

Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini Relatore: Prof. Marco Abate

Indice

Introduzione	3
1 Prerequisiti	4
1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré	4
1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali	8
1.3 Disuguaglianza di Golusin	13
2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz	17
2.1 Rigidità al bordo	17
2.2 Teorema di Burns-Krantz	17
Ringraziamenti	19

Introduzione

L'obiettivo di questo scritto è dimostrare un teorema del 1994, il teorema di Burns-Krantz (Theorem 2.1 di [BK]), attraverso risultati elementari. L'enunciato del teorema riguarda le funzioni olomorfe sul disco unitario con un certo andamento vicino al bordo: se la funzione dista dall'identità al più per un $o((z - \sigma)^3)$, allora è proprio l'identità.

La dimostrazione originale del teorema non è lunga, ma un po' tecnica. In un recente articolo di Bracci, Kraus e Roth ([BKR]) si trova una dimostrazione alternativa del teorema di Burns-Krantz. Come spiegato nel Remark 2.2 dell'articolo, è possibile passare dalle ipotesi del teorema di Burns-Krantz a quelle del Theorem 2.1 di [BKR] (come dimostrato nella Proposition 8.1 dello stesso articolo), dal quale poi è facile concludere. Il Theorem 2.1 è sostanzialmente una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Bracci, Kraus e Roth dimostrano il Theorem 2.1 usando risultati più generali visti nell'articolo, ma complicati. Tuttavia, nel Remark 5.6 danno una traccia per una dimostrazione più elementare. L'idea è sfruttare una disuguaglianza dovuta a Golusin e vengono indicati vari articoli in cui è stata ridimostrata.

In particolare, l'articolo di Beardon e Minda del 2004 ([BM]) contiene una serie di disuguaglianze di facile dimostrazione, delle quali il Corollary 3.7 ha a sua volta come corollario la disuguaglianza di Golusin. Queste disuguaglianze coinvolgono la distanza di Poincaré sul disco unitario e possono essere applicate per ottenere diversi altri risultati per funzioni olomorfe sul disco, come mostrato nell'articolo.

In questo scritto sviluppiamo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR], usando le disuguaglianze in [BM] per dimostrare la disuguaglianza di Golusin. Grazie ad essa, e alla Proposition 8.1 di [BKR], otterremo una dimostrazione elementare del Theorem 2.1 di Burns-Krantz e di un risultato più generale dovuto a Bracci-Kraus-Roth.

1 Prerequisiti

1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in Ω se è derivabile in senso complesso per ogni $z \in \Omega$ e scriviamo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\text{Im}(f) \subset \Omega'$ scriviamo $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega')$.

Definizione 1.1.2. Se $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ è biettiva, allora si può dimostrare che anche f^{-1} è olomorfa. In tal caso f è detta *automorfismo* (in senso olomorfo) di Ω e scriviamo $f \in \text{Aut}(\Omega)$.

Com'è noto, la condizione di olomorfia per funzioni a valori complessi è molto più forte della derivabilità in senso reale (in particolare, è equivalente all'analiticità). Fra i vari risultati noti per le funzioni olomorfe, ci interessa studiare il lemma di Schwarz-Pick, fino a dimostrarne una versione alternativa al bordo.

Notazione: indichiamo il disco unitario con $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Riportiamo ora alcuni risultati noti di analisi complessa che verranno usati nelle dimostrazioni.

Teorema 1.1.3. (*formula integrale di Cauchy, Theorem 9 e 10, Chapter 1.3 [NN]*) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e D un disco chiuso di centro a contenuto in Ω . Allora

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (1)$$

Proposizione 1.1.4. (*teorema di estensione di Riemann, Theorem 2, Chapter 1.5 [NN]*) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ con $z_0 \in \Omega$. Allora f si estende a qualche $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se è limitata in un intorno di z_0 . In tal caso, z_0 è detta *singularità rimovibile*.

Proposizione 1.1.5. (*principio del massimo per funzioni olomorfe, Corollary of Theorem 3 e Theorem 5, Chapter 1.3 [NN]*) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sia inoltre U un aperto relativamente compatto in Ω , cioè $\overline{U} \subset \Omega$ e \overline{U} compatto. Allora per ogni $z \in U$ si ha

$$|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial U} |f(w)|$$

e vale l'uguale per qualche $z \in U$ solo se f è costante sulla componente connessa di U contenente z .

Vediamo adesso i lemmi di Schwarz e Schwarz-Pick.

Lemma 1.1.6. (*lemma di Schwarz*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per $z_0 \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta}z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poiché $f(0) = 0$, possiamo costruire $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ con $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ estendendola per continuità in 0 come $g(0) = f'(0)$. Fissiamo $0 < r < 1$. Per ogni $z \in \mathbb{D}$ tale che $|z| \leq r$, per il principio del massimo per funzioni olomorfe si ha

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Mandando r a 1 otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|g(z)| \leq 1$, da cui $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$.

Se vale una delle due ugaglianze, allora esiste $z_0 \in \mathbb{D}$ tale che $|g(z_0)| = 1$. Dunque, sempre per il principio del massimo g è costantemente uguale a un valore di modulo 1 in ogni disco di centro l'origine e raggio $|z_0| < r < 1$, quindi su \mathbb{D} . Perciò $g(z) = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ da cui $f(z) = e^{i\theta}z$. \square

Corollario 1.1.7. *Se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f(0) = 0$, allora $f(z) = e^{i\theta}z$.*

Dimostrazione. Se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ anche $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, inoltre $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$. Per il lemma di Schwarz, $|f'(0)| \leq 1$ e $|(f^{-1})'(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| = 1$, da cui la tesi sempre per il lemma di Schwarz. \square

Lemma 1.1.8. *Sia G un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio X , cioè per ogni $g \in G$ è data una bigezione $\gamma_g : X \rightarrow X$ tale che $\gamma_e = \text{id}$ e $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$, inoltre $\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2} \iff g_1 = g_2$. Sia G_{x_0} il gruppo di isotropia di $x_0 \in X$, cioè $G_{x_0} = \{g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0\}$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $g_x \in G$ tale che $\gamma_{g_x}(x) = x_0$ e sia $\Gamma = \{g_x \mid x \in X\}$. Allora G è generato da Γ e G_{x_0} , cioè ogni $g \in G$ è della forma $g = hg_x$ con $x \in X$ e $h \in G_{x_0}$.*

Dimostrazione. Sia $g \in G$ e $x = \gamma_g(x_0)$. Allora $(\gamma_{g_x} \circ \gamma_g)(x_0) = x_0$ da cui $\gamma_{g_x} \circ \gamma_g = \gamma_{g_x g} = \gamma_h$ con $h \in G_{x_0} \Rightarrow g_x g = h \Rightarrow g = g_x^{-1}h$. Partendo da g^{-1} avremmo ottenuto $g^{-1} = g_x^{-1}h \Rightarrow g = h^{-1}g_x$ con $h \in G_{x_0}$. \square

Proposizione 1.1.9. *Si ha che $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ se e solo se esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.*

Dimostrazione. (\Leftarrow) Con semplici conti possiamo vedere che per $z, w \in \mathbb{C}$ con $\bar{w}z \neq 1$ si ha

$$1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|^2 = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} \quad (2)$$

da cui segue che se $a, z \in \mathbb{D}$ allora

$$1 - |f(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} > 0$$

$$|f(z)| < 1$$

e quindi $f(z) \in \mathbb{D}$, mentre se $a \in \mathbb{D}$ e $z \in \partial\mathbb{D}$ allora $|f(z)| = 1$, cioè $f(z) \in \partial\mathbb{D}$.

L'inversa è $f^{-1}(z) = e^{-i\theta} \frac{z + ae^{i\theta}}{z + \bar{a}e^{-i\theta}}$, della stessa forma. Si noti che $f(a) = 0$.

(\Rightarrow) Scriviamo per semplicità $f_{a,\theta} = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Vediamo $\text{Aut}(\mathbb{D})$ come gruppo che agisce su \mathbb{D} . $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$ è, per il Corollario 1.1.7, $\{f_{0,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, mentre possiamo prendere $\Gamma = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D}\}$ poiché $f_{a,0}(a) = 0$. Per il lemma 1.1.8, $\text{Aut}(\mathbb{D})$ è generato da $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$ e Γ , cioè ogni $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ è della forma $\gamma = f_{0,\theta} \circ f_{a,0} = f_{a,\theta}$. \square

Fatto 1.1.10. $\text{Aut}(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su \mathbb{D} , cioè si ha che per ogni $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ esiste $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $\gamma(z_0) = z_1$. Infatti, basta prendere $\gamma = f_{z_1,0}^{-1} \circ f_{z_0,0}$.

Lemma 1.1.11. (*lemma di Schwarz-Pick*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|, \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Dimostrazione. Fissato $w \in \mathbb{D}$ siano $\gamma_1(z) = \frac{z+w}{1+\bar{w}z}$ e $\gamma_2(z) = \frac{z-f(w)}{1-\overline{f(w)}z}$.

Si ha $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Si ha anche che $\gamma_1(0) = w$ e $\gamma_2(f(w)) = 0$, inoltre $\gamma_1^{-1}(z) = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$. Per il lemma di Schwarz applicato a $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$ abbiamo che per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$ $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| \leq |\zeta|$, da cui prendendo $\zeta = \gamma_1^{-1}(z)$ otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|(\gamma_2 \circ f)(z)| \leq |\gamma_1^{-1}(z)|$, che è la prima disuguaglianza. Abbiamo poi $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \leq 1 \Rightarrow |\gamma_2'(f(w))f'(w)\gamma_1'(0)| \leq 1$. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \gamma_1'(z) &= \frac{1 + \bar{w}z - \bar{w}(z+w)}{(1 + \bar{w}z)^2} \Rightarrow \gamma_1'(0) = 1 - |w|^2 \\ \gamma_2'(z) &= \frac{1 - \overline{f(w)}z - \overline{f(w)}(z-f(w))}{(1 - \overline{f(w)}z)^2} \Rightarrow \gamma_2'(f(w)) = \frac{1}{1 - |f(w)|^2} \end{aligned}$$

e sostituendo si ottiene la seconda disuguaglianza con w al posto di z .

Per l'uguaglianza, nel primo caso avremmo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| = |\zeta|$, mentre nel secondo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| = 1$. In entrambi i casi, per il lemma di Schwarz $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1 = g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ da cui $f = \gamma_2^{-1} \circ g \circ \gamma_1^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. \square

Notazione: scriviamo $[z, w] := f_{w,0}(z)$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che la quantità $p(z, w)$ è contratta da $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Vediamo adesso una distanza costruita a partire da questa

quantità, con la quale dimostreremo una serie di disuguaglianze che ci permetteranno di dimostrare la disuguaglianza di Golusin, dalla quale seguirà la versione al bordo del lemma.

$$\text{Consideriamo } \omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Proposizione 1.1.12. *La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ è ben definita ed è effettivamente una distanza.*

Dimostrazione. Notiamo che per $z, w \in \mathbb{D}$ l'equazione (2) ci dà immediatamente $p(z, w) < 1$, per cui ω è ben definita e resta solo da mostrare che è una distanza.

L'unica cosa non ovvia da dimostrare è la disuguaglianza triangolare. Dati $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, possiamo utilizzare il fatto che \tanh è strettamente crescente e l'uguaglianza $\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$ per scrivere la disuguaglianza triangolare per ω in una forma equivalente:

$$\begin{aligned} \omega(z_1, z_2) &\leq \omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2) \\ \Leftrightarrow \tanh(\omega(z_1, z_2)) &\leq \tanh(\omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2)) \\ \Leftrightarrow \tanh(\omega(z_1, z_2)) &\leq \frac{\tanh(\omega(z_1, z_0)) + \tanh(\omega(z_0, z_2))}{1 + \tanh(\omega(z_1, z_0))\tanh(\omega(z_0, z_2))} \\ \Leftrightarrow p(z_1, z_2) &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{p(z_1, z_0) + p(z_0, z_2)}{1 + p(z_1, z_0)p(z_0, z_2)}. \end{aligned}$$

Osserviamo che il lemma di Schwarz-Pick implica che p è invariante sotto l'azione di $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. Grazie al fatto 1.1.10, possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che $z_0 = 0$. Dato che $|1 - \bar{z}_2 z_1| \leq 1 + |z_1||z_2|$ e $1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2 > 0$, ricordando l'equazione (2), per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| &= \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \\ &\geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_1||z_2|)^2} \\ &= 1 - \left(\frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|} \right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|}, \end{aligned}$$

che è quello che otteniamo inserendo $z_0 = 0$ nella disuguaglianza $(*)$ e usando che $p(0, z) = |z|$. \square

Definizione 1.1.13. La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *distanza di Poincaré (o iperbolica)* del disco.

Definizione 1.1.14. Data $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2},$$

mentre il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Notiamo che, poiché il limite di $f^*(z, w)$ per $z \rightarrow w$ è ben definito per ogni w , per la Proposizione 1.1.4 abbiamo che la funzione $f^*(z, w)$ è olomorfa in $z \in \mathbb{D}$ per ogni $w \in \mathbb{D}$ fissato.

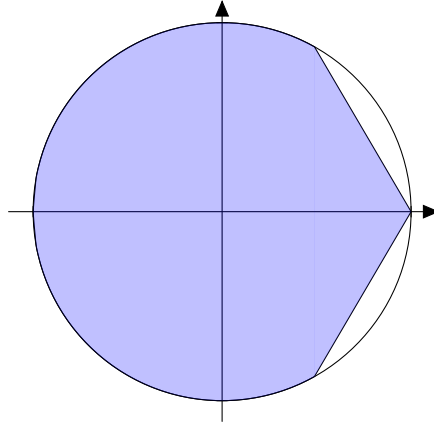
Osservazione 1.1.15.

- (i) le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick possono essere riscritte come $|f^*(z, w)| \leq 1$, con uguaglianza se e solo se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$;
- (ii) un altro modo di scrivere le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick è $p(f(z), f(w)) \leq p(z, w)$ che è equivalente a $\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w)$, in quanto \arctanh è strettamente crescente;
- (iii) $p(z, 0) = |z| \Rightarrow \omega(z, 0) = \omega(|z|, 0)$ e analogamente $\omega(0, z) = \omega(0, |z|)$;
- (iv) per definizione, $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$.

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

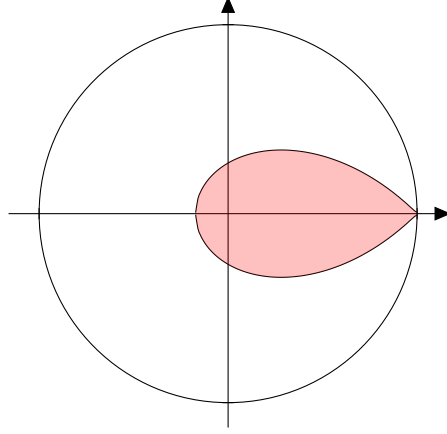
1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali

Definizione 1.2.1. Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice σ e angolo 2α* l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z è minore di α .



In blu, il settore $S(1, 2\pi/3)$

Definizione 1.2.2. Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz $K(\sigma, M)$* l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.



In rosso, la regione di Stolz $K(1, 2)$

Proposizione 1.2.3. *Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Dimostrazione. Per definizione, $S(\sigma, \alpha)$ corrisponde all'insieme $S(1, \alpha)$ ruotato moltiplicando per σ . Lo stesso vale per $K(\sigma, M)$: infatti, $\frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} = \frac{|1 - \sigma^{-1}z|}{1 - |\sigma^{-1}z|}$. Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. È utile osservare che in questo caso $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < \tan \alpha (1 - \Re(z))\}$.

Mostriamo la seconda inclusione. Poiché $1 > |z| > \Re(z)$, abbiamo

$$\begin{aligned} M &> \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)} \\ M^2 - 1 &> \frac{|1 - z|^2}{(1 - \Re(z))^2} - 1 \\ M^2 - 1 &> \frac{(1 - z)(1 - \bar{z})}{(1 - \Re(z))^2} - 1 \\ M^2 - 1 &> \frac{1 - 2\Re(z) + |z|^2}{(1 - \Re(z))^2} - 1 \\ M^2 - 1 &> \frac{|\Im(z)|^2}{(1 - \Re(z))^2} \\ \frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} &< \sqrt{M^2 - 1} = \tan \alpha. \end{aligned}$$

Mostriamo adesso la prima inclusione. Fissiamo $\alpha' < \alpha$. Supponiamo per assurdo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$. Per tali z si ha allora $\frac{|1-z|}{1-|z|} \geq M \Rightarrow \frac{1-|z|}{|1-z|} \leq \frac{1}{M}$ (*) e

$$\begin{aligned} \frac{|\Im(z)|}{1-\Re(z)} &< \tan \alpha' \\ \frac{|\Im(z)|^2}{(1-\Re(z))^2} + 1 &< \tan^2 \alpha' + 1 \\ \frac{1-2\Re(z)+|z|^2}{(1-\Re(z))^2} &< \tan^2 \alpha' + 1 \\ \frac{|1-z|^2}{(1-\Re(z))^2} &< \tan^2 \alpha' + 1 \\ \frac{|1-z|}{1-\Re(z)} &< \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} = M' (**) \end{aligned}$$

dove $\alpha' < \alpha \Rightarrow \tan \alpha' < \tan \alpha \Rightarrow M' < M$. Moltiplicando tra loro le disuguaglianze (*) e (**) troviamo $\frac{1-|z|}{1-\Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$. Se mostriamo che $\lim_{\substack{z \rightarrow 1, \\ z \in S(1, \alpha')}} \frac{1-|z|}{1-\Re(z)} = 1$ avremo trovato una contraddizione. Scrivendo $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$ e supponendo senza perdita di generalità $y > 0$, la condizione $z \in S(1, \alpha')$ si scrive come $y/(1-x) < \tan \alpha'$. Inoltre vale che

$$\begin{aligned} \frac{1-|z|}{1-\Re(z)} &= \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1-x} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{1-x}. \end{aligned}$$

Notiamo che $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{1-x} > 0$, dunque per mostrare che tende a 0 ci basta osservare che

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{1-x} &< \tan \alpha' \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \\ &< \tan \alpha' \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\ &< \tan \alpha' \cdot \frac{y^2}{y(\sqrt{x^2+y^2}+x)} \\ &= \tan \alpha' \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \end{aligned}$$

e quest'ultima espressione tende a 0 per $x \rightarrow 1$ e $y \rightarrow 0$. \square

Definizione 1.2.4. Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$.

Date altre due funzioni $g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o(h(z))$ per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

La seguente proposizione asserisce che, per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente, un certo andamento di f può essere tradotto nell'andamento di $|f^h|$. È questo che ci permetterà di dimostrare il teorema 2.1 di [BK] passando per la versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Proposizione 1.2.5. *Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (3)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2) \quad (4)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente.

Dimostrazione. A meno di considerare $g(z) = \sigma^{-1}f(\sigma z)$, possiamo supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Infatti, è facile verificare che nell'ipotesi (3) si ha $g(z) = 1 + (z - 1) + o((z - 1)^3)$. Se inoltre avessimo $|g^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2)$, poiché vale

$$\begin{aligned} |g^h(z)| &= |g'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |g(z)|^2} \\ &= |f'(\sigma z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |\sigma^{-1}f(\sigma z)|^2} \\ &= |f'(\sigma z)| \frac{1 - |\sigma z|^2}{1 - |f(\sigma z)|^2} \\ &= |f^h(\sigma z)| \end{aligned}$$

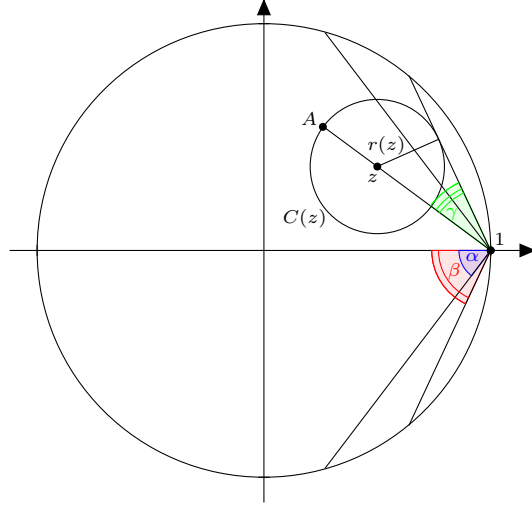
e mediante la sostituzione $\zeta = \sigma z$ si ha

$$o((z - 1)^2) = o(\sigma^{-2}(\zeta - \sigma)^2) = o((\zeta - \sigma)^2)$$

e ovviamente $|f^h(\sigma z)| = |f^h(\zeta)|$, troviamo l'equazione (4) con ζ al posto di z .

Sia $M > 1$ e consideriamo $z \in K(1, M)$. Allora per la Proposizione 1.2.3 si ha $z \in S(1, \alpha)$ dove $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1}$. Sia inoltre $\beta \in (0, \pi/2)$ con $\beta > \alpha$ e sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \text{dist}(z, \partial S(1, \beta))$, la distanza euclidea di z dal bordo di $S(1, \beta)$. Allora per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{w-1 + (f(w)-w)}{(w-z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{1}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{z-1 + f(w)-w}{(w-z)^2} dw \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w)-w}{(w-z)^2} dw =: 1 + I(z). \end{aligned}$$



Per la Proposizione 1.2.3 esiste $\delta > 0$ tale che, se $w \in S(1, \beta) \cap B(1, \delta)$, si ha $w \in K(1, M')$ con $M' > \tan^2 \beta + 1$. Dato $\varepsilon > 0$ fissato e prendendo δ sufficientemente piccolo, per ipotesi abbiamo che $|f(w) - w| < \varepsilon |1 - w|^3$ per ogni $w \in K(1, M') \cap B(1, \delta)$ e di conseguenza per ogni $w \in S(1, \beta) \cap B(1, \delta)$. Poiché $S(1, \beta) \subset \mathbb{D}$, dev'essere $r(z) \leq \text{dist}(z, \mathbb{D}) = 1 - |z|$. Si ha anche $1 - |z| \leq |1 - z|$, quindi prendendo $z \in B(1, \delta/2)$ abbiamo $r(z) \leq |z - 1| < \delta/2$. Dunque per ogni $w \in C(z)$ troviamo che $|w - 1| \leq |w - z| + |z - 1| = r(z) + |z - 1| < \delta$. Per questi z vale che

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z + r(z)e^{i\theta}) - z|^2} r(z) d\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3 \\ &= \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3. \end{aligned}$$

Il massimo è raggiunto per l'intersezione più lontana da 1 tra la circonferenza $C(z)$ e la retta passante per 1 e z (il punto A in figura). Perciò, detto γ l'angolo tra la retta congiungente 1 e z e il tratto affine di $\partial S(1, \beta)$ più vicino a z (che è effettivamente il tratto di bordo più vicino a z se lo si prende sufficientemente vicino a 1), si ha

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} (r(z) + |z - 1|)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2 \left(1 + \frac{|z - 1|}{r(z)}\right)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc \gamma)^3 \\ &\leq \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3 \\ &\leq \varepsilon |z - 1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3. \end{aligned}$$

La penultima disuguaglianza segue da $\gamma \geq \beta - \alpha$ e dal fatto che \csc è decrescente sui positivi, mentre l'ultima segue da quanto visto sopra. Otteniamo dunque $f'(z) = 1 + o((z - 1)^2)$ per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente.

Notiamo che all'interno della regione di Stolz $K(1, M)$ si ha $1 \leq \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \leq M$, il che ci permette di usare indipendentemente $z - 1$ o $1 - |z|$ negli o -piccoli per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Per ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z - 1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Possiamo quindi concludere che

$$|f^h(z)| = |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. \square

1.3 Disuguaglianza di Golusin

Adesso possiamo procedere a dimostrare la serie di disuguaglianze di [BM], che coinvolgono la distanza di Poincaré ω e le funzioni olomorfe dal disco in sé che non sono automorfismi. L'ultima di esse, come già detto, ha come corollario la disuguaglianza di Golusin.

Proposizione 1.3.1. *Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ e $v \in \mathbb{D}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha che $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ e la funzione $z \mapsto f^*(z, v)$ è olomorfa.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia, dalla definizione sappiamo che l'unico punto che potrebbe dar problemi è v ; abbiamo però visto che la funzione ammette limite finito per $z \rightarrow v$, perciò v è una singolarità rimovibile. Per il lemma di Schwarz-Pick, $|f^*(z, w)| \leq 1$; inoltre, vale l'uguaglianza in qualche punto solo se f è un automorfismo. Dunque le ipotesi su f assicurano che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. \square

Teorema 1.3.2. (*Beardon-Minda, 2004*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (5)$$

Dimostrazione. Poiché f non è un automorfismo, per la Proposizione 1.3.1 la funzione $z \mapsto f^*(z, v)$ è olomorfa dal disco unitario in sé; perciò il membro sinistro della disuguaglianza (5) è ben definito e la tesi segue dal lemma di Schwarz-Pick e dall'osservazione 1.1.15, punto (ii). \square

Corollario 1.3.3. Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w). \quad (6)$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w), \end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per la distanza ω e la seconda segue dal Teorema 1.3.2. \square

Corollario 1.3.4. Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (7)$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w) \\ &= \omega(0, |f^*(w, v)|) + \omega(z, w) \\ &= \omega(0, |f^*(v, w)|) + \omega(z, w) \\ &= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(z, w) \\ &\leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u), \end{aligned}$$

dove le due disuguaglianze seguono dal Corollario 1.3.3. \square

Corollario 1.3.5. Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (8)$$

Dimostrazione. Siano $z, w \in \mathbb{D}$; senza perdita di generalità possiamo supporre $|f^h(z)| \geq |f^h(w)|$. Allora

$$\begin{aligned}
\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(w)| - |f^h(z)|} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(w)|}{1 + |f^h(w)|} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \\
&= \omega(0, |f^h(z)|) - \omega(0, |f^h(w)|) \\
&= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w),
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal Corollario 1.3.4 prendendo $u = w$ e $v = z$. \square

Teorema 1.3.6. (*disuguaglianza di Golusin*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (9)$$

Dimostrazione. Con passaggi analoghi a quelli della dimostrazione precedente abbiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\omega(|f^h(z)|, |f^h(0)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \\
\omega(z, 0) = \omega(|z|, 0) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right).
\end{aligned}$$

Prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (8) otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) &\leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) \\
\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} &\leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.
\end{aligned} \quad (10)$$

Adesso, dalla Proposizione 1.3.1 sappiamo che $f^h(z), f^h(0) \in \mathbb{D}$, in particolare $|f^h(z)|, |f^h(0)| < 1$, perciò è giustificato il seguente passaggio:

$$\begin{aligned}
|f^h(z)| &\leq \frac{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2 - 1}{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2 + 1} \\
&= \frac{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) - (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)}{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) + (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)} \\
&= \frac{2|f^h(0)| + 2|f^h(0)||z|^2 + 4|z|}{2 + 2|z|^2 + 4|f^h(0)||z|} = \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}.
\end{aligned}$$

□

2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

2.1 Rigidità al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare un risultato di rigidità al Bordo, seguendo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR].

Teorema 2.1.1. (*Bracci-Kraus-Roth, 2020*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (11)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. Possiamo applicare la disuguaglianza di Golusin 1.3.6 nella forma (10), che riscriviamo come

$$\begin{aligned} \frac{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)}{(1 - |f^h(z_n)|)(1 + |f^h(0)|)} &\leq \frac{(1 + |z_n|)^2}{(1 - |z_n|)^2} \\ \frac{1 + |f^h(0)|}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}. \end{aligned}$$

Per ipotesi vale (11), dunque

$$\begin{aligned} \frac{1 + |f^h(0)|}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} o((|z_n| - 1)^2) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2} \\ \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} o(1) &\geq 1. \end{aligned}$$

Se $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per il lemma di Schwarz-Pick si ha necessariamente $|f^h(0)| < 1$, dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty$ e otteniamo una contraddizione. \square

Siamo ora pronti a dimostrare il Theorem 2.1 di [BK].

2.2 Teorema di Burns-Krantz

Teorema 2.2.1. (*Burns-Krantz, 1994*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che vale (3) per $z \rightarrow 1$. Allora f è l'identità del disco.

Dimostrazione. Come già visto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.5, a meno di considerare $\sigma^{-1}f(\sigma z)$ possiamo supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Chiaramente, se vale (3) per $z \rightarrow 1$ allora vale anche non tangenzialmente. Dalla Proposizione 1.2.5 segue che anche (4) vale per $z \rightarrow 1$ non

tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del Teorema 2.1.1 (usiamo di nuovo che, non tangenzialmente, $|z-1|$ e $1-|z|$ possono essere scambiati negli o -piccoli) e dunque f è un automorfismo. Allora per la Proposizione 1.1.9 esistono $\theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Poiché vale

$$(3), \text{ dev'essere } f''(1) = 0. \text{ Un semplice conto mostra che } f''(z) = \frac{e^{i\theta} \bar{a}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}z)^3}.$$

Siccome $e^{i\theta} \neq 0$ e $|a| < 1$, deve necessariamente essere $\bar{a} = 0$, perciò $f(z) = e^{i\theta} z$. Il fatto che $f(z) = z$ segue da $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$ sempre per (3). \square

Esempio 2.2.2. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $f(z) = \frac{1+3z^2}{3+z^2}$. Verifichiamo che $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Se $z \in \mathbb{D}$ allora $|z| < 1 \Rightarrow 1-|z|^4 > 0$, dunque si ha

$$\begin{aligned} 1-|z|^4 &< 9(1-|z|^4) \\ 1+3z^2+3\bar{z}^2+9|z|^4 &< 9+3z^2+3\bar{z}^2+|z|^4 \\ (1+3z^2)(1+3\bar{z}^2) &< (3+z^2)(3+\bar{z}^2) \\ \frac{(1+3z^2)(1+3\bar{z}^2)}{(3+z^2)(3+\bar{z}^2)} &< 1 \\ |f(z)|^2 &< 1 \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza ci dice che $|f(z)| < 1 \Rightarrow f(z) \in \mathbb{D}$.

Ovviamente f non può essere iniettiva su \mathbb{D} perché $f(z) = f(-z)$; dunque non è un automorfismo. Adesso mostriamo che $f(z) - 1 - (z-1)$ è $O((z-1)^3)$ ma non $o((z-1)^3)$ per $z \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - z \\ &= \frac{1+3z^2}{3+z^2} - z \\ &= \frac{1+3z^2-3z-z^3}{3+z^2} \\ &= \frac{(1-z)^3}{3+z^2}. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow 1} g(z)/(z-1)^3 = -1/4$ si ha che $g(z)$ è $O((z-1)^3)$ ma non $o((z-1)^3)$ per $z \rightarrow 1$. Dunque il termine $o((z-1)^3)$ nel Teorema 2.2.1 non è migliorabile.

Riferimenti bibliografici

- [BK] D. M. Burns, S. G. Krantz: Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary. *Journal of the American Mathematical Society*, **Volume 7** (1994), no. 3, 661–676
- [BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth: A new Schwarz-Pick Lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps. Preprint, ArXiv:2003.02019v1 (2020)
- [BM] A. F. Beardon, D. Minda: A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse Mathématique*, **Volume 92** (2004), 81–104
- [NN] N. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, INSERIRE CITTÀ, 2001

Ringraziamenti

Da scrivere.