

# Iperbolicità di Gromov in più variabili complesse

6 Maggio 2022



Scuola Normale Superiore di Pisa

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Sia  $\mathbb{D}$  il disco unitario in  $\mathbb{C}$ . Su  $\mathbb{D}$  possiamo mettere la distanza iperbolica  $\omega$ , indotta dalla metrica di Poincaré  $\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ , che lo rende uno spazio iperbolico.

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

Sia  $\mathbb{D}$  il disco unitario in  $\mathbb{C}$ . Su  $\mathbb{D}$  possiamo mettere la distanza iperbolica  $\omega$ , indotta dalla metrica di Poincaré  $\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ , che lo rende uno spazio iperbolico.

Setting: fissiamo  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$  un dominio limitato con bordo  $C^2$ , cioè esiste  $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$  tale che  $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$  e  $d\rho \neq 0$  in ogni punto di  $\partial\Omega$ . Come  $\rho$  si può prendere  $-\delta(x)$  per  $x \in \Omega$  e  $\delta(x)$  per  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$ , dove  $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ .

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

## Definizione

Dato  $p \in \partial\Omega$ , lo *spazio tangente complesso* a  $\partial\Omega$  in  $p$  è  $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$ . Diciamo che  $\Omega$  è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in  $H_p\partial\Omega$  per ogni  $p \in \partial\Omega$ .

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

## Definizione

Dato  $p \in \partial\Omega$ , lo *spazio tangente complesso* a  $\partial\Omega$  in  $p$  è  $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$ . Diciamo che  $\Omega$  è *strettamente pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in  $H_p\partial\Omega$  per ogni  $p \in \partial\Omega$ .

La distanza indotta su  $\partial\Omega$  è la *distanza di Carnot-Carathéodory*

$$d_H(p, q) = \inf \left\{ \int_0^1 L_\rho(\alpha(t); \dot{\alpha}(t))^{1/2} dt \mid \alpha \text{ curva orizzontale tra } p \text{ e } q \right\}.$$

# Domini strettamente pseudoconvessi e metrica di Kobayashi

## Definizione

Data  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$  olomorfa indichiamo con  $Df(z)$  il differenziale di  $f$  in  $z \in \mathbb{D}$ . La *metrica di Kobayashi* su  $\Omega$  limitato è

$$K(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$

$$\text{olomorfa con } f(0) = x, Df(0)v = Z\},$$

che induce la *distanza di Kobayashi*  $d_K$ .

Le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a  $d_K$ .

# Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

## Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y \in X$  il *prodotto di Gromov* con punto base  $w$  è  $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$ . Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

# Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

## Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y \in X$  il *prodotto di Gromov* con punto base  $w$  è  $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$ . Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Fissato  $w \in X$ , il *bordo iperbolico*  $\partial_G X$  è costruito come classe di equivalenza delle successioni  $(x_i)$  che convergono a infinito, cioè tali che  $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i, x_j)_w = \infty$ ; due tali successioni  $(x_i), (y_i)$  sono equivalenti se  $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, y_i)_w = \infty$ .



# Domini strettamente pseudoconvessi e iperbolicità di Gromov

## Definizione

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y \in X$  il *prodotto di Gromov* con punto base  $w$  è  $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$ . Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

## Teorema (Balogh-Bonk, 2001)

*Sia  $\Omega$  un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia  $d_K$  la distanza di Kobayashi su  $\Omega$ . Allora  $(\Omega, d_K)$  è Gromov-iperbolico, e il bordo iperbolico  $\partial_G \Omega$  può essere identificato con il bordo euclideo  $\partial \Omega$ .*

## Corollario

*Siano  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$  domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia  $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  una funzione olomorfa propria. Allora  $f$  si estende con continuità a  $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \longrightarrow \bar{\Omega}_2$  tale che  $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$  e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.*

## Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

*(Wolff-Denjoy) Sia  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $f^k \longrightarrow \tau$  uniformemente sui compatti.*

## Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

*(Wolff-Denjoy) Sia  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $f^k \rightarrow \tau$  uniformemente sui compatti.*

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per semicontrazioni dallo spazio in sé.

## Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

*(Wolff-Denjoy) Sia  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $f^k \rightarrow \tau$  uniformemente sui compatti.*

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per semicontrazioni dallo spazio in sé.

Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a  $d_K$ , si ottiene una generalizzazione di Wolff-Denjoy per domini  $\Omega$  limitati e strettamente pseudoconvessi.

## Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

*(Wolff-Denjoy) Sia  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e senza punti fissi. Allora esiste un unico  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $f^k \rightarrow \tau$  uniformemente sui compatti.*

Karlsson, 2001: sotto opportune ipotesi, che sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici, valgono dei risultati simili per semicontrazioni dallo spazio in sé.

Usando il teorema di Balogh-Bonk e il fatto che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto a  $d_K$ , si ottiene una generalizzazione di Wolff-Denjoy per domini  $\Omega$  limitati e strettamente pseudoconvessi.

## Corollario (Abate, 1991)

*Sia  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  una funzione olomorfa. Allora vale una delle seguenti:*

- 1. le orbite di  $f$  sono limitate;*
- 2. le orbite di  $f$  convergono a un punto del bordo.*

L'iperbolicità di Gromov per domini  $\Omega$  segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

L'iperbolicità di Gromov per domini  $\Omega$  segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2016: caratterizzazione dei domini convessi che sono Gromov-iperbolici con la metrica di Kobayashi;



L'iperbolicità di Gromov per domini  $\Omega$  segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2016: caratterizzazione dei domini convessi che sono Gromov-iperbolici con la metrica di Kobayashi; seguono risultati, analoghi a quelli visti, di estensione al bordo e dinamica olomorfa.

L'iperbolicità di Gromov per domini  $\Omega$  segue anche da ipotesi diverse da quelle che abbiamo usato.

Zimmer, 2016: caratterizzazione dei domini convessi che sono Gromov-iperbolici con la metrica di Kobayashi; seguono risultati, analoghi a quelli visti, di estensione al bordo e dinamica olomorfa.

Zimmer, 2022: per i domini limitati convessi Gromov-iperbolici (non necessariamente con bordo liscio) valgono delle stime subellittiche per le soluzioni del problema  $\bar{\partial}$ -Neumann, già estensivamente studiate per i domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo liscio).

1. Dato  $(Z, d)$  spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico  $(\text{Con}(Z), r)$  tale che  $Z$  è identificato con il bordo.

# Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato  $(Z, d)$  spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico  $(\text{Con}(Z), r)$  tale che  $Z$  è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze;

# Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato  $(Z, d)$  spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico  $(\text{Con}(Z), r)$  tale che  $Z$  è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze; usando tali disuguaglianze si può dimostrare che  $d_K$ , vicino al bordo, differisce per una costante da una certa funzione  $g$  che è sostanzialmente l'equivalente di  $r$  per  $\Omega$  (si dice che  $d_K$  e  $g$  sono quasi-isometriche).

# Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato  $(Z, d)$  spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico  $(\text{Con}(Z), r)$  tale che  $Z$  è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze; usando tali disuguaglianze si può dimostrare che  $d_K$ , vicino al bordo, differisce per una costante da una certa funzione  $g$  che è sostanzialmente l'equivalente di  $r$  per  $\Omega$  (si dice che  $d_K$  e  $g$  sono quasi-isometriche).
3. Poiché la Gromov-iperbolicità è invariante per quasi-isometrie, questo ci permette di dire che  $(\Omega, d_K)$  è Gromov-iperbolico.

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

## Teorema (Bonk-Schramm, 2000)

*Sia  $(Z, d)$  uno spazio metrico completo e limitato, e sia  $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$ , dove  $D(Z)$  è il diametro di  $Z$ . La funzione  $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$  data da*

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left( \frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

*è una distanza su  $\text{Con}(Z)$  che lo rende uno spazio Gromov-iperbolico, il cui bordo può essere identificato con  $Z$ .*

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

## Teorema (Bonk-Schramm, 2000)

*Sia  $(Z, d)$  uno spazio metrico completo e limitato, e sia  $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$ , dove  $D(Z)$  è il diametro di  $Z$ . La funzione  $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$  data da*

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left( \frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

*è una distanza su  $\text{Con}(Z)$  che lo rende uno spazio Gromov-iperbolico, il cui bordo può essere identificato con  $Z$ .*

*Traccia della dimostrazione:* è facile verificare che  $r$  è una distanza.



# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

## Teorema (Bonk-Schramm, 2000)

*Sia  $(Z, d)$  uno spazio metrico completo e limitato, e sia  $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$ , dove  $D(Z)$  è il diametro di  $Z$ . La funzione  $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$  data da*

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left( \frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

*è una distanza su  $\text{Con}(Z)$  che lo rende uno spazio Gromov-iperbolico, il cui bordo può essere identificato con  $Z$ .*

*Traccia della dimostrazione:* è facile verificare che  $r$  è una distanza. Dati  $r_{ij} \geq 0$  per  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tali che  $r_{ij} = r_{ji}$  e  $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$ , allora  $r_{12}r_{34} \leq 4(\max\{(r_{13}r_{24}), (r_{14}r_{23})\})$ .

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

## Teorema (Bonk-Schramm, 2000)

*Sia  $(Z, d)$  uno spazio metrico completo e limitato, e sia  $\text{Con}(Z) = Z \times (0, D(Z)]$ , dove  $D(Z)$  è il diametro di  $Z$ . La funzione  $r : \text{Con}(Z) \times \text{Con}(Z) \rightarrow [0, +\infty)$  data da*

$$r((z, h), (z', h')) = 2 \log \left( \frac{d(z, z') + \max\{h, h'\}}{\sqrt{hh'}} \right)$$

*è una distanza su  $\text{Con}(Z)$  che lo rende uno spazio Gromov-iperbolico, il cui bordo può essere identificato con  $Z$ .*

*Traccia della dimostrazione:* è facile verificare che  $r$  è una distanza.

Dati  $r_{ij} \geq 0$  per  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tali che  $r_{ij} = r_{ji}$  e  $r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}$ , allora  $r_{12}r_{34} \leq 4(\max\{(r_{13}r_{24}), (r_{14}r_{23})\})$ .

Poniamo  $x_i = (z_i, h_i) \in \text{Con}(Z)$  per  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $d_{ij} = d(z_i, z_j)$  e  $r_{ij} = d_{ij} + \max\{h_i, h_j\}$ .

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Segue che

$$\begin{aligned} & (d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ & \leq 4 \left( ((d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\})) \right. \\ & \quad \left. \times ((d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})) \right), \end{aligned}$$

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Segue che

$$\begin{aligned} & (d_{12} + \max\{h_1, h_2\})(d_{34} + \max\{h_3, h_4\}) \\ & \leq 4 \left( (d_{13} + \max\{h_1, h_3\})(d_{24} + \max\{h_2, h_4\}) \right. \\ & \quad \left. \times ((d_{14} + \max\{h_1, h_4\})(d_{23} + \max\{h_2, h_3\})) \right), \end{aligned}$$

che ci dà

$$r(x_1, x_2) + r(x_3, x_4) \leq (r(x_1, x_3) + r(x_2, x_4))(r(x_1, x_4) + r(x_2, x_3)) + C,$$

da cui segue la Gromov-iperbolicità di  $(\text{Con}(Z), r)$ .

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza  $(x_i)$  in  $(\text{Con}(Z), r)$  converge a infinito se e solo se la sequenza  $(z_i)$  è di Cauchy e  $h_i \rightarrow 0$ ; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito.

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza  $(x_i)$  in  $(\text{Con}(Z), r)$  converge a infinito se e solo se la sequenza  $(z_i)$  è di Cauchy e  $h_i \rightarrow 0$ ; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo  $Z$  completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$ .

# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza  $(x_i)$  in  $(\text{Con}(Z), r)$  converge a infinito se e solo se la sequenza  $(z_i)$  è di Cauchy e  $h_i \rightarrow 0$ ; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo  $Z$  completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$ .

Mettendo su  $\text{Con}(Z) \cup \partial_G \text{Con}(Z)$  un'opportuna topologia (di compattificazione), segue anche che  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$  sono identificati come spazi topologici;



# 1. Lo spazio iperbolico $\text{Con}(Z)$

Fissiamo  $w = (z_0, D(Z)) \in \text{Con}(Z)$ ; usando le definizioni, troviamo che dati  $x = (z, h), x' = (z', h') \in \text{Con}(Z)$  vale

$$(x, x')_w = -\log(d(z, z') + \max\{h, h'\}) + O_{D(Z)}(1).$$

Segue che una sequenza  $(x_i)$  in  $(\text{Con}(Z), r)$  converge a infinito se e solo se la sequenza  $(z_i)$  è di Cauchy e  $h_i \rightarrow 0$ ; inoltre, due successioni convergenti a infinito sono equivalenti se e solo se il loro limite è lo stesso, e ogni punto del bordo è limite di una successione che converge a infinito. Essendo  $Z$  completo, questo ci dà un'identificazione, come insiemi, di  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$ .

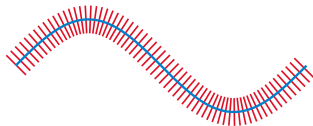
Mettendo su  $\text{Con}(Z) \cup \partial_G \text{Con}(Z)$  un'opportuna topologia (di compattificazione), segue anche che  $Z$  e  $\partial_G \text{Con}(Z)$  sono identificati come spazi topologici; questo non è difficile, ma richiede un po' di passaggi che non vedremo. □

# Intorno tubolare e tangente ortogonale complesso

Sia  $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$ . Si può dimostrare che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $N_\varepsilon(\partial\Omega)$  è un intorno tubolare di  $\partial\Omega$ .

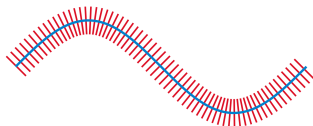
# Intorno tubolare e tangente ortogonale complesso

Sia  $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$ . Si può dimostrare che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $N_\varepsilon(\partial\Omega)$  è un intorno tubolare di  $\partial\Omega$ .



# Intorno tubolare e tangente ortogonale complesso

Sia  $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$ . Si può dimostrare che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $N_\varepsilon(\partial\Omega)$  è un intorno tubolare di  $\partial\Omega$ .

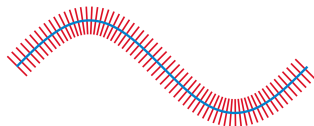


Sia  $\pi$  la proiezione su  $\partial\Omega$ ; dati  $x, y \in N_\varepsilon(\partial\Omega) \cap \Omega$ , poniamo

$$g(x, y) = 2 \log \left( \frac{d_H(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta(x)^{1/2}, \delta(y)^{1/2}\}}{\sqrt{\delta(x)^{1/2} \delta(y)^{1/2}}} \right).$$

# Intorno tubolare e tangente ortogonale complesso

Sia  $N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \delta(x) < \varepsilon\}$ . Si può dimostrare che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $N_\varepsilon(\partial\Omega)$  è un intorno tubolare di  $\partial\Omega$ .



Sia  $\pi$  la proiezione su  $\partial\Omega$ ; dati  $x, y \in N_\varepsilon(\partial\Omega) \cap \Omega$ , poniamo

$$g(x, y) = 2 \log \left( \frac{d_H(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta(x)^{1/2}, \delta(y)^{1/2}\}}{\sqrt{\delta(x)^{1/2} \delta(y)^{1/2}}} \right).$$

Fissato  $p \in \partial\Omega$  e detta  $\nu(p)$  la normale reale uscente da  $\partial\Omega$  in  $p$ , possiamo decomporre  $\mathbb{C}^n = H_p \partial\Omega \oplus \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\nu(p)\}$ ; dato  $Z \in \mathbb{C}^n$ , scriviamo in modo unico  $Z = Z_H + Z_N$  con  $Z_H \in H_p \partial\Omega$  e  $Z_N \in \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\nu(p)\}$ .

## 2. Disuguaglianze per la metrica di Kobayashi

### Proposizione

*Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha*

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

## 2. Disuguaglianze per la metrica di Kobayashi

### Proposizione

*Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha*

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Traccia della dimostrazione:* si localizza a un intorno di un punto del bordo.

## 2. Disuguaglianze per la metrica di Kobayashi

### Proposizione

Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Traccia della dimostrazione:* si localizza a un intorno di un punto del bordo. Con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in un insieme che può essere stretto fra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene.



## 2. Disuguaglianze per la metrica di Kobayashi

### Proposizione

Per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $x \in \Omega$  con  $\delta(x) < \varepsilon_0$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  si ha

$$\begin{aligned} (1 - C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 - \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2} &\leq K(x; Z) \\ &\leq (1 + C\delta^{1/2}(x)) \left( \frac{|Z_N|^2}{4\delta^2(x)} + (1 + \varepsilon) \frac{L_\rho(\pi(x); Z_H)}{\delta(x)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Traccia della dimostrazione:* si localizza a un intorno di un punto del bordo. Con un opportuno biolomorfismo, ci si sposta in un insieme che può essere stretto fra due ellissoidi complessi, uno contenuto e uno che lo contiene. Per gli ellissoidi complessi, la metrica di Kobayashi può essere calcolata esplicitamente. □

## 2. Vicino al bordo, $d_K$ e $g$ sono quasi-isometriche

### Teorema

*Sia  $\Omega$  un dominio strettamente pseudoconvesso limitato, e sia  $d_K$  la distanza di Kobayashi su  $\Omega$ . Allora esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  vale*

$$g(x, y) - C \leq d_K(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (1)$$

## 2. Vicino al bordo, $d_K$ e $g$ sono quasi-isometriche

### Teorema

*Sia  $\Omega$  un dominio strettamente pseudoconvesso limitato, e sia  $d_K$  la distanza di Kobayashi su  $\Omega$ . Allora esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  vale*

$$g(x, y) - C \leq d_K(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (1)$$

*Idea della dimostrazione:* per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

## 2. Vicino al bordo, $d_K$ e $g$ sono quasi-isometriche

### Teorema

*Sia  $\Omega$  un dominio strettamente pseudoconvesso limitato, e sia  $d_K$  la distanza di Kobayashi su  $\Omega$ . Allora esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  vale*

$$g(x, y) - C \leq d_K(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (1)$$

*Idea della dimostrazione:* per la maggiorazione, si cercano delle curve che siano quasi geodetiche, cioè che realizzano la distanza a meno di una costante additiva, e si integra lungo quelle curve.

Per la minorazione, bisogna mostrare che la stima trovata dall'alto è ottimale, cioè che vale la stima dal basso per tutte le curve.

## 2. Vicino al bordo, $d_K$ e $g$ sono quasi-isometriche

### Teorema

*Sia  $\Omega$  un dominio strettamente pseudoconvesso limitato, e sia  $d_K$  la distanza di Kobayashi su  $\Omega$ . Allora esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega$  vale*

$$g(x, y) - C \leq d_K(x, y) \leq g(x, y) + C. \quad (1)$$

3. Come già osservato, l'invarianza della Gromov-iperbolicità per quasi-isometrie ci permette di ottenere come corollario il teorema di Balogh-Bonk.

## Corollario

*Siano  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$  domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una funzione olomorfa propria. Allora  $f$  si estende con continuità a  $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$  tale che  $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$  e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.*

## Corollario

*Siano  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$  domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una funzione olomorfa propria. Allora  $f$  si estende con continuità a  $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$  tale che  $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$  e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.*

*Traccia della dimostrazione:* siano  $d_1, d_2$  le metriche di Kobayashi su  $\Omega_1, \Omega_2$ , allora per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

# Dimostrazione dell'estensione al bordo

## Corollario

*Siano  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$  domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una funzione olomorfa propria. Allora  $f$  si estende con continuità a  $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$  tale che  $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$  e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.*

*Traccia della dimostrazione:* siano  $d_1, d_2$  le metriche di Kobayashi su  $\Omega_1, \Omega_2$ , allora per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y);$$

inoltre, poiché  $f$  è propria esiste  $C_1 \geq 1$  tale che per ogni  $x \in \Omega_1$  abbiamo

$$\delta_1(x)/C_1 \leq \delta_2(f(x)) \leq C_1\delta_1(x),$$

dove  $\delta_j$  è la distanza dal bordo in  $\Omega_j$ .



## Corollario

*Siano  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$  domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una funzione olomorfa propria. Allora  $f$  si estende con continuità a  $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$  tale che  $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$  e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.*

Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette  $d_H^j$  le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste  $C_2 \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_H^2\left(\pi(f(x)), \pi(f(y))\right) \leq C_2\left(d_H^1(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\}\right).$$

## Corollario

*Siano  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$  domini limitati e strettamente pseudoconvessi, e sia  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una funzione olomorfa propria. Allora  $f$  si estende con continuità a  $\bar{f} : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$  tale che  $\bar{f}(\partial\Omega_1) \subseteq \partial\Omega_2$  e la restrizione al bordo è lipschitziana rispetto alle distanze di Carnot-Carathéodory sui bordi.*

Mettendo assieme queste due disuguaglianze e il Corollario, dette  $d_H^j$  le rispettive distanze di Carnot-Carathéodory, troviamo che esiste  $C_2 \geq 0$  tale che per ogni  $x, y \in \Omega_1$  si ha

$$d_H^2\left(\pi(f(x)), \pi(f(y))\right) \leq C_2\left(d_H^1(\pi(x), \pi(y)) + \max\{\delta_1^{1/2}(x), \delta_1^{1/2}(y)\}\right).$$

Utilizzando queste disuguaglianze, si dimostra la tesi. □

Grazie per l'attenzione!