Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

2* Aprile 2022

Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial \rho^2}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \Omega$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial \rho^2}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \Omega$.

Nel seguito, lavoriamo sempre sotto l'ipotesi che Ω sia strettamente pseudoconvesso.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$, data $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa indichiamo con $Df(z)$ il differenziale di f in $z \in \mathbb{D}$. La *metrica di Kobayashi* su Ω è

$$K(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi* d_K.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ-*iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* è $\partial_G X$ costruito come classe di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim\limits_{i,j\to\infty} (x_i, x_j) = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim\limits_{i\to\infty} (x_i, y_i) = \infty$.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico, dati $x, y \in X$ il *prodotto di Gromov* con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ*-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq (x, z)_w \wedge (y, z)_w - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Teorema

(Balogh-Bonk) (Ω, d_K) *è Gromov iperbolico, e il bordo iperbolico* $\partial_G \Omega$ *può essere identificato con il bordo euclideo* $\partial\Omega$*. Inoltre, la distanza di Carnot-Carathéodory* d_H *su* $\partial\Omega$ *(quella indotta dalla forma di Levi) sta nella classe canonica di distanze su* $\partial_G X$*, cioè esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che* $d_H(a, b) \asymp \exp\big((a, b)_w\big)$ *per ogni* $a, b \in \partial_G X$.

Conseguenze: estensioni al bordo di funzioni olomorfe

Devo trovare un modo rapido di riassumere la proposizione 5.3, con tutte le definizioni e conseguenze (compresi i corollari 6.1 e 6.2).

Conseguenze: dinamica olomorfa

Definizione

Un *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ è
$E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\tau - z|^2}{1-|z|^2} < R \right\}$.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Definizione

Un *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ è
$E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}$.

Detta ω la distanza iperbolica su $\mathbb{D}$, si ha
$E(\tau, R) = \{ z \in \mathbb{D} \mid \lim_{w \to \tau} \big(\omega(z, w) - \omega(0, w) \big) < \frac{1}{2} \log R \}$.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Definizione

Un *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ è
$E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}$.

Teorema

(Wolff) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che per ogni $R > 0$ vale che $f\big(E(\tau, R)\big) \subseteq E(\tau, R)$.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Definizione

Un *orociclo* di centro $\tau \in \partial\mathbb{D}$ e raggio $R > 0$ è
$E(\tau, R) = \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}$.

Teorema

(Wolff) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico* $\tau \in \partial\mathbb{D}$ *tale che per ogni* $R > 0$ *vale che* $f\big(E(\tau, R)\big) \subseteq E(\tau, R)$.

Teorema

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico* $\tau \in \partial\mathbb{D}$ *tale che* $f^k \longrightarrow \tau$ *uniformemente sui compatti.*

Conseguenze: dinamica olomorfa

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi iperbolici (è vera quest'affermazione?), valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.

Conseguenze: dinamica olomorfa

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi iperbolici (è vera quest'affermazione?), valgono dei risultati simili per funzioni 1-lipschitziane dallo spazio in sé.
Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che i biolomorfismi sono delle isometrie rispetto a d_K, si ottengono delle generalizzazioni dei teoremi di Wolff e Wolff-Denjoy per i domini strettamente pseudoconvessi.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Per una metrica F su Ω che soddisfa certe ipotesi, si ha che esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x,y) - C \leq d_F(x,y) \leq g(x,y) + C,$$

dove $g(x,y) = 2\log\left(\frac{d_H\big(\pi(x),\pi(y)\big) + h(x) \vee h(y)}{\sqrt{h(x)h(y)}}\right).$

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Per una metrica F su Ω che soddisfa certe ipotesi, si ha che esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x,y) - C \leq d_F(x,y) \leq g(x,y) + C,$$

dove $g(x,y) = 2\log\left(\dfrac{d_H\big(\pi(x), \pi(y)\big) + h(x) \vee h(y)}{\sqrt{h(x)h(y)}}\right)$.

- La metrica di Kobayashi soddisfa le suddette ipotesi.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

- Per una metrica F su Ω che soddisfa certe ipotesi, si ha che esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x,y) - C \leq d_F(x,y) \leq g(x,y) + C,$$

dove $g(x,y) = 2\log\left(\dfrac{d_H\big(\pi(x),\pi(y)\big) + h(x) \vee h(y)}{\sqrt{h(x)h(y)}}\right)$.

- La metrica di Kobayashi soddisfa le suddette ipotesi.
- Si ha dunque che possiamo confrontare d_K con la funzione g, e da questa disuguaglianza segue il teorema di Balogh-Bonk.

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Definizione

Una *metrica di Finsler* su Ω è una funzione continua $F : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che $F(x; tZ) = |t|F(x; Z)$ per ogni $x \in \Omega, Z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}$.

Teorema

Sia F *una metrica di Finsler su* Ω *tale che esistono delle costanti* $\varepsilon_0 > 0, s > 0, C_1 > 0, C_2 \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C_1\delta^s(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1/C_2)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq F(x; Z)$$
$$\leq \left(1 + C_1\delta^s(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + C_2\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}. \quad (1)$$

Allora esiste $C \geq 0$ *tale che per ogni* $x, y \in \Omega$ *vale*

$$g(x, y) - C \leq d_F(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (2)$$

Disuguaglianze per metriche di Finsler

Idea della dimostrazione: capire quali sono i punti salienti e riassumerli. Richiede un po' di lavoro.

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x;Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\begin{aligned}\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x;Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;
con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in $\mathbb{C}^n$;

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esistono* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $C \geq 0$ *tali che per ogni* $x \in \Omega$ *con* $\delta(x) < \varepsilon_0$ *e per ogni* $Z \in \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x; Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo;
con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in $\mathbb{C}^n$;
stringendo l'immagine del biolomorfismo tra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene, seguono le stime volute. $\square$

La metrica di Kobayashi soddisfa la disuguaglianza

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega$ con $\delta(x) < \varepsilon_0$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\left(1 - C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1-\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2} \leq K(x; Z)$$

$$\leq \left(1 + C\delta^{1/2}(x)\right)\left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1+\varepsilon)\frac{L_\rho\big(\pi(x); Z_H\big)}{\delta(x)}\right)^{1/2}.$$

Corollario

Esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ si ha

$$g(x,y) - C \leq d_K(x,y) \leq g(x,y) + C. \tag{3}$$

Dimostrazione del teorema di BB

Traccia della dimostrazione del teorema di Balogh-Bonk: dati $r_{ij} \geq 0$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4\big((r_{13}r_{24}) \vee (r_{14}r_{23})\big)$.

Dimostrazione del teorema di BB

Traccia della dimostrazione del teorema di Balogh-Bonk: dati $r_{ij} \geq 0$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4\big((r_{13}r_{24}) \vee (r_{14}r_{23})\big)$. Siano $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \Omega$, poniamo $h_i = \delta(x_i)^{1/2}$, $d_{ij} = d_H\big(\pi(x_i), \pi(x_j)\big)$ e $r_{ij} = d_{ij} + h_i \vee h_j$.

Dimostrazione del teorema di BB

Traccia della dimostrazione del teorema di Balogh-Bonk: dati $r_{ij} \geq 0$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4\big((r_{13}r_{24}) \vee (r_{14}r_{23})\big)$. Siano $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \Omega$, poniamo $h_i = \delta(x_i)^{1/2}$, $d_{ij} = d_H\big(\pi(x_i), \pi(x_j)\big)$ e $r_{ij} = d_{ij} + h_i \vee h_j$. Segue che

$$(d_{12} + h_1 \vee h_2)(d_{34} + h_3 \vee h_4)$$
$$\leq 4\Big(\big((d_{13} + h_1 \vee h_3)(d_{24} + h_2 \vee h_4)\big)\big((d_{14} + h_1 \vee h_4)(d_{23} + h_2 \vee h_3)\big)\Big),$$

Dimostrazione del teorema di BB

Traccia della dimostrazione del teorema di Balogh-Bonk: dati $r_{ij} \geq 0$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4\big((r_{13}r_{24}) \vee (r_{14}r_{23})\big)$. Siano $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \Omega$, poniamo $h_i = \delta(x_i)^{1/2}$, $d_{ij} = d_H\big(\pi(x_i), \pi(x_j)\big)$ e $r_{ij} = d_{ij} + h_i \vee h_j$. Segue che

$$
\begin{gathered}
(d_{12} + h_1 \vee h_2)(d_{34} + h_3 \vee h_4) \\
\leq 4\Big(\big((d_{13} + h_1 \vee h_3)(d_{24} + h_2 \vee h_4)\big)\big((d_{14} + h_1 \vee h_4)(d_{23} + h_2 \vee h_3)\big)\Big),
\end{gathered}
$$

che grazie al Corollario diventa

$$
\begin{gathered}
d_K(x_1, x_2) + d_K(x_3, x_4) \\
\leq \big(d_K(x_1, x_3) + d_K(x_2, x_4)\big)\big(d_K(x_1, x_4) + d_K(x_2, x_3)\big) + C,
\end{gathered}
$$

da cui segue l'iperbolicità di (Ω, d_K).

Dimostrazione del teorema di BB

Usando la definizione e il Corollario, troviamo che una sequenza (x_i) in (Ω, d_K) converge a infinito se e solo se la sequenza $\big(\pi(x_i)\big)$ converge e $h(x_i) \longrightarrow 0$, cioè se e solo se (x_i) converge rispetto alla metrica euclidea a un punto di $\partial\Omega$;

Dimostrazione del teorema di BB

Usando la definizione e il Corollario, troviamo che una sequenza (x_i) in (Ω, d_K) converge a infinito se e solo se la sequenza $\big(\pi(x_i)\big)$ converge e $h(x_i) \longrightarrow 0$, cioè se e solo se (x_i) converge rispetto alla metrica euclidea a un punto di $\partial\Omega$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite euclideo è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito.

Dimostrazione del teorema di BB

Usando la definizione e il Corollario, troviamo che una sequenza (x_i) in (Ω, d_K) converge a infinito se e solo se la sequenza $\big(\pi(x_i)\big)$ converge e $h(x_i) \longrightarrow 0$, cioè se e solo se (x_i) converge rispetto alla metrica euclidea a un punto di $\partial\Omega$; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite euclideo è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito.
Usando di nuovo il Corollario e la definizione di prodotto di Gromov, con semplici calcoli si trova che

$$d_H(a,b) \asymp \exp\big(-(a,b)_w\big) \quad \text{per ogni } a,b \in \partial\Omega. \qquad \square$$

Fine

Grazie per l'attenzione!