Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

2* Aprile 2022

Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle\bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$.

Nel seguito, lavoriamo sempre sotto l'ipotesi che Ω sia limitato e strettamente pseudoconvesso.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$, data $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa indichiamo con $Df(z)$ il differenziale di f in $z \in \mathbb{D}$. La *metrica di Kobayashi* su Ω limitato è

$$K(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi* d_K.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X,d) uno spazio metrico. Dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x,y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x,w) + d(y,w) - d(x,y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ*-iperbolico* se

$$(x,y)_w \geq \min\{(x,z)_w, (y,z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* $\partial_G X$ è costruito come classe di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim\limits_{i,j\to\infty}(x_i, x_j)_w = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i)_w = \infty$.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x,y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x,w) + d(y,w) - d(x,y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x,y)_w \geq \min\{(x,z)_w, (y,z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se $x, y \in \partial_G X$ e $z \in X$, poniamo

$$(x,y)_w = \sup\left\{\liminf_{i\to+\infty}(x_i, y_i)_w \mid (x_i) \in x, (y_i) \in y\right\},$$
$$(x,z)_w = \sup\left\{\liminf_{i\to+\infty}(x_i, z)_w \mid (x_i) \in x\right\}.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Teorema (Balogh-Bonk, 2001)

Sia Ω *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia* d_K *la distanza di Kobayashi su* Ω*. Allora* (Ω, d_K) *è Gromov-iperbolico, e il bordo iperbolico* $\partial_G\Omega$ *può essere identificato con il bordo euclideo* $\partial\Omega$*. Inoltre, la distanza di Carnot-Carathéodory* d_H *su* $\partial\Omega$ *(quella indotta dalla forma di Levi) sta nella classe canonica di distanze su* $\partial_G X$*, cioè esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che* $d_H(a,b) \asymp \exp\big((a,b)_w\big)$ *per ogni* $a, b \in \partial_G X$*.*

Conseguenze: estensioni al bordo di funzioni olomorfe

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ *domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia* $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *una funzione olomorfa propria. Allora* f *si estende con continuità a* $\bar{f} : \overline{\Omega}_1 \longrightarrow \overline{\Omega}_2$ *tale che* $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ *e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.*

Conseguenze: dinamica olomorfa

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico* $\tau \in \partial\mathbb{D}$ *tale che* $f^k \longrightarrow \tau$ *uniformemente sui compatti.*

Conseguenze: dinamica olomorfa

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \longrightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \longrightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.
Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a d_K, si ottiene una generalizzazione di Wolff-Denjoy per domini Ω limitati e strettamente pseudoconvessi.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \longrightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.
Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a d_K, si ottiene una generalizzazione di Wolff-Denjoy per domini Ω limitati e strettamente pseudoconvessi.

Corollario (Abate, 1991)

Sia $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale una delle seguenti:

1. *le orbite di f sono limitate;*
2. *le orbite di f convergono a un punto del bordo.*

Altri risultati: (titolo da decidere)

% L'articolo di Zimmer, messo in contesto, mi pare che ci dica questo: se si paga il prezzo di aggiungere l'ipotesi di convessità, guadagnando però che il bordo non è più necessariamente liscio, si ottengono risultati analoghi a quelli delle precedenti conseguenze. Questi però non sono conseguenze di Balogh-Bonk, ma mostrano come l'iperbolicità è utile per risultati di questo tipo.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.
- Per una metrica che soddisfa certe ipotesi, la distanza indotta differisce per una costante da una funzione g simile alla r della suddetta costruzione; questo ci permette di dire che Ω con tale distanza è iperbolico.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.
- Per una metrica che soddisfa certe ipotesi, la distanza indotta differisce per una costante da una funzione g simile alla r della suddetta costruzione; questo ci permette di dire che Ω con tale distanza è iperbolico.
- La metrica di Kobayashi soddisfa le suddette ipotesi.

Lo spazio iperbolico Con(Z)

Teorema

Sia (Z, d) *uno spazio metrico completo e limitato, e sia* $Con(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$*, dove* $D(Z)$ *è il diametro di* Z*. La funzione* $r : Con(Z) \times Con(Z) \longrightarrow [0, +\infty)$ *data da*

$$r\big((z,h),(z',h')\big) = 2\log\left(\frac{d(z,z') + \max\{h,h'\}}{\sqrt{hh'}}\right)$$

è una distanza su $Con(Z)$ *che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con* Z*. Inoltre, per ogni* $x, y \in Z$ *si ha*

$$d(x,y) \asymp \exp\big(-(x,y)_w\big).$$

Lo spazio iperbolico Con(Z)

Teorema

Sia (Z, d) *uno spazio metrico completo e limitato, e sia* $Con(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$*, dove* $D(Z)$ *è il diametro di* Z*. La funzione* $r : Con(Z) \times Con(Z) \longrightarrow [0, +\infty)$ *data da*

$$r\big((z,h),(z',h')\big) = 2\log\left(\frac{d(z,z') + \max\{h,h'\}}{\sqrt{hh'}}\right)$$

è una distanza su $Con(Z)$ *che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con* Z*. Inoltre, per ogni* $x, y \in Z$ *si ha*

$$d(x,y) \asymp \exp\big(-(x,y)_w\big).$$

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Teorema

Sia (Z, d) *uno spazio metrico completo e limitato, e sia* $Con(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$, *dove* $D(Z)$ *è il diametro di* Z. *La funzione* $r : Con(Z) \times Con(Z) \longrightarrow [0, +\infty)$ *data da*

$$r\big((z,h),(z',h')\big) = 2\log\left(\frac{d(z,z') + \max\{h,h'\}}{\sqrt{hh'}}\right)$$

è una distanza su $Con(Z)$ *che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con* Z. *Inoltre, per ogni* $x, y \in Z$ *si ha*

$$d(x,y) \asymp \exp\big(-(x,y)_w\big).$$

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza. Dati $r_{ij} \geq 0$ per $i, j \in \{1,2,3,4\}$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4\big(\max\{(r_{13}r_{24}), (r_{14}r_{23})\}\big)$.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \mathrm{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \mathrm{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$. Segue che

$$\begin{aligned}(d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ &\leq 4\Big(\big((d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\})\big) \\ &\times \big((d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})\big)\Big),\end{aligned}$$

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \mathrm{Con}(Z)$ per $i \in \{1,2,3,4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$. Segue che

$$\begin{aligned}
(d_{12} + \max\{h_1, h_2\})&(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\
&\leq 4\Big(\big((d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\})\big) \\
&\times \big((d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})\big)\Big),
\end{aligned}$$

che ci dà

$$r(x_1, x_2) + r(x_3, x_4) \leq \big(r(x_1, x_3) + r(x_2, x_4)\big)\big(r(x_1, x_4) + r(x_2, x_3)\big) + C,$$

da cui segue l'iperbolicità di $\big(Con(Z), r\big)$.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Fissiamo $w = \big(z_0, D(Z)\big) \in \mathrm{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z, h') \in \mathrm{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log\big(d(z, z') + \max\{h, h'\}\big) + O_{D(Z)}(1).$$

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Fissiamo $w = \big(z_0, D(Z)\big) \in \mathrm{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z, h') \in \mathrm{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log\big(d(z, z') + \max\{h, h'\}\big) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza (x_i) in $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \longrightarrow 0$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Fissiamo $w = \big(z_0, D(Z)\big) \in \mathrm{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z, h') \in \mathrm{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log\big(d(z, z') + \max\{h, h'\}\big) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza (x_i) in $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \longrightarrow 0$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo Z completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \mathrm{Con}(Z)$.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Fissiamo $w = \big(z_0, D(Z)\big) \in \mathrm{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z, h') \in \mathrm{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log\big(d(z, z') + \max\{h, h'\}\big) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza (x_i) in $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \longrightarrow 0$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo Z completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \mathrm{Con}(Z)$.
La disuguaglianza finale non è difficile, ma richiede un po' di passaggi che non vedremo.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Fissiamo $w = \big(z_0, D(Z)\big) \in \mathrm{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z, h') \in \mathrm{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log\big(d(z, z') + \max\{h, h'\}\big) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza (x_i) in $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \longrightarrow 0$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo Z completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \mathrm{Con}(Z)$.

La disuguaglianza finale non è difficile, ma richiede un po' di passaggi che non vedremo. Mettendo su $\mathrm{Con}(Z) \cup \partial_G \mathrm{Con}(Z)$ un'opportuna topologia (di compattificazione), dalla disuguaglianza segue anche che Z e $\partial_G \mathrm{Con}(Z)$ sono identificati come spazi topologici. $\square$

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Definizione

Una *metrica di Finsler* su Ω è una funzione continua $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che $F(x; tZ) = |t|F(x; Z)$ per ogni $x \in \Omega, Z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}$.

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Definizione

Una *metrica di Finsler* su Ω è una funzione continua $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che $F(x; tZ) = |t|F(x; Z)$ per ogni $x \in \Omega, Z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}$.

Poniamo anche

$$g(x, y) = 2 \log \left(\frac{d_H\big(\pi(x), \pi(y)\big) + \max\{\delta(x)^{1/2},\ \delta(y)^{1/2}\}}{\sqrt{\delta(x)^{1/2}\delta(y)^{1/2}}} \right).$$

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Teorema

Sia F una metrica di Finsler su Ω tale che esistono delle costanti $\varepsilon_0 > 0, s > 0, C_1 > 0, C_2 \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned}\big(1 - C_1\delta^s(x)\big)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1/C_2)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} &\leq F(x; Z) \\ &\leq \big(1 + C_1\delta^s(x)\big)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + C_2\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}. \quad (1)\end{aligned}$$

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Teorema

Sia F una metrica di Finsler su Ω tale che esistono delle costanti $\varepsilon_0 > 0, s > 0, C_1 > 0, C_2 \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned}\big(1 - C_1\delta^s(x)\big)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1/C_2)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} &\leq F(x; Z) \\ &\leq \big(1 + C_1\delta^s(x)\big)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + C_2\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}. \quad (1)\end{aligned}$$

Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Teorema

Allora esiste $C \geq 0$ *tale che per ogni* $x, y \in \Omega$ *vale*

$$g(x,y) - C \leq d_F(x,y) \leq g(x,y) + C. \tag{2}$$

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Teorema

Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x,y) - C \leq d_F(x,y) \leq g(x,y) + C. \tag{2}$$

Idea della dimostrazione: per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Teorema

Allora esiste $C \geq 0$ *tale che per ogni* $x, y \in \Omega$ *vale*

$$g(x,y) - C \leq d_F(x,y) \leq g(x,y) + C. \tag{2}$$

Idea della dimostrazione: per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.
Per la minorazione, bisogna mostrare che la stima trovata dall'alto è ottimale, cioè che vale la stima dal basso per tutte le curve.

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\left(\pi(x); Z_H\right)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x; Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\left(\pi(x); Z_H\right)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\begin{aligned}\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x; Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;
con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in $\mathbb{C}^n$;

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x; Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;
con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in $\mathbb{C}^n$;
stringendo l'immagine del biolomorfismo tra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene, seguono le stime volute. □

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x;Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Corollario

Esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ si ha

$$g(x,y) - C \leq d_K(x,y) \leq g(x,y) + C. \tag{3}$$

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le metriche di Kobayashi su Ω_1, Ω_2, allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq d_1(x, y);$$

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le metriche di Kobayashi su Ω_1, Ω_2, allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché f è propria esiste $C_1 \geq 1$ tale che per ogni $x \in \Omega_1$ abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2\big(f(x)\big) \leq C_1 \delta_1(x),$$

dove δ_j è la distanza dal bordo in Ω_j.

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le metriche di Kobayashi su Ω_1, Ω_2, allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché f è propria esiste $C_1 \geq 1$ tale che per ogni $x \in \Omega_1$ abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2\big(f(x)\big) \leq C_1\delta_1(x),$$

dove δ_j è la distanza dal bordo in Ω_j. Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette d_H^j le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste $C_2 \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_H^2\Big(\pi\big(f(x)\big), \pi\big(f(y)\big)\Big) \leq C_2\Big(d_H^1\big(\pi(x), \pi(y)\big) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\}\Big).$$

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le metriche di Kobayashi su Ω_1, Ω_2, allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché f è propria esiste $C_1 \geq 1$ tale che per ogni $x \in \Omega_1$ abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2\big(f(x)\big) \leq C_1\delta_1(x),$$

dove δ_j è la distanza dal bordo in Ω_j. Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette d_H^j le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste $C_2 \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_H^2\Big(\pi\big(f(x)\big), \pi\big(f(y)\big)\Big) \leq C_2\Big(d_H^1\big(\pi(x), \pi(y)\big) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\}\Big).$$

Da queste disuguaglianze è facile concludere. $\square$

Grazie per l'attenzione!