

Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

* Maggio 2022



Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2 , cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $d\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$.

Nel seguito, lavoriamo sempre sotto l'ipotesi che Ω sia limitato e strettamente pseudoconvesso.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Sia \mathbb{D} il disco unitario in \mathbb{C} , data $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa indichiamo con $Df(z)$ il differenziale di f in $z \in \mathbb{D}$. La *metrica di Kobayashi* su Ω limitato è

$$K(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi* d_K .

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ -*iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* $\partial_G X$ è costruito come classe di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i, x_j)_w = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, y_i)_w = \infty$.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se $x, y \in \partial_G X$ e $z \in X$, poniamo

$$(x, y)_w = \sup \left\{ \liminf_{i \rightarrow +\infty} (x_i, y_i)_w \mid (x_i) \in x, (y_i) \in y \right\},$$
$$(x, z)_w = \sup \left\{ \liminf_{i \rightarrow +\infty} (x_i, z)_w \mid (x_i) \in x \right\}.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Teorema (Balogh-Bonk, 2001)

Sia Ω un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia d_K la distanza di Kobayashi su Ω . Allora (Ω, d_K) è Gromov-iperbolico, e il bordo iperbolico $\partial_G \Omega$ può essere identificato con il bordo euclideo $\partial \Omega$. Inoltre, la distanza di Carnot-Carathéodory d_H su $\partial \Omega$ (quella indotta dalla forma di Levi) sta nella classe canonica di distanze su $\partial_G \Omega$, cioè esiste $\varepsilon > 0$ tale che $d_H(a, b) \asymp \exp(-\varepsilon(a, b)_w)$ per ogni $a, b \in \partial_G \Omega$.

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una funzione olomorfa propria. Allora f si estende con continuità a $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \longrightarrow \bar{\Omega}_2$ tale che $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \rightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \rightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \rightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.

Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a d_K , si ottiene una generalizzazione di Wolff-Denjoy per domini Ω limitati e strettamente pseudoconvessi.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \rightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.

Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a d_K , si ottiene una generalizzazione di Wolff-Denjoy per domini Ω limitati e strettamente pseudoconvessi.

Corollario (Abate, 1991)

Sia $f : \Omega \rightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale una delle seguenti:

- 1. le orbite di f sono limitate;*
- 2. le orbite di f convergono a un punto del bordo.*

L'iperbolicità di Gromov per domini Ω segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

L'iperbolicità di Gromov per domini Ω segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2022: i domini convessi limitati (non necessariamente con bordo liscio) sono iperbolici con la distanza indotta dalla metrica di Kähler.

Altre applicazioni dell'iperbolicità di Gromov

L'iperbolicità di Gromov per domini Ω segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2022: i domini convessi limitati (non necessariamente con bordo liscio) sono iperboliche con la distanza indotta dalla metrica di Kähler.

Seguono risultati, analoghi a quelli visti, di estensione al bordo e dinamica olomorfa.

Altre applicazioni dell'iperbolicità di Gromov

L'iperbolicità di Gromov per domini Ω segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2022: i domini convessi limitati (non necessariamente con bordo liscio) sono iperboliche con la distanza indotta dalla metrica di Kähler.

Seguono risultati, analoghi a quelli visti, di estensione al bordo e dinamica olomorfa. Valgono anche delle stime subellittiche per le soluzioni del problema $\bar{\partial}$ -Neumann, già estensivamente studiate per i domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo liscio).

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $(\text{Con}(Z), r)$ tale che Z è identificato con il bordo.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $(\text{Con}(Z), r)$ tale che Z è identificato con il bordo.
- Per una metrica che soddisfa certe ipotesi, la distanza indotta differisce per una costante da una funzione g simile alla r della suddetta costruzione; questo ci permette di dire che Ω con tale distanza è iperbolico.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio iperbolico $(\text{Con}(Z), r)$ tale che Z è identificato con il bordo.
- Per una metrica che soddisfa certe ipotesi, la distanza indotta differisce per una costante da una funzione g simile alla r della suddetta costruzione; questo ci permette di dire che Ω con tale distanza è iperbolico.
- La metrica di Kobayashi soddisfa le suddette ipotesi.

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Teorema

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato, e sia $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z . La funzione $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left(\frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

è una distanza su $\text{Con}(Z)$ che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z . Inoltre, per ogni $x, y \in Z$ si ha

$$d(x, y) \asymp \exp \left(- (x, y)_w \right).$$

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Teorema

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato, e sia $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z . La funzione $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left(\frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

è una distanza su $\text{Con}(Z)$ che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z . Inoltre, per ogni $x, y \in Z$ si ha

$$d(x, y) \asymp \exp \left(- (x, y)_w \right).$$

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza.

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Teorema

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato, e sia $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z . La funzione $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left(\frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

è una distanza su $\text{Con}(Z)$ che lo rende uno spazio iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z . Inoltre, per ogni $x, y \in Z$ si ha

$$d(x, y) \asymp \exp \left(- (x, y)_w \right).$$

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza. Dati $r_{ij} \geq 0$ per $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4(\max\{(r_{13}r_{24}), (r_{14}r_{23})\})$.

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$.

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$. Segue che

$$\begin{aligned} & (d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ & \leq 4 \left(((d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\})) \right. \\ & \quad \left. \times ((d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})) \right), \end{aligned}$$

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Siano $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, poniamo $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$. Segue che

$$\begin{aligned} & (d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ & \leq 4 \left(((d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\})) \right. \\ & \quad \left. \times ((d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})) \right), \end{aligned}$$

che ci dà

$$r(x_1, x_2) + r(x_3, x_4) \leq (r(x_1, x_3) + r(x_2, x_4))(r(x_1, x_4) + r(x_2, x_3)) + C,$$

da cui segue l'iperbolicità di $(\text{Con}(Z), r)$.

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza (x_i) in $(\text{Con}(Z), r)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \rightarrow 0$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito.

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza (x_i) in $(\text{Con}(Z), r)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \rightarrow 0$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo Z completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$.

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza (x_i) in $(\text{Con}(Z), r)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \rightarrow 0$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo Z completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$.

La disuguaglianza finale non è difficile, ma richiede un po' di passaggi che non vedremo.

Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza (x_i) in $(\text{Con}(Z), r)$ converge a infinito se e solo se la sequenza (z_i) è di Cauchy e $h_i \rightarrow 0$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo Z completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$.

La disuguaglianza finale non è difficile, ma richiede un po' di passaggi che non vedremo. Mettendo su $\text{Con}(Z) \cup \partial_G \text{Con}(Z)$ un'opportuna topologia (di compattificazione), dalla disuguaglianza segue anche che Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$ sono identificati come spazi topologici. \square

Definizione

Una *metrica di Finsler* su Ω è una funzione continua $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che $F(x; tZ) = |t|F(x; Z)$ per ogni $x \in \Omega, Z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}$.

Definizione

Una *metrica di Finsler* su Ω è una funzione continua $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che $F(x; tZ) = |t|F(x; Z)$ per ogni $x \in \Omega, Z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}$.

Poniamo anche

$$g(x, y) = 2 \log \left(\frac{d_H(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta(x)^{1/2}, \delta(y)^{1/2}\}}{\sqrt{\delta(x)^{1/2} \delta(y)^{1/2}}} \right).$$

Teorema

Sia F una metrica di Finsler su Ω tale che esistono delle costanti $\varepsilon_0 > 0, s > 0, C_1 > 0, C_2 \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C_1 \delta^s(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1/C_2) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq F(x; Z) \\ &\leq (1 + C_1 \delta^s(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + C_2 \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Teorema

Sia F una metrica di Finsler su Ω tale che esistono delle costanti $\varepsilon_0 > 0, s > 0, C_1 > 0, C_2 \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C_1 \delta^s(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1/C_2) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq F(x; Z) \\ &\leq (1 + C_1 \delta^s(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + C_2 \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

Teorema

Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

Teorema

Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

Idea della dimostrazione: per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

Teorema

Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

Idea della dimostrazione: per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

Per la minorazione, bisogna mostrare che la stima trovata dall'alto è ottimale, cioè che vale la stima dal basso per tutte le curve.

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo.

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo. Con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in un insieme che può essere stretto fra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene.

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo. Con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in un insieme che può essere stretto fra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene. Per gli ellissoidi complessi, la metrica di Kobayashi può essere calcolata esplicitamente. □

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Corollario

Esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ si ha

$$g(x, y) - C \leq d_K(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (3)$$

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le metriche di Kobayashi su Ω_1, Ω_2 , allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le metriche di Kobayashi su Ω_1, Ω_2 , allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché f è propria esiste $C_1 \geq 1$ tale che per ogni $x \in \Omega_1$ abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2(f(x)) \leq C_1 \delta_1(x),$$

dove δ_j è la distanza dal bordo in Ω_j .

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le metriche di Kobayashi su Ω_1, Ω_2 , allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché f è propria esiste $C_1 \geq 1$ tale che per ogni $x \in \Omega_1$ abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2(f(x)) \leq C_1 \delta_1(x),$$

dove δ_j è la distanza dal bordo in Ω_j . Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette d_H^j le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste $C_2 \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_H^2(\pi(f(x)), \pi(f(y))) \leq C_2 \left(d_H^1(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\} \right).$$

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le metriche di Kobayashi su Ω_1, Ω_2 , allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché f è propria esiste $C_1 \geq 1$ tale che per ogni $x \in \Omega_1$ abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2(f(x)) \leq C_1 \delta_1(x),$$

dove δ_j è la distanza dal bordo in Ω_j . Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette d_H^j le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste $C_2 \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_H^2\left(\pi(f(x)), \pi(f(y))\right) \leq C_2\left(d_H^1(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\}\right).$$

Da queste disuguaglianze è facile concludere. □

Grazie per l'attenzione!