Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

2* Aprile 2022

Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini   Relatore: Prof. Marco Abate

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial \rho^2}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \Omega$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial \rho^2}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \Omega$.

Nel seguito, lavoriamo sempre sotto l'ipotesi che Ω sia strettamente pseudoconvesso.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$, data $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa indichiamo con $Df(z)$ il differenziale di f in $z \in \mathbb{D}$. La *metrica di Kobayashi* su Ω è

$$K(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi* d_K.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X,d) uno spazio metrico, dati $x,y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x,y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x,w)+d(y,w)-d(x,y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x,y)_w \geq (x,z)_w \wedge (y,z)_w - \delta \text{ per ogni } x,y,z,w \in X.$$

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* è $\partial_G X$ costruito come classe di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim\limits_{i,j\to\infty}(x_i,x_j)_w = \infty$; due tali successioni $(x_i),(y_i)$ sono equivalenti se $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i,y_i)_w = \infty$.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Teorema

(Balogh-Bonk) (Ω, d_K) è Gromov iperbolico, e il bordo iperbolico $\partial_G \Omega$ può essere identificato con il bordo euclideo $\partial\Omega$. Inoltre, la distanza di Carnot-Carathéodory d_H su $\partial\Omega$ (quella indotta dalla forma di Levi) sta nella classe canonica di distanze su $\partial_G X$, cioè esiste $\varepsilon > 0$ tale che $d_H(a, b) \asymp \exp\big((a, b)_w\big)$ per ogni $a, b \in \partial_G X$.

Conseguenze: estensioni al bordo di funzioni olomorfe

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ che soddisfano le ipotesi del teorema di Balogh-Bonk, e sia $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una funzione olomorfa propria. Allora f si estende a $\bar{f} : \overline{\Omega}_1 \longrightarrow \overline{\Omega}_2$ tale che $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle metriche di Carnot-Carathéodory sui bordi.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Teorema

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico* $\tau \in \partial\mathbb{D}$ *tale che* $f^k \longrightarrow \tau$ *uniformemente sui compatti.*

Conseguenze: dinamica olomorfa

Teorema

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \longrightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi iperbolici valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Teorema

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico* $\tau \in \partial\mathbb{D}$ *tale che* $f^k \longrightarrow \tau$ *uniformemente sui compatti.*

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi iperbolici valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.
Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che i biolomorfismi sono delle isometrie rispetto a d_K, si ottengono delle generalizzazioni dei teoremi di Wolff e Wolff-Denjoy per i domini strettamente pseudoconvessi.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Teorema

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \longrightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi iperbolici valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.
Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che i biolomorfismi sono delle isometrie rispetto a d_K, si ottengono delle generalizzazioni dei teoremi di Wolff e Wolff-Denjoy per i domini strettamente pseudoconvessi.

Corollario

Sia $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale una delle seguenti:

1. *le orbite di f sono limitate;*
2. *le orbite di f convergono a un punto del bordo.*

Conseguenze: altre conseguenze (da decidere)

Inserire l'articolo di Zimmer, ma guarda anche Bracci-nonricordo-Zimmer.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.
- Per una metrica che soddisfa certe ipotesi, la distanza indotta differisce per una costante da una funzione g simile alla r della suddetta costruzione; questo ci permette di dire che Ω con tale distanza è iperbolico.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.
- Per una metrica che soddisfa certe ipotesi, la distanza indotta differisce per una costante da una funzione g simile alla r della suddetta costruzione; questo ci permette di dire che Ω con tale distanza è iperbolico.
- La metrica di Kobayashi soddisfa le suddette ipotesi.

Lo spazio iperbolico Con(Z)

Teorema

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato e sia $Con(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z. La funzione $r : Con(Z) \times Con(Z) \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r\big((z,h),(z',h')\big) = 2\log\left(\frac{d(z,z') + h \vee h'}{\sqrt{hh'}}\right)$$

è una distanza su $Con(Z)$ che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z.

Lo spazio iperbolico Con(Z)

Teorema

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato e sia $Con(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z. La funzione $r : Con(Z) \times Con(Z) \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r\big((z,h),(z',h')\big) = 2\log\left(\frac{d(z,z') + h \vee h'}{\sqrt{hh'}}\right)$$

è una distanza su $Con(Z)$ che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z.

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza.

Lo spazio iperbolico Con(Z)

Teorema

Sia (Z,d) *uno spazio metrico completo e limitato e sia* $Con(Z) = Z \times (0 \times D(Z)]$, *dove* $D(Z)$ *è il diametro di* Z. *La funzione* $r : Con(Z) \times Con(Z) \longrightarrow [0,+\infty)$ *data da*

$$r\big((z,h),(z',h')\big) = 2\log\left(\frac{d(z,z') + h \vee h'}{\sqrt{hh'}}\right)$$

è una distanza su $Con(Z)$ *che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con* Z.

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza. Dati $r_{ij} \geq 0$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4\big((r_{13}r_{24}) \vee (r_{14}r_{23})\big)$.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \mathrm{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + h_i \vee h_j$.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \mathrm{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + h_i \vee h_j$. Segue che

$$\begin{aligned} &(d_{12} + h_1 \vee h_2)(d_{34} + h_3 \vee h_4) \\ \leq\ & 4\Big(\big((d_{13} + h_1 \vee h_3)(d_{24} + h_2 \vee h_4)\big)\big((d_{14} + h_1 \vee h_4)(d_{23} + h_2 \vee h_3)\big)\Big), \end{aligned}$$

Lo spazio iperbolico Con(Z)

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + h_i \vee h_j$. Segue che

$$
\begin{aligned}
&(d_{12} + h_1 \vee h_2)(d_{34} + h_3 \vee h_4) \\
\le 4\Big(&\big((d_{13} + h_1 \vee h_3)(d_{24} + h_2 \vee h_4)\big)\big((d_{14} + h_1 \vee h_4)(d_{23} + h_2 \vee h_3)\big)\Big),
\end{aligned}
$$

che ci dà

$$
r(x_1, x_2) + r(x_3, x_4) \le \big(r(x_1, x_3) + r(x_2, x_4)\big)\big(r(x_1, x_4) + r(x_2, x_3)\big) + C,
$$

da cui segue l'iperbolicità di $\big(Con(Z), r\big)$.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Usando le definizioni, troviamo che una sequenza (x_i) in $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \longrightarrow 0$, ma essendo Z completo segue che il limite di (x_i) può essere identificato con $z \in Z$ limite di (z_i);

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Usando le definizioni, troviamo che una sequenza (x_i) in $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \longrightarrow 0$, ma essendo Z completo segue che il limite di (x_i) può essere identificato con $z \in Z$ limite di (z_i); inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito.

Lo spazio iperbolico $\mathrm{Con}(Z)$

Usando le definizioni, troviamo che una sequenza (x_i) in $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \longrightarrow 0$, ma essendo Z completo segue che il limite di (x_i) può essere identificato con $z \in Z$ limite di (z_i); inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito.
Devo dire che $\partial_G \mathrm{Con}(Z)$ e Z sono isometrici (?) con questa identificazione.

Definizione

Una *metrica di Finsler* su Ω è una funzione continua $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che $F(x; tZ) = |t|F(x; Z)$ per ogni $x \in \Omega, Z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}$.

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Teorema

Sia F una metrica di Finsler su Ω tale che esistono delle costanti $\varepsilon_0 > 0, s > 0, C_1 > 0, C_2 \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned}\big(1 - C_1\delta^s(x)\big)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1/C_2)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} &\leq F(x;Z)\\ &\leq \big(1 + C_1\delta^s(x)\big)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + C_2\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x,y) - C \leq d_F(x,y) \leq g(x,y) + C. \qquad (2)$$

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Idea della dimostrazione: per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè danno la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Idea della dimostrazione: per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè danno la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.
Per la minorazione, bisogna mostrare che le curve trovate sono ottimali.

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x; Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x; Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} \left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;
con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in $\mathbb{C}^n$;

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x;Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;
con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in $\mathbb{C}^n$;
stringendo l'immagine del biolomorfismo tra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene, seguono le stime volute. □

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x; Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Corollario

Esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ si ha

$$g(x,y) - C \leq d_K(x,y) \leq g(x,y) + C. \tag{3}$$

Fine

Grazie per l'attenzione!