Lemma di Schwarz-Pick al bordo (titolo provvisorio)

Marco Vergamini

Indice

Introduzione

Da scrivere alla fine

1 Prerequisiti

1.1 Verso la disuguaglianza di Golusin

Serve la subsection in cui arriviamo da zero fino al lemma di Schwarz-Pick

Definizione 1.1.1. Dati $z, w \in \mathbb{D}$ poniamo

$$[z,w] := \frac{z-w}{1-\bar{w}z}, \qquad p(z,w) := |[z,w]|, \qquad d(z,w) := \log\left(\frac{1+p(z,w)}{1-p(z,w)}\right).$$

Definizione 1.1.2. Data una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, poniamo

$$f^*(z,w) := \frac{[f(z), f(w)]}{[z,w]}$$

e

$$f^h(z) := |f^*(z,z)| := \left|\lim_{w \longrightarrow z} f^*(z,w)\right| = \left|\lim_{w \longrightarrow z} \frac{[f(z), f(w)]}{[z,w]}\right| = \frac{|f'(z)|(1-|z|^2)}{1-|f(z)|^2}.$$

Osservazione 1.1.3.

(i) la disuguaglianza del lemma di Schwarz-Pick può essere riscritta come $|f^*(z,w)| \leq 1$;

(ii) un altro modo di scrivere la disuguaglianza del lemma di Schwarz-Pick è $p(f(z), f(w)) \leq p(z,w)$;

(iii) per definizione, $|f^*(z,w)| = |f^*(w,z)|$ e $f^h(z)$ è reale non negativo.

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

Proposizione 1.1.4. Siano $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo, $v \in \mathbb{D}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha che $f^*(z,v) \in \mathbb{D}$ e la funzione $z \longmapsto f^*(z,v)$ è olomorfa.

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia, dalla definizione sappiamo che l'unico punto che potrebbe dar problemi è v, ma abbiamo visto che la funzione ammette limite finito per $z \longrightarrow v$, perciò v è una singolarità rimovibile. Per il lemma di Schwarz-Pick, $|f^*(z,w)| \leq 1$, inoltre vale l'uguale in qualche punto solo se f è un automorfismo, dunque con le ipotesi su f abbiamo che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè $f^*(z,v) \in \mathbb{D}$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. □

Teorema 1.1.5. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$d(f^*(z,v), f^*(w,v)) \leq d(z,w). \tag{1}$$

sistemare dimostrazione, mancano un po' di dettagli

Dimostrazione. Poiché f non è un automorfismo, per la proposizione 1.1.4 la mappa $z \longmapsto f^*(z,v)$ è olomorfa dal disco unitario in sé, perciò il membro sinistro della disuguaglianza (1) è ben definito e la disuguaglianza stessa segue applicando il lemma di Schwarz-Pick (c'è quella cosa che tanh è convessa, scrivere i dettagli, comprese le uguaglianze che legano p e d). $\square$

Corollario 1.1.6. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$d(0, f^*(z,v)) \leq d(0, f^*(w,v)) + d(z,w). \tag{2}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} d(0, f^*(z,v)) &\leq d(0, f^*(w,v)) + d(f^*(w,v), f^*(z,v)) \\ &\leq d(0, f^*(w,v)) + d(z,w), \end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per la distanza d e la seconda segue dal teorema 1.1.5. $\square$

Corollario 1.1.7. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$d(0, f^*(z,v)) \leq d(0, f^*(u,w)) + d(z,w) + d(v,u). \tag{3}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} d(0, f^*(z,v)) &\leq d(0, f^*(w,v)) + d(z,w) \\ &= d(0, f^*(v,w)) + d(z,w) \\ &\leq d(0, f^*(u,w)) + d(z,w) + d(v,u), \end{aligned}$$

dove le due disuguaglianze seguono dal corollario 1.1.6. $\square$

Corollario 1.1.8. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa che non è un automorfismo. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale

$$d(f^h(z), f^h(w)) \leq 2d(z,w). \tag{4}$$

Dimostrazione. Siano $z, w \in \mathbb{D}$, senza perdita di generalità possiamo supporre $f^h(z) \geq f^h(w)$. Allora

$$\begin{aligned}
d(f^h(z), f^h(w)) &= \log\left(\frac{1+\frac{f^h(z)-f^h(w)}{1-f^h(w)f^h(z)}}{1-\frac{f^h(z)-f^h(w)}{1-f^h(w)f^h(z)}}\right)\\
&= \log\left(\frac{1-f^h(w)f^h(z)+f^h(z)-f^h(w)}{1-f^h(w)f^h(z)+f^h(w)-f^h(z)}\right)\\
&= \log\left(\frac{1+f^h(z)}{1-f^h(z)}\cdot\frac{1-f^h(w)}{1+f^h(w)}\right)\\
&= \log\left(\frac{1+f^h(z)}{1-f^h(z)}\right)-\log\left(\frac{1+f^h(w)}{1-f^h(w)}\right)\\
&= d(0, f^h(z)) - d(0, f^h(w)) \leq 2d(z, w).
\end{aligned}$$

dove la disuguaglianza finale segue dal corollario 1.1.7 ponendo $u = w, v = z$. $\square$

Ponendo $w = 0$ in (4) otteniamo la disuguaglianza di Golusin, che ci servirà per dimostrare il risultato a cui puntiamo.

2 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

2.1 Lemma di Schwarz-Pick al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick, seguendo la traccia data nel remark 5.6 di [BKR].

Teorema 2.1.1. (lemma di Scharz-Pick al bordo) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f^h(z_n) = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \tag{5}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \longrightarrow 1$. Allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia un automorfismo. Allora possiamo applicare il corollario 1.1.8, che per $w = 0$ ci dà

$$\begin{aligned}
d(f^h(z), f^h(0)) &\leq 2d(z, 0) \\
\log\left(\frac{1 + \left|\frac{f^h(z)-f^h(0)}{1-f^h(z)f^h(0)}\right|}{1 - \left|\frac{f^h(z)-f^h(0)}{1-f^h(z)f^h(0)}\right|}\right) &\leq 2\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right) \\
\frac{|1 - f^h(z)f^h(0)| + |f^h(z) - f^h(0)|}{|1 - f^h(z)f^h(0)| - |f^h(z) - f^h(0)|} &\leq \frac{(1+|z|)^2}{(1-|z|)^2}.
\end{aligned}$$

Ricordiamo che per definizione $f^h(z) \geq 0$ e inoltre per il lemma di Schwarz-Pick $f^h(z) \leq 1$, per ogni $z \in \mathbb{D}$. Sempre per il lemma originale, se valesse $f^h(0) = 1$ avremmo che f è un automorfismo, contraddizione. Perciò dev'essere $f^h(0) < 1$, ma $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f^h(z_n) = 1$, quindi definitivamente $f^h(z_n) - f^h(0) > 0$ e $1 - f^h(z_n)f^h(0) > 0$, da cui

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}{(1 - f^h(z_n))(1 + f^h(0))} &\leq \frac{(1+|z_n|)^2}{(1-|z_n|)^2} \\
\frac{1 + f^h(0)}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}(1 - f^h(z_n)) &\geq \frac{(1-|z_n|)^2}{(1+|z_n|)^2}.
\end{aligned}$$

Per ipotesi vale (5), dunque

$$\begin{aligned}
\frac{1 + f^h(0)}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}o((|z_n| - 1)^2) &\geq \frac{(1-|z_n|)^2}{(1+|z_n|)^2} \\
\frac{(1 + f^h(0))(1 + |z_n|)^2}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))}o((|z_n| - 1)^2) &\geq 1.
\end{aligned}$$

Poiché $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(1 + f^h(0))(1 + |z_n|)^2}{(1 - f^h(0))(1 + f^h(z_n))} = \frac{2(1 + f^h(0))}{1 - f^h(0)} < +\infty$, otteniamo di nuovo una contraddizione. □

2.2 Teorema di Burns-Krantz

Magari dire qualcosa sull'utilità di questa proposizione, che forse verrà spostata nei prerequisiti

Proposizione 2.2.1. Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione tale che

$$f(z) = 1 + (z-1) + o((z-1)^3) \tag{6}$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora

$$f^h(z) = 1 + o((z-1)^2) \tag{7}$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.

Dimostrazione. Sia S un settore (cono? non conosco il termine tecnico in italiano) di vertice 1 e angolo d'apertura 2α, e S' uno un po' più grande di vertice 1 e angolo 2β, $\beta > \alpha$. Per $z \in S$, sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \operatorname{dist}(z, \partial S')$ (la distanza di z dal bordo di S'). Allora per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{w-1+(f(w)-w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{z-1+f(w)-w}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)} \frac{f(w)-w}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w =: 1 + I(z).
\end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$ fissato, per ipotesi esiste $\delta > 0$ tale che $|f(w) - w| < \varepsilon|1-w|^3$ per ogni $w \in S'$ con $|w-1| < \delta$. Per questi w vale che

Mettere un disegno. Qualche spiegazione in più?

$$|I(z)| \le \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|1-(z+r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z+r(z)e^{i\theta})-z|^2} r(z)\,\mathrm{d}\theta \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta\in[0,2\pi]} |1-(z+r(z)e^{i\theta})|^3 = \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w\in C(z)} |1-w|^3 =$$

$$= \varepsilon r(z)^2 \left(1 + \frac{|z-1|}{r(z)}\right)^3 \le \varepsilon r(z)^2 (1+\csc(\beta-\alpha))^3 \le \varepsilon |z-1|^2 (1+\csc(\beta-\alpha))^3,$$

da cui otteniamo $f'(z) = 1 + o((z-1)^2)$ per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Inoltre, per ipotesi

$$\frac{1-|f(z)|}{1-|z|} = \frac{1-|z|+o((z-1)^3)}{1-|z|} = 1 + o((z-1)^2)$$

Ok, bisogna chiarire questa cosa di $z-1$ e $|z|-1$, il claim è che non tangenzialmente hanno gli stessi o-piccoli

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.
Possiamo quindi concludere che

$$f^h(z) = |f'(z)| \frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} = 1 + o((z-1)^2)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. □

gli ultimi passaggi mi sono un po' oscuri, per via degli o-piccoli

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 2.1 di [BK].

Teorema 2.2.2. (Burns-Krantz, 1994) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco in sé tale che

$$f(z) = 1 + (z-1) + \mathcal{O}((z-1)^4) \tag{8}$$

per $z \longrightarrow 1$. Allora f è l'identità sul disco.

Dimostrazione. Chiaramente, se vale (8) per $z \longrightarrow 1$ vale anche (6), in particolare per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Dalla proposizione 2.2.1 segue che anche (7) vale per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del teorema 2.1.1, da cui la tesi. $\square$

È comprensibile? E siamo sicuri che valgono le ipotesi di 2.1.1? (c'era quel discorso di $(z-1)^2$ e $(|z|-1)^2$)

Aggiungere controesempio

Riferimenti bibliografici

[BK] D. M. Burns, S. G. Krantz, *Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary*, (1994)

[BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth, *A new Schwarz-Pick lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps*, (2020)

[BM] A. F. Beardon, D. Minda, *A multi-point Schwarz-Pick lemma*, (2004)