

# Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

# Il lemma di Schwarz-Pick

## Lemma di Schwarz-Pick

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e^{\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.*

# Il lemma di Schwarz-Pick

## Lemma di Schwarz-Pick

*Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e^{\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.*

Dal lemma, si ha che la quantità  $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$  è contratta dalle funzioni in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . A partire da essa è possibile definire una distanza sul disco.

# La distanza di Poincaré

Scriviamo  $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$  e  $p(z, w) := |[z, w]|$ .

Scriviamo  $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$  e  $p(z, w) := |[z, w]|$ .

## Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$  data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

# La distanza di Poincaré

Scriviamo  $[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$  e  $p(z, w) := |[z, w]|$ .

## Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$  data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

In termini di  $\omega$ , il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w).$$

## Definizione

Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

# Derivata e rapporto iperbolici

## Definizione

Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

## Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$



# Derivata e rapporto iperbolici

## Definizione

Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

## Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Fissato  $w \in \mathbb{D}$ , la funzione  $z \mapsto f^*(z, w)$  appartiene a  $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ .

## Definizione

Dati  $\alpha \in (0, \pi/2)$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ , chiamiamo *settore di vertice  $\sigma$  e angolo  $2\alpha$*  l'insieme  $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$  tale che per ogni  $z \in S(\sigma, \alpha)$  l'angolo compreso tra la retta congiungente  $\sigma$  e  $0$  e la retta congiungente  $\sigma$  e  $z$  ha modulo minore di  $\alpha$ .

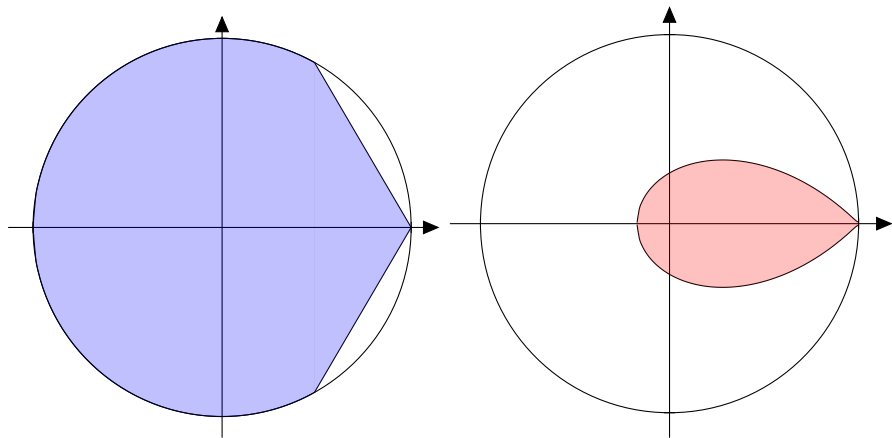
## Definizione

Dati  $\alpha \in (0, \pi/2)$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ , chiamiamo *settore di vertice  $\sigma$  e angolo  $2\alpha$*  l'insieme  $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$  tale che per ogni  $z \in S(\sigma, \alpha)$  l'angolo compreso tra la retta congiungente  $\sigma$  e 0 e la retta congiungente  $\sigma$  e  $z$  ha modulo minore di  $\alpha$ .

## Definizione

Dati  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e  $M > 1$ , chiamiamo *regione di Stolz  $K(\sigma, M)$*  l'insieme  $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$ .

# regioni di Stolz e settori



A sinistra, il settore  $S(1, 2\pi/3)$ ; a destra, la regione di Stolz  $K(1, 2)$ .

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

# Relazione tra regioni di Stolz e settori

## Proposizione

Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ .

Possiamo scrivere  $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$ . Se  $z \in K(1, M)$ , da

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)}$$

troviamo

$$\frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{M^2 - 1} = \tan \alpha;$$

questo mostra la seconda inclusione.

# Relazione tra regioni di Stolz e settori

## Proposizione

*Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Traccia della dimostrazione:* sia  $\alpha' < \alpha$  e supponiamo per assurdo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esista  $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$  tale che  $z \notin K(1, M)$ . Si ha allora

$$\frac{1 - |z|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{M} \text{ e } \frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \tan \alpha'. \quad (1)$$

Dalla seconda disuguaglianza in (1) si ottiene

$$\frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} =: M' < M; \quad (2)$$

multiplicando la (2) per la prima disuguaglianza della (1) troviamo

# Relazione tra regioni di Stolz e settori

## Proposizione

Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Traccia della dimostrazione:  $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$ . Tuttavia, ponendo  $x = \Re(z)$  e  $y = \Im(z)$  e riscrivendo la condizione  $z \in S(1, \alpha')$  come  $y/(1 - x) < \tan \alpha'$ , vediamo facilmente che

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1, \\ z \in S(1, \alpha')}} \frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} = 1,$$

da cui otteniamo una contraddizione. □