Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini   Relatore: Prof. Marco Abate

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questo scritto è dimostrare un teorema del 1994, il teorema di Burns-Krantz (Theorem 2.1 di [BK]), attraverso risultati elementari. L'enunciato del teorema riguarda le funzioni olomorfe sul disco unitario con un certo andamento vicino a 1: se la funzione dista dall'identità al più per un $o\big((z-1)^4\big)$, allora è proprio l'identità.

La dimostrazione originale del teorema non è lunga, ma un po' tecnica. In un recente articolo di Bracci, Kraus e Roth ([BKR]) si trova una dimostrazione alternativa del teorema di Burns-Krantz. Come spiegato nel Remark 2.2 dell'articolo, è possibile passare dalle ipotesi del teorema di Burns-Krantz a quelle del Theorem 2.1 di [BKR] (come dimostrato nella Proposition 8.1 dello stesso articolo), dal quale poi è facile concludere. Il Theorem 2.1 è sostanzialmente una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Bracci, Kraus e Roth dimostrano il Theorem 2.1 usando risultati più generali visti nell'articolo, ma complicati. Tuttavia, nel Remark 5.6 danno una traccia per una dimostrazione più elementare. L'idea è sfruttare una disuguaglianza dovuta a Golusin e vengono indicati vari articoli in cui è stata ridimostrata.

In particolare, l'articolo di Beardon e Minda del 2004 ([BM]) contiene una serie di disuguaglianze di facile dimostrazione, delle quali il Corollary 3.7 ha a sua volta come corollario la disuguaglianza di Golusin. Queste disuguaglianze coinvolgono la distanza iperbolica sul disco unitario. In effetti, i vari risultati più generali di [BK] riguardano pseudometriche sul disco e lo stesso Theorem 2.1 può essere riformulato in termini della distanza iperbolica, come spiegato nell'articolo.

In questo scritto sviluppiamo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR], ottenendo così una dimostrazione elementare e auto-contenuta del teorema di Burns-Krantz e di un risultato più generale dovuto a Bracci-Kraus-Roth.

1 Prerequisiti

1.1 Lemma di Schwarz e distanza di Poincaré

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in Ω se è derivabile in senso complesso per ogni $z \in \Omega$ e scriviamo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\mathrm{Im}(f) \subset \Omega'$ scriviamo $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega')$.

Definizione 1.1.2. Se $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$ è biettiva, allora si può dimostrare che anche f^{-1} è olomorfa. In tal caso f è detta *automorfismo* (in senso olomorfo) di Ω e scriviamo $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

Com'è noto, la condizione di olomorfia per funzioni a valori complessi è molto più forte della derivabilità in senso reale (in particolare, è equivalente all'analiticità). Fra i vari risultati noti per le funzioni olomorfe, ci interessa studiare il lemma di Schwarz-Pick, fino a dimostrarne una versione alternativa al bordo.

Notazione: indichiamo il disco unitario con $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Riportiamo ora alcuni risultati noti di analisi complessa che verranno usati nelle dimostrazioni.

Teorema 1.1.3. *(formula integrale di Cauchy, Theorem 9 e 10, Chapter 1.3 [NN]) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e D un disco chiuso di centro a contenuto in Ω. Allora*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta. \tag{1}$$

Proposizione 1.1.4. *(teorema di estensione di Riemann, Theorem 2, Chapter 1.5 [NN]) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ con $z_0 \in \Omega$. Allora f si estende a qualche $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se è limitata in un intorno di z_0. In tal caso, z_0 è detta* singolarità rimovibile.

Lemma 1.1.5. *(lemma di Schwarz, Theorem 1, Chapter 7.1 [NN]) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per $z_0 \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta} z$ per $\theta \in \mathbb{R}$.*

Corollario 1.1.6. *Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f(0) = 0$, allora $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Dimostrazione. $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)}$. Per il lemma di Schwarz, $|f'(0)| \leq 1$ e $|(f^{-1})'(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| = 1$, da cui la tesi sempre per il lemma di Schwarz. $\square$

Lemma 1.1.7. *Sia G un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio X, cioè per ogni $g \in G$ è data una bigezione $\gamma_g : X \longrightarrow X$ tale che $\gamma_e = \mathrm{id}$ e $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$, inoltre $\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2} \iff g_1 = g_2$. Sia G_{x_0} il gruppo di isotropia di $x_0 \in X$, cioè $G_{x_0} = \{g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0\}$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $g_x \in G$ tale che $\gamma_{g_x}(x) = x_0$ e sia $\Gamma = \{g_x \mid x \in X\}$. Allora G è generato da Γ e G_{x_0}, cioè ogni $g \in G$ è della forma $g = hg_x$ con $x \in X$ e $h \in G_{x_0}$.*

Dimostrazione. Sia $g \in G$ e $x = \gamma_g(x_0)$. Allora $(\gamma_{g_x} \circ \gamma_g)(x_0) = x_0$ da cui $\gamma_{g_x} \circ \gamma_g = \gamma_{g_x g} = \gamma_h$ con $h \in G_{x_0} \Rightarrow g_x g = h \Rightarrow g = g_x^{-1} h$. Partendo da g^{-1} avremmo ottenuto $g^{-1} = g_x^{-1} h \Rightarrow g = h^{-1} g_x$ con $h \in G_{x_0}$. □

Proposizione 1.1.8. *$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \iff$ esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Con semplici conti possiamo vedere che per $z, w \in \mathbb{C}$ con $\bar{w}z \neq 1$ si ha

$$1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|^2 = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} \tag{2}$$

da cui segue che se $a, z \in \mathbb{D}$ allora

$$1 - |f(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} > 0$$
$$|f(z)| < 1$$

e quindi $f(z) \in \mathbb{D}$, mentre se $a \in \mathbb{D}$ e $z \in \partial\mathbb{D}$ allora $|f(z)| = 1$, cioè $f(z) \in \partial\mathbb{D}$. L'inversa è $f^{-1}(z) = e^{-i\theta} \dfrac{z + ae^{i\theta}}{z + \bar{a}e^{-i\theta} z}$, della stessa forma. Si noti che $f(a) = 0$.

($\Rightarrow$) Scriviamo per semplicità $f_{a,\theta} = e^{i\theta} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Vediamo $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ come gruppo che agisce su $\mathbb{D}$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})_0$ è, per il Corollario 1.1.6, $\{f_{0,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, mentre $\Gamma = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D}\}$ ($f_{a,0}(a) = 0$). Per il lemma 1.1.7, $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è generato da $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})_0$ e Γ, cioè ogni $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è della forma $\gamma = f_{0,\theta} \circ f_{a,0} = f_{a,\theta}$. □

Fatto 1.1.9. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su $\mathbb{D}$, cioè si ha che per ogni $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ esiste $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $\gamma(z_0) = z_1$. Infatti, basta prendere $\gamma = f_{z_1,0}^{-1} \circ f_{z_0,0}$.

Lemma 1.1.10. *(lemma di Schwarz-Pick) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|, \qquad \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Dimostrazione. Fissato $w \in \mathbb{D}$ siano $\gamma_1(z) = \dfrac{z+w}{1+\bar{w}z}$ e $\gamma_2(z) = \dfrac{z-f(w)}{1-\overline{f(w)}z}$. Si ha $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Si ha anche che $\gamma_1(0) = w$ e $\gamma_2(f(w)) = 0$, inoltre $\gamma_1^{-1}(z) = \dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}$. Per il lemma di Schwarz applicato a $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$ abbiamo che per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$ $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| \leq |\zeta|$, da cui prendendo $\zeta = \gamma_1^{-1}(z)$ otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|(\gamma_2 \circ f)(z)| \leq |\gamma_1^{-1}(z)|$, che è la prima disuguaglianza. Abbiamo poi $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \leq 1 \Rightarrow |\gamma_2'\big(f(w)\big)f'(w)\gamma_1'(0)| \leq 1$. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\gamma_1'(z) = \frac{1+\bar{w}z-\bar{w}(z+w)}{(1+\bar{w}z)^2} \Rightarrow \gamma_1'(0) = 1-|w|^2$$

$$\gamma_2'(z) = \frac{1-\overline{f(w)}z-\overline{f(w)}\big(z-f(w)\big)}{\big(1-\overline{f(w)}z\big)^2} \Rightarrow \gamma_2'\big(f(w)\big) = \frac{1}{1-|f(w)|^2}$$

e sostituendo si ottiene la seconda disuguaglianza con w al posto di z.

Per l'uguaglianza, nel primo caso avremmo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| = |\zeta|$, mentre nel secondo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| = 1$. In entrambi i casi, per il lemma di Schwarz $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1 = g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ da cui $f = \gamma_2^{-1} \circ g \circ \gamma_1^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. □

Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che la quantità $\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$ è contratta da $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Vediamo adesso una distanza costruita a partire da questa quantità, con la quale dimostreremo una serie di disuguaglianze che ci permetteranno di dimostrare la disuguaglianza di Golusin, dalla quale seguirà la versione al bordo del lemma.

Notazione: per brevità, a volte useremo $[z, w] := \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$. Consideriamo $\omega(z, w) := \mathrm{arctanh}\big(p(z, w)\big) = \frac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)}\right)$.

Proposizione 1.1.11. *La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ è ben definita ed è effettivamente una distanza.*

Dimostrazione. Notiamo che per $z, w \in \mathbb{D}$ l'equazione (2) ci dà immediatamente $p(z, w) < 1$, per cui ω è ben definita e resta solo da mostrare che è una distanza.

L'unica cosa non ovvia da dimostrare è la disuguaglianza triangolare. Dati $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, possiamo utilizzare il fatto che tanh è strettamente crescente e l'uguaglianza $\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$ per scrivere la disuguaglianza triangolare per ω in una forma equivalente:

$$\begin{aligned}
\omega(z_1, z_2) &\leq \omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2) \\
&\Leftrightarrow \tanh\big(\omega(z_1, z_2)\big) \leq \tanh\big(\omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2)\big) \\
&\Leftrightarrow \tanh\big(\omega(z_1, z_2)\big) \leq \frac{\tanh\big(\omega(z_1, z_0)\big) + \tanh\big(\omega(z_0, z_2)\big)}{1 + \tanh\big(\omega(z_1, z_0)\big)\tanh\big(\omega(z_0, z_2)\big)} \\
&\Leftrightarrow p(z_1, z_2) \overset{(\star)}{\leq} \frac{p(z_1, z_0) + p(z_0, z_2)}{1 + p(z_1, z_0)p(z_0, z_2)}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che il lemma di Schwarz-Pick implica che p è invariante sotto l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Grazie al fatto 1.1.9, possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che $z_0 = 0$. Dato che $|1 - \bar{z}_2 z_1| \leq 1 + |z_1||z_2|$ e $1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2 > 0$, ricordando l'equazione (2), per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ abbiamo che

$$
\begin{aligned}
1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| &= \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \\
&\geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_1||z_2|)^2} \\
&= 1 - \left(\frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|}\right)^2 \\
&\Rightarrow \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|},
\end{aligned}
$$

che è quello che otteniamo inserendo $z_0 = 0$ nella disuguaglianza $(\star)$ e usando che $p(0, z) = |z|$. □

Definizione 1.1.12. La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *distanza di Poincaré (o iperbolica)* del disco.

Definizione 1.1.13. Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$
f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.
$$

mentre il *rapporto iperbolico* è definito come

$$
f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}
$$

Notiamo che, poiché il limite di $f^*(z, w)$ per $z \longrightarrow w$ è ben definito per ogni w, per la Proposizione 1.1.4 abbiamo che la funzione $f^*(z, w)$ è olomorfa in $z \in \mathbb{D}$ per ogni $w \in \mathbb{D}$ fissato.

Osservazione 1.1.14.

(i) le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick possono essere riscritte come $|f^*(z, w)| \leq 1$ con uguaglianza se e solo se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$;

(ii) un altro modo di scrivere la disuguaglianza del lemma di Schwarz-Pick è $p\big(f(z), f(w)\big) \leq p(z, w) \Rightarrow \omega\big(f(z), f(w)\big) \leq \omega(z, w)$ in quanto arctanh è strettamente crescente;

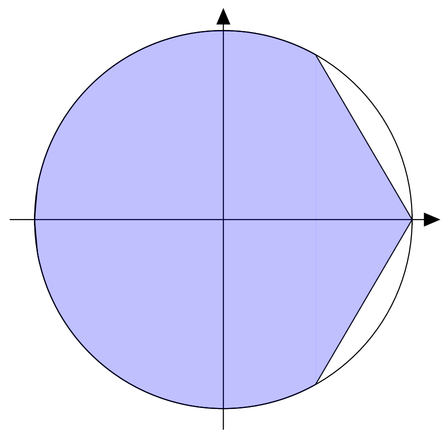
(iii) $p(z, 0) = |z| \Rightarrow \omega(z, 0) = \omega(|z|, 0)$ e analogamente $\omega(0, z) = \omega(0, |z|)$;

(iv) per definizione, $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$.

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

1.2 Limiti non tangenziali

Definizione 1.2.1. Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice σ e angolo 2α* l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z è minore di α.



In blu, $S(1, 2\pi/3)$

Definizione 1.2.2. INSERIRE DEFINIZIONE DI LIMITE NON-TANGENZIALE

La seguente proposizione asserisce che, per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente, un certo andamento di f può essere tradotto nell'andamento di f^h. È questo che ci permetterà di dimostrare il teorema 2.1 di [BK] passando per la versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Proposizione 1.2.3. *Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa tale che*

$$f(z) = 1 + (z-1) + o((z-1)^3) \tag{3}$$

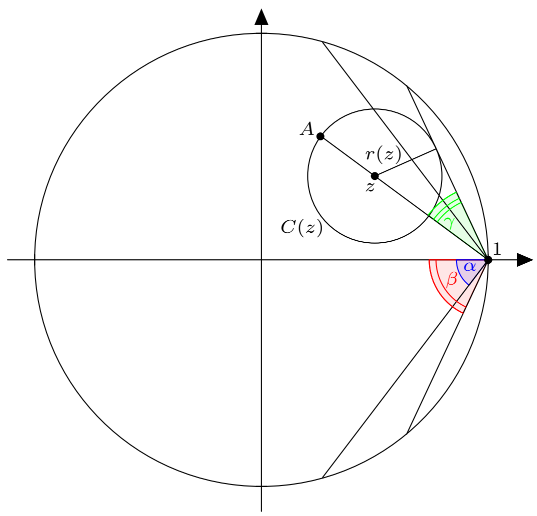
per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora

$$f^h(z) = 1 + o((z-1)^2) \tag{4}$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.

Dimostrazione. Sia S un settore di vertice 1 e angolo d'apertura 2α, e S' uno un po' più grande di vertice 1 e angolo 2β, $\beta > \alpha$. Per $z \in S$, sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \mathrm{dist}(z, \partial S')$ (la distanza di z dal bordo di S'). Allora per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{w-1+(f(w)-w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{z-1+f(w)-w}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{f(w)-w}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w =: 1 + I(z).
\end{aligned}$$



Dato $\varepsilon > 0$ fissato, per ipotesi esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w)-w| < \varepsilon|1-w|^3$ per ogni $w \in S'$ con $|w-1| < \delta$. $B(z, r(z)) \subset \mathbb{D} \Rightarrow r(z) \leq 1 - |z|$. Se $|z-1| < \delta/2$, $r(z) \leq 1 - |z| = |z - 1 - z| - |z| \leq |z-1| + |z| - |z| = |z-1| < \delta/2$, dunque per ogni $w \in C(z)$ abbiamo $|w-1| \leq |w-z| + |z-1| = r(z) + |z-1| < \delta$. Per questi z vale che

$$\begin{aligned}
|I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|1-(z+r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z+r(z)e^{i\theta})-z|^2} r(z)\,\mathrm{d}\theta \\
&\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta\in[0,2\pi]} |1-(z+r(z)e^{i\theta})|^3 \\
&= \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w\in C(z)} |1-w|^3.
\end{aligned}$$

Il massimo è raggiunto per l'intersezione più lontana da 1 tra la circonferenza $C(z)$ e la retta passante per 1 e z (il punto A in figura), perciò, detto γ l'angolo tra $\partial S'$ (per essere precisi, la retta contenente il tratto affine più vicino a z) e la retta congiungente 1 e z:

$$\begin{aligned}|I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)}(r(z)+|z-1|)^3\\ &= \varepsilon r(z)^2\left(1+\frac{|z-1|}{r(z)}\right)^3\\ &= \varepsilon r(z)^2(1+\csc\gamma)^3\\ &\leq \varepsilon r(z)^2(1+\csc(\beta-\alpha))^3\\ &\leq \varepsilon|z-1|^2(1+\csc(\beta-\alpha))^3.\end{aligned}$$

La penultima disuguaglianza segue da $\gamma \geq \beta-\alpha$ e dal fatto che csc è decrescente sui positivi, mentre l'ultima segue da quanto visto sopra. Otteniamo dunque $f'(z) = 1 + o((z-1)^2)$ per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.

Adesso ci servirà il seguente lemma.

Lemma 1.2.4. *Per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente, $|z-1|$ e $1-|z|$ hanno gli stessi o-piccoli.*

Dimostrazione. $1-|z| \leq |z-1|$ l'abbiamo già visto. Per concludere ci basta dunque mostrare che, per z appartenente a un settore S di angolo 2α fissato, vale una disuguaglianza opposta, a meno di una qualche costante.

$$|z-1| = r(z)\frac{|z-1|}{r(z)} \leq r(z)\csc(\beta-\alpha) \leq (1-|z|)\csc(\beta-\alpha),$$

dove $\beta > \alpha$ è stato scelto come sopra e le disuguaglianze le abbiamo già viste. □

Per ipotesi

$$\frac{1-|f(z)|}{1-|z|} = \frac{1-|z|+o((z-1)^3)}{1-|z|} = 1+o((z-1)^2)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente (abbiamo usato il lemma 1.2.4 per poter usare indipendentemente $z-1$ o $1-|z|$ negli o-piccoli).
Possiamo quindi concludere che

$$f^h(z) = |f'(z)|\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} = 1+o((z-1)^2)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. □

1.3 Verso la disuguaglianza di Golusin

Adesso possiamo procedere a dimostrare la serie di disuguaglianze di [BM], che coinvolgono la distanza iperbolica ω e le funzioni olomorfe dal disco in sé che non sono automorfismi. L'ultima di esse, come già detto, ha come corollario la disuguaglianza di Golusin.

Proposizione 1.3.1. *Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ e $v \in \mathbb{D}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha che $f^*(z,v) \in \mathbb{D}$ e la funzione $z \longmapsto f^*(z,v)$ è olomorfa.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia, dalla definizione sappiamo che l'unico punto che potrebbe dar problemi è v; abbiamo però visto che la funzione ammette limite finito per $z \longrightarrow v$, perciò v è una singolarità rimovibile. Per il lemma di Schwarz-Pick, $|f^*(z,w)| \leq 1$; inoltre, vale l'uguaglianza in qualche punto solo se f è un automorfismo. Dunque le ipotesi su f assicurano che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè $f^*(z,v) \in \mathbb{D}$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Teorema 1.3.2. *(Beardon-Minda 2004, [BM]) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega\big(f^*(z,v), f^*(w,v)\big) \leq \omega(z,w). \tag{5}$$

Dimostrazione. Poiché f non è un automorfismo, per la Proposizione 1.3.1 la funzione $z \longmapsto f^*(z,v)$ è olomorfa dal disco unitario in sé; perciò il membro sinistro della disuguaglianza (5) è ben definito e la tesi segue dal lemma di Schwarz-Pick e dall'Osservazione 1.1.14, punto (ii). $\square$

Corollario 1.3.3. *Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(z,w). \tag{6}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega\big(f^*(w,v), f^*(z,v)\big)\\ &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(z,w),\end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per la distanza ω e la seconda segue dal Teorema 1.3.2. $\square$

Corollario 1.3.4. *Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega\big(0, f^*(z,v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u). \tag{7}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(z,w)\\ &= \omega\big(0, |f^*(w,v)|\big) + \omega(z,w)\\ &= \omega\big(0, |f^*(v,w)|\big) + \omega(z,w)\\ &= \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(z,w)\\ &\leq \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u),\end{aligned}$$

dove le due disuguaglianze seguono dal Corollario 1.3.3. $\square$

Corollario 1.3.5. *Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \leq 2\omega(z,w). \tag{8}$$

Dimostrazione. Siano $z, w \in \mathbb{D}$; senza perdita di generalità possiamo supporre $|f^h(z)| \geq |f^h(w)|$. Allora

$$\begin{aligned}
\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(w)| - |f^h(z)|}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(w)|}{1 + |f^h(w)|}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|}\right) \\
&= \omega\big(0, |f^h(z)|\big) - \omega\big(0, |f^h(w)|\big) \\
&= \omega\big(0, f^h(z)\big) - \omega\big(0, f^h(w)\big) \leq 2\omega(z,w),
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal Corollario 1.3.4 prendendo $u = w$ e $v = z$. □

Teorema 1.3.6. *(disuguaglianza di Golusin) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{9}$$

Dimostrazione. Con passaggi analoghi a quelli della dimostrazione precedente abbiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(0)|\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|}\right)$$
$$\omega(z,0) = \omega(|z|,0) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (8) otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|}\right) \leq \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$$
$$\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2.$$

Adesso, dalla Proposizione 1.3.1 sappiamo che $f^h(z), f^h(0) \in \mathbb{D}$, in particolare $|f^h(z)|, |f^h(0)| < 1$, perciò è giustificato il seguente passaggio:

$$
\begin{aligned}
|f^h(z)| &\leq \frac{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2 - 1}{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) - (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)}{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) + (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)} \\
&= \frac{2|f^h(0)| + 2|f^h(0)||z|^2 + 4|z|}{2+2|z|^2+4|f^h(0)||z|} = \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1+|f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}.
\end{aligned}
$$

$\square$

2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

2.1 Rigidità al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick, seguendo la traccia data nel remark 5.6 di [BKR].

Teorema 2.1.1. *(lemma di Schwarz-Pick al bordo) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che*

$$f^h(z_n) = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \tag{10}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \longrightarrow 1$. Allora f è un automorfismo.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia un automorfismo. Allora possiamo applicare il corollario 1.3.5, che per $w = 0$ ci dà

$$d(f^h(z), f^h(0)) \leq 2d(z, 0)$$

$$\log\left(\frac{1 + \left|\frac{f^h(z)-f^h(0)}{1-f^h(z)f^h(0)}\right|}{1 - \left|\frac{f^h(z)-f^h(0)}{1-f^h(z)f^h(0)}\right|}\right) \leq 2\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$$

$$\frac{|1 - f^h(z)f^h(0)| + |f^h(z) - f^h(0)|}{|1 - f^h(z)f^h(0)| - |f^h(z) - f^h(0)|} \leq \frac{(1+|z|)^2}{(1-|z|)^2}.$$

Ricordiamo che per definizione $f^h(z) \geq 0$ e inoltre per il lemma di Schwarz-Pick $f^h(z) \leq 1$, per ogni $z \in \mathbb{D}$. Sempre per il lemma originale, se valesse $f^h(0) = 1$ avremmo che f è un automorfismo, contraddizione. Perciò dev'essere $f^h(0) < 1$, ma $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f^h(z_n) = 1$, quindi definitivamente $f^h(z_n) - f^h(0) > 0$ e $1 - f^h(z_n)f^h(0) > 0$, da cui

$$\frac{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}{(1 - f^h(z_n))(1 + f^h(0))} \leq \frac{(1+|z_n|)^2}{(1-|z_n|)^2}$$

$$\frac{1 + f^h(0)}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}(1 - f^h(z_n)) \geq \frac{(1-|z_n|)^2}{(1+|z_n|)^2}.$$

Per ipotesi vale (10), dunque

$$\frac{1 + f^h(0)}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}o((|z_n| - 1)^2) \geq \frac{(1-|z_n|)^2}{(1+|z_n|)^2}$$

$$\frac{(1 + f^h(0))(1+|z_n|)^2}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}o(1) \geq 1.$$

Poiché $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(1 + f^h(0))(1+|z_n|)^2}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} = \frac{2(1 + f^h(0))}{1 - f^h(0)} < +\infty$, otteniamo di nuovo una contraddizione. □

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 2.1 di [BK].

2.2 Teorema di Burns-Krantz

Teorema 2.2.1. *(Burns-Krantz, 1994) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che*

$$f(z) = 1 + (z-1) + \mathcal{O}((z-1)^4) \tag{11}$$

per $z \longrightarrow 1$. Allora f è l'identità sul disco.

Dimostrazione. Chiaramente, se vale (11) per $z \longrightarrow 1$ vale anche (3), in particolare per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Dalla proposizione 1.2.3 segue che anche (4) vale per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del teorema 2.1.1 (usiamo di nuovo che, non tangenzialmente, $|z-1|$ e $1-|z|$ hanno gli stessi o-piccoli), dunque f è un automorfismo. Allora per la proposizione 1.1.8 esistono $\theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta}[z, a]$. Poiché vale (11), dev'essere $f''(1) = 0$. Un semplice conto mostra che $f''(z) = \dfrac{e^{i\theta}\bar{a}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}z)^3}$. Siccome $e^{i\theta} \neq 0, |a| < 1$, deve necessariamente essere $\bar{a} = 0$, perciò $f(z) = e^{i\theta}z$. Il fatto che $f(z) = z$ segue da, sempre per (11), $\lim\limits_{z \longrightarrow 1} f(z) = 1$. □

Esempio 2.2.2. $f(z) = \dfrac{1+3z^2}{3+z^2}$. Osserviamo che f è una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{3}\}$, quindi in particolare è ben definita su $\mathbb{D}$. Verifichiamo che l'immagine è contenuta in $\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &< 1 \\ \frac{(1+3z^2)(1+3\bar{z}^2)}{(3+z^2)(3+\bar{z}^2)} &< 1 \\ (1+3z^2)(1+3\bar{z}^2) &< (3+z^2)(3+\bar{z}^2) \\ 1 + 3z^2 + 3\bar{z}^2 + 9|z|^4 &< 9 + 3z^2 + 3\bar{z}^2 + |z|^4 \\ 1 - |z|^4 &< 9(1-|z|^4) \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata perché $z \in \mathbb{D} \Rightarrow |z| < 1 \Rightarrow 1 - |z|^4 > 0$. Ovviamente f non può essere iniettiva su $\mathbb{D}$ perché $f(z) = f(-z)$, dunque non è un automorfismo. Adesso mostriamo che $f(z) - 1 - (z-1)$ è $\mathcal{O}((z-1)^3)$ ma non $\mathcal{O}((z-1)^4)$ per $z \longrightarrow 1$:

$$\begin{aligned} f(z) - z &= \frac{1+3z^2}{3+z^2} - z \\ &= \frac{1+3z^2-3z-z^3}{3+z^2} \\ &= \frac{(1-z)^3}{3+z^2} =: g(z). \end{aligned}$$

Poiché $\lim\limits_{z \longrightarrow 1} g(z)/(z-1)^3 = -1/4$, $g(z)$ è $\mathcal{O}((z-1)^3)$ ma non $\mathcal{O}((z-1)^4)$ per $z \longrightarrow 1$. Dunque il termine $\mathcal{O}((z-1)^4)$ nel teorema 2.2.1 non è migliorabile.

Riferimenti bibliografici

[BK] D. M. Burns, S. G. Krantz, *Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary*, (1994)

[BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth, *A new Schwarz-Pick lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps*, (2020)

[BM] A. F. Beardon, D. Minda, *A multi-point Schwarz-Pick lemma*, (2004)

[NN] N. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, INSERIRE CITTÀ, 2001

Ringraziamenti

Da scrivere.