

Lemma di Schwarz-Pick al bordo (titolo provvisorio)

Marco Vergamini

Indice

Introduzione	3
1 Prerequisiti	4
1.1 Risultati noti	4
1.2 Verso la disuguaglianza di Golusin	4
2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz	7
2.1 Lemma di Schwarz-Pick al bordo	7
2.2 Teorema di Burns-Krantz	8

Introduzione

Da scrivere alla fine

1 Prerequisiti

1.1 Risultati noti

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se è derivabile in senso complesso.

Non so quanta di questa roba vada effettivamente messa

Osservazione 1.1.2. Se $f : \Omega \rightarrow \Omega$ olomorfa è biettiva, allora si può dimostrare che anche f^{-1} è olomorfa. In tal caso f è detta *automorfismo* (in senso olomorfo di Ω).

Com'è noto, la condizione di olomorfia per funzioni a valori complessi è molto più forte della derivabilità in senso reale (in particolare, è equivalente all'analiticità). Fra i vari risultati che si possono dimostrare per le funzioni olomorfe, ci interessa studiare il lemma di Schwarz-Pick.

Lemma 1.1.3. (Schwarz) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa t.c. $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguale nella prima per $z \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.1.4. (Schwarz-Pick) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|, \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguale nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora f è un automorfismo e vale l'uguale sempre.

1.2 Verso la disuguaglianza di Golusin

Il lemma di Schwarz-Pick può essere riformulato usando due distanze sul disco. Con la notazione data da queste distanze, dimostreremo una serie di disuguaglianze che ci permetteranno di dimostrare la disuguaglianza di Golusin, dalla quale seguirà poi la versione al bordo del lemma.

Definizione 1.2.1. Dati $z, w \in \mathbb{D}$ poniamo

$$[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}, \quad p(z, w) := |[z, w]|, \quad d(z, w) := \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Scrivere qui

Devi dimostrare che d è una distanza

Definizione 1.2.2. Data una funzione $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, poniamo

$$f^*(z, w) := \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]}$$

e

$$f^h(z) := |f^*(z, z)| := \left| \lim_{w \rightarrow z} f^*(z, w) \right| = \left| \lim_{w \rightarrow z} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} \right| = \frac{|f'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}.$$

Osservazione 1.2.3.

- (i) la disuguaglianza del lemma di Schwarz-Pick può essere riscritta come $|f^*(z, w)| \leq 1$;
- (ii) un altro modo di scrivere la disuguaglianza del lemma di Schwarz-Pick è $p(f(z), f(w)) \leq p(z, w)$;
- (iii) per definizione, $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$ e $f^h(z)$ è reale non negativo.

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

Proposizione 1.2.4. Siano $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo, $v \in \mathbb{D}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha che $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ e la funzione $z \mapsto f^*(z, v)$ è olomorfa.

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia, dalla definizione sappiamo che l'unico punto che potrebbe dar problemi è v , ma abbiamo visto che la funzione ammette limite finito per $z \rightarrow v$, perciò v è una singolarità rimovibile. Per il lemma di Schwarz-Pick, $|f^*(z, w)| \leq 1$, inoltre vale l'uguale in qualche punto solo se f è un automorfismo, dunque con le ipotesi su f abbiamo che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. \square

Teorema 1.2.5. Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$d(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq d(z, w). \quad (1)$$

Dimostrazione. Poiché f non è un automorfismo, per la proposizione 1.2.4 la mappa $z \mapsto f^*(z, v)$ è olomorfa dal disco unitario in sé, perciò il membro sinistro della disuguaglianza (1) è ben definito e la disuguaglianza stessa segue applicando il lemma di Schwarz-Pick (c'è quella cosa che \tanh è convessa/crescente, scrivere i dettagli, comprese le uguaglianze che legano p e d). \square

sistemare dimostrazione, mancano un po' di dettagli

Corollario 1.2.6. Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$d(0, f^*(z, v)) \leq d(0, f^*(w, v)) + d(z, w). \quad (2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} d(0, f^*(z, v)) &\leq d(0, f^*(w, v)) + d(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq d(0, f^*(w, v)) + d(z, w), \end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per la distanza d e la seconda segue dal teorema 1.2.5. \square

Corollario 1.2.7. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$d(0, f^*(z, v)) \leq d(0, f^*(u, w)) + d(z, w) + d(v, u). \quad (3)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} d(0, f^*(z, v)) &\leq d(0, f^*(w, v)) + d(z, w) \\ &= d(0, f^*(v, w)) + d(z, w) \\ &\leq d(0, f^*(u, w)) + d(z, w) + d(v, u), \end{aligned}$$

dove le due disuguaglianze seguono dal corollario 1.2.6. \square

Corollario 1.2.8. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$d(f^h(z), f^h(w)) \leq 2d(z, w). \quad (4)$$

Dimostrazione. Siano $z, w \in \mathbb{D}$, senza perdita di generalità possiamo supporre $f^h(z) \geq f^h(w)$. Allora

$$\begin{aligned} d(f^h(z), f^h(w)) &= \log \left(\frac{1 + \frac{f^h(z) - f^h(w)}{1 - f^h(w)f^h(z)}}{1 - \frac{f^h(z) - f^h(w)}{1 - f^h(w)f^h(z)}} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - f^h(w)f^h(z) + f^h(z) - f^h(w)}{1 - f^h(w)f^h(z) + f^h(w) - f^h(z)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 + f^h(z)}{1 - f^h(z)} \cdot \frac{1 - f^h(w)}{1 + f^h(w)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 + f^h(z)}{1 - f^h(z)} \right) - \log \left(\frac{1 + f^h(w)}{1 - f^h(w)} \right) \\ &= d(0, f^h(z)) - d(0, f^h(w)) \leq 2d(z, w). \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza finale segue dal corollario 1.2.7 ponendo $u = w, v = z$. \square

Ponendo $w = 0$ in (4) otteniamo la disuguaglianza di Golusin, che ci servirà per dimostrare il risultato a cui puntiamo.

2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

2.1 Lemma di Schwarz-Pick al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick, seguendo la traccia data nel remark 5.6 di [BKR].

Teorema 2.1.1. (lemma di Scharz-Pick al bordo) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f^h(z_n) = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (5)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \longrightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia un automorfismo. Allora possiamo applicare il corollario 1.2.8, che per $w = 0$ ci dà

$$\begin{aligned} d(f^h(z), f^h(0)) &\leq 2d(z, 0) \\ \log \left(\frac{1 + \left| \frac{f^h(z) - f^h(0)}{1 - \overline{f^h(z)} f^h(0)} \right|}{1 - \left| \frac{f^h(z) - f^h(0)}{1 - \overline{f^h(z)} f^h(0)} \right|} \right) &\leq 2 \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) \\ \frac{|1 - f^h(z) f^h(0)| + |f^h(z) - f^h(0)|}{|1 - f^h(z) f^h(0)| - |f^h(z) - f^h(0)|} &\leq \frac{(1 + |z|)^2}{(1 - |z|)^2}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che per definizione $f^h(z) \geq 0$ e inoltre per il lemma di Schwarz-Pick $f^h(z) \leq 1$, per ogni $z \in \mathbb{D}$. Sempre per il lemma originale, se valesse $f^h(0) = 1$ avremmo che f è un automorfismo, contraddizione. Perciò dev'essere $f^h(0) < 1$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^h(z_n) = 1$, quindi definitivamente $f^h(z_n) - f^h(0) > 0$ e $1 - f^h(z_n) f^h(0) > 0$, da cui

$$\begin{aligned} \frac{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}{(1 - f^h(z_n))(1 + f^h(0))} &\leq \frac{(1 + |z_n|)^2}{(1 - |z_n|)^2} \\ \frac{1 + f^h(0)}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} (1 - f^h(z_n)) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}. \end{aligned}$$

Per ipotesi vale (5), dunque

$$\begin{aligned} \frac{1 + f^h(0)}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} o((|z_n| - 1)^2) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2} \\ \frac{(1 + f^h(0))(1 + |z_n|)^2}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} o((|z_n| - 1)^2) &\geq 1. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + f^h(0))(1 + |z_n|)^2}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} = \frac{2(1 + f^h(0))}{1 - f^h(0)} < +\infty$, otteniamo di nuovo una contraddizione. \square

2.2 Teorema di Burns-Krantz

Proposizione 2.2.1. Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione tale che

$$f(z) = 1 + (z - 1) + o((z - 1)^3) \quad (6)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora

$$f^h(z) = 1 + o((z - 1)^2) \quad (7)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente.

Dimostrazione. Inserisci il disegno alla vecchia maniera esportando in pdf, perché con tikz è un casino

Sia S un settore (cono? non conosco il termine tecnico in italiano) di vertice 1 e angolo d'apertura 2α , e S' uno un po' più grande di vertice 1 e angolo 2β , $\beta > \alpha$. Per $z \in S$, sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \text{dist}(z, \partial S')$ (la distanza di z dal bordo di S'). Allora per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{w - 1 + (f(w) - w)}{(w - z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{1}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{z - 1 + f(w) - w}{(w - z)^2} dw \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw =: 1 + I(z). \end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$ fissato, per ipotesi esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w) - w| < \varepsilon|1 - w|^3$ per ogni $w \in S'$ con $|w - 1| < \delta$. Per questi w vale che

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z + r(z)e^{i\theta}) - z|^2} r(z) d\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3 \\ &= \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3 \\ &= \frac{\varepsilon}{r(z)} (r(z) + |z - 1|)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2 \left(1 + \frac{|z - 1|}{r(z)}\right)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc \gamma)^3 \\ &\leq \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3 \\ &\leq \varepsilon |z - 1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3, \end{aligned}$$

Magari dire qualcosa sull'utilità di questa proposizione, che forse verrà spostata nei prerequisiti

Mettere un disegno. Qualche spiegazione in più?

da cui otteniamo $f'(z) = 1 + o((z-1)^2)$ per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Inoltre, per ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z-1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z-1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Possiamo quindi concludere che

$$f^h(z) = |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = 1 + o((z-1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. □

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 2.1 di [BK].

Teorema 2.2.2. (Burns-Krantz, 1994) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f(z) = 1 + (z-1) + \mathcal{O}((z-1)^4) \quad (8)$$

per $z \rightarrow 1$. Allora f è l'identità sul disco.

Dimostrazione. Chiaramente, se vale (8) per $z \rightarrow 1$ vale anche (6), in particolare per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Dalla proposizione 2.2.1 segue che anche (7) vale per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del teorema 2.1.1, da cui la tesi. □

Aggiungere controesempio

Ok, bisogna chiarire questa cosa di $z-1$ e $|z|-1$, il claim è che non tangenzialmente hanno gli stessi o -piccoli

gli ultimi passaggi mi sono un po' oscuri, per via degli o -piccoli

È comprensibile? E siamo sicuri che valgono le ipotesi di 2.1.1? (c'era quel discorso di $(z-1)^2$ e $(|z|-1)^2$)

Riferimenti bibliografici

- [BK] D. M. Burns, S. G. Krantz, *Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary*, (1994)
- [BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth, *A new Schwarz-Pick lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps*, (2020)
- [BM] A. F. Beardon, D. Minda, *A multi-point Schwarz-Pick lemma*, (2004)