.6.23. Si ha l'uguaglianza in $(\star)$ nel lemma di Wolff $\iff$ f è un automorfismo parabolico con punto fisso τ $\iff$ vale l'uguaglianza in $(\star)$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.

Teorema 1.6.24. (Wolff-Denjoy) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ senza punti fissi in $\mathbb{D}$. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ t.c. $f^k \longrightarrow \tau$ (costante) uniformemente sui compatti.

Dimostrazione. Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ parabolico o iperbolico l'abbiamo già visto. Supponiamo $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Per Montel, $\{f^k\}$ è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{C})$. Useremo il seguente risultato di topologia che viene lasciato come esercizio.

Esercizio 1.6.25. Sia X spazio topologico di Hausdorff. Sia $\{x_k\} \subset X$ con $\overline{\{x_k\}}$ compatta in X. Supponiamo che esista un unico $\bar{x} \in X$ t.c. ogni sottosuccessione convergente di $\{x_k\}$ converge a $\bar{x}$. Allora $x_k \longrightarrow \bar{x}$.

Sia $\tau \in \partial\mathbb{D}$ dato dal lemma di Wolff. Sia $h = \lim\limits_{\nu\longrightarrow+\infty} f^{k_\nu}$ un punto limite di $\{f^k\}$ (che esiste per Montel). Per la proposizione 1.6.18, $h \equiv \sigma \in \overline{\mathbb{D}}$. Se $\sigma \in \mathbb{D}$, $f(\sigma) = \lim\limits_{\nu\longrightarrow+\infty} f(f^{k_\nu}(\sigma)) = \lim\limits_{\nu\longrightarrow+\infty} f^{k_\nu}(f(\sigma)) = \sigma$, assurdo. Quindi $h \equiv \sigma \in \partial\mathbb{D}$. Vogliamo $\sigma = \tau$. Per il lemma di Wolff $f^{k_\nu}(E(\tau,R)) \subseteq E(\tau,R)$ per ogni $R > 0 \Rightarrow \{\sigma\} = h(E(\tau,R)) \subseteq \overline{E(\tau,R)} \cap \partial\mathbb{D} = \{\tau\} \Rightarrow \sigma = \tau$. Si conclude allora per l'esercizio 1.6.25. $\square$

1.7 Germi e prolungamenti analitici

Definizione 1.7.1. Sia $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un cammino continuo. Se esistono $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$, intorni $U_0, \ldots, U_j, \ldots, U_r$ di $\gamma(t_j)$ e $f_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfe t.c. $f_j|_{U_j\cap U_{j+1}} \equiv f_{j+1}|_{U_j\cap U_{j+1}}$ diremo che f_0 SI PROLUNGA OLOMORFICAMENTE LUNGO γ.

Esempio 1.7.2. $\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \gamma(0) = \gamma(1) = 1$. $z = |z|e^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$. $U_0 = D(1, 1/2), f_0 : U_0 :\longrightarrow \mathbb{C}, f_0(z) = z^{1/2} = |z|^{1/2}e^{2\pi i(\theta/2)}$ $(\theta \in (-\pi, \pi))$. $f_0 \in \mathcal{O}(U_0)$. È possibile prolungare olomorficamente f_0 lungo γ con $f(\gamma(t)) = e^{2\pi i(t/2)} \Rightarrow f(\gamma(1)) = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$. $f(\gamma(0)) = 1$.

Definizione 1.7.3. Sia $a \in \mathbb{C}$ e consideriamo le coppie (U, f) dove $U \subseteq \mathbb{C}$ è un intorno aperto di a e $f \in \mathcal{O}(U)$. Definiamo la seguente relazione di equivalenza: $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste $W \subseteq U \cap V$ intorno aperto di a t.c. $f|_W = g|_W$.
$\mathcal{O}_a := {\{(U, f)\}}/{\sim}$ è detta SPIGA DEI GERMI DI FUNZIONI OLOMORFE IN a.
$\underline{f_a} \in \mathcal{O}_a$ si dice GERME di funzione olomorfa.
$(U, f) \in \underline{f_a}$ si dice RAPPRESENTANTE di $\underline{f_a}$.
$\mathcal{O} := \bigcup_{a\in\mathbb{C}} \mathcal{O}_a$ si dice FASCIO DEI GERMI di funzioni olomorfe.
Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, definiamo anche $\mathcal{O}_\Omega := \bigcup_{a\in\Omega} \mathcal{O}_a$.

Esercizio 1.7.4. $\sim$ appena definita è una relazione di equivalenza.

Esercizio 1.7.5. $\mathcal{O}_a$ è una $\mathbb{C}$-algebra ($\underline{f_a} + \underline{g_a}$ è il germe rappresentato da $(U \cap V, (f + g)|_{U\cap V})$ dove $(U, f) \in \underline{f_a}$ e $(V, g) \in \underline{g_a}$).

Osservazione 1.7.6. Possiamo definire per ogni $k \geq 0$ $\underline{f_a}^{(k)}(a) \in \mathbb{C}$ ponendo $\underline{f_a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ con $(U, f) \in \underline{f_a}$.

Definizione 1.7.7. Definiamo p come la *proiezione*

$$\begin{aligned} p : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \underline{f_z} &\longmapsto z \end{aligned}$$

Vale che $p(\mathcal{O}_a) = \{a\}$. Vogliamo rendere p "quasi" un rivestimento (vedremo che, per i soliti esempi stupidi, non può essere un rivestimento).

Vogliamo definire una topologia su $\mathcal{O}$. Definiamo un sistema fondamentale di intorni.

Definizione 1.7.8. Gli intorni del sistema fondamentale sono i seguenti: dati $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{O}(U)$ l'intorno associato è $N(U, f) = \{\underline{f_z} \mid z \in U, (U, f) \in \underline{f_z}\}$.

Esercizio 1.7.9. Esiste un'unica topologia su $\mathcal{O}$ t.c. $\{N(U, f)\}$ siano un sistema fondamentale di intorni.

Osservazione 1.7.10. $p|_{N(U,f)} : N(U, f) \longrightarrow U$ è una bigezione.

Proposizione 1.7.11. $\mathcal{O}$ è uno spazio di Hausdorff.

Dimostrazione. Siano $\underline{f_a} \neq \underline{g_b}$. Se $a \neq b$, esistono $(U,f) \in \underline{f_a}, (V,g) \in \underline{g_b}$ con $U \cap V = \varnothing \Rightarrow N(U,f) \cap N(V,g) = \varnothing$. Se $a = b$, siano $(U,f) \in \underline{f_a}, (V,g) \in \underline{g_a}$, $D \subset U \cap V$ disco aperto di centro a. Vogliamo $N(D,f) \cap N(D,g) = \varnothing$. Per assurdo, sia $\underline{h_z} \in N(D,f) \cap N(D,g) \Rightarrow z \in D$ e $\underline{h_z} = \underline{f_z}$ e $\underline{h_z} = \underline{g_z} \Rightarrow \underline{f_z} = \underline{g_z}$ $\Rightarrow$ esiste un aperto $W \subseteq D$ intorno di z t.c. $f|_W = g|_W$ e per il principio di identità si avrebbe $f \equiv g$ su $D \Rightarrow \underline{f_a} = \underline{g_a}$, assurdo. □

Proposizione 1.7.12. $p : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua, aperta e omeomorfismo locale.

Dimostrazione. Sia $V \subseteq \mathbb{C}$, $p^{-1}(V) = \bigcup \{N(W,f) \mid W \subseteq V \text{ aperto}, f \in \mathcal{O}(W)\}$ è aperto. $p(N(U,f)) = U \Rightarrow p$ è aperta. $p|_{N(U,f)}$ è invertibile: $p^{-1}(z) = \underline{f_z} \Rightarrow$ $p|_{N(U,f)}$ è un omeomorfismo $\Rightarrow p$ è un omeomorfismo locale. □

Definizione 1.7.13. Una *sezione* di $\mathcal{O}$ su un $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto è una $\underline{f} : \Omega \longrightarrow \mathcal{O}$ continua t.c. $p \circ \underline{f} = \mathrm{id}_\Omega$, cioè $\underline{f}(z) \in \mathcal{O}_z$ per ogni $z \in \Omega$.

Esercizio 1.7.14. L'insieme delle sezioni di $\mathcal{O}$ su Ω è in corrispondenza biunivoca con lo spazio $\mathcal{O}(\Omega)$ delle funzioni olomorfe su Ω.

Definizione 1.7.15. Siano $a \in \mathbb{C}, \underline{f_a} \in \mathcal{O}_a$. Sia $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva continua con $\gamma(0) = a$. Un PROLUNGAMENTO ANALITICO DI $\underline{f_a}$ LUNGO γ è un sollevamento $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{O}$ di γ (cioè $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$) t.c. $\tilde{\gamma}(0) = \underline{f_a}$.

Osservazione 1.7.16. p non è un rivestimento perché non tutte le curve possono essere sollevate. Vediamo un esempio.

Esempio 1.7.17. $a = 1, \underline{f_a} = (\mathbb{C}^*, 1/z), \gamma(t) = 1 - t$. Non esiste alcun sollevamento di γ che parte da $\underline{f_a}$.

Definizione 1.7.18. Sia $\mathrm{d} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ così definita: dato $\underline{f_a} \in \mathcal{O}_a$, $\mathrm{d}\underline{f_a}$ è il germe in a rappresentato dalla derivata di un rappresentante di $\underline{f_a}$, cioè se $(U,f) \in \underline{f_a}$, $\mathrm{d}\underline{f_a}$ è rappresentato da (U, f').

Lemma 1.7.19. Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un disco aperto. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ ha una primitiva in D, e due primitive differiscono per una costante additiva.

Dimostrazione. Se $a \in D$ è il centro, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. Una primitiva è data da $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$. È chiaro che due primitive differiscono per una costante additiva. □

Proposizione 1.7.20. $\mathrm{d} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ è un rivestimento.

Dimostrazione. Dati $\underline{f_a} \in \mathcal{O}_a$, $(U, f) \in \underline{f_a}$, $D \subseteq U$ un disco centrato in a, poniamo $\mathcal{D} = N(D, f)$, intorno aperto di $\underline{f_a}$. Sia F una primitiva di f su D che esiste per il lemma 1.7.19, per ogni $c \in \mathbb{C}$ poniamo $\mathcal{D}_c = N(D, F + c)$. Vogliamo dimostrare che:

(i) $\mathrm{d}^{-1}(\mathcal{D}) = \bigcup\limits_{c \in \mathbb{C}} \mathcal{D}_c$;

(ii) $\mathrm{d}|_{\mathcal{D}_c} : \mathcal{D}_c \longrightarrow \mathcal{D}$ è un omeomorfismo;

(iii) $c_1 \neq c_2 \Rightarrow \mathcal{D}_{c_1} \cap \mathbb{D}_{c_2} \varnothing$.

(i), (ii), (iii) $\Rightarrow$ d è un rivestimento. Procediamo con la dimostrazione.

(i) Sia $z \in D$ e $\underline{f_z} \in \mathcal{D}$. Sia $\underline{g_z} \in \mathcal{O}_z$ t.c. $\mathrm{d}\underline{g_z} = \underline{f_z} \Rightarrow$ esiste $(W, g) \in \underline{g_z}$ t.c. $g' = f$; possiamo supporre che $W \subseteq D$, il disco, quindi sempre per il lemma 1.7.19 esiste $c \in \mathbb{C}$ t.c. $g|_W = F|_W + c \Rightarrow \underline{g_z} \in \mathcal{D}_c$. È banale vedere che $\underline{g_z} \in \mathcal{D}_c \Rightarrow \mathrm{d}\underline{g_z} \in \mathcal{D}$.

(ii) È ovvio che $\mathrm{d}(\mathcal{D}_c) = \mathcal{D}$ (per definizione di d e $\mathcal{D}_c$). Questo più il punto (i) ci danno che d è continua e aperta: infatti, gli insiemi della forma $\mathcal{D}$ formano un sistema fondamentale di intorni e la loro preimmagine, unione di aperti, è aperta; anche gli insiemi $\mathcal{D}_c$ sono un sistema fondamentale di intorni (ogni funzione olomorfa è la primitiva della sua derivata) e la loro immagine, come abbiamo visto, è un aperto. $\mathrm{d}|_{\mathcal{D}_c} : \mathcal{D}_c \longrightarrow \mathcal{D}$ è, come visto sopra, suriettiva, ma anche iniettiva perché $\mathcal{D}_c = \bigcup\limits_{z \in D} \mathcal{D}_c \cap \mathcal{O}_z, \mathcal{D} = \bigcup\limits_{z \in D} \mathcal{D} \cap \mathcal{O}_z$, ma per ogni $z \in D$, $\mathcal{D}_c \cap \mathcal{O}_z$ e $\mathcal{D} \cap \mathcal{O}_z$ contengono un unico germe e $\mathrm{d}(\mathcal{O}_z) \subseteq \mathcal{O}_z$, da cui appunto segue l'iniettività ($z \neq z' \Rightarrow \mathcal{O}_z \cap \mathcal{O}_{z'} = \varnothing$).

(iii) Se $\underline{F_z} \in \mathcal{D}_{c_1} \cap \mathcal{D}_{c_2} \Rightarrow \underline{F_z}$ è rappresentanto sia da $(D, F + c_1)$ che da $(D, F + c_2) \Rightarrow F + c_1 \equiv F + c_2$ vicino a $z \Rightarrow c_1 = c_2$.

□

Teorema 1.7.21. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ammette una primitiva.

Dimostrazione. Sia $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathcal{O}$ la sezione corrispondente a f. Sia Φ un sollevamento di φ, cioè $d \circ \Phi = \varphi$ (che esiste per la teoria generali dei rivestimenti).

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O} \arrow[d, "\mathrm{d}"] \\ \Omega \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{O} \end{tikzcd}$$

Anche Φ è una sezione di $\mathcal{O}$: infatti, siccome $p \circ \mathrm{d} = p$, $p \circ \Phi = p \circ \mathrm{d} \circ \Phi = p \circ \varphi = \mathrm{id}_\Omega \Rightarrow$ la $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ associata a Φ è una primitiva di f. □

Concludiamo il paragrafo definendo logaritmo e radice n-esima su insiemi semplicemente connessi.

Corollario 1.7.22. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}^*)$. Allora esiste $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f = \exp(g)$. Inoltre g è unica a meno di costanti additive della forma $2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Sia g_0 una primitiva di f'/f. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(fe^{-g_0}) = f'e^{-g_0}+f(-e^{-g_0}g_0') = f'e^{-g_0}+f(-e^{-g_0}f'/f) = e^{-g_0}(f'-f') = 0 \Rightarrow f \cdot e^{-g_0} =$ costante diversa da zero $= e^{c_0} \Rightarrow f \equiv e^{c_0+g_0}$. Per l'unicità a meno di costanti additive, $\exp(g_1) = \exp(g_2) \Rightarrow \exp(g_1 - g_2) \equiv 1 \Rightarrow g_1 - g_2$ è continua a valori in $2\pi i\mathbb{Z}$ discreto $\Rightarrow g_1 - g_2 = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$ costante. □

Corollario 1.7.23. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}^*)$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Allora esiste $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f = h^n$. Inoltre h è unica a meno di costanti moltiplicative della forma $e^{2\pi ik/n}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Sia $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f = \exp(g)$, allora $h = \exp(g/n)$ soddisfa le condizioni richieste. Poi, $h_1^n = h_2^n \iff (h_1/h_2)^n \equiv 1 \Rightarrow h_1 = e^{2\pi ik/n}h_2$ con $k \in \mathbb{Z}$ costante. □

1.8 Teorema di uniformizzazione di Riemann

Lo scopo di questo paragrafo è mostrare che quasi tutti i domini semplicemente connessi di $\mathbb{C}$ sono biolomorfi al disco. Il teorema di uniformizzazione di Riemann, di cui riporteremo solo l'enunciato, caratterizza i biolomorfismi delle superfici di Riemann, in particolare caratterizza completamente i biolomorfismi di quelle semplicemente connesse.

Lemma 1.8.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{D}$ dominio limitato con $\Omega \neq \mathbb{D}$ e $0 \in \Omega$. Allora esiste $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ t.c. $f(0) = 0, f'(0) \in \mathbb{R}, f'(0) > 0$, $\Omega \subseteq f(\mathbb{D})$ e, se Ω_f è la componente connessa di $f^{-1}(\Omega)$ contentente 0, $f|_{\Omega_f} : \Omega_f \longrightarrow \Omega$ è un rivestimento. Inoltre, $d_1 = \inf\limits_{z \notin \Omega_f} |z| > \inf\limits_{z \notin \Omega} |z| = d$.

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, $b \in \mathbb{D}$ t.c. $b^2 = -a$. Siano $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $\varphi(z) = \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}, \psi(z) = \dfrac{z+b}{1+\bar{b}z}$. Poniamo $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ t.c. $f(z) = \dfrac{\bar{b}}{|b|}\varphi(\psi(z)^2)$. $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}, f(0) = 0$. $f'(0) = 2|b|\dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2} > 0$. Siccome $w \longmapsto w^2$ è un rivestimento di $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ e $\varphi^{-1}(\Omega) \subseteq \mathbb{D}^*$, f è un rivestimento da Ω_f a Ω. Se $d_1 = 1$ abbiamo finito in quanto $d \leq |a| < 1$. Se invece $d_1 < 1$, esiste $z_1 \in \partial\Omega_f \cap \mathbb{D}$ con $|z_1| = d_1 \Rightarrow f(z_1) \notin \Omega \Rightarrow |f(z_1)| \geq d$. Allora per il lemma di Schwarz abbiamo $d \leq |f(z_1)| < |z_1| = d_1$. □

Teorema 1.8.2. (Osgood, Koebe) Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ un dominio limitato, $z_0 \in \Omega$. Allora esiste un unico rivestimento olomorfo $f_0 : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ t.c. $f_0(0) = z_0$ e $f_0'(0) \in \mathbb{R}, f'(0) > 0$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $z_0 = 0 \in \Omega$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{D}$. Sia $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ t.c. $\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \mid f(0) = 0, f'(0) \in \mathbb{R}, f'(0) > 0; \Omega \subseteq f(\mathbb{D})$; se Ω_f è la componente connessa di $f^{-1}(\Omega)$ contenente 0 allora $f|_{\Omega_f} : \Omega_f \longrightarrow \Omega$ è un rivestimento$\}$. Se esiste $f_0 \in \mathcal{F}$ con $\Omega_{f_0} = \mathbb{D}$ ci resta da dimostrare solo l'unicità. Poniamo per ogni $f \in \mathcal{F}$ $d_f = \inf\limits_{z \notin \Omega_f} |z| = \min\limits_{z \in \partial\Omega_f} |z| \leq 1$. Abbiamo $d_f = 1 \iff \Omega_f = \mathbb{D}$. Dobbiamo trovare $f_0 \in \mathcal{F}$ con $d_{f_0} = 1$. Sia $d = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} d_f \leq 1$. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ t.c. $d_{f_n} \longrightarrow d$. Per il teorema di Montel possiamo supporre che $f_n \longrightarrow f_0 \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ con immaggine in $\overline{\mathbb{D}}$. Vogliamo $f_0 \in \mathcal{F}$. Chiaramente $f_0(0) = 0, f_0'(0) \in \mathbb{R}, f'(0) \geq 0$.

1. f_0 non è costante e $f'(0) > 0$: sia $r > 0$ t.c. $\mathbb{D}_r \subset\subset \Omega$. Siccome $f_n : \Omega_{f_n} \longrightarrow \Omega$ è un rivestimento e $0 \in \Omega_{f_n}$, esiste un unico $h_n : \mathbb{D}_r \longrightarrow \Omega_{f_n}$ olomorfa t.c. $f_n \circ h_n = \mathrm{id}_{\mathbb{D}_r}$ e $h_r(0) = 0$. Sempre per il teorema di Montel, a meno di sottosuccessioni possiamo supporre $h_n \longrightarrow h_0 \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_r, \overline{\mathbb{D}})$ t.c. $f_0 \circ h_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{D}_r}$. Dunque h_0 è iniettiva, quindi per il teorema dell'applicazione aperta è aperta, perciò $h_0(\mathbb{D}_r) \subseteq \mathbb{D}$, e f_0 non è costante, dunque per il primo teorema di Hurwitz $f_0(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. $1 = \mathrm{id}_{\mathbb{D}_r}'(0) = (f_0 \circ h_0)'(0) = f_0'(h_0(0)) \cdot h_0'(0) = f_0'(0) \cdot h_0'(0) \Rightarrow f_0'(0) \neq 0 \Rightarrow f_0'(0) > 0$.
2. $f_0(\Omega_{f_0}) = \Omega$ dove Ω_{f_0} è la componente connessa di $f_0^{-1}(\Omega)$ contenente 0. Sia infatti $z_0 \in \Omega$ e sia γ una curva in Ω da 0 a z_0. Ricopriamo γ con dischi $D_0 = \mathbb{D}_r, D_1, \ldots, D_k$ con $D_j \cap D_{j+1} \neq \varnothing$ e $z_0 \in D_k$. Sia $h_{n,0}$ l'inversa di f_n su D_0 t.c. $h_{n,0} = 0$. Per ogni j sia $h_{n,j}$ l'inversa di f_n su D_j che coincide con $h_{n,j-1}$ su $D_{j-1} \cap D_j$. Per Montel, a meno di sottosuccessioni $h_{n,0} \longrightarrow h_{0,0} \in \mathrm{Hol}(D_0, \mathbb{D})$. Per il teorema di Vitali, $h_{n,1} \longrightarrow h_{0,1} \in \mathrm{Hol}(D_1, \mathbb{D})$ e, per induzione, $h_{n,k} \longrightarrow h_{0,k} \in \mathrm{Hol}(D_k, \mathbb{D})$ con $f_0 \circ h_{0,k} = \mathrm{id}_{D_k} \Rightarrow f_0(h_{0,k}(z_0)) = z_0 \Rightarrow z_0 \in f_0(\mathbb{D})$. In realtà $h_{0,k}(z_0) \in \Omega_{f_0}$ perché è immagine della curva ottenuta con $h_{0,j} \circ \gamma$ che parte da 0 e quindi è contenuta nella componente connessa di Ω contenete 0.
3. $f_0 : \Omega_{f_0} \longrightarrow \Omega$ è un rivestimento. Sia $z_0 \in \Omega$, $D \subseteq \Omega$ un disco di centro z_0. Per ogni $w_0 \in f_0^{-1}(z_0) \cap \Omega_{f_0}$ vogliamo un intorno $U_{w_0} \subseteq \Omega_{f_0}$ t.c. $f_0|_{U_{w_0}} : U_{w_0} \longrightarrow D$ è un biolomorfismo e $w_0 \neq w_0' \Rightarrow U_{w_0} \cap U_{w_0'} = \varnothing$. Per il primo teorema di Hurwitz, fissato w_0 esiste $n_1 \geq 1$ t.c. per ogni $n \geq n_1$ esiste $w_n \in \Omega_{f_n}$ t.c. $g_n(w_n) = z_0$ e $w_n \longrightarrow w_0$. Sia $h_n \in \mathrm{Hol}(D, \mathbb{D})$ l'inversa di f_n su D con $h_n(z_0) = w_n$ (possiamo usare D per tutte le f_n perché, dalla teoria dei rivestimenti, dato un rivestimento un aperto semplicemente connesso dell'insieme di arrivo è sempre ben rivestito). Per Montel, a meno di sottosuccessioni $h_n \longrightarrow h_0 \in \mathrm{Hol}(D, \mathbb{D})$ t.c. $f_0 \circ h_0 = \mathrm{id}_D$ (perché $f_n \circ h_n = \mathrm{id}_D$ per ogni n), $h_0(z_0) = w_0$. Poniamo $U_{w_0} = h_0(D)$. È aperto perché h_0 non costante $\Rightarrow h_0$ aperta, inoltre $U_{w_0} \subseteq \Omega_{f_0}$ perché, essendo immagine di un connesso, è connesso, e contiene $z_0 = h_0(z_0)$, dunque

deve stare nella componente connessa di z_0. Sia $w_0' \in f_0^{-1}(z_0) \cap \Omega_{f_0}$, costruiamo $h_0', U_{w_0'}$ come prima, senza perdita di generalità con la stessa sottosuccessione. Per assurdo, esiste $w \in U_{w_0} \cap U_{w_0'}$. Allora esistono $z_1, z_1' \in D$ t.c. $w = h_0(z_1) = h_0'(z_1')$. Applichiamo f_0 a entrambi i membri: $z_1 = f_0(h_0(z_1)) = f_0(w) = f_0(h_0(z_1')) = z_1' \Rightarrow z_1 = z_1'$ è uno zero di $h_0 - h_0'$, dunque per il primo teorema di Hurwitz o $h_0 - h_0' \equiv 0 \Rightarrow w_0 = w_0' \Rightarrow U_{w_0} = U_{w_0'}$ oppure per ogni $n >> 1$ $h_n - h_n'$ ha uno zero, ma h_n è l'inversa di f_n su D con $w_n \in h_n(D)$, h_n' è l'inversa di f_n su D con $w_n' \in h_n'(D)$. $w_0 \neq w_0' \Rightarrow w_n \neq w_n'$ per ogni $n >> 1 \Rightarrow h_n(D) \cap h_n'(D) = \varnothing$ perché inverse di un rivestimento che mandano lo stesso punto in due punti diversi, assurdo.

Per il lemma 1.8.1, $\mathcal{F} \neq \varnothing$, quindi la costruzione che abbiamo fatto di f_0 ha senso. Per assurdo, $d_{f_0} = \sup_{f \in \mathcal{F}} d_f < 1 \Rightarrow \Omega_{f_0} \subset \mathbb{D}$ con $\Omega_{f_0} \neq \mathbb{D}$. Sempre per il lemma 1.8.1 esiste $f_1 \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, $f_1(0) = 0, f_1'(0) \in \mathbb{R}, f_1'(0) > 0$, $\Omega_{f_0} \subset f_1(\mathbb{D})$, $f_1|_{\Omega_{f_1}} : \Omega_{f_1} \longrightarrow \Omega_{f_0}$ rivestimento con Ω_{f_1} la componente connessa di $f_1^{-1}(\Omega_{f_0})$ contentente 0 e $d_{f_1} > d_{f_0}$. Ma allora, se $\tilde{f} = f_0 \circ f_1 : \Omega_{f_1} \longrightarrow \Omega$, abbiamo $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ con $d_{\tilde{f}} = d_{f_1} > d_{f_0}$, assurdo.
Per l'unicità si veda l'esercizio 1.8.3. □

Esercizio 1.8.3. Se $f_1, f_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ sono rivestimenti con $f_1(0) = f_2(0)$ e $f_1'(0), f_2'(0) > 0$, allora $f_1 \equiv f_2$. Hint: dato che sono rivestimenti, si sfruttano h e h^{-1} date dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, shift right, "h"'] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "f_2"'] \arrow[ur, shift right, "h^{-1}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Teorema 1.8.4. (Riemann) Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un dominio semplicemente connesso con $\Omega \neq \mathbb{C}$, allora Ω è biolomorfo a $\mathbb{D}$.

Dimostrazione. Basta far vedere che Ω è biolomorfo a un dominio limitato: quest'ultimo sarebbe semplicemente connesso e rivestito da $\mathbb{D}$ che è connesso, dunque per la teoria generale dei rivestimenti il rivestimento in questione sarebbe un omeomorfismo, ma dato che era anche un olomorfismo, allora è un biolomorfismo. Prendiamo $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $h(z)^2 = z - a$ per ogni $z \in \Omega$. h è iniettiva, ma vale di più: $h(z_1) = \pm h(z_2) \Rightarrow z_1 - a = h(z_1)^2 = h(z_2)^2 = z_2 - a \Rightarrow z_1 = z_2$. Dunque h è iniettiva e $h(\Omega) \cap (-h(\Omega)) = \varnothing$. Fissato $z_0 \in \Omega$, sia $r > 0$ t.c. $D = D(h(z_0), r) \subset h(\Omega) \Rightarrow D \cap (-h(\Omega)) = \varnothing \Rightarrow |h(z) + h(z_0)| \geq r$ per ogni $z \in \Omega \Rightarrow 2|h(z_0)| \geq r$. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ data da $f(z) = \dfrac{r}{4} \dfrac{1}{|h(z_0)|} \dfrac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)}$. $f(z_0) = 0$ e f è iniettiva: $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \dfrac{h(z_2) - h(z_0)}{h(z_1) + h(z_0)} = \dfrac{h(z_2) - h(z_0)}{h(z_2) + h(z_0)} \Rightarrow h(z_1) = h(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow f$

è un biolomorfismo tra Ω e $f(\Omega)$ e $f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$ in quanto $\left|\dfrac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}\right| = |h(z_0)|\left|\dfrac{1}{h(z_0)} - \dfrac{2}{h(z)+h(z_0)}\right| \leq |h(z_0)|\left|\dfrac{1}{|h(z_0)|} + \dfrac{2}{|h(z)+h(z_0)|}\right| \leq \dfrac{4|h(z_0)|}{r}$. $\square$

Per il teorema di Liouville abbiamo che $\mathbb{C}$ non è biolomorfo a $\mathbb{D}$. Dato che $\widehat{\mathbb{C}}$ è compatta, abbiamo che non è biolomorfa né a $\mathbb{D}$ né a $\mathbb{C}$.

Teorema 1.8.5. (Uniformizzazione di Riemann) Se X è una superficie di Riemann semplicemente connessa, allora X è biolomorfo a $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{D}$. Più in generale, se X è una superficie di Riemann qualsiasi e $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ è un rivestimento universale, allora $\widetilde{X}$ è una superficie di Riemann e

(i) se $\widetilde{X}$ è biolomorfo a $\widehat{\mathbb{C}}$, allora anche X è biolomorfo a $\widehat{\mathbb{C}}$ (caso ellittico);
(ii) se $\widetilde{X}$ è biolomorfo a $\mathbb{C}$, allora X è biolomorfo a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, oppure un toro $T_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ con $\mathfrak{Im}\tau > 0$ (caso parabolico);
(iii) in tutti gli altri casi $\widetilde{X}$ è biolomorfo a $\mathbb{D}$ (caso iperbolico).

Quindi, se $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ è limitato e semplicemente connesso, abbiamo per il teorema di Riemann che esiste $f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ biolomorfismo. Domanda: possiamo estendere f a un omeomorfismo da $\overline{\mathbb{D}}$ a $\overline{\Omega}$?

Teorema 1.8.6. (Carathéodory) Un biolomorfismo $\mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ si estende continuo da $\overline{\mathbb{D}}$ a $\overline{\Omega}$ se e solo se $\partial\Omega$ è localmente connesso.

Corollario 1.8.7. Si estende a un omeomorfismo se e solo se $\partial\Omega$ è una curva di Jordan (cioè immagine omeomorfa di S^1).

Esiste una condizione su $\partial\Omega$ diversa che è equivalente all'estendibilità di $f^{-1} : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ al bordo.

1.9 Teoremi di Runge

Lemma 1.9.1. Sia $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto, $V \supset K$ un intorno aperto. Allora esiste $g \in C^\infty(\mathbb{C})$ t.c. $g|_K = 1$ e $supp(g) \subset V$ ($\Rightarrow g|_{\mathbb{C}\setminus V} \equiv 0$) [ricordiamo che $supp(g) = \overline{\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \neq 0\}}$].

Dimostrazione. Sia $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$, $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sia $\eta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ data da $\eta(z) = \dfrac{h(1-|z|^2)}{h(1-|z|^2) + h(|z|^2 - 1/4)}$. $\eta \in C^\infty(\mathbb{C}), \eta(\mathbb{C}) = [0,1]$. $\eta|_{D(0,1/2)} \equiv 1$ e $\eta|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}} \equiv 0$. Dato $p \in K$, sia $r_p > 0$ t.c. $D(p, 2r_p) \subset V$. Allora, per compattezza di K, esistono $p_1, \ldots, p_k \in K$ t.c. $K \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} D(p_j, r_{p_j}/2) \subset$

$\bigcup_{j=1}^{k} D(p_j, 2r_{p_j}) \subset V$. Poniamo $W = \bigcup_{j=1}^{k} D(p_j, r_{p_j})$. Sia $g_j : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_j = \begin{cases} \eta\left(\dfrac{z-p_j}{r_{p_j}}\right) & \text{se } z \in D(p_j, 2r_{p_j}) \\ 0 & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(p_j, r_{p_j})} \end{cases}$, che è ben definita per come è definita η. $g_j \in C^\infty(\mathbb{C})$. Sia $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(z) = 1 - \prod_{j=1}^{k}(1 - g_j(z))$. $g \in C^\infty(\mathbb{C})$. Se $z \in K$, esiste j t.c. $z \in D(p_j, r_{p_j}/2) \Rightarrow g_j(z) = 1 \Rightarrow g(z) = 1$. Se $z \notin \overline{W}$, $z \notin \overline{D(p_j, r_{p_j})}$ per ogni $j = 1, \ldots, k \Rightarrow g_j(z) = 0$ per ogni $j \Rightarrow g(z) = 0 \Rightarrow$ $supp(g) \subseteq \overline{W} \subset V$. $\square$

Teorema 1.9.2. (Teorema di Cauchy generalizzato) Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ un dominio limitato t.c. $\partial\Omega$ sia un numero finito di curve di Jordan. Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, cioè esiste U intorno aperto di $\overline{\Omega}$ su cui u si estende di classe C^1. Allora per ogni $w \in \Omega$ $u(w) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \frac{\partial u/\partial \bar{z}}{z-w}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$.

Dimostrazione. Usando la formula di Gauss-Green abbiamo che $\displaystyle\int_{\partial\Omega}(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Sia $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}), f = \mathfrak{Re}(v), g = \mathfrak{Im}(v)$. $v = f + ig, \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y \Rightarrow v\,\mathrm{d}z = (f\,\mathrm{d}x - g\,\mathrm{d}y) + i(g\,\mathrm{d}x + f\,\mathrm{d}y)$. Per Gauss-Green, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} v\,\mathrm{d}z = \int_{\Omega}\left(-\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\int_{\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\right) + \dfrac{1}{2}i\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)$. $\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z = (\mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = 2i\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z = \left[-\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right) + i\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Allora $\displaystyle\int_{\partial\Omega} v\,\mathrm{d}z = \int_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z$ $(\star)$. Con il teorema di Stokes, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} v\,\mathrm{d}z = \int_{\Omega}\mathrm{d}(v\,\mathrm{d}z) = \int_{\Omega}\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}z = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right) \wedge \mathrm{d}z = \int_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z$. Fissato $w \in \Omega$ poniamo $v(z) = \dfrac{u(z)}{z-w}$ su $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{|z-w| > \varepsilon\}$ dove $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo. $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial D(w, \varepsilon)$. $v \in C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$. Per $(\star)$, $\displaystyle\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{u(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial u/\partial \bar{z}}{z-w}\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z$. Parametrizziamo $\partial D(w, \varepsilon)$ con $\gamma(t) = w + \varepsilon e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, abbiamo allora che $\displaystyle\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{u(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - \int_{\partial D(w,\varepsilon)}\frac{u(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z_\varepsilon - w}\,\mathrm{d}z - \int_0^{2\pi} u(w + \varepsilon e^{it})i\,\mathrm{d}t$. Mandando ε a 0, dato che u è continua, otteniamo $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z -$

$2\pi i u(w)$, mentre $\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u/\partial \bar z}{z-w}\,\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z$ tende a $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial u/\partial \bar z}{z-w}\,\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z$ perché $\dfrac{1}{z-w}$ è integrabile sugli aperti limitati di $\mathbb{C}$. Mettendo tutto insieme si ha la tesi. $\square$

Definizione 1.9.3. L'*equazione di Cauchy-Riemann non omogenea* è $\dfrac{\partial u}{\partial \bar z} = \varphi$ dove l'incognita è u.

Lemma 1.9.4. Sia $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto e μ una misura con $supp(\mu) = K$. Allora l'integrale $u(w) = \displaystyle\int \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}\mu(z)$ definisce una funzione $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$.

Dimostrazione. Una misura μ con $supp(\mu) = K$ è un elemento $\mu \in (C^0(K))^*$ continuo. $\displaystyle\int \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}\mu(z) = \mu\left(\frac{1}{w-\cdot}\right)$, $\dfrac{1}{w-\cdot} \in C^0(K)$ se $w \notin K$. Sia $a \notin K$, $r > 0$ t.c. $\overline{D(a,r)} \cap K = \varnothing$, $w \in D(a,r)$. $\dfrac{1}{w-z} = \dfrac{1}{(a-z)\left(1 - \dfrac{a-w}{a-z}\right)} = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(a-w)^n}{(a-z)^{n+1}}$ in quanto $\left|\dfrac{a-w}{a-z}\right| < 1$ per ogni $z \in K, w \in D(a,r)$, quindi $\mu\left(\dfrac{1}{w-z}\right) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} (a-w)^n \mu\left(\frac{1}{(a-z)^{n+1}}\right)$ è una serie di potenze in w che converge in $D(a,r) \Rightarrow u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$. $\square$

Teorema 1.9.5. Sia $\varphi \in C^k(\mathbb{C})$ a supporto compatto ($\varphi \in C^k_{\mathrm{c}}(\mathbb{C})$). Allora esiste $u \in C^k(\mathbb{C})$ t.c. $\dfrac{\partial u}{\partial \bar z} = \varphi$.

Dimostrazione. Poniamo $u(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{\varphi(z)}{w-z}\,\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z$. È la u data dal lemma 1.9.4 con $\mu(2\pi i)^{-1}\varphi(\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z) = -\dfrac{1}{\pi}\varphi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$. $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$. Facciamo un cambiamento di variabile: $\zeta = w - z \Rightarrow z = w - \zeta, \mathrm{d}\zeta = -\mathrm{d}z, \mathrm{d}\bar\zeta = -\mathrm{d}\bar z$. $u(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \dfrac{\varphi(w-\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\bar\zeta \wedge \mathrm{d}\zeta$. Siccome $1/\zeta$ è integrabile sui compatti di $\mathbb{C}$ e $\varphi \in C^k_{\mathrm{c}}(\mathbb{C})$ possiamo derivare sotto il segno di integrale e le derivate sono continue, $u \in C^k(\mathbb{C})$. $\dfrac{\partial u}{\partial \bar w}(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}(w-\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}(z)}{z-w}\,\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z$ dove $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ è un disco con $K \subset\subset \Omega$. Quindi $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$ e il teorema di Cauchy generalizzato ci dà $\dfrac{\partial u}{\partial \bar w}(w) = \varphi(w)$ per ogni $w \in K$. $\square$

Osservazione 1.9.6. Se $K = supp(\varphi)$, $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$.

Osservazione 1.9.7. Non è detto che u abbia supporto compatto.

Osservazione 1.9.8. u è unica a meno di funzioni in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Definizione 1.9.9. Ricordiamo che se $K \subset\subset \mathbb{C}$ è compatto e $f \in C^0(K)$, allora poniamo $\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)|$. Definiamo adesso $\mathcal{O}(K) = \{f \in C^0(K) \mid$ esiste $(U, \tilde{f})$ dove $U \supset K$ è un intorno aperto di K, $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ e $\tilde{f}|_K \equiv f\}$.

Esempio 1.9.10. Se $w \notin K, f(z) = \dfrac{1}{w-z}$, allora $f \in \mathcal{O}(K)$.

Teorema 1.9.11. (Primo teorema di Runge) Sia $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un intorno aperto di K. Le seguenti sono equivalenti:

(i) ogni $f \in \mathcal{O}(K)$ può essere approssimata uniformemente su K da funzioni in $\mathcal{O}(\Omega)$;
(ii) $\Omega \setminus K$ non ha componenti connesse relativamente compatte in Ω;
(iii) per ogni $z \in \Omega \setminus K$ esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $|f(z)| > \|f\|_K$.

Dimostrazione. (iii) $\Rightarrow$ (ii) Se (ii) è falso, esiste U componente connessa di $\Omega \setminus K$ con $\overline{U} \subset \Omega$ e $\partial U \subseteq K$, dunque per il principio del massimo abbiamo, per ogni $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per ogni $z \in U$, che $|g(z)| \leq \max_{\zeta\in\partial U} |g(\zeta)| \leq \|g\|_K$, contro (iii).
(i) $\Rightarrow$ (ii) Se (ii) è falso, esiste U componente connessa di $\Omega \setminus K$ con $\overline{U} \subset \Omega$ e $\partial U \subseteq K$. Sia $w \in U$, $f(z) = \dfrac{1}{w-z}$ e $f \in \mathcal{O}(K)$. Se (i) fosse vera esisterebbe $\{f_n\} \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|f_n - f\|_K \longrightarrow 0 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_K \longrightarrow 0$ per $m, n \longrightarrow +\infty$. Sempre per il principio del massimo, per ogni $z \in U$ $|g(z)| \leq \max_{\zeta\in\partial U} |g(\zeta)| \leq \|g\|_K \Rightarrow \|f_m - f_n\|_{\overline{U}} \longrightarrow 0$ per $m, n \longrightarrow +\infty \Rightarrow \{f_n\}$ è di Cauchy in $C^0(U \cup K)$ $\Rightarrow$ converga a una $F \in C^0(U \cup K) \subset C^0(\overline{U})$. Per il teorema di Weierestrass, $F \in \mathcal{O}(U)$. Su K abbiamo che $(w-z)F(z) \equiv 1$. Ma allora applicando il principio del massimo a $(w-z)F(z) - 1 \in \mathcal{O}(U) \cap C^0(\overline{U})$ otteniamo $(w-z)F(z) - 1 \equiv 0$ su tutto U, impossibile (in w fa -1).
(ii) $\Rightarrow$ (i) Sia $\mathcal{O}(\Omega)|_K = \{f|_K \mid f \in \mathcal{O}(\Omega)\}$. Vogliamo $\mathcal{O}(\Omega)|_K$ denso in $\mathcal{O}(K)$ rispetto a $\|\cdot\|_K$. Per il teorema di Hahn Banach, se W è un sottospazio vettoriale di V con W, V spazi vettoriali topologici, allora W è denso in $V \iff$ l'unico elemento di V^* che si annulla su W è $0 \iff$ per ogni $\mu \in V^*$ t.c. $\mu|_W \equiv 0$, $\mu \equiv 0$. Per avere la tesi serve quanto segue: se μ è una misura su K (cioè un elemento del duale di $C^0(K)$) t.c. per ogni $f \in \mathcal{O}(K)|_K$ $\displaystyle\int f(z)\,\mathrm{d}\mu(z) = 0$ $(\star)$ allora per ogni $g \in \mathcal{O}(K)$ $\displaystyle\int g(z)\,\mathrm{d}\mu(z) = 0$. Dato μ che soddisfa $(\star)$ definiamo $\varphi : \mathbb{C} \setminus K \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo $\varphi(w) = \displaystyle\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}\mu(z) = \int_K \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}\mu(z)$. Abbiamo visto che, se $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ e $w \notin \Omega$, $(z-w)^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per $(\star)$ $\varphi|_{\mathbb{C}\setminus\Omega} \equiv 0$

$\Rightarrow \varphi \equiv 0$ su ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$ che interseca $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Per ogni $n \geq 0$ $z^n \in \mathcal{O}(\Omega)$, dunque per $(\star)$ $\int z^n \, \mathrm{d}\mu(z) = 0$. Ma $(z-w)^{-1}$ si può sviluppare in una serie di potenze in z che converge uniformemente su K non appena $|w| > \|z\|_K \Rightarrow \varphi \equiv 0$ sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus K$. Mancano solo le componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus K$ con chiusura contenuta in Ω, cioè le componenti connesse di $\Omega \setminus K$ relativamente compatte in Ω. Ma per (ii) non ce ne sono $\Rightarrow \varphi|_{\mathbb{C}\setminus K} \equiv 0$. Sia $g \in \mathcal{O}(K)$, e sia $U \supset K$ un intorno aperto t.c. $g \in \mathcal{O}(U)$ con ∂U "buono" (per fare l'integrale). Sia $\psi \in C^\infty(\mathbb{C})$ t.c. $\psi|_K \equiv 1$ e *supp*$(\psi) \subset\subset U$ data dal lemma 1.9.1. Abbiamo, per il teorema di Cauchy generalizzato, per ogni $w \in K$ $g(w) = \psi(w)g(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{g(z)}{z-w}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{g(z)\psi(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z$. $\psi|_{\partial U} \equiv 0$, dunque il secondo integrale è nullo. Inoltre, $\psi|_K \equiv 1 \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}|_K \equiv 0$, quindi possiamo integrare su $U \setminus K$. Il risultato è dunque uguale a $\frac{1}{2\pi i}\int_{U\setminus K}\frac{g(z)}{z-w}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$. Allora $\int g(w)\,\mathrm{d}\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}\mu(z)\int_{U\setminus K}\frac{g(z)}{z-w}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{U\setminus K} g(z)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z)\left(\int \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}\mu(z)\right)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0$ perché $\int \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}\mu(z) = \varphi(z)$ e $\varphi|_{U\setminus K} \equiv 0$.
(i)+(ii) $\Rightarrow$ (iii) Fissiamo $z_0 \in \Omega \setminus K$. Sia $D \subset \Omega \setminus K$ un disco chiuso di centro z_0. Le componenti connesse di $\Omega \setminus (K \cup D)$ sono lo stesse di $\Omega \setminus K$ con una a cui è stato tolto D. In particolare $K \cup D$ soddisfa (ii). La funzione g che è 0 su K e 1 su D appartiene a $\mathcal{O}(K \cup D)$, dunque per (i) può essere approssimata da funzioni in $\mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow$ esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|f\|_K < 1/2$ e $\|f-1\|_D < 1/2 \Rightarrow |f(z_0)| > 1 - 1/2 = 1/2 \Rightarrow \|f\|_K < 1/2 < |f(z_0)|$. □

Osservazione 1.9.12. Se $U \subset \Omega$ è aperto relativamente compatto in Ω ($\Rightarrow \partial U \subset \Omega$) allora per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\|f\|_{\overline{U}} = \|f\|_{\partial U}$ per il principio del massimo.

Definizione 1.9.13. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $K \subset\subset \Omega$ compatto. L'inviluppo olomorfo di K in Ω è $\widehat{K}_\Omega = \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leq \|f\|_K \forall\, f \in \mathcal{O}(\Omega)\}$.

Proposizione 1.9.14. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $K \subset\subset \Omega$ compatto. Allora:

(i) per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\|f\|_{\widehat{K}_\Omega} = \|f\|_K$;
(ii) $K \subset \widehat{K}_\Omega$ e $\widehat{(\widehat{K}_\Omega)}_\Omega = \widehat{K}_\Omega$;
(iii) $\widehat{K}_\Omega = K \iff \mathcal{O}(\Omega)|_K$ è denso in $\mathcal{O}(K)$;
(iv) $d(w, \widehat{K}_\Omega) = d(w, K)$ per ogni $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. In particolare $d(\widehat{K}_\Omega, \mathbb{C}\setminus\Omega) = d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega)$;
(v) $\widehat{K}_\Omega$ è compatto;
(vi) $\widehat{K}_\Omega$ è l'unione di K e delle componenti connesse di $\Omega \setminus K$ relativamente compatte in Ω;

(vii) $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}_\Omega$ ha solo un numero finito di componenti connesse, nessuna contenuta in Ω.

Dimostrazione. (i) Ovvia.

(ii) Ovvia.

(iii) Viene dal primo teorema di Runge.

(iv) $w \notin \Omega \Rightarrow (z-w)^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow$ per ogni $z \in \widehat{K}_\Omega$ $\dfrac{1}{|z-w|} \leq \sup\limits_{\zeta \in K} \dfrac{1}{|\zeta - w|} \Rightarrow$ $|z-w| \geq \inf\limits_{\zeta \in K} |\zeta - w| = d(w, K)$. $d(w, \widehat{K}_\Omega) = \inf\limits_{z \in \widehat{K}_\Omega} |z-w| \geq d(w,K)$. La disuguaglianza opposta segue da $K \subseteq \widehat{K}_\Omega$.

(v) Usando $f(z) = z$ otteniamo che $\widehat{K}_\Omega$ è limitato. Il punto (iv) ci assicura che $\overline{\widehat{K}_\Omega} \subset \Omega$ e infine $\widehat{K}_\Omega$ è chiuso (segue dalla definizione).

(vi) Sia U una componente connessa di $\Omega \setminus K$ relativamente compatta in Ω $\Rightarrow \partial U \subseteq K$, dunque per l'osservazione precedente per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\|f\|_U \leq \|f\|_K \Rightarrow U \subset \widehat{K}_\Omega$. Sia $K_1 = K \cup$ le componenti connesse di $\Omega \setminus K$ relativamente compatte in Ω. Abbiamo $K_1 \subseteq \widehat{K}_\Omega$ inoltre K_1 è chiuso (in quanto è contenuto in un compatto contenuto in Ω e $\Omega \setminus K_1$ è l'unione delle rimanenti componenti connesse di Ω, che essendo aperto a componenti connesse aperte). Quindi K_1 è compatto e nessuna componente connessa di $\Omega \setminus K_1$ è relativamente compatta in Ω. Per il primo teorema di Runge, $K_1 = \widehat{(K_1)}_\Omega$. $K \subseteq K_1 \Rightarrow \widehat{K}_\Omega \subseteq \widehat{(K_1)}_\Omega \Rightarrow K_1 = \widehat{K}_\Omega$.

(vii) $\widehat{K}_\Omega$ è compatto. Quindi $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}_\Omega$ ha una sola componente connessa illimitata U_0 che contiene il complementare di un disco contenente $\widehat{K}_\Omega$. Siano $U_1, U_2, \ldots,$ le altre componenti connesse (contenute nella chiusura del disco) di $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}_\Omega$. Se, per assurdo, $U_j \subset \Omega$, siccome $\partial U_j \subseteq \widehat{K}_\Omega$ allora $\overline{U}_j = U_j \cup \partial U_j \subset\subset \Omega$ contro il punto (vi). Supponiamo per assurdo che $\{U_j\}$ siano infinite. Per ogni $j \geq 1$ sia $z_j \in U_j \setminus \Omega$. A meno di sottosuccessioni $z_j \longrightarrow z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sia $\rho > 0$ t.c. $D(z_0, \rho) \cap \widehat{K}_\Omega = \varnothing$. Ma $D(z_0, \rho) \subset \mathbb{C} \setminus \widehat{K}_\Omega$ è connesso $\Rightarrow$ esiste j_0 t.c. $D(z_0, \rho) \subset U_{j_0} \Rightarrow U_j$ interseca U_{j_0} per $j >> 1 \Rightarrow U_j = U_{j_0}$, assurdo.

□

Teorema 1.9.15. (Secondo teorema di Runge) Siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ aperti. Allora sono equivalenti:

(i) ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ può essere approssimata uniformemente sui compatti da funzioni in $\mathcal{O}(\Omega_2)$ [(Ω_1, Ω_2) si dice *coppia di Runge*];

(ii) nessuna componente connessa di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ è compatta;

(iii) per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ $\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_1}$;

(iv) per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}_{\Omega_1}$;

(v) per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ è compatto.

Dimostrazione. (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) è ovvio.
(v) $\Rightarrow$ (i) Dato $K \subset \Omega_1$, poniamo $K' = \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ e $K'' = \widehat{K}_{\Omega_2} \setminus \Omega_1$. $K' \cap K'' = \varnothing, K \subseteq K'$, K', K'' sono compatti e $\widehat{K}_{\Omega_2} = K' \cup K''$. Sia ora $f \in \mathcal{O}(\Omega_1), \varepsilon > 0$. Applichiamo il primo teorema di Runge a $\widehat{K}_{\Omega_2}$ e $\tilde{f}$ t.c. $\tilde{f}|_{K'} \equiv f$ e $\tilde{f} \equiv 1$ in un intorno di $K'' \Rightarrow$ esiste $g \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\|g-f\|_K \leq \|g-f\|_{K'} \leq \|g-f\|_{\widehat{K}_{\Omega_2}} < \varepsilon$.
(v) $\Rightarrow$ (iii) Dato $K \subset \Omega_1$, definiamo K' e K'' come sopra. Applichiamo il primo teorema di Runge a $f|_K \equiv 0, f|_{K''} \equiv 1$. Se $z_0 \in K''$ esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\|F\|_K < 1/2$ e $\|F-1\|_{K''} < 1/2 \Rightarrow |F(z_0)| > 1/2 > \|F\|_K \Rightarrow z_0 \notin \widehat{K}_{\Omega_2}$, assurdo $\Rightarrow K'' = \varnothing \Rightarrow \widehat{K}_{\Omega_2} \subseteq \Omega_1 \Rightarrow \widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_1}$.
(i) $\Rightarrow$ (iv) È chiaro che $\widehat{K}_{\Omega_1} \subseteq \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Sia $z_0 \in \Omega_1 \setminus \widehat{K}_{\Omega_1}$. Allora esistono $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, $\varepsilon > 0$ t.c. $|f(z_0)| > \|f\|_K + \varepsilon$. Sia $F \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\|F - f\|_{K \cup \{z_0\}} < \varepsilon/2$. Allora $|F(z_0)| > |f(z_0)| - \varepsilon/2 > \|f\|_K + \varepsilon/2 > \|F\|_K \Rightarrow z_0 \notin \widehat{K}_{\Omega_2} \Rightarrow$ (iv).
(ii) $\Rightarrow$ (iii) sia U una componente connessa di $\Omega_2 \setminus K$ relativamente compatta in Ω_2. Siccome $\partial U \subseteq K \subset \Omega_1$, $L = U \setminus \Omega_1$ è compatto in Ω_2. Per assurdo, $a \in L$ e sia C la componente connessa di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ che contiene $a \Rightarrow U \cup C$ è connesso; ma U è una componente connessa di $\Omega_2 \setminus K \supset \Omega_2 \setminus \Omega_1 \Rightarrow U \supseteq C \Rightarrow C$ è relativamente compatto in Ω_2 contro (ii), assurdo $\Rightarrow L = \varnothing \Rightarrow U \subset \Omega_1$. Inoltre $\partial U \subseteq K \Rightarrow U$ è una componente connessa relativamente compatta in $\Omega_1 \Rightarrow U \subseteq \widehat{K}_{\Omega_1} \Rightarrow \widehat{K}_{\Omega_2} \subseteq \widehat{K}_{\Omega_1}$ per il punto (vi) della proposizione 1.9.14. L'altra inclusione è ovvia.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sia L la componente connessa di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ compatta in Ω_2. Per un lemma topologico, possiamo trovare un intorno U di L relativamente compatto in Ω_2 con $\partial U \subset \Omega_1$. Per il principio del massimo e per (iii), $\Omega_1 \supset \widehat{(\partial U)}_{\Omega_1} = \widehat{(\partial U)}_{\Omega_2} \supseteq U \supseteq L \Rightarrow L = \varnothing$. $\square$

Corollario 1.9.16. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Ogni $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ è approssimabile uniformemente sui compatti con polinomi $\iff$ $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non ha componenti connesse compatte.

Dimostrazione. Prendiamo $\Omega_1 = \Omega, \Omega_2 = \mathbb{C}$.
($\Leftarrow$) Il secondo teorema di Runge ci dà l'approssimazione con funzioni in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, che a loro volta si approssimano con polinomi.
($\Rightarrow$) I polinomi sono funzioni in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, quindi si conclude sempre per il secondo teorema di Runge. $\square$

Teorema 1.9.17. (Terzo teorema di Runge) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $\mathbb{C} \setminus \Omega = \bigcup_\alpha C_\alpha$ la decomposizione in componenti connesse. Sia $E \subset \mathbb{C}$ discreto con esattamente un punto in ciascuna C_α compatta. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ può essere approssimata con funzioni razionali con poli in E.

Dimostrazione. Sia $K \subset\subset \Omega$ compatto e sia $L = \widehat{K}_\Omega$. $\mathbb{C} \setminus L$ ha una componente connessa illimitata U e un numero finito di componenti connesse limitate

$W_1, \dots, W_p$. Inoltre per ogni j $W_j \not\subset \Omega$, per cui interseca $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e quindi contiene una componente connessa C_{α_j} di $\mathbb{C} \setminus \Omega \Rightarrow C_{\alpha_j}$ è compatta; sia $\{a_j\} = E \cap C_{\alpha_j}$. Sia $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_p\} \supset L$. Le componenti connesse di $\Omega_0 \setminus L$ sono U e $W_j \setminus \{a_j\}$. Nessuna di queste è relativamente compatta in Ω_0. Per il secondo teorema di Runge, per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega_0)$ t.c. $\|F - f\|_L < \varepsilon$. Sia g_j la parte principale dello sviluppo di Laurent di F in $a_j \Rightarrow F = h + g_1 + \cdots + g_p$ con $h = F - g_1 - \cdots - g_p \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Sia $P \in \mathbb{C}[z]$ t.c. $\|P - h\|_L < \varepsilon/(p+1)$. Se $g_j(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)}(z - a_j)^n$ possiamo trovare $N > 0$ t.c. $\|g_j - \displaystyle\sum_{n=-N}^{-1} c_n^{(j)}(z - a_j)^n\|_L = \|g_j - g_{j,N}\|_L \leq \varepsilon/(p+1)$ per ogni $j = 1, \dots, p$. Poniamo $G = P + g_{1,N} + \cdots + g_{p,N}$. G è razionale e $\|F - G\|_L \leq \|h - P\|_L + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \|g_j - g_{j,N}\|_L < (p+1)\frac{\varepsilon}{p+1} = \varepsilon$. □

1.10 Applicazioni dei teoremi di Runge

Lemma 1.10.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora esiste una successione crescente $\{K_\nu\}$ di compatti in Ω t.c.: $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$, $\displaystyle\bigcup_\nu K_\nu = \Omega$ e $\widehat{(K_\nu)}_\Omega = K_\nu$.

Dimostrazione. Poniamo $H_\nu = \{z \in \Omega \mid d(z, \partial\Omega) \geq 1/\nu, |z| \leq \nu\}$. H_ν è compatto, $H_\nu \subset \overset{\circ}{H}_{\nu+1}$ e $\displaystyle\bigcup_\nu H_\nu = \Omega$. Poniamo $K_1 = \widehat{(H_1)}_\Omega$, che è compatto. Sia μ_1 t.c. $K_1 \subset \overset{\circ}{H}_{\mu_1}$ e poniamo $K_2 = \widehat{(H_{\mu_1})}_\Omega$. Continuando così abbiamo i K_ν. □

Teorema 1.10.2. (Malgrange) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Allora esiste $u \in C^\infty(\Omega)$ t.c. $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi$ $(\star)$ su Ω.

Dimostrazione. Sappiamo che se $K \subset\subset \Omega$ compatto, allora esiste $v \in C^\infty(\Omega)$ che risolve $(\star)$ in un intorno di K. Infatti sia $\alpha \in C_C^\infty(\mathbb{C})$ con $\alpha \equiv 1$ in un intorno di K e 0 fuori da un intorno compatto e applichiamo quanto sappiamo a $\alpha\varphi$. Sia $\{K_\nu\}$ data dal lemma 1.10.1. Per ogni ν sia $v_\nu \in C^\infty(\Omega)$ soluzione di $(\star)$ in un intorno di K_ν. Osserviamo che $v_{\nu+1} - v_\nu \in \mathcal{O}(K_\nu)$. Per il primo teorema di Runge, esiste $h_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|v_{\nu+1} - v_\nu - h_\nu\|_{K_\nu} < 2^{-\nu}$. Poniamo $u_\nu = v_\nu + \displaystyle\sum_{\mu \geq \nu}(v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu$ su K_ν. La serie è in $\mathcal{O}(K_\nu)$ e la somma finita è in $\mathcal{O}(\Omega)$, quindi u_ν risolve $(\star)$ in un intorno di K_ν. Ora, u_ν non dipende da ν: $u_{\nu+1} = v_{\nu+1} + \displaystyle\sum_{\mu \geq \nu+1}(v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu} h_\mu = v_\nu + (v_{\nu+1} - v_\nu - h_\nu) +$

$$\sum_{\mu\geq\nu+1}(v_{\mu+1}-v_\mu-h_\mu)-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}h_\mu = v_\nu+\sum_{\mu\geq\nu}(v_{\mu+1}-v_\mu-h_\mu)-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}h_\mu = u_\nu.$$

Dunque abbiamo definito $u \in C^\infty(\Omega)$ ponendo $u|_{\overset{\circ}{K_\nu}} = u_\nu|_{\overset{\circ}{K_\nu}}$ e allora $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \varphi$ su Ω in quanto vale su ciascun K_ν. □

Teorema 1.10.3. (Mittag-Leffler) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto e chiuso. Sia per ogni $a \in E$ $p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$. Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ t.c. $f - p_a$ sia olomorfa in a per ogni $a \in E$. In particolare, possiamo trovare $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ con parti principali descritte.

Dimostrazione. Sia $\{K_\nu\}$ data dal lemma 1.10.1. Per ogni $\nu \geq 1$ poniamo $g_\nu = \sum_{a\in E\cap K_\nu} p_a$ (è una somma finita). Ora, $g_{\nu+1} - g_\nu = \sum_{a\in E\cap(K_{\nu+1}\setminus K_\nu)} p_a \in \mathcal{O}(K_\nu)$. Per il primo teorema di Runge, esiste $h_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|g_{\nu+1}-g_\nu-h_\nu\|_{K_\nu} \leq 2^{-\nu}$. Sia $f = g_\nu + \sum_{\mu\geq\nu}(g_{\mu+1}-g_\mu-h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu$. Come nella dimostrazione del teorema di Malgrange, f non dipende da $\nu \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ (infatti, per ogni ν, gli unici punti di K_ν dove f può non essere olomorfa sono quelli di di g_ν, dunque per definizione quelli di E). Sia $a \in E$ e sia $\nu \geq 1$ t.c. $a \in K_\nu$. La serie appartiene a $\mathcal{O}(K_\nu)$, la somma finita appartiene a $\mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow f - p_a = g_\nu - p_a$+qualcosa olomorfo in $K_\nu \Rightarrow f - p_a$ è olomorfa vicino ad a. □

Corollario 1.10.4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto e chiuso in Ω. Siano dati per ogni $a \in E$ un intorno aperto $U_a \subset \Omega$ di a e $\varphi_a \in \mathcal{O}(U_a \setminus \{a\})$. Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ t.c. $f - \varphi_a$ sia olomorfa vicino ad a per ogni $a \in E$.

Dimostrazione. Sia p_a la parte principale dello sviluppo di Laurent di φ_a in $a \Rightarrow$ $p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ e $\varphi_a - p_a$ è olomorfa in un intorno di a. Allora basta prendere f data del teorema di Mittag-Leffler perché $f - \varphi_a = (f - p_a) - (\varphi_a - p_a)$. □

Lemma 1.10.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ appartenenti alla stessa comoponente connessa di $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $e^{f(z)} = \dfrac{z-a}{z-b}$.

Dimostrazione. Per esercizio. □

Teorema 1.10.6. (Quarto teorema di Runge) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $K \subset\subset \Omega$ compatto t.c. $\widehat{K}_\Omega = K$. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)(K)$ t.c. $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in K$. ù Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $F(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ e $\|F - f\|_K < \varepsilon$.

Dimostrazione. Siccome f non si annulla su K, $\delta_0 = \min_{z\in K} |f(z)| > 0$. Quindi se $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|\tilde{f}-f\|_K < \delta_0/2$ allora $\tilde{f}(z) \neq 0$ per ogni $z \in K$. Sappiamo che $\mathbb{C}\setminus K$ ha una componente connessa illimitata U_0 e un numero finito di componenti connesse limitate $U_1, \dots, U_p$ con $U_j \not\subset \Omega$; scegliamo per ogni $j = 1, \dots, p$ $a_j \in U_j \setminus \Omega$. Possiamo approssimare f con una funzione razionale $\tilde{f}$ con poli fuori da K; per l'osservazione fatta all'inizio della dimostrazione possiamo supporre che $\tilde{f}$ non si annulli mai in un intorno di K. Quindi $\tilde{f}(z) = c \prod_{\nu=1}^{d} (z-b_\nu)^{m_\nu}$ con $c \in \mathbb{C}^*, m_\nu \in \mathbb{Z}^*, b_\nu \in \mathbb{C}\setminus K$. Fissiamo $R > 0$ t.c. $K \subset\subset D(0,R)$ e poniamo $a_0 = R \in U_0$. Per $j = 0, \dots, p$ sia $A_j = \{\nu \mid b_\nu \in U_j\}$. Scriviamo $\tilde{f}(z) = cG(z)(z-R)^{n_0} \prod_{j=0}^{p} \prod_{\nu\in A_j} \left(\frac{z-b_\nu}{z-a_j}\right)^{m_\nu}$ dove $n_j = \sum_{\nu\in A_j} m_\nu$ e $G(z) = \prod_{j=1}^{p} (z-a_j)^{n_j}$. Se $\nu \in A_j$ allora a_j e b_ν appartengono alla stessa componente connessa di $\mathbb{C}\setminus K$, dunque per il lemma 1.10.5 esiste $\varphi_{\nu,j} \in \mathcal{O}(K)$ t.c. $\frac{z-b_\nu}{z-a_j} = e^{\varphi_{\nu,j}(z)}$. Inoltre esiste $\varphi_0 \in \mathcal{O}(D(0,R))$ t.c. $z - R = \exp(\varphi_0(z))$. Quindi esiste $h \in \mathcal{O}(K)$ t.c. $\tilde{f}(z) = cG(z)e^{h(z)}$. Per il primo teorema di Runge, per ogni $\delta > 0$ esiste $H \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|H-h\|_K < \delta$. Poniamo $F = cGe^H \in \mathcal{O}(\Omega)$ e mai nulla su Ω; inoltre $\|\tilde{f} - F\|_K = |c|\|G\|_K\|e^H - e^h\|_K$. A patto di prendere $\delta << 1$ possiamo rendere $\|\tilde{f} - F\|_K$ piccolo quanto vogliamo e quindi $\|f - F\|_K$ piccolo quanto vogliamo. □

Esercizio 1.10.7. Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni complesse limitate definite su un insieme S t.c. $\sum_n |u_n|$ converge uniformemente su S. Allora il prodotto $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1+u_n(z))$ converge uniformemente su S e $f(z_0) = 0 \iff$ esiste $n \geq 1$ t.c. $u_n(z_0) = -1$.

Teorema 1.10.8. (Weierstrass) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto e chiuso in Ω, $k : E \longrightarrow \mathbb{Z}$. Allora esiste $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ t.c. $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$, f non ha zeri in $\Omega \setminus E$ e $(z-a)^{-k(a)} f(z)$ sia olomorfa mai nulla in un intorno di a per ogni $a \in E$.

Dimostrazione. Sia $\{K_\nu\}$ data dal lemma 1.10.1. Poniamo $F_\nu(z) = \prod_{s\in E\cap K_\nu} (z-a)^{k(a)}$. In particolare, $F_{\nu+1}/F_\nu \in \mathcal{O}(K_\nu)$ e non si annulla in K_ν. Sia $\delta_\nu = \min_{z\in K_\nu} \left|\frac{F_{\nu+1}(z)}{F_\nu(z)}\right| > 0$. Sia $g_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ data dal quarto teorema di Runge mai nulla in Ω t.c. $\left\|\frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} - g_\nu\right\|_{K_\nu} < \frac{2^{-\nu-1}\delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}} \Rightarrow$ per ogni $z \in K_\nu$ $|g_\nu(z)| \geq \left|\frac{F_{\nu+1}(z)}{F_\nu(z)}\right| - \frac{2^{-\nu-1}\delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}} \geq \delta_v - \frac{2^{-\nu-1}\delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}} = \frac{\delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}}$. Ponendo $h_\nu = \frac{1}{g_\nu} \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla in Ω, $\left\| \frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} h_\nu - 1 \right\|_{K_\nu} < 2^{-\nu-1}$. Poniamo $f = F_\nu \prod_{\mu \geq \nu} \left(\frac{F_{\mu+1}}{F_\mu} h_\mu \right) \prod_{j=1}^{\nu-1} h_j$. $f|_{K_\nu}$ ha esattamente gli stessi zeri e poli di F_ν; ma sempre per la stessa dimostrazione, f non dipende da ν. Quindi $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ ed è come voluto. $\square$

Corollario 1.10.9. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Allora ogni $q \in \mathcal{M}(\Omega)$ è il quoziente di due funzioni olomorfe in Ω.

Dimostrazione. $E = \{$poli di $q\}$. Sia $k : E \longrightarrow \mathbb{Z}$ data da $k(a) = -ord_a(q)$. Allora il teorema di Weierstrass ci fornisce $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $gq \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow q = (gq)/g$ come voluto. $\square$

Definizione 1.10.10. $\Omega \subset \mathbb{C}$ è il DOMINIO DI ESISTENZA di $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se per ogni $p \in \partial\Omega$ non esiste $D = D(p,r)$ per cui esiste $F \in \mathcal{O}(D)$ t.c. $F|_U \equiv f|_U$ dove U è la componente connessa di $D \cap \Omega$ t.c. $p \in \partial U$.

Proposizione 1.10.11. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Allora Ω è il dominio di esistenza di una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $\{K_\nu\}$ data dal lemma 1.10.1. Sia $\{D_n\}$ una successione di dischi aperti t.c.:

1. $\overline{D_n} \subset \Omega$;
2. $K_1 \subset D_1 \cup \cdots \cup D_{n_1}$ e $K_{\nu+1} \setminus \overset{\circ}{K}_\nu \subset D_{n_\nu+1} \cup \cdots \cup D_{n_{\nu+1}}$;
3. se $n \geq n_{\nu+1} + 1$ allora $D_n \cap K_\nu = \varnothing$;
4. il raggio di D_n è minore di $1/\nu$ per $n_\nu + 1 \leq n \leq n_{\nu+1}$.

$\Omega = \bigcup_n D_n$, il raggio di D_n tende a 0, $\{D_n\}$ è localmente finita, cioè ogni punto ha un intorno che interseca solo un numero finito di D_n ($\overset{\circ}{K}_\nu$). Sia $\{a_n\}$ una successione di punti distinti t.c. $a_n \in D_n$. $\{a_n\}$ è discreto e chiuso in quanto non ha punti di accumulazione in Ω. Per il teorema di Weierstrass, esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i cui zeri sono esattamente $\{a_n\}$ (in particolare $f \not\equiv 0$). Vogliamo mostrare che Ω è il dominio di esistenza di f. Per assurdo, sia $p \in \partial\Omega$, $D = D(p,\rho)$, U la componente connessa di $D \cap \Omega$ con $p \in \partial U$ e sia $F \in \mathcal{O}(D)$ t.c. $F|_U \equiv f|_U$. Poniamo $D' = D(p, \rho/2)$. Si ha $p \in \partial\Omega \cap \partial(D' \cap U)$, per cui $D' \cap U$ non è relativamente compatto in $\Omega \Rightarrow D' \cap U$ interseca un numero infinito di dischi D_{n_k}. Siccome il raggio di D_{n_k} tende a 0, è definitivamente minore di $\rho/4 \Rightarrow$ un numero infinito di dischi D_{n_k} sono contenuti in D e intersecano U, ma U è una componente connessa di $D \cap \Omega$ e i dischi D_{n_k} sono connessi e stanno in $D \cap \Omega$, quindi infiniti D_{n_k} sono contenuti in $D \cap U$. Più precisamente, $D_{n_k} \subset D(p, 3\rho/4) \cap U$. Quindi F ha infiniti zeri distinti in $D(p, 3\rho/4) \subset\subset D(p,\rho) \Rightarrow$ gli zeri di F hanno un punto di accumulazione in $D \Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow f|_U \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ su Ω, assurdo. $\square$

2 Funzioni olomorfe in più variabili

2.1 Notazioni e definizione

$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ è un multi-indice, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$. $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. $\dfrac{\partial}{\partial z_j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - i\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} + i\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$. $\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + i\,\mathrm{d}y_j$, $\mathrm{d}\bar{z}_j = \mathrm{d}x_j - i\,\mathrm{d}y_j$. $\|z\|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$. $\partial f = \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}\,\mathrm{d}z_j$, $\bar{\partial} f = \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\,\mathrm{d}\bar{z}_j$.

Esercizio 2.1.1. $\partial + \bar{\partial} = \mathrm{d}$, cioè $\partial f + \bar{\partial} f = \displaystyle\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j\right)$.

$\dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta} = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial z_1^{\beta_1} \ldots \partial z_n^{\beta_n}}$.

Esercizio 2.1.2. $\dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta}(z - z^0)^\alpha = \dfrac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}(z - z^0)^{\alpha-\beta}$.

$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}y_n = \left(\dfrac{1}{2i}\right)^n (\mathrm{d}\bar{z}_1 \wedge \mathrm{d}z_1) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}\bar{z}_n \wedge \mathrm{d}z_n)$. Dominio=aperto connesso. *Palle aperte*: $B(z^0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - z^0\| < r\}$. $B^n = B(0,1)$. *Polidischi di poliraggio* $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ ($r = (r, \ldots, r) \in (\mathbb{R}^+)^n$): $P(z^0, \underline{r}) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j - z_j^0| < r_j\} = D(z_1^0, r_1) \times \cdots \times D(z_n^0, r_n)$. *Polidisco unitario*: $\mathbb{D}^n = P(0, \underline{1}) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \max_j |z_j| < 1\}$. $(z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)$.

Definizione 2.1.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. $f : \Omega \in \mathbb{C}$ è OLOMORFA se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

(i) per ogni j e per ogni $(z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ la funzione che manda $\zeta \longmapsto f(z_1, \ldots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \ldots, z_n)$ è olomorfa dove definita (*olomorfa separatamente in ciascuna variabile*);

(ii) f è C^1 in ciascuna variabile e $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0$ per ogni j ($\bar{\partial} f \equiv 0$; *Cauchy-Riemann*);

(iii) per ogni $z^0 \in \Omega$ esiste $r > 0$ t.c. $P(z^0, r) \subset \Omega$ dove $f(z) = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (z - z^0)^\alpha$ e la serie converge assolutamente (*analitica*);

(iv) f è C^0 in ciascuna variabile, localmente limitata e per ogni $z^0 \in \Omega$ esiste $r > 0$ t.c. $P(z^0, r) \subset \Omega$ e

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r} \cdots \int_{|\zeta_n - z_n^0| = r} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)}\,\mathrm{d}\zeta_1 \ldots \mathrm{d}\zeta_n$$

per ogni $z \in P(z^0, r)$ (*formula di Cauchy*).

2.2 Prime differenze con le funzioni in una variabile

Prima di studiare quali risultati per le funzioni olomorfe in una variabile si mantengono nel caso in più variabili, vediamo prima un po' di differenze semplici da dimostrare ma molto distintive. Cominciamo con il *fenomeno di Hartogs*: l'ultima cosa che abbiamo visto per le funzioni in una variabile è che ogni dominio è dominio di esistenza per una certa funzione olomorfa. Questo è in generale falso per funzioni in più variabili.

Proposizione 2.2.1. (Hartogs) Sia $D = \mathbb{D}^2 \setminus P(0, 1/2)$. Ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ si estende a una $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2)$.

Dimostrazione. Se $|z| < 3/4$ e $1/2 < |w| < 1$, per Cauchy in una variabile abbiamo che $f(z,w) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D(0,3/4)} \dfrac{f(\zeta, w)}{\zeta - z} \mathrm{d}z$. L'integrale è ben definito per $|z| < 3/4$ e $|w| < 1$ ed è olomofo in z e w, dunque estende f a tutto $\mathbb{D}^2$ (che coincida con f anche sui punti di D che non erano stati considerati prima di fare l'integrale discende dal principio di identità). □

Problema: caratterizzare i domini di esistenza di funzioni olomorfe in più variabili (*domini di olomorfia*). Non vedremo molto in questo senso. Vediamo invece alcune cose per quanto riguarda l'essere biolomorfi. In una variabile, il teorema di uniformizzazione di Riemann ci dava una caratterizzazione dei domini tra loro biolomorfi basata esclusivamente sulla topologia del dominio. Vedremo che questo non è possibile in più variabili. Ci sono problemi tra domini "lisci" (in termini di differenziabilità) e non, ma anche piccolissime variazioni lisce possono causare problemi. Ecco un paio di risultati in questo senso.

Esempio 2.2.2. Non vale nulla che assomigli al teorema di uniformizzazione di Riemann poiché B^n non è biolomorfa e $\mathbb{D}^n$ (Poincaré).

Esempio 2.2.3. (Greene-Krantz) "I foruncoli fanno male": se si prende un dominio liscio, come ad esempio B^n, è possibile fare una modifica "minuscola", cioè localizzata in un intorno di un punto, e che mantenga comunque il dominio liscio, tale che quello che si ottiene non è biolomorfo al dominio originale. Vale di più: esiste un'infinità più che numerabile di domini omeomorfi alla palla che a due a due non sono biolomorfi.

Esempio 2.2.4. Non esistono zeri isolati. Infatti, se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ha uno zero isolato z^0, $1/f$ sarebbe olomorfa in $P(z^0, r) \setminus P(z^0, r/2)$ per $r << 1$, ma non estendibile a $P(z^0, r)$, contro Hartogs, assurdo.

Un'altra cosa che cambia sono i domini di convergenza delle serie di potenze: in una variabile sappiamo che sono dischi, in più variabili invece vediamo.

Esempio 2.2.5. $\sum_{n\geq 0}(z_1+z_2)^n$ converge in $|z_1+z_2|<1$;
$\sum_{n\geq 0}(z_1z_2)^n$ converge in $|z_1z_2|<1$, che è un insieme illimitato;
$\sum_{n\geq 0} z_1^n$ converge in $|z_1|<1$, cioè $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$.

Un'altra differenza è l'equazione di Cauchy-Riemann non omogenea.

Esempio 2.2.6. In una variabile abbiamo risolto $\bar{\partial}u=\psi$ con $\psi\in C^\infty_C(\mathbb{C})$. In generale, però, non c'è una soluzione $u\in C^\infty_C(\mathbb{C})$. Infatti, supponento che esista, u avrebbe supporto compatto, per cui $supp(u)\subset D(0,R)$. Allora $0=\int_{\partial D(0,r)} u(z)\,\mathrm{d}\zeta$, che per Gauss-Green o Stokes è uguale a $\int_{D(0,R)}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta=2i\int_{\partial D(0,R)}\psi\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, che in generale è diverso da 0. Quindi se $\int_{\mathbb{C}}\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\neq 0$ allora u non può avere supporto compatto. Invece, se $n\geq 2$, $\psi_1,\ldots,\psi_n\in C^\infty_C(\mathbb{C}^n)$, $\psi=\psi_1\,\mathrm{d}\bar{z}_1+\cdots+\psi_n\,\mathrm{d}\bar{z}_n$ con condizioni di compatibilità ($\frac{\partial\psi_h}{\partial\bar{z}_k}=\frac{\partial\psi_k}{\partial\bar{z}_h}$), allora esiste $u\in C^\infty_C(\mathbb{C}^n)$ t.c. $\bar{\partial}u=\psi$. Le condizioni di compatibilità sono necessarie, infatti se u è una soluzione $\frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{z}_l}=\frac{\partial^2 u}{\partial\bar{z}_l\partial\bar{z}_j}=\frac{\partial^2 u}{\partial\bar{z}_j\partial\bar{z}_l}=\frac{\partial\psi_l}{\partial\bar{z}_j}$.

Per dimostrare il riultato appena enunciato useremo dei risultati che sappiamo essere veri in una variabile e che nella prossima sezione dimostreremo anche per funzioni in più variabili.

Teorema 2.2.7. Se $n\geq 2$, $\psi_1,\ldots,\psi_n\in C^\infty_C(\mathbb{C}^n)$, $\psi=\psi_1\,\mathrm{d}\bar{z}_1+\cdots+\psi_n\,\mathrm{d}\bar{z}_n$, $\frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{z}_l}=\frac{\partial\psi_l}{\partial\bar{z}_j}$, allora esiste $u\in C^\infty_C(\mathbb{C}^n)$ t.c. $\bar{\partial}u=\psi$.

Dimostrazione. Fissiamo $j\neq 1$ e poniamo $u_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\psi_j(z_1,\ldots,z_{j-1},\zeta,z_{j+1},\ldots,z_n)}{\zeta-z_j}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta$. $\frac{\partial u_j}{\partial\bar{z}_l}(z)=\frac{1}{z\pi i}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\int_{\mathbb{C}}\frac{\psi_j(z_1,\ldots,z_{j-1},\zeta+z_j,z_{j+1},\ldots,z_n)}{\zeta}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta=$
$=\frac{1}{z\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{z}_l}(z_1,\ldots,z_{j-1},\zeta+z_j,z_{j+1},\ldots,z_n)}{\zeta}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta$. Dalle condizioni di compatibilità, è uguale a $\frac{1}{z\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial\psi_l}{\partial\bar{z}_j}(z_1,\ldots,z_{j-1},\zeta+z_j,z_{j+1},\ldots,z_n)}{\zeta}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta=$
$=\frac{1}{z\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial\psi_l}{\partial\bar{z}_j}(z_1,\ldots,z_{j-1},\zeta,z_{j+1},\ldots,z_n)}{\zeta-z_j}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta$. Dato che $supp(\psi_l)$ è compatto, possiamo limitare l'integrale a un disco abbastanza grande da contenerlo tutto e avere ψ_l nulla sul bordo di tale disco. Allora per il teorema di Cauchy generalizzato l'ultimo integrale viene proprio $\psi_l(z)$. ψ_l a supporto compatto $\Rightarrow$

$\dfrac{\partial u_j}{\partial \bar{z}_l}$ a supporto compatto $\Rightarrow \dfrac{\partial u_j}{\partial \bar{z}_l} = 0$ per ogni l se $\|z\| >> 1 \Rightarrow u_j(z)$ è olomorfa per $\|z\| >> 1$. Ma $\psi_j(z) \equiv 0$ non appena $|z_1| >> 1$ (ricordiamo che $j \neq 1$) $\Rightarrow u_j(z) \equiv 0$ non appena $|z_1| >> 1$ (per definizione), dunque per il principio di identità $u_j(z) \equiv 0$ se $\|z\| > 1 \Rightarrow$ *supp*(u_j) è compatto. □

Osservazione 2.2.8. u è unica. Infatti, se u_1, u_2 sono soluzioni a supporto compatto, $\bar{\partial}(u_1 - u_2) \equiv 0 \Rightarrow u_1 - u_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ a supporto compatto, dunque per il principio di identità $u_1 - u_2 \equiv 0$.

Teorema 2.2.9. (Serre, Ehrenpreiss) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, $K \subset\subset \Omega$ compatto t.c. $\Omega \setminus K$ sia connesso. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ si estende olomorficamente a tutto Ω.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ con $\varphi \equiv 0$ in un intorno U di K, $\varphi \equiv 1$ in un intorno V di $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ e con *supp*$(1 - \varphi) \subset\subset \Omega$. Data $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ poniamo $\tilde{f}(z) = \begin{cases} \varphi f & \text{in } \Omega \setminus K \\ 0 & \text{in } U \end{cases} \Rightarrow \tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$. Poniamo $\psi = \bar{\partial}\tilde{f} = \psi_1 \, d\bar{z}_1 + \cdots + \psi_n \, d\bar{z}_n$. $\psi_1, \dots, \psi_n \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ perché $\tilde{f} \equiv f$ vicino a $\partial\Omega \Rightarrow \psi \equiv \bar{\partial} f \equiv 0$ vicino a $\partial\Omega$ $\Rightarrow$ possiamo estenderla $\equiv 0$ fuori da Ω ed è C^∞. Inoltre $\dfrac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}_l} = \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \bar{z}_l \partial \bar{z}_j} = \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_l} = \dfrac{\partial \psi_l}{\partial \bar{z}_j}$, dunque le condizioni di compatibilità sono soddisfatte. Infine ψ è a supporto compatto perché *supp*$(\psi) \subset$ *supp*$(1 - \varphi)$. Per il teorema 2.2.7, esiste $u \in C^\infty_C(\mathbb{C}^n)$ t.c. $\bar{\partial} u = \psi$. Siccome è a supporto compatto, $u \equiv 0$ in un intorno W della componente connessa di $\partial\Omega$ che interseca la componente connessa illimitata di $\mathbb{C}^n \setminus K$. Poniamo $F = \tilde{f} - u \in C^\infty(\Omega)$. Chiaramente $\bar{\partial} F \equiv 0 \Rightarrow F \in \mathcal{O}(\Omega)$. $u \equiv 0$ su $W \cap \Omega \Rightarrow F|_{W \cap V \cap \Omega} \equiv \tilde{f}|_{W \cap V \cap \Omega} \equiv f|_{W \cap V \cap \Omega}$, ma $W \cap V \cap \Omega \subseteq \Omega \setminus K$ ed è aperto, quindi per connessione di $\Omega \setminus K$ e per il principio di identità $F|_{\Omega \setminus K} \equiv f|_{\Omega \setminus K}$. □

2.3 Risultati analoghi a quelli in una variabile

Vediamo ora alcuni risultati analoghi a quelli che conosciamo per le funzioni olomorfe in una variabile. Abbiamo già usato uno di questi risultati, il principio di identità, nella sezione precedente. Inizialmente prendiamo come definizione di funzione olomorfa quella di analitica, poi tra le altre cose vedremo l'equivalenza con le altre definizioni date.

Lemma 2.3.1. (Abel) Data $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{C}$, supponiamo che esistano $\rho_1, \dots, \rho_n > 0$ ($\underline{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_n)$), $M > 0$ t.c. $|c_\alpha| \rho_1^{\alpha_1} \dots \rho_n^{\alpha_n} \leq M$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Allora $\displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z - z^0)^\alpha$ converge assolutamente in $P(z^0, \underline{\rho})$ e uniformemente in $\overline{P(z^0,\theta\underline{\rho})}$ per ogni $0 < \theta < 1$. Inoltre, la stessa convergenza vale per $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta}(z-z^0)^\alpha$ per ogni $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Corollario 2.3.2. $\mathcal{O}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ e $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial z^\alpha}(z_0)$.

Corollario 2.3.3. $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow \bar{\partial} f \equiv 0$.

Dimostrazione. $f(z) = f(z^0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z^0)(z_j - z_j^0) + o(\|z - z^0\|)$. Il pezzo $f(z^0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z^0)(z_j - z_j^0)$ ha ovviamemte $\bar{\partial}(\dots) = 0$ perché sono termini costanti o lineari nelle variabili z_j, mentre per un o-piccolo di termini di ordine 1 qualunque derivata in z^0 vale 0. □

Corollario 2.3.4. $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow f$ è olomorfa in ciascuna variabile.

Proposizione 2.3.5. (Principio di identità) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ ha parte interna non vuota, $f \equiv 0$.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$, sia $E_\alpha = \left\{z \in \Omega \mid \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial z^\alpha}(z) = 0\right\}$ e $E = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}^n} E_\alpha$. E è ovviamente chiuso, ma è anche aperto per analiticità e per il corollario 2.3.2, ed è non vuoto per ipotesi, dunque essendo Ω connesso $E = \Omega$. □

Proposizione 2.3.6. (Formula di Cauchy) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\overline{P(z^0,\underline{r})} \subset \Omega$. Allora per ogni $z \in P(z^0,\underline{r})$ $f(z) =$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r} \cdots \int_{|\zeta_n - z_n^0| = r} \frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_n - z_n)}\,\mathrm{d}\zeta_1 \dots \mathrm{d}\zeta_n =: \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta - z^0| = \underline{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Dimostrazione. Facciamo per semplicità il caso $n = 2$, il caso generico è analogo. Se z_2 è fissato, $z_1 \longmapsto f(z_1,z_2)$ è olomorfa in $D(z_1^0,r_1)$ per il corollario 2.3.4. Allora Cauchy in una variabile ci dà $f(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} \frac{f(\zeta_1,z_2)}{\zeta_1 - z_1}\,\mathrm{d}\zeta_1$. Se $\zeta_1 \in \partial D(z_1^0,r_1)$ è fissato, $z_2 \longmapsto f(\zeta_1,z_2)$ è olomorfa in $D(z_2^0,r_2)$ sempre per il corollario 2.3.4. Allora di nuovo per Cauchy in una variabile abbiamo $f(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} \frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}\int_{|\zeta_2 - z_2^0| = r_2} \frac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}\,\mathrm{d}\zeta_2$, da cui la tesi. □

Osservazione 2.3.7. $\hat{\partial} P := \{|\zeta - z^0| = \underline{r}\} \subset \partial P(z^0, \underline{r})$, in particolare è strettamente contenuto. È chiamato *bordo di Šilov di* $P(z^0, \underline{r})$.

Corollario 2.3.8. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\overline{P(z^0, \underline{r})} \subset \Omega, \alpha \in \mathbb{N}^n$. Allora $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha} = \dfrac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{|\zeta - z^0| = \underline{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+1}} \, \mathrm{d}\zeta$ su $P(z^0, \underline{r})$.

Dimostrazione. Basta derivare la formula di Cauchy. □

Proposizione 2.3.9. Sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ C^0 in ciascuna variabile, localmente limitata e t.c. per ogni $z^0 \in \Omega$ esiste $\bar{r}$ t.c. $\overline{P(z^0, \underline{r})} \subset \Omega$ e per ogni $z \in P(z^0, \underline{r})$ $f(z) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{|\zeta - z^0| = \underline{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \, \mathrm{d}\zeta$. Allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$,

Dimostrazione. $\dfrac{1}{\zeta - z} = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(z - z^0)^\alpha}{(\zeta - z^0)^{\alpha+1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left[\int_{|\zeta - z^0| = \underline{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+1}} \, \mathrm{d}\zeta \right] (z - z^0)^\alpha.$$ □

Corollario 2.3.10. (Osgood) Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in ciascuna variabile e localmente limitata, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $\overline{P(z^0, \underline{r})} \subset \Omega$. f olomorfa in ciascuna variabile $\Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} \frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \int_{|z_n - z_n^0| = r_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta_n - z_n} \, \mathrm{d}\zeta_n$, ma essendo f limitata questo ci dice che vale la formula di Cauchy, allora che f è olomorfa segue dalla proposizione 2.3.9. □

Fatto 2.3.11. Hartogs ha dimostrato che non serve l'ipotesi localmente limitata.

Corollario 2.3.12. Se $f \in C^1(\Omega)$ e $\bar{\partial} f \equiv 0$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dimostrazione. f è olomorfa in ciascuna variabile. □

Proposizione 2.3.13. (Disuguaglianze di Cauchy) $f \in \mathcal{O}(\Omega), \overline{P(z^0, \underline{r})} \subset \Omega, \alpha \in \mathbb{N}^n \Rightarrow \left| \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z^0) \right| \leq \dfrac{\alpha!}{\underline{r}^\alpha} M(\underline{r})$ dove $M(\underline{r}) = \displaystyle\sup_{|\zeta - z^0| = \underline{r}} |f(\zeta)|$.

Dimostrazione. $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z^0) = \dfrac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{f(z^0 + \underline{r}e^{i\theta})}{(\underline{r}e^{i\theta})^{\alpha+1}} i^n \left(\prod_{j=1}^n r_j e^{i\theta_j} \right) \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_n =$
$= \dfrac{\alpha!}{(2\pi)^n \underline{r}^\alpha} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{f(z^0 + \underline{r}e^{i\theta})}{e^{i(\alpha_1\theta_1 + \cdots + \alpha_n\theta_n)}} \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \left| \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z^0) \right| \leq \dfrac{\alpha!}{(2\pi)^n \underline{r}^\alpha} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} |f(z^0 + \underline{r}e^{i\theta})| \, \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_n \leq \frac{\alpha!}{\underline{r}^\alpha} M(\underline{r}).$ □

Corollario 2.3.14. (Liouville) Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ è limitata, allora è costante.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \neq 0$, $\left| \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z^0) \right| \leq \dfrac{\alpha!}{\underline{r}^\alpha} M$ per ogni $\underline{r} \Rightarrow$ tutte le derivate di f sono $\equiv 0$. □

Teorema 2.3.15. (Applicazione aperta) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante $\Rightarrow$ f è aperta.

Dimostrazione. Basta far vedere che $f(\Omega)$ è aperto. Sia $z^0 \in \Omega$ e sia $U \subset \Omega$ un intorno convesso di z^0. Siccome f non è costante, $f|_U \not\equiv f(z^0)$ (nel senso che non è costantemente uguale, altrimenti sarebbe costante per il principio di identità). Sia allora $\tilde{z}^0 \in U$ con $f(\tilde{z}^0) \neq f(z^0)$ e $D = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid z^0 + \zeta(\tilde{z}^0 - z^0) \in U\} \subset \mathbb{C}$ aperto. Definiamo $g(\zeta) = f(z^0 + \zeta(\tilde{z}^0 - z^0))$; abbiamo $g \in \mathcal{O}(D)$ e non costante perché $g(0) \neq g(1)$, quindi $g(D)$ è aperto in $\mathbb{C}$ per il principio di identità e contiene $g(0) = f(z^0)$. Quindi $f(\Omega) \supseteq g(D)$, che è un intorno di $f(z^0)$. □

Teorema 2.3.16. (Principio del massimo) Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ dominio limitato, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante. Sia $M = \sup\limits_{x \in \partial\Omega} \limsup\limits_{z \longrightarrow x, z \in \Omega} |f(z)|$. Allora $|f(z)| < M$ per ogni $z \in \Omega$.

Dimostrazione. Se $M = +\infty$ è ovvio. Supponiamo $M < +\infty$. Sia $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ data da $\varphi(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } x \in \Omega \\ \limsup_{z \longrightarrow x, z \in \Omega} |f(z)| & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$. φ è semicontinua superiormente su $\overline{\Omega}$ che è compatto $\Rightarrow$ φ è limitata (in particolare, assume massimo). Sia $D = f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. D è un aperto (connesso) limitato (perche φ è limitata) di $\mathbb{C}$. Sia $\tau \in \partial D$, esiste $\{\zeta_\nu\} \subset D$ t.c. $\sigma_\nu \longrightarrow \tau$. Esiste $z_\nu \in \Omega$ t.c. $f(z_\nu) = \zeta_\nu$. A meno di sottosuccessioni, $z_\nu \longrightarrow z^0 \in \overline{\Omega}$. Se avessimo $z^0 \in \Omega$, allora $f(z^0) \in D$, ma $f(z^0) = \tau \in \partial D$, assurdo. Quindi $z^0 \in \partial\Omega \Rightarrow |\tau| \leq M \Rightarrow \partial D \subset \overline{D(0, M)} \Rightarrow \overline{D} \subset \overline{D(0, M)}$. Siccome D è aperto, $D \subseteq D(0, M)$, che è la tesi. □

Corollario 2.3.17. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se esiste $z^0 \in \Omega$ dominio t.c. $|f(z)| \leq |f(z^0)|$ per ogni z in un intorno di z^0, allora f è costante.

Dimostrazione. Se f non è costante, si applica il principio del massimo a un intorno di z^0 e si ottiene un assurdo. $\square$

Dei seguenti tre teoremi non riportiamo le dimostrazioni, in quanto analoghe a quelle in una variabile.

Teorema 2.3.18. (Weierstrass) Sia $\{f_\nu\} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ che converge uniformemente sui compatti a $f \in C^0(\Omega)$. Allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f_\nu}{\partial z^\alpha} \longrightarrow \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}$.

Teorema 2.3.19. (Montel) $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ è relativamente compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$ se (e solo se) è uniformemente limitata sui compatti, cioè per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto esiste M_K t.c. $\|f\|_K < M_K$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.3.20. (Vitali) Sia $\{f_\nu\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ uniformemente limitata sui compatti e sia $A \subseteq \Omega$ un insieme con parte interna non vuota t.c. $\{f_\nu(z^0)\}$ converge in $\mathbb{C}$ per ogni $z^0 \in A$. Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_\nu \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti.

2.4 Domini di convergenza delle serie di potenze

Definizione 2.4.1. Sia $\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ una serie di potenze in $\mathbb{C}^n$. Il DOMINIO DI CONVERGENZA DI F è $\mathcal{C} = int\{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_\alpha |a_\alpha||z^\alpha| < +\infty\}$ (int=parte interna).

Osservazione 2.4.2. Per il lemma di Abel, $\mathcal{C} = int\{z \in \mathbb{C}^n \mid \sup_\alpha |a_\alpha||z^\alpha| < +\infty\}$.

Definizione 2.4.3. Un insieme $S \subseteq \mathbb{C}^n$ è *circolare* se per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ $z \in S \Rightarrow e^{i\theta} z \in S$. È DI REINHARDT se per ogni $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ $z \in S \Rightarrow (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) \in S$. È CIRCOLARE COMPLETO se per ogni $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \overline{\mathbb{D}}$ $z \in S \Rightarrow (\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n) \in S$.

Osservazione 2.4.4. S circolare completo $\Rightarrow 0 \in S$. Circolare completo $\Rightarrow$ di Reinhardt $\Rightarrow$ circolare. In una variabile, circolare $\Rightarrow$ di Reinhardt.

Osservazione 2.4.5. Un dominio di convergenza di una serie di potenze è circolare completo.

Definizione 2.4.6. Sia $S \subseteq \mathbb{C}^n$. L'*immagine logaritmica di* S è $\log|S| = \{(\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) \mid z = (z_1, \dots, z_n) \in S \setminus \bigcup_{j=1}^n \{z_j = 0\}\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione 2.4.7. S è LOGARITMICAMENTE CONVESSO se $\log|S|$ è convesso.

Proposizione 2.4.8. Il dominio di convergenza $\mathcal{C}$ di una serie di potenze F è logaritmicamente convesso.

Dimostrazione. Siano $w, w' \in \mathcal{C}$ e sia $\varepsilon > 0$ t.c. $P(0, |w| + \varepsilon), P(0, |w'| + \varepsilon) \subset \mathcal{C}$ $(|w| + \varepsilon = (|w_1| + \varepsilon, \dots, |w_n| + \varepsilon))$. La condizione di logaritmica convessità di $\mathcal{C}$ segue se dimostriamo che per ogni $\lambda \in [0,1]$ $\lambda \log |w| + (1-\lambda) \log |w'| \in \log |\mathcal{C}|$. Questo equivale a: per ogni $\lambda \in [0,1]$ $(\log(|w_1|^\lambda |w_1'|^{1-\lambda}), \dots, \log(|w_n|^\lambda |w_n'|^{1-\lambda})) \in \log |\mathcal{C}|$, che a sua volta è come dire che per ogni $\lambda \in [0,1]$ $(|w_1|^\lambda |w_1'|^{1-\lambda}, \dots, |w_n|^\lambda |w_n'|^{1-\lambda}) \in \mathcal{C}$. Scriviamo $F = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$. Per le disuguaglianze di Cauchy, $|a_\alpha| \leq \dfrac{c}{\max\{(|w| + \varepsilon)^\alpha, (|w'| + \varepsilon)^\alpha\}}$ per un certo c che dipende da $|w| + \varepsilon$ e $|w'| + \varepsilon$. Poiché la funzione $t \longmapsto a^t b^{1-t}$ su $[0,1]$ è convessa per ogni $a, b > 0$, per ogni $\lambda \in [0,1]$ e per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha $\max\{|w_j| + \varepsilon, |w_j'| + \varepsilon\} \geq (|w_j| + \varepsilon)^\lambda (|w_j'| + \varepsilon)^{1-\lambda} \geq |w_j|^\lambda |w_j'|^{1-\lambda} + \varepsilon'$ per qualche $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ perché la funzione $(a + \varepsilon)^\lambda (b + \varepsilon)^{1-\lambda} - a^\lambda b^{1-\lambda}$ è continua e > 0 su $[0,1]$ compatto, dunque ammette minimo > 0. Quindi per ogni α_j $\max\{(|w_j| + \varepsilon)^{\alpha_j}, (|w_j'| + \varepsilon)^{\alpha_j}\} \geq (|w_j|^\lambda |w_j'|^{1-\lambda} + \varepsilon')^{\alpha_j} \geq (|w_j|^\lambda |w_j'|^{1-\lambda})^{\alpha_j} \Rightarrow$ $|a_\alpha| \leq \dfrac{c}{\prod_j (|w_j|^\lambda |w_j'|^{1-\lambda})^{\alpha_j}} \Rightarrow (|w_1|^\lambda |w_1'|^{1-\lambda}, \dots, |w_n|^\lambda |w_n'|^{1-\lambda}) \in \mathcal{C}$. □

Fatto 2.4.9. Viceversa, ogni dominio circolare completo logaritmicamente convesso è il dominio di convergenza di una serie di potenze. Nel prossimo paragrafo vedremo una dimostrazione di questo fatto.

Definizione 2.4.10. Sia $S \subseteq \mathbb{C}^n$ di Reinhardt, indichiamo con $\hat{C} \subset \mathbb{R}^n$ l'***inviluppo convesso di*** $\log |S|$, cioè il più piccolo convesso che contiene $\log |S|$, che equivale all'intersezione di tutti i convessi che contengono $\log |S|$.

Osservazione 2.4.11. S aperto $\Rightarrow \log |S|$ aperto $\Rightarrow \hat{C}$ aperto.

Definizione 2.4.12. Sia $\hat{S} \subseteq \mathbb{C}^n$ l'unico insieme di Reinhardt t.c. $\log |\hat{S}| = \hat{C}$. $\hat{S}$ è l'INVILUPPO LOGARITMICO DI S.

Proposizione 2.4.13. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio di Reinhardt con $0 \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora lo sviluppo in serie di f in 0 converge in $\hat{\Omega}$.

Dimostrazione. Per ogni $j \geq 1$ sia Ω_j la componente connesse di $\{z \in \Omega \mid d(z, \partial\Omega) > \|z\|/j\}$ contenente 0. Fissiamo $j, z \in \Omega_j$. Allora $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \longmapsto f(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n)$ è ben definita per $|z_1| = \dots = |\zeta_n| = 1 + 1/j$ poiché Ω è di Reinhardt, dunque $f_z(w) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{|\zeta| = 1 + 1/j} \frac{f(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n)}{(\zeta_1 - w_1) \dots (\zeta_n - w_n)} \, d\zeta$ $(\star)$ è olomorfa in $P(0, 1 + 1/j)$. Quando $\|z\| << 1$, siccome Ω è aperto e di Reinhardt e $0 \in \Omega$, abbiamo che $(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n) \in \Omega$ per ogni $\zeta \in \overline{P(0, 1 + 1/j)}$. Applicando la formula di Cauchy con un opportuno cambio di variabile otteniamo che per $\|z\| << 1$ $f_z(\underline{1}) = f(z)$. Ma $f_z(\underline{1})$ è una funzione olomorfa di z e f pure, perciò per il principio di identità $f_z(\underline{1}) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega_j$.

Se w appartiene a un compatto in $P(0, 1 + 1/j)$ possiamo espandere l'integrando in $(\star)$ in serie di potenze di w. Abbiamo allora uno sviluppo in serie di f_z in 0 che converge uniformemente sui compatti. Il coefficiente di w^α è $a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta|=1+1/j} \frac{f(\zeta_1 z_1, \ldots, \zeta_n z_n)}{\zeta^{\alpha+1}} \mathrm{d}\zeta$. Per $\|z\| << 1$ da $f_z(\underline{1}) = f(z)$ otteniamo $a_\alpha = z^\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0)$. Ma allora l'espansione in serie di potenze di f in 0 converge uniformemente sui compatti in Ω_j. Siccome j è arbitrario e $\Omega_j \longrightarrow \Omega$ (nel senso che ogni punto prima o poi viene preso), la serie di potenze F di f in 0 converge uniformemente sui compatti di $\Omega \Rightarrow \Omega \subseteq \mathcal{C}(F)$, che è logaritmicamente covesso $\Rightarrow \mathcal{C}(F) \supseteq \hat{\Omega}$. □

2.5 Domini di olomorfia

Definizione 2.5.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. $P \in \partial\Omega$ è *essenziale* se esiste $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. per ogni intorno aperto connesso Ω_2 di P e per ogni aperto connesso $\Omega_1 \subseteq \Omega \cap \Omega_2$ con $\Omega_1 \neq \varnothing, \Omega$ non esiste $u_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $u_2|_{\Omega_1} = u|_{\Omega_1}$. Diremo che Ω è un DOMINIO DI OLOMORFIA se ogni $P \in \partial D$ è essenziale.

Definizione 2.5.2. Un FUNZIONALE DI MINKOVSKI è una funzione $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ continua t.c.

(i) $\mu(z) = 0 \iff z = 0$;
(ii) $\mu(\zeta z) = |\zeta|\mu(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$ e per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$.

Esempio 2.5.3. $\mu(z) = \|z\|_p = (|z_1|^p + \cdots + |z_n|^p)^{1/p}$ con $p > 0$ e $\mu(z) = \|z\|_\infty = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$ sono funzionali di Minkovski.

Esercizio 2.5.4. $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio con $0 \in \Omega$ è circolare e stellato rispetto a 0 (cioè per ogni $\zeta \in \mathbb{D}, z \in \Omega$ anche $\zeta z \in \Omega$) $\iff$ esiste μ funzionale di Minkovski t.c. $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mu(z) < 1\}$. Hint: una freccia è ovvia, per l'altra si consideri $\mu(z) = \inf\{r > 0 \mid z/r \in \Omega\}$.

Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio poniamo $\mu_\Omega(z) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(z - w) =$"$\mu$-distanza da $\partial\Omega$". Se $X \subseteq \Omega$ poniamo $\mu_\Omega(X) = \inf_{z \in X} \mu_\Omega(z)$.

Definizione 2.5.5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni su Ω. Sia $K \subset \Omega$. Il $\mathcal{F}$-INVILUPPO DI K IN Ω è $\hat{K}_\mathcal{F} = \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leq \|f\|_K$ per ogni $f \in \mathcal{F}\}$. Se $\mathcal{F} = \mathcal{O}(\Omega)$, $\hat{K}_\mathcal{F} = \hat{K}_\Omega$ è *inviluppo olomorfo di* K, che abbiamo già incontrato in una variabile.

Diremo che Ω è $\mathcal{F}$-*convesso* se e solo se per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto anche $\hat{K}_\mathcal{F} \subset\subset \Omega$ compatto. Se $\mathcal{F} = \mathcal{O}(\Omega)$, diremo che Ω è OLOMORFICAMENTE CONVESSO.

Osservazione 2.5.6. Ogni aperto di $\mathbb{C}$ è olomorficamente convesso.

Esercizio 2.5.7. Siano $\Omega = P^2(0,1) \setminus \overline{P^2(0,1/2)}, K = \{(0, 3e^{i\theta}/4) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che $\hat{K}_\Omega = \{0, te^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}, 1/2 < t \leq 3/4\}$.

Esercizio 2.5.8. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} =$ funzioni lineari su Ω, allora $\hat{K}_\mathcal{F} =$ inviluppo convesso di K, e Ω è $\mathcal{F}$-convesso $\iff$ è convesso (nella disuguaglianza che definisce gli insiemi in $\mathbb{R}$ c'è una differenza: non si prende il modulo [notare quindi che anche al posto della norma infinito c'è un sup]).

Lemma 2.5.9. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, $K \subset \Omega$ limitato $\Rightarrow \hat{K}_\Omega$ è limitato.

Dimostrazione. K è limitato $\iff$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ esiste M_j t.c. $|z_j| \leq M_j$ per ogni $z \in K$. Dato che le proiezioni alle singole coordinate sono funzioni olomorfe, otteniamo che per ogni $z \in \hat{K}_\Omega$ $|z_j| \leq M_j \Rightarrow \hat{K}_\Omega$ limitato. □

Osservazione 2.5.10. Se $\mathcal{F} \subset C^0(\Omega)$, allora $\hat{K}_\mathcal{F}$ è chiuso in Ω.

Lemma 2.5.11. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, $K \subset \Omega \Rightarrow \hat{K}_\Omega$ è contenuto nella chiusura dell'inviluppo convesso di K.

Dimostrazione. $\mathcal{O}(\Omega)$ contiene le funzioni $e^{L(z)}$ con $L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare. $|e^{L(z)}| = e^{\mathfrak{Re} L(z)}$. $|e^{L(z)}| \leq \|e^L\|_K \iff \mathfrak{Re} L(z) \leq \sup\limits_{w \in K} \mathfrak{Re} L(w)$. Ogni $l : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare è la parte reale di $L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineare. □

Teorema 2.5.12. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sono equivalenti:

(i) esiste $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ che non può essere estesa olomorficamente a un qualsiasi aperto $\Omega' \supsetneq \Omega$;
(ii) Ω è un dominio di olomorfia;
(iii) Ω è olomorficamente convesso;
(iv) per ogni μ funzionale di Minkovski, per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto, $|f| \leq \mu_\Omega$ su $K \Rightarrow |f| \leq \mu_\Omega$ su $\hat{K}_\Omega$;
(v) per ogni μ funzionale di Minkovski e per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto, $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) = \mu_\Omega(K)$;
(vi) per ogni μ funzionale di Minkovski, per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto, $\sup\limits_{z \in K} \dfrac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)} = \sup\limits_{z \in \hat{K}_\Omega} \dfrac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)}$;
(vii) esiste μ funzionale di Minkovski, per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto, $|f| \leq \mu_\Omega$ su $K \Rightarrow |f| \leq \mu_\Omega$ su $\hat{K}_\Omega$;
(viii) esiste μ funzionale di Minkovski e per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto, $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) = \mu_\Omega(K)$;
(ix) esiste μ funzionale di Minkovski, per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto, $\sup\limits_{z \in K} \dfrac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)} = \sup\limits_{z \in \hat{K}_\Omega} \dfrac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)}$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) è ovvia (basta prendere h per tutti i $p \in \partial\Omega$). (iv) $\Rightarrow$ (vii) è ovvia. (vii) $\Rightarrow$ (ix) è ovvia (basta dividere f per $\sup\limits_{z\in K} \dfrac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)}$). (ix) $\Rightarrow$ (vii) è ovvia (basta prendere $f \equiv 1$). (iv) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (v) sono analoghe a (vii) $\Rightarrow$ (xi) $\Rightarrow$ (viii). (v) $\Rightarrow$ (viii) è ovvia. Per concludere mostriamo che (ii) $\Rightarrow$ (viii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iv).
(ii) $\Rightarrow$ (viii) Poniamo $\mu = \|\cdot\|_\infty$. Supponiamo, per assurdo, che (viii) non valga: allora esiste $K \subset\subset \Omega$ compatto t.c. $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) < \mu_\Omega(K)$. Scegliamo $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) < \delta_1 < \delta_2 < \mu_\Omega(K)$. Sia $z^0 \in \hat{K}_\Omega$ t.c. $\mu_\Omega(z^0) < \delta_1$. Poniamo $K_{\delta_2} = \bigcup\limits_{z\in K} \overline{P(z,\delta_2)} = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \min\limits_{z\in K} \|z-w\|_\infty \leq \delta_2\}$ chiuso e $\subset\subset \Omega$. Dalle disuguaglianze di Cauchy otteniamo che per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vale $\left|\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z)\right| \leq \dfrac{\alpha!}{\delta_2^{|\alpha|}} \|f\|_{K_{\delta_2}}$ $(*)$ per ogni $z \in K$. Ma allora lo sviluppo in serie di f in z^0 converge in $P(z^0, (\delta_1+\delta_2)/2)$ perché $\delta_1 < (\delta_1+\delta_2)/2 < \delta_2 \Rightarrow f$ si estende olomorficamente a tutto $P(z^0, (\delta_1+\delta_2)/2)$, ma $P(z^0, (\delta_1+\delta_2)/2) \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, assurdo.
(viii) $\Rightarrow$ (iii) $K \subset\subset \Omega$ compatto $\iff$ K è chiuso, limitato e $\mu_\Omega(K) > 0$. Se $K \subset\subset \Omega$ compatto, allora $\hat{K}_\Omega$ è chiuso, limitato e, per (viii), $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) = \mu_\Omega(K) > 0 \Rightarrow \hat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$ compatto.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Sia $\{w_k\}_{j\in\mathbb{N}^*} \subset \Omega$ una successione ovunque densa e che ripete ogni punto infinite volte. Per ogni j sia $P_j = P(w_j, r_j)$ il polidisco di centro w_j più grande contenuto in Ω ($\iff$ $P(w_j,r_j) \subset \Omega$ ma $\overline{P(w_j,r_j)} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$). In particolare, P_j non è $\subset\subset \Omega$. Sia $\{K_j\}$ una successione di compatti che invade Ω, cioè $K_j \subset\subset \Omega$ compatto, $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ e $\bigcup\limits_j K_j = \Omega$. (iii) $\Rightarrow \widehat{(K_j)}_\Omega \subset\subset \Omega \Rightarrow$ esiste $z_j \in P_j \setminus \widehat{(K_j)}_\Omega \Rightarrow$ esiste $h_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $|h_j(z_j)| > \|h_j\|_{K_j}$. Possiamo suppore $h_j(z_j) = 1$ e (a meno di sostituire $h_j^{M_j}$ con $M_j >> 1$) possiamo supporre $\|h_j\|_{K_j} < 2^{-j}$. Poniamo $h(z) = \prod\limits_{j=1}^{+\infty} (1-h_j(z))^j$. $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ perché $\sum\limits_j \dfrac{j}{2^j} < +\infty$. Inoltre $h \not\equiv 0$ perché non lo è su K_1. Ogni P_j contiene infiniti z_l che si accumulano a $z_j^0 \in \overline{P_j}$. h si annulla di ordine almeno l in z_l (segue dalla definizione). Se $z_j^0 \in \Omega$ allora h dovrebbe annullarsi di ordine ∞ in $z_j^0 \Rightarrow h \equiv 0$, assurdo $\Rightarrow z_j^0 \in \partial\Omega$. Gli $\{z_j^0\}$ sono densi in $\partial\Omega$; se non lo fossero, esisterebbe w_{j_0} t.c. $\overline{P(w_{j_0}, r_{j_0})} \cap \partial\Omega$ non contiene alcun z_j^0, assurdo. Se h si estendesse a $\Omega' \supsetneq \Omega$ allora si dovrebbe estendere a un intorno di qualche $z_j^0 \Rightarrow h \equiv 0$, assurdo.
(i) $\Rightarrow$ (iv) Fissiamo $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ e poniamo $\mu^{\underline{r}}(z) = \max\left\{\dfrac{|z_j|}{r_j}\right\}$. Vogliamo dimostrare che vale (iv) per $\mu^{\underline{r}}$. Siano $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $K \subset\subset \Omega$ compatto t.c. $|f(z)| \leq \mu_\Omega^{\underline{r}}(z)$ per ogni $z \in K$.

Fatto 2.5.13. Data f come sopra, per ogni $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $w \in \hat{K}_\Omega$ g ha un'espansione in serie di potenze centrata in w e convergente in $P(w, |f(w)|\underline{r}) = \{z \in$

$\mathbb{C}^n \mid \mu^{\underline{r}}(z-w) < |f(w)|\}$.

Dimostrazione. Fissiamo $0 < t < 1$, $W_t = \bigcup_{z \in K} P(z, |f(z)|t\underline{r})$. Siccome $t|f(z)| < u_\Omega^{\underline{r}}(z)$ per ogni $z \in K \Rightarrow W_t \subset\subset \Omega$. Sia $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Esiste $M > 0$ t.c. $\|g\|_{W_t} \leq M$. Per le disuguaglianze di Cauchy, per ogni $z \in K$ si ha $\left|\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial z^\alpha}(z)\right| \leq \frac{\alpha! M}{t^{|\alpha|}|f(z)|^{|\alpha|}\underline{r}^\alpha} \iff \left|f(z)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial z^\alpha}(z)\right| \leq \frac{\alpha! M}{t^{|\alpha|}\underline{r}^\alpha} \Rightarrow$ per ogni $w \in \hat{K}_\Omega$ si ha $\left|f(w)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial z^\alpha}(w)\right| \leq \frac{\alpha! M}{t^{|\alpha|}\underline{r}^\alpha} \Rightarrow \left|\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial z^\alpha}(w)\right| \leq \frac{\alpha! M}{t^{|\alpha|}|f(w)|^{|\alpha|}\underline{r}^\alpha} \Rightarrow$ lo sviluppo in serie di g in w converge in $P(w, |f(w)|t\underline{r})$. Mandando t a 1 si ottiene quanto voluto. □

Usiamo il fatto 2.5.13 per dimostrare che vale (iv) per $\mu^{\underline{r}}$. Per assurdo, se esiste $w \in \hat{K}_\Omega$ t.c. $|f(w)| > \mu_\Omega^{\underline{r}}(w)$ allora $P(w, |f(w)|\underline{r}) \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, dunque per il fatto 2.5.13 ogni $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ si estende olomorficamente in $P(w, |f(w)|\underline{r})$ contro (i), assurdo. Sia adesso μ un funzionale di Minkovski qualsiasi. Dato $v \in \mathbb{C}^n$ poniamo $S_\Omega^v(z) = \sup\{r > 0 \mid z + \zeta v \in \Omega \forall |\zeta| < r\}$. Allora $\mu_\Omega(z) = \inf_{\mu(v)=1} S_\Omega^v(z)$ (la dimostrazione è lasciata come esercizio per il lettore). Quindi basta mostrare che (iv) vale per S_Ω^v. Chiaramente, possiamo assumere $v = e_1$. Dato $k \in \mathbb{N}^*$ poniamo $\underline{r}^k = (1, 1/k, \ldots, 1/k)$. $\underline{r}^\infty = (1, 0, \ldots, 0) = e_1$. Ora $S_\Omega^{e_1} = \mu_\Omega^{\underline{r}^\infty}$ e $\mu_\Omega^{\underline{r}^k} \uparrow S_\Omega^{e_1}$ (la dimostrazione è lasciata come esercizio per il lettore). Sia $K \subset\subset \Omega$ compatto. Per il lemma del Dini, $\mu_\Omega^{\underline{r}^k} \uparrow S_\Omega^{e_1}$ uniformemente su K. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $|f| \leq S_\Omega^{e_1}$ su K. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ogni $k \geq k_0(\varepsilon)$ $S_\Omega^{e_1} \leq (1+\varepsilon)\mu_\Omega^{\underline{r}^k}$ su K $\Rightarrow |f| \leq (1+\varepsilon)\mu_\Omega^{\underline{r}^k}$ su K, ma (iv) vale per i funzionali di quella forma, dunque $|f| \leq (1+\varepsilon)\mu_\Omega^{\underline{r}^k} \leq (1+\varepsilon)S_\Omega^{e_1}$ su $\hat{K}_\Omega$. Mandando ε a 0 otteniamo la tesi. □

Corollario 2.5.14. Ω convesso $\Rightarrow \Omega$ dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Sia $P \in \partial\Omega$. Essendo Ω convesso, esiste $L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineare t.c. $\mathfrak{Re} L(z) < \mathfrak{Re} L(P)$ per ogni $z \in \Omega$. Sia $f(z) = \frac{1}{L(z) - L(P)}$. Allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e non si estende oltre $P \Rightarrow P$ è essenziale. □

Definizione 2.5.15. $P \in \partial\Omega$ è un *punto di picco* se esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ t.c. $f(P) = 1$ ma $\|f\|_\Omega < 1$.

Esempio 2.5.16. Nel caso del corollario 2.5.14, $f(z) = e^{L(z)-L(P)}$.

Esercizio 2.5.17. Se ogni punto di $\partial\Omega$ è di picco, allora Ω è dominio di olomorfia.

Proposizione 2.5.18. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio circolare completo logaritmicamente convesso con $0 \in \Omega$. Allora Ω è dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Sia $K \subset\subset \Omega$ compatto. Vogliamo mostrare che $\hat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$ e allora la tesi seguirà dal teorema 2.5.12. Per ogni $w \in K$ esiste un intorno $w \in U_w \subset \Omega$ e $\zeta^w \in \Omega$ t.c. $|z_j| \leq |\zeta_j^w|$ per ogni $z \in U_w$. K compatto $\Rightarrow$ esistono $\zeta^1, \ldots, \zeta^k \in \Omega$ t.c. $K \subset \bigcup_{l=1}^{k} \{|z_j| \leq |\zeta_j^l| \forall j\} = W \subset\subset \Omega$. Possiamo asumere $\zeta_j^l \neq 0$ per ogni l, j. Sia $z \in \hat{K}_\Omega$, vogliamo $z \in W$. A meno di permutare le coordinate possiamo supporre $z_1 = \ldots, z_m \neq 0, z_{m+1} = \cdots = z_n = 0$ per qualche $1 \leq m \leq n$ (ovviamente $0 \in W$). Per definizione di $\hat{K}_\Omega$ si ha che $|z_1^{\alpha_1} \ldots z_m^{\alpha_m}| \leq \sup_{w \in K} |w_1^{\alpha_1} \ldots w_m^{\alpha_m}| \leq \max_{1 \leq l \leq k} |(\zeta_1^l)^{\alpha_1} \ldots (\zeta_m^l)^{\alpha_m}|$ $(*)$. Poniamo $\nu_j = \alpha_j / |\alpha|$. $\nu_j \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ con $\sum_{j=1}^{n} \nu_j = 1$. Prendendo il logaritmo e dividendo per $|\alpha|$ a entrambi i membri di $(*)$ otteniamo $\sum_{j=1}^{m} \nu_j \log |z_j| \leq \max_l \sum_{j=1}^{m} \nu_j \log |\zeta_j^l|$ $(**)$. Per continuità questo vale per ogni $\nu_j \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ t.c. $\sum_j \nu_j = 1$. $(**)$ ci dice che $(\log |z_1|, \ldots, \log |z_m|)$ è nell'inviluppo convesso Z di $\bigcup_l \{(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^n \mid -\infty < t_j \leq \log |\zeta_j^l| \forall j\}$ che è ben contenuto in $\log |\Omega| \Rightarrow z \in \widehat{\bigcup_{l=1}^{k} \{|z_j| \leq |\zeta_j^l|\}} = \hat{W}$ che è il dominio circolare completo $\subset\subset \Omega$ che ha come immagine logaritimica Z. $\square$

Corollario 2.5.19. Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è un dominio circolare completo logaritmicamente convesso con $0 \in \Omega$, allora Ω è il dominio di convergenza di una serie di potenze.

Dimostrazione. Per la proposizione 2.5.18 abbiamo che Ω è un dominio di olomorfia, dunque esiste $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ che non si può estendere ad aperti più grandi, Prendiamo l'espansione in serie di h in 0. Abbiamo visto che tale espansione converge in Ω e non può convergere in alcunché di più grande. $\square$

2.6 Funzioni armoniche

Definizione 2.6.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $u \in C^2(\Omega)$. Il *laplaciano di* u è $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$. Diremo che u è ARMONICA se $\Delta u \equiv 0$ e scriveremo $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Osservazione 2.6.2. u armonica $\Rightarrow \mathfrak{Re} u, \mathfrak{Im} u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Osservazione 2.6.3. $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow f, \mathfrak{Re} f, \mathfrak{Im} f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Proposizione 2.6.4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $u \in C^2(\Omega)$ a valori reali t.c. $\Delta u \geq 0$ su Ω. Allora u soddisfa il principio del massimo: per ogni $K \subset\subset \Omega$, per ogni $z \in K$ $u(z) \leq \sup_{w \in \partial K} u(w)$.

Dimostrazione. Supponiamo prima che $\Delta u > 0$. Per assurdo esistono $K \subset\subset \Omega$ e $w_0 \in K$ t.c. $u(w_0) > \sup_{w \in \partial K} \Rightarrow$ esiste $z_0 \in \mathring{K}$ t.c. $u(z_0) = \sup_{z \in K} u(z)$. Quindi z_0 è un massimo locale per $u \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0), \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) \leq 0 \Rightarrow \Delta u(z_0) \leq 0$, assurdo. Supponiamo che $\Delta u \geq 0$ e dato $\varepsilon > 0$ poniamo $u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon |z|^2$. Allora $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$. Quindi per u_ε vale il principio del massimo e per ogni $z \in K$ $u(z) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} u_\varepsilon(z) \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_{w \in \partial K} u_\varepsilon(w) = \sup_{w \in \partial K} u(w)$. □

Corollario 2.6.5. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}, u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $K \subset\subset \Omega$ è t.c. $u|_{\partial K} \equiv 0$, allora $u|_K \equiv 0$. Da questo segue un analogo del principio di identità.

Dimostrazione. Si applica il principio del massimo a u e $-u$. □

Definizione 2.6.6. Dati $a \in \mathbb{C}, \rho > 0$, il *nucleo di Poisson* $P_{a,\rho} : D(a, \rho) \times \partial D(a, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ è $P_{a,\rho}(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \mathfrak{Re} \left(\dfrac{(\zeta - a) + (z - a)}{(\zeta - a) - (z - a)} \right)$.

Osservazione 2.6.7. $P_{0,1}(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \mathfrak{Re} \left(\dfrac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \dfrac{1}{2\pi} \mathfrak{Re} \left(\dfrac{(\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}{|\zeta - z|^2} \right) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$. $P_{a,\rho}(z, \zeta) = P_{0,1}((z - a)/\rho, (\zeta - a)/\rho)$.

Proposizione 2.6.8. $P_{a,\rho} \geq 0$, per ogni $z \in \partial D(a, \rho)$ $P_{a,\rho}(\cdot, \zeta) \in \mathcal{H}(D(a, \rho))$. Inoltre per ogni $h \in C^0(\partial D(a, \rho))$ e per ogni $\zeta_0 \in \partial D(a, \rho)$ $\lim_{z \longrightarrow \zeta_0} \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, a + \rho e^{i\theta}) h(a + \rho e^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta = h(\zeta_0)$.

Dimostrazione. Per l'osservazione 2.6.7 possiamo supporre $a = 0, \rho = 1$. Allora $P_{0,1}(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} > 0$. $P_{0,1}(\cdot, \zeta)$ è la parte reale di una funzione olomorfa $\Rightarrow$ è armonica. $P_{0,1}(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \mathfrak{Re} \left(\dfrac{1 + \bar{\zeta} z}{1 - \bar{\zeta} z} \right) = \dfrac{1}{2\pi} \mathfrak{Re} \left(1 + \dfrac{2z\bar{z}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) = \dfrac{1}{2\pi} \mathfrak{Re} \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} z^n \zeta^{-n} \right)$. $\int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2\pi} \mathfrak{Re} \left(2\pi + \sum_{n \geq 1} \left(\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta \right) z^n \right)$. Poiché $n \geq 1$, $\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta = 0$, per cui $\int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta = 1$. Sia $h \in$

$C^0(\partial\mathbb{D})$, poniamo $T(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\theta})h(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta - h(\zeta_0) = \int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\theta})(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0}))\,\mathrm{d}\theta$. Fissiamo $\varepsilon > 0$; per uniforme continuità esiste $\delta > 0$ t.c. $|h(e^{i\theta_1}) - h(e^{i\theta_2})| < \varepsilon$ se $|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| < \delta$. Sia $M = \sup_{\zeta\in\partial\mathbb{D}} |h(\zeta)|$. Allora $|T(z)| = \left|\displaystyle\int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|<\delta} P_{0,1}(z, e^{i\theta})(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0}))\,\mathrm{d}\theta + \int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\geq\delta} P_{0,1}(z, e^{i\theta})(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0}))\,\mathrm{d}\theta\right| \leq$
$\varepsilon \displaystyle\int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|<\delta} P_{0,1}(z, e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta + 2M \int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\geq\delta} P_{0,1}(z, e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \leq$
$\varepsilon + 2M \displaystyle\int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\geq\delta} P_{0,1}(z, e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$. Da $P_{0,1}(z,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}$ otteniamo che il secondo integrale tende a 0 quando $z \longrightarrow e^{i\theta_0}$, per cui $\lim_{z\longrightarrow\zeta_0} |T(z)| \leq \varepsilon$ per ogni ε. □

Corollario 2.6.9. (Formula di Poisson) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}, u \in \mathcal{H}(\Omega), D(a,\rho) \subset\subset \Omega$. Allora per ogni $z \in D(a,\rho)$ $u(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, a+\rho e^{i\theta})u(a+\rho e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$.

Dimostrazione. Chiamiamo u_1 il membro destro dato dall'integrale. $u_1 \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ e per la proposizione 2.6.8 $(u - u_1)|_{\partial D(a,\rho)} \equiv 0$, dunque per il corollario 2.6.5 $u \equiv u_1$ su $D(a,\rho)$. □

Corollario 2.6.10. Ogni funzione armonica a valori reali è localmente la parte reale di una funzione olomorfa e quindi è analitica reale.

Dimostrazione. Il nucleo di Poisson lo è. □

Corollario 2.6.11. (Problema di Dirichlet) Data $f \in C^0(\partial D(a,\rho))$ esiste un'unica $u \in C^0(\overline{D(a,\rho)}) \cap \mathcal{H}(D(a,\rho))$ t.c. $u|_{\partial D(a,\rho)} \equiv f$.

Dimostrazione. Una soluzione è data da $u(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, a+\rho e^{i\theta})f(a+\rho e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$. L'unicità segue sempre dal corollario 2.6.5. □

Definizione 2.6.12. $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ha la *proprietà della media* se per ogni $z_0 \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ t.c. $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$ $u(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$.

Proposizione 2.6.13. $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua ha la proprietà della media se e solo se è armonica.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) u è la parte reale di una funzione olomorfa, perciò la tesi segue dalla formula integrale di Cauchy (la verifica è lasciata per esercizio).
($\Rightarrow$) Fissiamo $z_0 \in \Omega, r > 0$ t.c. $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Poniamo $f = u|_{\partial D(z_0,r)}$ e sia $F \in C^0(\overline{D(z_0, r)}) \cap \mathcal{H}(D(z_0, r))$ l'estensione armonica t.c. $F|_{\partial D(z_0,r)} \equiv f$. Allora $F - u$ ha la proprietà della media e $(F - u)|_{\partial D(z_0,r)} \equiv 0$. Supponiamo per assurdo $(F-u)|_{\partial D(z_0 m r)} \not\equiv 0$. Ponendo $g = \pm(F-u)$ (dove il segno è scelto opportunamente), possiamo assumere senza perdita di generalità che esiste $\tilde{z} \in D(z_0, r)$ t.c. $g(\tilde{z}) > 0$. Possiamo anche supporre che $g(\tilde{z}) = \max\limits_{z \in \overline{D(z_0,r)}} g(z)$. Per $0 \leq \rho << 1$ poniamo $M(\rho) = \sup\limits_{\theta} g(\tilde{z} + \rho e^{i\theta})$. Per ipotesi $M(\rho) \leq g(\tilde{z})$; per la proprietà della media $g(\tilde{z}) \leq M(\rho) \Rightarrow M(\rho) = g(\tilde{z})$ per ogni $\rho << 1$. Ma allora $g(\tilde{z}) - g(\tilde{z} + \rho e^{i\theta}) \geq 0$ e ha media nulla su $S^1 \ni e^{i\theta} \Rightarrow g(\tilde{z}) - g(\tilde{z} + \rho e^{i\theta}) \equiv 0$, cioè $g|_{D(\tilde{z},\rho)} \equiv g(\tilde{z})$ per ogni $\rho << 1$. Allora l'insieme $\{z \in D(z_0, r) \mid g(z) = g(\tilde{z})\}$ è aperto e chiuso in $D(z_0, r) \Rightarrow g \equiv g(\tilde{z}) > 0$ in $D(z_0, r)$, contro l'ipotesi che $g|_{\partial D(z_0,r)} \equiv 0$, assurdo. $\square$

Osservazione 2.6.14. Si possono definire le funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n$ con $\Delta u \equiv 0$.

Definizione 2.6.15. Una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è *pluriarmonica* se per ogni $a \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ la funzione $\zeta \longmapsto u(a + \zeta v)$ è armonica dove definita.

Osservazione 2.6.16. Pluriarmonica $\Rightarrow$ armonica.

Fatto 2.6.17. u è pluriarmonica $\iff$ u è localmente la parte reale di una funzione olomorfa.

2.7 Funzioni subarmoniche

Esercizio 2.7.1. Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una funzione semicontinua superiormente (scs) limitata dall'alto. Allora esistono $\{u_j\} \subset C^0(\Omega)$ limitate dall'alto t.c. $u_j \downarrow u$ puntualmente. Hint: per $j \geq 1$ si pone $u_j(x) = \sup\limits_{y \in \Omega}\{u(y) - j\|x - y\|\} \geq u(x)$.

Definizione 2.7.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ scs è SUBARMONICA se per ogni $a \in \Omega$, per ogni $r > 0$ t.c. $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ e per ogni $h \in C^0(\overline{D(a, r)}) \cap \mathcal{H}(D(a, r))$, se $h|_{\partial D(a,r)} \geq u|_{\partial D(a,r)}$, allora anche $h|_{D(a,r)} \geq u|_{D(a,r)}$.

Osservazione 2.7.3. Armonica $\Rightarrow$ subarmonica (segue dalla formula di Poisson).

Osservazione 2.7.4. Se $\pm u$ sono subarmoniche, u è armonica (basta prendere la sua estensione armonica h e far vedere che coincide con u).

Teorema 2.7.5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ scs. Sono equivalenti:

(i) u è subarmonica;

(ii) per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ t.c. $\overline{D(x,r)} \subset \Omega$ vale la *proprietà della sottomedia*, cioè $u(x) \leq \dfrac{1}{2\pi r} \displaystyle\int_{\partial D(x,r)} u(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(x + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$;

(iii) per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto e per ogni $h \in C^0(K) \cap \mathcal{H}\left(\overset{\circ}{K}\right)$ se $h|_{\partial K} \geq u|_{\partial K}$ allora $h|_K \geq u|_K$;

(iv) esiste una successione $\{u_j\}$ di funzioni subarmoniche t.c. $u_j \downarrow u$;

(v) per ogni $x \in \Omega$, per ogni $0 < \delta < d(x, \partial\Omega)$ e per ogni μ misura di Borel positiva su $[0, \delta]$ si ha $u(x) \displaystyle\int_0^\delta \mathrm{d}\mu \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^\delta \left[\int_0^{2\pi} u(x + se^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\mu(s)$;

(vi) per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $0 < \delta < d(x, \partial\Omega)$ esiste μ misura di Borel positiva su $[0, \delta]$ si ha $u(x) \displaystyle\int_0^\delta \mathrm{d}\mu \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^\delta \left[\int_0^{2\pi} u(x + se^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\mu(s)$;

(vii) per ogni $x \in \Omega$, per ogni $r > 0$ t.c. $\overline{D(x,r)} \subset \Omega$ e per ogni $y \in D(x,r)$ vale $u(y) \leq \displaystyle\int_0^{2\pi} P_{x,r}(y, x + re^{i\theta}) u(x + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$;

(viii) per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ t.c. $\overline{D(x,r)} \subset \Omega$ vale $u(x) \leq \dfrac{1}{\pi r^2} \displaystyle\int_{D(x,r)} u(y)\, \mathrm{dLeb}(y)$.

Dimostrazione. (v) $\Rightarrow$ (vi) è ovvio.
(vi) $\Rightarrow$ (iii) Siano $K \subset\subset \Omega$ e $h \in C^0(K) \cap \mathcal{H}\left(\overset{\circ}{K}\right)$ t.c. $h|_{\partial K} \geq u|_{\partial K}$; poniamo $f = u - h$. Per ipotesi $f \leq 0$ su ∂K. Per assurdo, $f > 0$ da qualche parte in K. f scs $\Rightarrow$ ha massimo $M > 0$ su K. Sia $L = \{y \in K \mid f(y) = M\} \subset \overset{\circ}{K}$. Sia $y_0 \in L$ il punto di L più vicino a ∂K, Sia $\rho_0 > 0$ t.c. $\overline{D(y_0, \rho_0)} \subset \overset{\circ}{K}$. Se $\rho_0 \geq \rho > 0$ esiste un arco di $\partial D(y_0, \rho)$ non contenuto in $L \Rightarrow f < M$ almeno su un arco di $\partial D(y_0, \rho)$. Ma allora $\displaystyle\int_0^{\rho_0} \left[\int_0^{2\pi} f(y_0 + \rho e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\mu(\rho) < 2\pi M \int_0^{\rho_0} \mathrm{d}\mu(\rho) = 2\pi f(y_0) \int_0^{\rho_0} \mathrm{d}\mu(\rho)$. Siccome $\displaystyle\int_0^{2\pi} h(y_0 + \rho e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta = 2\pi h(y_0)$, otteniamo $\displaystyle\int_0^{\rho_0} \left[\int_0^{2\pi} u(y_0 + \rho e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\mu(\rho) < 2\pi u(y_0) \int_0^{\rho_0} \mathrm{d}\mu$, contro (vi).
(iii) $\Rightarrow$ (i) è ovvio.
(i) $\Rightarrow$ (vii) Sia $\{u_j\} \subset C^0(\overline{D(x,r)})$ con $u_j \downarrow u$ data dall'esercizio 2.7.1. Sia $h_j \in C^0(\overline{D(x,r)}) \cap \mathcal{H}(D(x,r))$ l'estensione armonica di u_j data da $h_j(y) = \displaystyle\int_0^{2\pi} P_{x,r}(y, x + re^{i\theta}) u_j(x + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$. Allora $u(y) \leq u_j(y)$ su $\overline{D(x,r)}$; in particolare $u|_{\partial D(x,r)} \leq u_j|_{\partial D(x,r)} = h_j|_{\partial D(x,r)}$, dunque per (i) abbiamo che $u(y) \leq$

$h_j(y) = \displaystyle\int_0^{2\pi} P_{x,r}(y, x + re^{i\theta}) u_j(x + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$. A questo punto basta mandare $j \longrightarrow +\infty$.

(vii) $\Rightarrow$ (ii) Basta porre $y = x$ in (vii) perché $P_{x,r}(x, x + re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi}$.

(ii) $\Rightarrow$ (v) è ovvio (basta integrare (ii) rispetto a μ).

(i) $\Rightarrow$ (iv) Basta porre $u_j = u + \dfrac{1}{j}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Fissiamo $\varepsilon > 0, j \geq 1, x \in \Omega, r > 0$ t.c. $\overline{D(x,r)} \subset \Omega$, $h \in C^0(\overline{D(x,r)}) \cap \mathcal{H}(D(x,r))$ t.c. $h|_{\partial D(x,r)} \geq u|_{\partial D(x,r)}$. Sia $S_j = \{e^{i\theta} \in S^1 \mid u_j(x + re^{i\theta}) \geq h(x + re^{i\theta}) + \varepsilon\}$. Ogni S_j è chiuso e compatto, $S_{j+1} \subseteq S_j$, $\displaystyle\bigcap_j S_j = \varnothing \Rightarrow$ esiste j_0 t.c. $S_j = \varnothing$ per ogni $j \geq j_0$. Quindi $u|_{\partial D(x,r)} \leq u_j|_{D(x,r)} < h|_{\partial D(x,r)} + \varepsilon$ per ogni $j >> 1 \Rightarrow u|_{D(x,r)} \leq u_j|_{D(x,r)} \leq h|_{D(x,r)} + \varepsilon$ per ogni $j >> 1$. Con $\varepsilon \longrightarrow 0$ otteniamo u subarmonica.

(ii) $\Rightarrow$ (viii) Da (ii) abbiamo che $\dfrac{1}{2} r_0^2 u(x) = \displaystyle\int_0^{r_0} r u(x)\, \mathrm{d}r \leq \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} u(x + re^{i\theta}) r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r = \dfrac{1}{2\pi} \int_{D(x,r_0)} u(y)\, \mathrm{dLeb}(y)$.

(viii) $\Rightarrow$ (iii) Come (vi) $\Rightarrow$ (iii) con $\mu = r\, \mathrm{d}r$. □

Corollario 2.7.6. (*Principio del massimo*) Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subarmonica con Ω aperto connesso. Supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ t.c. $u(x_0) = \sup\limits_{x \in \Omega} u(x)$. Allora $u \equiv u(x_0)$.

Dimostrazione. $\{x \in \Omega \mid u(x) = u(x_0)\}$ è chiuso e aperto per il punto (viii) del teorema appena dimostrato. □

Lemma 2.7.7. (Disuguaglianza di Jensen) Sia $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa e μ una misura di probabilità. Allora per ogni $g \in L^1(\mu)$ si ha $\varphi\left(\displaystyle\int g(x)\, \mathrm{d}\mu(x)\right) \leq \displaystyle\int \varphi \circ g(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$.

Dimostrazione. Poniamo $x_0 = \displaystyle\int g(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R}$. Siccome φ è convessa, esistono $a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $ax_0 + b = \varphi(x_0)$ e $ax + b \leq \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $ag(x) + b \leq \varphi(g(x))$ per ogni $x \Rightarrow \varphi(x_0) = ax_0 + b = a \displaystyle\int g(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + b = \int (ag(x) + b)\, \mathrm{d}\mu(x) \leq \int \varphi(g(x))\, \mathrm{d}\mu(x)$. □

Corollario 2.7.8. $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subarmonica, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente e convessa $\Rightarrow \varphi \circ u$ è subarmonica.

Dimostrazione. Dal fatto che φ è crescente e u subarmonica otteniamo $\varphi(u(x)) \leq \varphi\left(\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(x,r)} u(y)\,\mathrm{dLeb}\right) \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(x,r)} \varphi(u(y))\,\mathrm{dLeb}$ dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\frac{1}{\pi r^2}\,\mathrm{dLeb}$ è di probabilità e dalla disuguaglianza di Jensen. □

Proposizione 2.7.9. $u \in C^2(\Omega)$ è subarmonica $\iff \Delta u \geq 0$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) $D = D(x,r) \subset\subset \Omega$, $h \in C^0(D) \cap \mathcal{H}(D)$ con $h|_{\partial D} \geq u|_{\partial D}$. Sappiamo che $\Delta(u-h) \geq 0$ in D e $u-h \leq 0$ su ∂D, dunque per il principio del massimo (quello con l'ipotesi sul laplaciano) abbiamo $u - h \leq 0$ su D.
($\Rightarrow$) Per assurdo esiste $x_0 \in \Omega$ t.c. $\Delta u(x_0) < 0 \Rightarrow \Delta u(x) < 0$ per ogni $x \in D(x_0, r) \Rightarrow -u$ è subarmonica in $D(x_0,r) \Rightarrow u$ è armonica in $D(x_0,r)$ $\Rightarrow \Delta u(x_0) = 0$, assurdo. □

Corollario 2.7.10. $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow |f|^p$ per ogni $p \geq 0$ e $\log|f|$ sono subarmoniche.

Dimostrazione. Se $f(x_0) \neq 0$ abbiamo $\Delta|f|^p = p^2|f|^{p-2}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 \geq 0$ (segue da $|f|^p = |f\bar{f}|^{p/2}$ e $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$) e $\log|f| = \mathfrak{Re}\log f$ vicino a x_0. Se $f(x_0) = 0$, la proprietà della sottomedia in x_0 è ovvia. □

2.8 Funzioni plurisubarmoniche e domini pseudoconvessi

Definizione 2.8.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ scs è PLURISUBARMONICA se per ogni $z \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ l'applicazione $\zeta \longmapsto u(z + \zeta v)$ è subarmonica dove definita. Scriviamo $u \in PSH(\Omega)$.

Proposizione 2.8.2. $u \in C^2(\Omega)$ è plurisubarmonica $\iff$ per ogni $z \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ vale $\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \geq 0$.

Dimostrazione. Poniamo $v(\zeta) = u(z + \zeta v)$. $\frac{\partial v}{\partial \zeta}(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j}(z+\zeta v) \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta}(z_j + \zeta v_j) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}(z + \zeta v) \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta}(\bar{z}_j + \bar{\zeta}\bar{v}_j)$. Osserviamo che $\frac{\partial}{\partial \zeta}(\bar{z}_j + \bar{\zeta}\bar{v}_j) = 0$, perciò otteniamo $\Delta v(\zeta) = 4\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(\zeta) = 4\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z + \zeta v) v_j \bar{v}_k$. □

Definizione 2.8.3. Sia $u \in C^2(\Omega)$. La FORMA DI LEVI DI u IN $z \in \Omega$ è $L_{u,z} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\right)$ (è una matrice hermitiana).

Osservazione 2.8.4. $u \in PSH(\Omega) \cap C^2(\Omega) \iff L_{u,z} \geq 0$ (cioè è semidefinita positiva) per ogni $z \in \Omega$.

Definizione 2.8.5. $u \in C^2(\Omega)$ è *strettamente plurisubarmonica* se $L_{u,z} > 0$ per ogni $z \in \Omega$.

Osservazione 2.8.6. Se $\rho \in C^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ allora $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\}$ è un aperto.

Definizione 2.8.7. Un DOMINIO DI CLASSE C^k (o *con bordo di classe* C^k), $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$ è $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\}$ con $\rho \in C^k(\mathbb{C}^n)$ (con C^ω si intendono le funzioni analitiche), detta *funzione di definizione*, t.c. $\vec{\nabla}\rho$ non si annulla mai su $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) = 0\}$ ($\Rightarrow \partial\Omega$ è una ipersuperficie reale di classe C^k).

Esempio 2.8.8. $\mathbb{B}^n = \{\|z\|^2 - 1 < 0\}$, $\rho(z) = \|z\|^2 - 1$.

Osservazione 2.8.9. Sia Ω di classe C^k, $x_0 \in \partial\Omega$. Lo spazio tangente reale a $\partial\Omega$ in x_0, detto $T^{\mathbb{R}}_{x_0}\partial\Omega$, è l'ortogonale di $\vec{\nabla}\rho(x_0)$ rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^{2n}$.

Esercizio 2.8.10. $T^{\mathbb{R}}_{x_0}\partial\Omega = \left\{ v \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x_0) v_j\right) = 0 \right\}$.

Definizione 2.8.11. Sia Ω di classe C^k, $x_0 \in \partial\Omega$. Lo *spazio tangente complesso a* $\partial\Omega$ *in* x_0 è $T^{\mathbb{C}}_{x_0}\partial\Omega = \left\{ v \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x_0) v_j = 0 \right\}$ sottospazio complesso di $\mathbb{C}^n$ di dimensione $\dim = n - 1$.

Definizione 2.8.12. Sia $\Omega = \{\rho < 0\}$ un dominio di classe C^2. Diremo che Ω è (LEVI) PSEUDOCONVESSO se $L_{\rho,x} \geq 0$ su $T^{\mathbb{C}}_x\partial\Omega$ per ogni $x \in \partial\Omega$; diremo che è *strettamente pseudoconvesso* se $L_{\rho,x} > 0$ su $T^{\mathbb{C}}_x\partial\Omega$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Osservazione 2.8.13. Se ρ_1 e ρ_2 sono funzioni di definizione di $\Omega = \{\rho_1 < 0\} = \{\rho_2 < 0\}$ allora $\{\rho_1 = 0\} = \{\rho_2 = 0\}$ e questo implica (esercizio) che esiste $h > 0$ t.c. $\rho_2 = h\rho_1$ vicino a $\partial\Omega \Rightarrow \frac{\partial \rho_2}{\partial z_j} = \frac{\partial h}{\partial z_j}\rho_1 + h\frac{\partial \rho_1}{\partial z_j} \Rightarrow \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = \frac{\partial^2 h}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\rho_1 + \frac{\partial h}{\partial z_j}\frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial \rho_1}{\partial z_j} + h\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$. Se $x_0 \in \partial\Omega$, $\rho_1(x_0) = 0$. Se $v \in T^{\mathbb{C}}_{x_0}\partial\Omega$ allora $\sum_j \frac{\partial \rho_j}{\partial z_j}(x_0) v_j = 0 = \overline{\sum_k \frac{\partial \rho_j}{\partial z_h}(x_0) v_k} = \sum_k \frac{\partial \rho_j}{\partial \bar{z}_k}(x_0)\bar{v}_k$. Se $x_0 \in \partial\Omega, v \in T^{\mathbb{C}}_{x_0}\partial\Omega$, allora $\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x_0) v_j \bar{v}_k = h(x_0) \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x_0) v_j \bar{v}_k$. Quindi la definizione di Levi pseudoconvesso non dipende dalla funzione di definizione.

Fatto 2.8.14. Se Ω è di classe C^2 allora $\delta_\Omega(z) = \begin{cases} -d(z, \partial\Omega) & \text{se } z \in \Omega \\ d(z, \partial\Omega) & \text{se } z \notin \Omega \end{cases}$ è di classe C^2 in un intorno di $\partial\Omega$ con $\vec{\nabla} \neq 0$ su $\partial\Omega$.

Fatto 2.8.15. Se Ω è strettamente pseudoconvesso allora esiste una funzione di definizione ρ di Ω t.c. $L_{\rho,x} > 0$ su tutto $\mathbb{C}^n$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Fatto 2.8.16. (Narasimhan) Sia Ω un dominio C^2 strettamente pseudoconvesso e $x_0 \in \partial\Omega$. Allora esistono $U \ni x_0$ intorno e $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ biolomorfismo con l'immagine t.c. $\varphi(U \cap \Omega)$ è strettamente convesso.

Esempio 2.8.17. $\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 + |w|^{-2} < 3\}$ è strettamente pseudoconvesso ma topologicamente è isomorfo a $\mathbb{D} \times$ Anello.

Definizione 2.8.18. $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio è HARTOGS PSEUDOCONVESSO se $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$ per qualche μ funzionale di Minkowski.

Teorema 2.8.19. Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ di classe C^2. Allora sono equivalenti:

(i) Ω è Levi pseudoconvesso;
(ii) Ω è Hartogs pseudoconvesso;
(iii) Ω è $PSH(\Omega)$-convesso (cioè l'inviluppo olomorfo di un compatto in Ω rispetto a $PSH(\Omega)$ è ancora compatto in Ω).

Inoltre, l'equivalenze tra (ii) e (iii) vale per Ω dominio qualsiasi.

Corollario 2.8.20. Dominio di olomorfia $\Rightarrow$ pseudoconvesso.

Dimostrazione. (Del corollario) Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora $|f| \in PSH(\Omega) \Rightarrow \widehat{K}_{PSH(\Omega)} \subseteq \widehat{K}_\Omega$. □

Il corollario 2.8.20 spiega l'importanza dei domini pseudoconvessi e il motivo per cui li stiamo studiando, inoltre fa sorgere un dubbio abbastanza importante da avere un nome suo, il cosiddetto *problema di Levi*: pseudoconvesso $\Rightarrow$ dominio di olomorfia?

Definizione 2.8.21. Un DISCO ANALITICO è $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa. Un disco analitico è *chiuso* se φ si estende con continuità a $\partial\mathbb{D}$. Se $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ è un disco analitico chiuso porremo $d = \varphi(\overline{\mathbb{D}}), \partial d = \varphi(\partial\mathbb{D})$ e $\overset{\circ}{d} = \varphi(\mathbb{D})$.

Lemma 2.8.22. Se $d \subset \Omega$ è un disco analitico chiuso allora $d \subseteq \widehat{\partial d}_\Omega$.

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $d = \varphi(\overline{\mathbb{D}})$ allora $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}}) \Rightarrow$ (principio del massimo) per ogni $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ vale $|(f \circ \varphi)(\zeta)| \leq \max\limits_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} |f(\varphi(\zeta))| \Rightarrow$ per ogni $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ vale $\varphi(\zeta) \in \widehat{\partial d}_\Omega$. $\square$

Lemma 2.8.23. Se $u \in PSH(\Omega)$ e $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ è olomorfa, allora $u \circ \varphi \in SH(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. (Idea) Supponiamo $u \in PSH(\Omega) \cap C^2(\Omega)$. Allora $\dfrac{\partial(u \circ \varphi)}{\partial \zeta} = \sum\limits_h \left(\dfrac{\partial u}{\partial z_h}\right) \cdot \dfrac{\partial \varphi_h}{\partial \zeta}$, $\dfrac{\partial^2(u \circ \varphi)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = \sum\limits_{h,k} \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_h \partial \bar{z}_k} \circ \varphi\right) \dfrac{\partial \varphi_h}{\partial \zeta} \overline{\left(\dfrac{\partial \varphi_h}{\partial \zeta}\right)} \geq 0$ perché $u \in PSH(\Omega)$.

Fatto 2.8.24. $u \in PSH(\Omega) \Rightarrow$ esistono $u_j \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ t.c. $u_j \downarrow u$ per $j \longrightarrow +\infty$.

Se $u \in PSH(\Omega)$, possiamo usare questo fatto e la prima parte della dimostrazione per dire che $u_j \circ \varphi \in SH(\mathbb{D})$ con $u_j \circ \varphi \downarrow u \circ \varphi \Rightarrow u \circ \varphi \in SH(\mathbb{D})$. $\square$

Teorema 2.8.25. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sono equivalenti:

(i) per ogni famiglia $\{d_\alpha\}$ di dischi analitici chiusi contenuti in Ω se $\bigcup\limits_\alpha \partial d_\alpha \subset\subset \Omega$ allora $\bigcup\limits_\alpha d_\alpha \subset\subset \Omega$ (*Kontinuitätsatz*);

(ii) per ogni μ funzionale di Minkowski e per ogni d disco analitico chiuso in Ω vale che $\mu_\Omega(\partial d) = \mu_\Omega(d)$;

(iii) esiste μ funzionale di Minkowski t.c. per ogni d disco analitico chiuso in Ω vale che $\mu_\Omega(\partial d) = \mu_\Omega(d)$;

(iv) esiste $\Phi \in PSH(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ t.c. per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha che $\Omega_c = \{z \in \Omega \mid \Phi(z) < c\} \subset\subset \Omega$ ($\Phi \in C^0(\Omega)$ t.c. $\Omega_c \subset\subset \Omega$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ è detta *esaustione*; quella che abbiamo appena definito al punto (iv) è detta *esaustione plurisubarmonica*);

(v) esiste un'esaustione C^∞ strettamente plurisubarmonica;

(vi) Ω è Hartogs pseudoconvesso: esiste μ funzionale di Minkowski t.c. $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$;

(vii) per ogni μ funzionale di Minkowski $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$;

(viii) (solo se $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ è di classe C^2) Ω è Levi pseudoconvesso;

(ix) Ω ammette un'esaustione con sottodomini Hartogs pseudoconvessi, cioè esistono $\{\Omega_j\}$ dominio Hartogs pseudoconvessi t.c. $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$, $\Omega = \bigcup\limits_j \Omega_j$ e $\Omega_j \subset\subset \mathbb{C}^n$;

(x) Ω ammette un'esaustione con sottodomini di classe C^∞ strettamente pseudoconvessi;

(xi) Ω è $PSH(\Omega)$-convesso.

Dimostrazione. (v) $\Rightarrow$ (10) Sia Φ un'esaustione C^∞ strettamente plurisubarmonica e $\Omega_j = \{\Phi < j\}, j \in \mathbb{N}$, allora gli Ω_j sono strettamente pseudoconvessi e sono un'esaustione di Ω. Per averli C^∞ si sfrutta il teorema di Sard: se $\Phi \in C^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, allora l'insieme dei valori critici di Φ ha misura zero in $\mathbb{R}$; a questo punto basta prendere dei valori che si scostano leggermente da j.
(x) $\Rightarrow$ (ix) Segue da strettamente pseudoconvesso $\Rightarrow$ Hartogs pseudoconvesso che seguirà da (viii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (xi) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (vi).
(ix) $\Rightarrow$ (vi) Sia $\mu = \|\cdot\|$. Da (vi) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (xi) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (vii) abbiamo che $-\log \mu_{\Omega_j} \in PSH(\Omega_j)$ per ogni j. $\Omega_j \subset \Omega_{j+1} \Rightarrow \mu_{\Omega_j} \leq \mu_{\Omega_{j+1}} \Rightarrow -\log \mu_{\Omega_j} \geq -\log \mu_{\Omega_{j+1}} \geq \cdots \geq -\log \mu_\Omega \Rightarrow -\log \mu_{\Omega_j}$ è una successione di funzioni plurisubarmoniche che decresce verso $-\log \mu_\Omega$ (che il limite sia proprio quello segue dal fatto che Ω_j è un'esaustione) $\Rightarrow -\log \mu_\Omega \in PSH$ per il teorema 2.7.5.
(vi) $\Rightarrow$ (iv) Sia $\Phi(z) = -\log \mu_\Omega(z) + \|z\|^2$. $\Phi \in PSH(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ ed è un'esaustione perché $\Phi \geq -\log \mu_\Omega(z) \Rightarrow \mu_\Omega \geq e^{-\Phi} \Rightarrow \overline{\{\Phi < j\}} = \overline{\{\mu_\Omega \geq e^{-j} > 0\}} \subset \Omega$ e il termine $\|z\|^2$ ci dà la limitatezza, perciò $\{\Phi < j\} \subset\subset \mathbb{C}^n$.
(iv) $\Rightarrow$ (v) Non svolta in quanto tecnica.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Per assurdo esiste d t.c. $\mu_\Omega\left(\overset{\circ}{d}\right) < \mu_\Omega(\partial d)$. Sia $p_0 \in \overset{\circ}{d}$ t.c. $\mu_\Omega\left(\overset{\circ}{d}\right) = \mu_\omega(d) = \mu_\Omega(p_0)$. Sia $x_0 \in \partial\Omega$ t.c. $\mu_\Omega(p_0) = \mu(p_0 - x_0)$. Poniamo $d_j = d + (1 - 1/j)(x_0 - p_0)$ (sono traslazioni del disco analitico d). Abbiamo $\bigcup_j \partial d_j \subset\subset \Omega$ perché $\mu_\Omega(\partial d) > \mu(x_0 - p_0)$, ma $\bigcup_j d_j \supseteq \{p_0 + (1 - 1/j)(x_0 - p_0)\}$ e $p_0 + (1 - 1/j)(x_0 - p_0) \longrightarrow x_0 \in \partial\Omega$, dunque $\bigcup_j d_j$ non è relativamente compatto dentro Ω contro (i), assurdo.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) è ovvio.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Per assurdo, se (i) fosse falsa esisterebbe d_j con $\mu_\Omega(\partial d_j) \geq \delta_0 > 0$ ma $\mu_\Omega(d_j) \longrightarrow 0$ contro (iii), assurdo.
(ii) $\Rightarrow$ (vii) Fissiamo μ funzionale di Minkowski, $z_0 \in \Omega$, $v_0 \in \mathbb{C}^n$. Vogliamo $\psi(\zeta) = -\log \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0)$ subarmonica. Prendendo $\|v_0\| << 1$, possiamo supporre $\psi \in C^0(\overline{\mathbb{D}})$. Per l'arbitratietà di z_0 e v_0 basta dimostrare che $\psi(0) \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$ e poi concludere con il teorema 2.7.5. Sia $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C^0(\overline{D})$ l'estensione armonica di ψ e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{D})$ t.c. $h = \mathfrak{Re} f$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e poniamo $f_\varepsilon = f + \varepsilon/2, h_\varepsilon = \mathfrak{Re} f_\varepsilon \Rightarrow \psi < h_\varepsilon < \psi + \varepsilon$ su $\partial\mathbb{D}$. Sia $v \in \mathbb{C}^n$ con $\mu(v) = 1$ e sia d il disco analitico dato dall'applicazione $\zeta \mapsto z_0 + \zeta v_0 + e^{-f_\varepsilon(\zeta)} v$. Vogliamo $d \subset \Omega$. Su ∂d abbiamo che $\mu((z_0 + \zeta v_0) - (z_0 + \zeta v_0 + e^{-f_\varepsilon(\zeta)} v)) = \mu(e^{-f_\varepsilon(\zeta)} v) = |e^{-f_\varepsilon(\zeta)}| \mu(v) = e^{-h_\varepsilon(\zeta)}$. Dato che siamo su ∂d, si ha $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, perciò la quantità appena trovata è strettamente minore di $e^{-\psi(\zeta)} = \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0) \Rightarrow z_0 + \zeta v_0 + e^{-f_\varepsilon(\zeta)} v \in \Omega \Rightarrow \partial d \subset \Omega$ e questo per (ii) ci dà $d \subset \Omega$ (di questo non sono sicuro perché mi pare che serva $d \subset \Omega$ per usare (ii); purtroppo a quella lezione non c'ero, cercherò di ri-

mediare). In particolare $z_0 + e^{-f_\varepsilon(0)}v \in \Omega$ per ogni v t.c. $\mu(v) = 1 \Rightarrow \mu_\Omega(z_0) \geq |e^{-f_\varepsilon(0)}| = e^{-h_\varepsilon(0)} \Rightarrow \psi(0) = -\log \mu_\Omega(z_0) \leq h_\varepsilon(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h_\varepsilon(e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta + \varepsilon$. A questo punto basta mandare ε a 0 per ottenere quanto voluto.

(vii) $\Rightarrow$ (vi) è ovvio.

(v) $\Rightarrow$ (xi) Sia $K \subset\subset \Omega$ compatto, $\Phi \in C^\infty$ esaustione strettamente plurisubarmonica. Esiste $c > 0$ t.c. $K \subset \Omega_c = \{\Phi < c\} \Rightarrow \widehat{K}_{PSH(\Omega)} \subset \Omega_c \subset\subset \Omega$.

(xi) $\Rightarrow$ (i) Sia $d = \varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \Omega$ disco analitico chiuso, $u \in PSH(\Omega)$. Per il lemma 2.8.23 $u \circ \varphi \in SH(\mathbb{D}) \Rightarrow$ per ogni $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ si ha $|u \circ \varphi(\zeta)| \leq \max\limits_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} |(u \circ \varphi)(\zeta)| \Rightarrow d \subseteq \widehat{\partial d}_{PSH(\Omega)} \Rightarrow \bigcup\limits_\alpha d_\alpha \subseteq \bigcup\limits_\alpha \widehat{(\partial d_\alpha)}_{PSH(\Omega)} \subseteq \widehat{\left(\bigcup\limits_\alpha \partial d_\alpha\right)}_{PSH(\Omega)} \subset\subset \Omega$ dove l'ultimo contenimento segue da (xi).

(vii) $\Rightarrow$ (viii) Sia $\mu = \|\cdot\|$. $\mu_\Omega = d(\cdot, \partial\Omega)$ è di classe C^2 vicino a $\partial\Omega$. Inoltre $\rho(z) = \begin{cases} -\mu_\Omega(z) & \text{se } z \in \overline{\Omega} \\ d(z, \partial\Omega) & \text{se } z \notin \Omega \end{cases}$ è una funzione di definizione per Ω. Per (vii) $\varphi = -\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$. $L_{\varphi,z}(v) = \sum\limits_{j,k} \left(-\dfrac{1}{\mu_\Omega(z)} \dfrac{\partial^2 \mu_\Omega}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) + \dfrac{1}{\mu_\Omega(z)^2} \dfrac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(z) \dfrac{\partial \mu_\Omega}{\partial \bar{z}_k}(z) \right) v_j \bar{v}_k \geq 0$ se $v \in \mathbb{C}^n$ e $z \in \Omega$ abbastanza vicino a $\partial\Omega$ in modo che μ_Ω sia C^2 in z. Moltiplichiamo per μ_Ω e restringiamoci a $\left\{ v \mid \sum\limits_j \dfrac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(z) v_j = 0 \right\}$. Per questi v abbiamo $\sum\limits_{j,k} \dfrac{\partial^2(-\mu_\Omega)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \geq 0$. Mandando $z \longrightarrow x \in \partial\Omega$ allora $T_z^{\mathbb{C}}(\partial\Omega) \longrightarrow T_x^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$ e $\sum\limits_{j,k} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \geq 0$ per ogni $v \in T_x^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$.

(viii) $\Rightarrow$ (iv) Sia $\mu = \|\cdot\|$, $\rho = -\mu_\Omega$ la funzione di definizione e $u = -\log \mu_\Omega$. Essendo Ω limitato, u è un'esaustione. Per assurdo, supponiamo che u non sia plurisubarmonica. Possiamo assumere che non lo sia vicino a $\partial\Omega$, dove è C^2. Deve esistere $z_0 \in \Omega$ t.c. $L_{u,z}$ non sia semidefinita positiva, cioè esiste $v_0 \in \mathbb{C}^n$ t.c. $0 > L_{u,z}(v) = \sum\limits_{j,k} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_{0j} \bar{v}_{0k} = \dfrac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(-\log \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0))|_{\zeta=0} = -\lambda, \lambda > 0$. Poniamo $\varphi(\zeta) = \log \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0)$. Lo sviluppo di Taylor in $\zeta = 0$ è il seguente: $\log \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0) = \varphi(\zeta) = \varphi(0) + \mathfrak{Re}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta}(0)\zeta + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}(0)\zeta^2 \right) + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(0)|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2) = \log \mu_\Omega(z_0) + \mathfrak{Re}(A\zeta + B\zeta^2) + \lambda|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2)$. Sia $x_0 \in \partial\Omega$ t.c. $\mu_\Omega(z_0) = \|x_0 - z_0\|$ e poniamo $w_0 = x_0 - z_0$; $z_0 + w_0 \in \partial\Omega$ e $\|w_0\| = \mu_\Omega(z_0)$. Poniamo $\psi)\zeta) = z_0 + \zeta v_0 + \exp(A\zeta + B\zeta^2)$. $\psi(0) = z_0 + w_0 \in \partial\Omega$, ma $\mu_\Omega(\psi(\zeta)) \geq \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0) - \|w_0\| |\exp(A\zeta + B\zeta^2)| = \mu_\Omega(z_0) |\exp(A\zeta + B\zeta^2)| \exp(\lambda|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2)) -$

$\|w_0\| |\exp(A\zeta+B\zeta^2)| = \mu_\Omega(z_0)|\exp(A\zeta+B\zeta^2)|(\exp(\lambda|\zeta|^2+o(|\zeta|^2))-1)$. Se $0 \neq |\zeta| << 1$, di modo che $\psi(\zeta) \in \Omega$, abbiamo che la quantità appena trovata è maggiore o ugale di $\mu_\Omega(z_0)|\exp(A\zeta+B\zeta^2)|(\exp(\lambda/2|\zeta|^2)-1) > 0$. In particolare, $\mu_\Omega \circ \psi$ ha un minimo locale in $\zeta = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial(\mu_\Omega \circ \psi)}{\partial \zeta}(0) = \sum_j \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(\psi(0))\frac{\partial \psi_j}{\partial \zeta}(0)$ e dato che $\psi(0) = x_0$ questo ci dice che $\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(0) \in T^{\mathbb{C}}_{x_0}(\partial\Omega)$. Guardiamo ora lo sviluppo di Taylor di $\mu_\Omega \circ \psi$: $(\mu_\Omega \circ \psi)(\zeta) = \mathfrak{Re}\left(\frac{\partial^2(\mu_\Omega \circ \psi)}{\partial \zeta^2}(0)\zeta^2\right) + \frac{\partial^2(\mu_\Omega \circ \psi)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(0)|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2) > 0$ per $0 < |\zeta| << 1$. Il termine tra parentesi tonde non ha segno costante e il termine o piccolo è trascurabile per ζ piccolo, dunque dev'essere $0 < \frac{\partial^2(\mu_\Omega \circ \psi)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(0) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \mu_\Omega}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x_0)\frac{\partial \psi_j}{\partial \zeta}(0)\overline{\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial \zeta}\right)}(0) = -L_{-\mu_\Omega, x_0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(0)\right)$ contro l'ipotesi che $L_{-\mu_\Omega, x_0}$ fosse ≥ 0 su $T^{\mathbb{C}}_{x_0}(\partial\Omega)$. □

Osservazione 2.8.26. In generale, per vedere se Ω è pseudoconvesso basta controllare cosa succede "vicino" a $\partial\Omega$, cioè in $\Omega \backslash K$ dove $K \subset\subset \Omega$ è un compatto qualsiasi.

Adesso torniamo ad occuparci del problema di Levi iniziando da un teorema di cui non è riportata la dimostrazione.

Teorema 2.8.27. (Hörmander) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ pseudoconvesso e siano $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(\Omega)$ con la condizione di compatibilità $\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}$ per ogni j, k. Poniamo $f = \sum_j f_j \, \mathrm{d}\bar{z}_j$ (valgono le condizioni di compatibilità $\iff \bar{\partial} f = 0$). Allora esiste $u \in C^\infty(\Omega)$ unica a meno di funzioni olomorfe t.c. $\bar{\partial} u = f$ ($\iff \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = f_j$ per ogni j).

Teorema 2.8.28. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ pseudoconvesso. Sia $\Omega_n = \Omega \cap \{z_n = 0\}$ e $\tilde{\Omega}_n = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid (z', 0) \in \Omega\}$. Sia $f \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega}_n)$. Allora esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $F(z', 0) = f(z')$ per ogni $z' \in \tilde{\Omega}_n$.

Dimostrazione. Sia $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ la proiezione $\pi(z', z) = z'$, $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Sia $B = \Omega \setminus \pi^{-1}(\tilde{\Omega}_n) = \{z \in \Omega \mid \pi(z) \in \tilde{\Omega}_n\}$ chiuso in Ω, inoltre anche Ω_n è chiuso in Ω e $B \cap \Omega_n = \varnothing$. Quindi hanno intorni aperti (in Ω) disgiunti; ci basta un intorno di Ω_n contenuto in $\pi^{-1}(\tilde{\Omega}_n)$ disgiunto da un intorno di B. Sia $\Psi \in C^\infty(\Omega)$ con $\Psi \equiv 1$ in un intorno di Ω_n e $\Psi \equiv 0$ su B e $0 \leq \Psi \leq 1$. Poniamo $F(z) = \Psi(z) f(\pi(z)) + z_n u(z)$ per qualche $u \in C^\infty(\Omega)$. Se $z' \in \tilde{\Omega}_n$, $F(z', 0) = 1 \cdot f(z') + 0 = f(z') \Rightarrow F$ è un'estensione di f. Vogliamo u in modo che F sia olomorfa $\iff 0 = \bar{\partial} F = f(\pi(z))\bar{\partial}\Psi + z_n \bar{\partial} u \iff \bar{\partial} u = -\frac{f(\pi(z))\bar{\partial}\Psi}{z_n}$. Ma $\bar{\partial}\Psi \equiv 0$ in un intorno di $\Omega_n = \{z_n = 0\} \cap \Omega \Rightarrow -\frac{(f \circ \pi)\bar{\partial}\Psi}{z_n} \in C^\infty(\Omega)$ e soddisfa $\bar\partial\left(-\frac{(f\circ\pi)\bar\partial\Psi}{z_n}\right)\equiv 0$ (per Schwarz). Hörmander $\Rightarrow$ l'esistenza di una u siffatta. $\square$

Corollario 2.8.29. $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$ pseudoconvesso è un dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Per induzione su n. Per $n=1$ ok (tutti i domini di $\mathbb{C}$ sono di olomorfia). Sia vero per $n-1$, prendiamo $x\in\partial\Omega$; vogliamo $F\in\mathcal{O}(\Omega)$ che non si estende oltre x. A meno di traslazione $x=0$. Sia $H\subset\mathbb{C}^n$ iperpiano con $0\in H$ e t.c. $0\in\partial(H\cap\Omega)$; a meno di rotazione $H=\{z_n=0\}$. Poniamo $\Omega_n=H\cap\Omega$ e $\tilde\Omega_n=\{z'\in\mathbb{C}^{n-1}\mid(z',0)\in\Omega\}$. $\tilde\Omega_n$ è pseudoconvesso (per esempio perché un'esaustione plurisubarmonica di Ω fornisce un'esaustione plurisubarmonica di $\tilde\Omega_n$). Per ipotesi induttiva è dominio di olomorfia $\Rightarrow$ esiste $f\in\mathcal{O}(\tilde\Omega_n)$ che non si estende oltre $0'\in\partial\tilde\Omega_n$. Per il teorema 2.8.28 esiste $F\in\mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $F(z',0)=f(z')$ per ogni $z'\in\tilde\Omega_n$ e quindi F non si estende olte $0=x$. $\square$

2.9 Un po' di algebra

Definizione 2.9.1. Sia $f:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ olomorfa, $V=\{z\in\mathbb{C}^n\mid f(z)=0\}$ è uno *spazio analitico*. Se $f\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ (cioè è un polinomio), V è detta *varietà algebrica*.

Idea: associare a $V\subset\mathbb{C}^n$ l'insieme $I(V)=\{g\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)\mid g|_V\equiv 0\}$ che è un ideale dell'anello $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Alle proprietà geometriche di V corrisponderanno le proprietà algebriche di $I(V)$.
Sia $\mathcal{O}_0=\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$ lo spazio dei germi in $0\in\mathbb{C}^n$ do funzioni olomorfe (spazio delle serie di potenze convergenti in 0).

Proposizione 2.9.2. $\mathcal{O}_0$ è un anello *locale* (cioè ha un unico ideale massimale).

Dimostrazione. $\mathfrak{m}_0=\{\underline{f}\in\mathcal{O}_0\mid\underline{f}(0)=0\}$ è un ideale. Se $\underline{g}\notin\mathfrak{m}_0$, $\underline{g}(0)\neq 0\Rightarrow 1/\underline{g}\in\mathcal{O}_0\Rightarrow\underline{g}$ è un'unità (elemento invertibile) di $\mathcal{O}_0$. Quindi nessun ideale proprio può contenere elementi di $=_0\setminus\mathfrak{m}_0\Rightarrow\mathfrak{m}_0$ è l'unico ideale massimale. $\square$

Definizione 2.9.3. Sia $\underline{f}=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha z^\alpha\in\mathcal{O}_0$. L'ORDINE di $\underline{f}$ è $ord\underline{f}=\min\{|\alpha|\mid a_\alpha\neq 0\}$.

Chiaramente $\underline{f}$ è un'unità $\iff$ $ord\underline{f}=0$. Diremo che $\underline{f}$ è normalizzata (rispetto a z_n) se $a_{(0,\dots,0,ord\underline{f})}=1$, cioè se $\underline{f}=\sum_{|\alpha|=ord\underline{f}}a_\alpha z^\alpha+O(\|\|z\|^{ord\underline{f}+1})=z_n^{ord\underline{f}}+O(z_1,\dots,z_{n-1})+O(\|\|z\|^{ord\underline{f}+1})$.

Esercizio 2.9.4. Per ogni $\underline{f}\in\mathcal{O}_0$ esiste $A\in GL(n,\mathbb{C})$ t.c. $\underline{f}\circ A$ sia normalizzata rispetto a z_n.

Definizione 2.9.5. Sia $z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^n$ con $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, $\mathcal{O}'_0 = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$. Un POLINOMIO DI WEIERSTRASS è un polinomio monico $W \in \mathcal{O}'_0[z_n]$ della forma $W(z_n) = z_n^k + a_{k-1}(z')z_n^{k-1} + \cdots + a_0(z')$ con $a_{k-1}(0') = \cdots = a_0(0') = 0$.

Teorema 2.9.6. (di preparazione di Weierstrass) Sia $\underline{f} \in \mathcal{O}_0$ normalizzata di ordine $k \geq 0$. Allora esistono unici un'unità $\underline{u} \in \mathcal{O}_0 \setminus \mathfrak{m}_0$ e un polinomio di Weierstrass W di grado k t.c. $\underline{f} = \underline{u}W$.

Dimostrazione. Per $k = 0$ è ovvio ($\underline{f} = \underline{u}$ e $W \equiv 1$). Sia $k \geq 1 \Rightarrow \underline{f}(0) = 0$. Essendo $\underline{f}$ normalizzata, $f(0', z_n) = z_n^k + O(z_n^{k+1}) = z_n^k(1 + O(z_n))$ ha in $z_n = 0$ uno zero di ordine k ed esiste un $r > 0$ t.c. $\underline{f}(0', re^{i\theta}) \neq 0$ per ogni $\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow$ esiste $\delta > 0$ t.c. $\underline{f}(z', re^{i\theta}) \neq 0$ per ogni $\|z'\| < \delta$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Il principio dell'argomento ci dice che $z' \longmapsto \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta|=r} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)} \, d\zeta$ conta il numero di zeri in $D(0, r)$ di $f(z', \cdot)$. Dipende con continuità da z' e quindi è costante. Ponendo $z' = 0'$, vediamo che la costante è k. Indichiamo con $\alpha_1(z'), \ldots, \alpha_k(z') \in D(0, r)$ gli zeri di $f(z', \cdot)$ ripetuti con molteplicità. $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ non sono funzioni ben definite su $\{\|z'\| < \delta\}$ ma per ogni $\varphi \in \mathcal{O}(\overline{D(0, r)})$ la funzione $J_\varphi(z') = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \varphi(\alpha_j(z'))$ è ben definita e olomorfa in z' perché $J_\varphi(z') = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta|=r} \dfrac{\varphi(\zeta) \frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)} \, d\zeta$ per il teorema dei residui. Poniamo $W(z', z_n) = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} (z_n - \alpha_j(z')) = z_n^k - J_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + (-1)^k T_k(z')$ con $J_1(z') = \alpha_1(z') + \cdots + \alpha_k(z'), \ldots, J_k(z') = \alpha_1(z') \cdots \alpha_k(z')$. $W \in \mathcal{O}'_0[z_n]$ monico; siccome $\alpha_1(0') = \cdots = \alpha_k(0') = 0$, W è di Weierstrass. Poniamo $u = f/W$. Per ogni z' fissato, $u(z', \cdot)$ è olomorfa fuori da $\alpha_j(z')$; ma per costruzione queste sono singolarità rimovibili $\Rightarrow$ per ogni z' si ha $u(z', \cdot) \in \mathcal{O}(\overline{D(0, r)})$. Allora $u(z', z_n) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta|=r} \dfrac{u(z', \zeta)}{\zeta - z_n} \, d\zeta$ e siccome u è olomorfa in un intorno di $\{\|z'\| < \delta\} \times \{|z_n| = r\}$, allora $u \in \mathcal{O}(\{\|z'\| < \delta\} \times \{|z_n| = r\})$ con $u(0) = 1 \Rightarrow u \in \mathcal{O}_0 \setminus \mathfrak{m}_0$ come voluto.
Unicità: prendiamo $u_1 W_1 = u_2 W_2$ $(\star)$. Ponendo $z' = 0$ si ha $u_1(0', z_n)z_n^k = u_2(0', z_n)z_n^k \Rightarrow u_1(0', z_n) = u_2(0', z_n)$. Derivando $(\star)$ rispetto a z_j, cioè applicando l'operatore $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, e ponendo $z' = 0$ otteniamo $\dfrac{\partial u_1}{\partial z_j}(0', z_n)z_n^k + u_1(0', z_n)\dfrac{\partial W_1}{\partial z_j}(0', z_n) = \dfrac{\partial u_2}{\partial z_j}(0', z_n)z_n^k + u_2(0', z_n)\dfrac{\partial W_2}{\partial z_j}(0', z_n)$. Abbiamo inoltre che $\deg_{z_n} \dfrac{\partial W_h}{\partial z_j} \leq k - 1 \Rightarrow \dfrac{\partial u_1}{\partial z_j}(0', z_n) = \dfrac{\partial u_2}{\partial z_j}(0', z_n)$. Continuando a derivare si ottiene $u_1 \equiv u_2$. $\square$

Teorema 2.9.7. (di divisione di Weierstrass) Siano $f \in \mathcal{O}_0$ e $W \in \mathcal{O}'_0[z_n]$ polinomio di Weierstrass. Allora esistono unici $q \in \mathcal{O}_0, r \in \mathcal{O}'_0[z_n]$ con $\deg_{z_n} r < \deg_{z_n} W$ t.c. $f = qW + r$.

Dimostrazione. Sia $k = \deg_{z_n} W \geq 1$. Scegliamo $\delta > 0, \rho > 0$ t.c. W non si annulla in $\{\|z'\| < \delta\} \times \{|z_n| = \rho\}$. Poniamo $q(z', z_n) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(z',\zeta)}{W(z',\zeta)(\zeta - z_n)} \mathrm{d}\zeta$ e $r = f - qW$. $q, r \in \mathcal{O}(B^{n-1}(0,\delta) \times D(0,\rho))$. Inoltre $r(z', z_n) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \left[f(z',\zeta) - \frac{W(z',z_n) f(z',\zeta)}{W(z',\zeta)} \right] \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(z',\zeta)}{W(z',\zeta)} \left[\frac{W(z',\zeta) - W(z',z_n)}{\zeta - z_n} \right] \mathrm{d}\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(z',\zeta)}{W(z',\zeta)} \left[\frac{\zeta^k - z_n^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(z')(\zeta^j - z_n^j)}{\zeta - z_n} \right] \mathrm{d}\zeta.$$

Il termine tra parentesi quadre è un polinomio in z_n (e ζ) di grado $\leq k-1$, perciò $r \in \mathcal{O}'_0[z_n]$ di grado $\leq k-1$.
Unicità: $q_1 W + r_1 = q_2 W + r_2 \iff r_1 - r_2 = (q_1 - q_2)W$. Confrontando i gradi in z_n, $q_1 - q_2 \equiv 0 \Rightarrow r_1 - r_2 \equiv 0$. □

Fatto 2.9.8. R anello a fattorizzazione unica $\Rightarrow$ $R[x]$ a fattorizzazione unica.

Teorema 2.9.9. $\mathcal{O}_0$ è un anello a fattorizzazione unica.

Teorema 2.9.10. Per induzione su n. Per $n = 1$ $\underline{f} = z^k \underline{u}$ è una decomposizione unica. Supponiamo per ipotesi induttiva che $\mathcal{O}'_0$ sia a fattorizzazione unica. Sia $\underline{f} \in \mathcal{O}_0$; possiamo supporre $\underline{f}$ normalizzata di ordine $k \geq 1$. Per il teorema di preparazione di Weierstrass abbiamo $\underline{f} = uW$ con u unità e W polinomio di Weierstrass.

Lemma 2.9.11. $\underline{f}$ è irriducibile in $\mathcal{O}_0 \iff W$ è irriducibile in $\mathcal{O}'_0[z_n]$.

Per ipotesi induttiva, $W = W_1 \cdots W_r$ è la fattorizzazione in irriducibili in $\mathcal{O}'_0[z_n]$.

Lemma 2.9.12. Se $p_1, p_2 \in \mathcal{O}'_0[z_n]$ t.c. $p_1 p_2 = W$ sia di Weierstrass, allora esiste $u \in \mathcal{O}'_0$ unità t.c. up_1 e $\frac{1}{u} p_2$ sono di Weierstrass.

Per il lemma 2.9.12 possiamo scrivere $f = \tilde{u} W_1 \cdots W_r$ con $W_1, \ldots, W_r$ polinomi di Weierstrass irriducibili in $\mathcal{O}'_0[z_n]$, quindi per il lemma 2.9.11 sono irriducibili in $\mathcal{O}_0$, dunque abbiamo una decomposizione di f in irriducibili.
Unicità: sia $f = V_1 \cdots V_l$ un'altra decomposizione in irriducibili.

Lemma 2.9.13. $f = g_1 g_2$ normalizzata $\Rightarrow g_1, g_2$ normalizzati.

Per il teorema di preparazione di Weierstrass, $f = u' W'_1 \cdots W'_l$ con $W'_1, \ldots, W'_l$ di Weierstrass, irriducibili per il lemma 2.9.11. Dall'Unicità del teorema di preparazione di Weierstrass otteniamo che $W_1 \cdots W_r = W'_1 \cdots W'_l$ in $\mathcal{O}'_0[z_n]$ che è a fattorizzazione unica, perciò $\{W_1, \ldots, W_r\} = \{W'_1, \ldots, W'_l\}$ a meno di unità.

Osservazione 2.9.14. Sia $V = \{f = 0\}$. La fattorizzazione unica ci dice che possiamo scrivere $f = uf_1 \cdots f_k$ con u unità e $f_1, \ldots, f_k$ unici e irriducibili, perciò $V = \{f_1 = 0\} \cup \cdots \cup \{f_k = 0\}$ è la decomposizione in *componenti irriducibili*.

Usando il teorema di divisione di Weierstrass è possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema 2.9.15. $\mathcal{O}_0$ è noetheriano (cioè ogni ideale è finitamente generato).

Osservazione 2.9.16. Il teorema appena enunciato ci permette di dire che gli ideali $I(V)$, almeno localmente, si possono descrivere con un numero finito di elementi.

Concludiamo queste dispense con un lemma che segue dal teorema di divisione di Weierstrass.

Lemma 2.9.17. Siano $f \in \mathcal{O}'_0[z_n]$, $W \in \mathcal{O}'_0[z_n]$ di Weierstrass, $g \in \mathcal{O}_0$ t.c. $f = gW$. Allora $g \in \mathcal{O}'_0[z_n]$.

Riferimenti bibliografici

[N1] R. Narasimhan, *Complex analysis in one variable*, (1985)

[A] M. Abate, *Analisi complessa*, `http://pagine.dm.unipi.it/abate/matdid/dispense/files/Complex.pdf` (1998)

[R] W. Rudin, *Real and complex analysis*, (1966)

[K] S. G. Krantz, *Function theory of several complex variables*, (1982)

[N2] R. Narasimhan, *Several complex variables*, (1971)

[GR] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, (1965)

Ulteriore materiale quale pdf e registrazioni delle lezioni tenute a distanza è reperibile sulla pagina del corso del sito di e-learning del dipartimento di matematica dell'università di Pisa, `https://elearning.dm.unipi.it`, anno accademico 2019/2020.

Ringraziamenti

Un sentito grazie al professor Marco Abate, che è riuscito a tenere il suo interessantissimo corso ugualmente appassionante anche con la didattica a distanza.