Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Il lemma di Schwarz-Pick

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right| \text{ e } \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Il lemma di Schwarz-Pick

Lemma di Schwarz-Pick

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *si ha*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right| \ e \ \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 *con* $z_0 \neq w_0$ *o nella seconda per* z_0 *allora* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *e vale sempre l'uguaglianza.*

Dal lemma, si ha che la quantità $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right|$ è contratta dalle funzioni in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. A partire da essa è possibile definire una distanza sul disco.

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z, w] := \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z, w] := \dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z, w)\big) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)}\right).$$

La distanza di Poincaré

Scriviamo $[z,w] := \dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}$ e $p(z,w) := |[z,w]|$.

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) sul disco è la funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0,+\infty)$ data da

$$\omega(z,w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z,w)\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)}\right).$$

In termini di ω, il lemma di Schwarz-Pick si riscrive come

$$\omega\big(f(z),f(w)\big) \leq \omega(z,w).$$

Derivata e rapporto iperbolici

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Derivata e rapporto iperbolici

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Derivata e rapporto iperbolici

Definizione

Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z,w]} = \frac{f'(w)(1-|w|^2)}{1-|f(w)|^2}.$$

Definizione

Il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z,w) := \begin{cases} \frac{[f(z),f(w)]}{[z,w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Fissato $w \in \mathbb{D}$, la funzione $z \longmapsto f^*(z,w)$ appartiene a $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$.