

Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

6 Maggio 2022



Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Sia \mathbb{D} il disco unitario in \mathbb{C} . Su \mathbb{D} possiamo mettere la distanza iperbolica ω , indotta dalla metrica di Poincaré $\frac{|dz|}{1-|z|^2}$, che lo rende uno spazio iperbolico.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Sia \mathbb{D} il disco unitario in \mathbb{C} . Su \mathbb{D} possiamo mettere la distanza iperbolica ω , indotta dalla metrica di Poincaré $\frac{|dz|}{1-|z|^2}$, che lo rende uno spazio iperbolico.

Setting: fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2 , cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $d\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Come ρ si può prendere $-\delta(x)$ per $x \in \Omega$ e $\delta(x)$ per $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, dove $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$.

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$.

La distanza indotta su $\partial\Omega$ è la *distanza di Carnot-Carathéodory*

$$d_H(p, q) = \inf \left\{ \int_0^1 L_\rho(\alpha(t); \dot{\alpha}(t))^{1/2} dt \mid \alpha \text{ curva orizzontale tra } p \text{ e } q \right\}.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Data $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa indichiamo con $Df(z)$ il differenziale di f in $z \in \mathbb{D}$. La *metrica di Kobayashi* su Ω limitato è

$$K_{\Omega}(x; Z) = \inf \{ |v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z \},$$

che induce la *distanza di Kobayashi* k_{Ω} .

Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Definizione

Data $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa indichiamo con $Df(z)$ il differenziale di f in $z \in \mathbb{D}$. La *metrica di Kobayashi* su Ω limitato è

$$K_{\Omega}(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi* k_{Ω} .

Le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a K_{Ω} e k_{Ω} .

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico proprio. Dati $x, y, w \in X$ il *prodotto di Gromov* tra x e y con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico proprio. Dati $x, y, w \in X$ il *prodotto di Gromov* tra x e y con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* $\partial_G X$ è costruito come classi di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i, x_j)_w = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, y_i)_w = \infty$.

Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

Definizione

Sia (X, d) uno spazio metrico proprio. Dati $x, y, w \in X$ il *prodotto di Gromov* tra x e y con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Teorema (Balogh-Bonk, 2000)

Sia Ω un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia k_Ω la distanza di Kobayashi su Ω . Allora (Ω, k_Ω) è Gromov-iperbolico, e il bordo iperbolico $\partial_G \Omega$ può essere identificato con il bordo euclideo $\partial \Omega$.

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una funzione olomorfa propria. Allora f si estende con continuità a $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \longrightarrow \bar{\Omega}_2$ tale che $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \longrightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \rightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per semicontrazioni dallo spazio in sé.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \rightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per semicontrazioni dallo spazio in sé.

Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a k_Ω , si ottiene una generalizzazione di Wolff-Denjoy per domini Ω limitati e strettamente pseudoconvessi.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

(Wolff-Denjoy) Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico $\tau \in \partial\mathbb{D}$ tale che $f^k \rightarrow \tau$ uniformemente sui compatti.

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per semicontrazioni dallo spazio in sé.

Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a k_Ω , si ottiene una generalizzazione di Wolff-Denjoy per domini Ω limitati e strettamente pseudoconvessi.

Corollario (Abate, 1991)

Sia $f : \Omega \rightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale una delle seguenti:

- 1. le orbite di f sono relativamente compatte in Ω ; oppure,*
- 2. le orbite di f convergono tutte a un unico punto del bordo.*

L'iperbolicità di Gromov per domini Ω segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

L'iperbolicità di Gromov per domini Ω segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2016: caratterizzazione dei domini convessi che sono Gromov-iperbolici con la metrica di Kobayashi;

L'iperbolicità di Gromov per domini Ω segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2016: caratterizzazione dei domini convessi che sono Gromov-iperbolici con la metrica di Kobayashi; seguono risultati, analoghi a quelli visti, di estensione al bordo e dinamica olomorfa.

L'iperbolicità di Gromov per domini Ω segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2016: caratterizzazione dei domini convessi che sono Gromov-iperbolici con la metrica di Kobayashi; seguono risultati, analoghi a quelli visti, di estensione al bordo e dinamica olomorfa.

Zimmer, 2022: per i domini limitati convessi Gromov-iperbolici (non necessariamente con bordo regolare) valgono delle stime subellittiche per le soluzioni del problema $\bar{\partial}$ -Neumann, già estensivamente studiate per i domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo regolare).

1. Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico $(\text{Con}(Z), r)$ tale che Z è identificato con il bordo.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico $(\text{Con}(Z), r)$ tale che Z è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze;

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico $(\text{Con}(Z), r)$ tale che Z è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze; usando tali disuguaglianze si può dimostrare che k_Ω , vicino al bordo, differisce per una costante da una certa funzione g che è sostanzialmente l'equivalente di r per Ω (si dice che k_Ω e g sono quasi-isometriche).

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico $(\text{Con}(Z), r)$ tale che Z è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze; usando tali disuguaglianze si può dimostrare che k_Ω , vicino al bordo, differisce per una costante da una certa funzione g che è sostanzialmente l'equivalente di r per Ω (si dice che k_Ω e g sono quasi-isometriche).
3. Poiché la Gromov-iperbolicità è invariante per quasi-isometrie, questo ci permette di dire che (Ω, k_Ω) è Gromov-iperbolico.

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Teorema (Bonk-Schramm, 2000)

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato, e sia $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z . La funzione $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left(\frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

è una distanza su $\text{Con}(Z)$ che lo rende uno spazio Gromov-iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z .

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Teorema (Bonk-Schramm, 2000)

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato, e sia $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z . La funzione $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left(\frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

è una distanza su $\text{Con}(Z)$ che lo rende uno spazio Gromov-iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z .

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza.

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Teorema (Bonk-Schramm, 2000)

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato, e sia $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z . La funzione $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left(\frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

è una distanza su $\text{Con}(Z)$ che lo rende uno spazio Gromov-iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z .

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza. Dati $r_{ij} \geq 0$ per $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4 \cdot \max\{r_{13}r_{24}, r_{14}r_{23}\}$.

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Teorema (Bonk-Schramm, 2000)

Sia (Z, d) uno spazio metrico completo e limitato, e sia $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$, dove $D(Z)$ è il diametro di Z . La funzione $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left(\frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

è una distanza su $\text{Con}(Z)$ che lo rende uno spazio Gromov-iperbolico, il cui bordo può essere identificato con Z .

Traccia della dimostrazione: è facile verificare che r è una distanza.

Dati $r_{ij} \geq 0$ per $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tali che $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$, allora $r_{12}r_{34} \leq 4 \cdot \max\{r_{13}r_{24}, r_{14}r_{23}\}$.

Poniamo $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $d_{ij} = d(z_i, z_j)$ e $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$.

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Segue che

$$\begin{aligned} & (d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ & \leq 4 \max\{(d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\}), \\ & (d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})\}, \end{aligned}$$

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Segue che

$$\begin{aligned} & (d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ & \leq 4 \max\{(d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\}), \\ & (d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})\}, \end{aligned}$$

che ci dà

$$\begin{aligned} & r(x_1, x_2) + r(x_3, x_4) \\ & \leq \max\{r(x_1, x_3) + r(x_2, x_4), r(x_1, x_4) + r(x_2, x_3)\} + C, \end{aligned}$$

da cui segue la Gromov-iperbolicità di $(\text{Con}(Z), r)$.

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una successione (x_i) in $(\text{Con}(Z), r)$ converge a infinito se e solo se la successione (z_i) è di Cauchy e $h_i \rightarrow 0$; essendo Z completo, possiamo quindi associare a (x_i) , come “limite”, un unico $z \in Z$.

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una successione (x_i) in $(\text{Con}(Z), r)$ converge a infinito se e solo se la successione (z_i) è di Cauchy e $h_i \rightarrow 0$; essendo Z completo, possiamo quindi associare a (x_i) , come “limite”, un unico $z \in Z$.

Inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto di Z è limite di una successione che converge a infinito; questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$.

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una successione (x_i) in $(\text{Con}(Z), r)$ converge a infinito se e solo se la successione (z_i) è di Cauchy e $h_i \rightarrow 0$; essendo Z completo, possiamo quindi associare a (x_i) , come “limite”, un unico $z \in Z$.

Inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto di Z è limite di una successione che converge a infinito; questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$.

Mettendo su $\text{Con}(Z) \cup \partial_G \text{Con}(Z)$ un'opportuna topologia (di compattificazione), segue anche che Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$ sono identificati come spazi topologici;

1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$; usando le definizioni, troviamo che dati $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$ vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una successione (x_i) in $(\text{Con}(Z), r)$ converge a infinito se e solo se la successione (z_i) è di Cauchy e $h_i \rightarrow 0$; essendo Z completo, possiamo quindi associare a (x_i) , come “limite”, un unico $z \in Z$.

Inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto di Z è limite di una successione che converge a infinito; questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$.

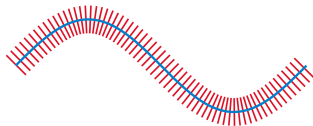
Mettendo su $\text{Con}(Z) \cup \partial_G \text{Con}(Z)$ un'opportuna topologia (di compattificazione), segue anche che Z e $\partial_G \text{Con}(Z)$ sono identificati come spazi topologici; questo non è difficile, ma richiede un po' di passaggi che non vedremo. □

Intorno tubolare e tangente ortogonale complesso

Sia $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$. Si può dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $N_\varepsilon(\partial\Omega)$ è un intorno tubolare di $\partial\Omega$.

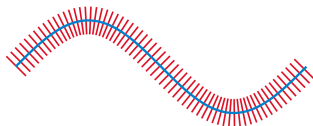
Intorno tubolare e tangente ortogonale complesso

Sia $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$. Si può dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $N_\varepsilon(\partial\Omega)$ è un intorno tubolare di $\partial\Omega$.



Intorno tubolare e tangente ortogonale complesso

Sia $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$. Si può dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $N_\varepsilon(\partial\Omega)$ è un intorno tubolare di $\partial\Omega$.

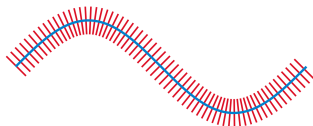


Sia π la proiezione su $\partial\Omega$; dati $x, y \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$, poniamo

$$g(x, y) = 2 \log \left(\frac{d_H(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta(x)^{1/2}, \delta(y)^{1/2}\}}{\sqrt{\delta(x)^{1/2} \delta(y)^{1/2}}} \right).$$

Intorno tubolare e tangente ortogonale complesso

Sia $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$. Si può dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $N_\varepsilon(\partial\Omega)$ è un intorno tubolare di $\partial\Omega$.



Sia π la proiezione su $\partial\Omega$; dati $x, y \in \Omega \cap N_\varepsilon(\partial\Omega)$, poniamo

$$g(x, y) = 2 \log \left(\frac{d_H(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta(x)^{1/2}, \delta(y)^{1/2}\}}{\sqrt{\delta(x)^{1/2} \delta(y)^{1/2}}} \right).$$

Fissato $p \in \partial\Omega$ e detta $\nu(p)$ la normale reale uscente da $\partial\Omega$ in p , possiamo decomporre $\mathbb{C}^n = H_p \partial\Omega \oplus \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\nu(p)\}$; dato $Z \in \mathbb{C}^n$, scriviamo in modo unico $Z = Z_H + Z_N$ con $Z_H \in H_p \partial\Omega$ e $Z_N \in \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\nu(p)\}$.

2. Stime per la metrica di Kobayashi

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega \cap N_{\varepsilon_0}(\partial\Omega)$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K_\Omega(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

2. Stime per la metrica di Kobayashi

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega \cap N_{\varepsilon_0}(\partial\Omega)$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K_\Omega(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo.

2. Stime per la metrica di Kobayashi

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega \cap N_{\varepsilon_0}(\partial\Omega)$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K_\Omega(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo. Con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in un insieme che può essere stretto fra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene.

2. Stime per la metrica di Kobayashi

Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $x \in \Omega \cap N_{\varepsilon_0}(\partial\Omega)$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K_\Omega(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left(\frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Traccia della dimostrazione: si localizza a un intorno di un punto del bordo. Con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in un insieme che può essere stretto fra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene. Per gli ellissoidi complessi, la metrica di Kobayashi può essere calcolata esplicitamente. □

2. Vicino al bordo, k_Ω e g sono quasi-isometriche

Teorema

Sia Ω un dominio strettamente pseudoconvesso limitato, e sia k_Ω la distanza di Kobayashi su Ω . Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq k_\Omega(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (1)$$

2. Vicino al bordo, k_Ω e g sono quasi-isometriche

Teorema

Sia Ω un dominio strettamente pseudoconvesso limitato, e sia k_Ω la distanza di Kobayashi su Ω . Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq k_\Omega(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (1)$$

Idea della dimostrazione: per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi-geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

2. Vicino al bordo, k_Ω e g sono quasi-isometriche

Teorema

Sia Ω un dominio strettamente pseudoconvesso limitato, e sia k_Ω la distanza di Kobayashi su Ω . Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq k_\Omega(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (1)$$

Idea della dimostrazione: per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi-geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

Per la minorazione, bisogna mostrare che la stima trovata dall'alto è ottimale, cioè che vale la stima dal basso per tutte le curve.

2. Vicino al bordo, k_Ω e g sono quasi-isometriche

Teorema

Sia Ω un dominio strettamente pseudoconvesso limitato, e sia k_Ω la distanza di Kobayashi su Ω . Allora esiste $C \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ vale

$$g(x, y) - C \leq k_\Omega(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (1)$$

3. Come già osservato, l'invarianza della Gromov-iperbolicità per quasi-isometrie ci permette di ottenere come corollario il teorema di Balogh-Bonk.

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una funzione olomorfa propria. Allora f si estende con continuità a $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$ tale che $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una funzione olomorfa propria. Allora f si estende con continuità a $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$ tale che $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le distanze di Kobayashi su Ω_1, Ω_2 , allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

Dimostrazione dell'estensione al bordo

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una funzione olomorfa propria. Allora f si estende con continuità a $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$ tale che $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.

Traccia della dimostrazione: siano d_1, d_2 le distanze di Kobayashi su Ω_1, Ω_2 , allora per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché f è propria esiste $C_1 \geq 1$ tale che per ogni $x \in \Omega_1$ abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2(f(x)) \leq C_1\delta_1(x),$$

dove δ_j è la distanza dal bordo in Ω_j .

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una funzione olomorfa propria. Allora f si estende con continuità a $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$ tale che $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.

Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette d_H^j le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste $C_2 \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_H^2\left(\pi(f(x)), \pi(f(y))\right) \leq C_2\left(d_H^1(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\}\right).$$

Corollario

Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una funzione olomorfa propria. Allora f si estende con continuità a $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$ tale che $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$ e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.

Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette d_H^j le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste $C_2 \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega_1$ si ha

$$d_H^2\left(\pi(f(x)), \pi(f(y))\right) \leq C_2\left(d_H^1(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\}\right).$$

Utilizzando queste disuguaglianze, si dimostra la tesi. □

Grazie per l'attenzione!