Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini   Relatore: Prof. Marco Abate

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questo scritto è dimostrare un teorema del 1994, il teorema di Burns-Krantz (Theorem 2.1 di [BK]), attraverso risultati elementari. L'enunciato del teorema riguarda le funzioni olomorfe sul disco unitario con un certo andamento vicino al bordo: se la funzione dista dall'identità al più per un $o\big((z-\sigma)^3\big)$, allora è proprio l'identità.

La dimostrazione originale del teorema non è lunga, ma un po' tecnica. In un recente articolo di Bracci, Kraus e Roth ([BKR]) si trova una dimostrazione alternativa del teorema di Burns-Krantz. Come spiegato nel Remark 2.2 dell'articolo, è possibile passare dalle ipotesi del teorema di Burns-Krantz a quelle del Theorem 2.1 di [BKR] (come dimostrato nella Proposition 8.1 dello stesso articolo), dal quale poi è facile concludere. Il Theorem 2.1 è sostanzialmente una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Bracci, Kraus e Roth dimostrano il Theorem 2.1 usando risultati più generali visti nell'articolo, ma complicati. Tuttavia, nel Remark 5.6 danno una traccia per una dimostrazione più elementare. L'idea è sfruttare una disuguaglianza dovuta a Golusin e vengono indicati vari articoli in cui è stata ridimostrata.

In particolare, l'articolo di Beardon e Minda del 2004 ([BM]) contiene una serie di disuguaglianze di facile dimostrazione, delle quali il Corollary 3.7 ha a sua volta come corollario la disuguaglianza di Golusin. Queste disuguaglianze coinvolgono la distanza di Poincaré sul disco unitario e possono essere applicate per ottenere diversi altri risultati per funzioni olomorfe sul disco, come mostrato nell'articolo.

In questo scritto sviluppiamo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR]. Dimostreremo le disuguaglianze in [BM] e vedremo alcune applicazioni, concludendo con la disuguaglianza di Golusin. Grazie ad essa, e alla Proposition 8.1 di [BKR], otterremo una dimostrazione elementare del Theorem 2.1 di Burns-Krantz e di un risultato più generale dovuto a Bracci-Kraus-Roth.

1 Prerequisiti

1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in Ω se è derivabile in senso complesso per ogni $z \in \Omega$, e scriviamo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\mathrm{Im}(f) \subset \Omega'$ scriviamo $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega')$.

Definizione 1.1.2. Se $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$ è biettiva, allora si può dimostrare che anche f^{-1} è olomorfa. In tal caso f è detta *automorfismo* (in senso olomorfo) di Ω e scriviamo $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

Com'è noto, la condizione di olomorfia per funzioni a valori complessi è molto più forte della derivabilità in senso reale (in particolare, è equivalente all'analiticità). Fra i vari risultati noti per le funzioni olomorfe, ci interessa studiare il lemma di Schwarz-Pick, fino a dimostrarne una versione al bordo.

Notazione: indichiamo il disco unitario con $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Riportiamo ora alcuni risultati noti di analisi complessa che verranno usati nelle dimostrazioni.

Teorema 1.1.3. *(formula integrale di Cauchy, [NN, Chapter 1.3, Theorems 9 and 10]) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e D un disco chiuso di centro a contenuto in Ω. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta. \tag{1}$$

Proposizione 1.1.4. *(teorema di estensione di Riemann, [NN, Chapter 1.5, Theorem 2]) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ con $z_0 \in \Omega$. Allora f si estende a una $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se è limitata in un intorno di z_0. In tal caso, z_0 è detta* singolarità rimovibile.

Proposizione 1.1.5. *(principio del massimo per funzioni olomorfe, [NN, Chapter 1.3, Corollary of Theorem 3 and Theorem 5]) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sia inoltre U un aperto relativamente compatto in Ω, cioè $\overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ compatto. Allora per ogni $z \in U$ si ha*

$$|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial U} |f(w)|$$

e vale l'uguale per qualche $z \in U$ solo se f è costante sulla componente connessa di U contenente z.

Vediamo adesso i lemmi di Schwarz e Schwarz-Pick.

Lemma 1.1.6. *(lemma di Schwarz) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per $z_0 \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta} z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Poiché $f(0) = 0$, possiamo costruire $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ con $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ estendendola per continuità in 0 come $g(0) = f'(0)$. Fissiamo $0 < r < 1$. Per ogni $z \in \mathbb{D}$ tale che $|z| \leq r$, per il principio del massimo per funzioni olomorfe si ha

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Mandando r a 1 otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|g(z)| \leq 1$, da cui $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$.

Se vale una delle due ugaglianze, allora esiste $z_0 \in \mathbb{D}$ tale che $|g(z_0)| = 1$. Dunque, sempre per il principio del massimo g è costantemente uguale a un valore di modulo 1 in ogni disco di centro l'origine e raggio $|z_0| < r < 1$, quindi su $\mathbb{D}$. Perciò $g(z) = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$, da cui $f(z) = e^{i\theta} z$. $\square$

Corollario 1.1.7. *Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f(0) = 0$, allora $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Dimostrazione. Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ anche $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; inoltre $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)}$. Per il lemma di Schwarz, $|f'(0)| \leq 1$ e $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$; dunque $|f'(0)| = 1$, da cui la tesi sempre per il lemma di Schwarz. $\square$

Definizione 1.1.8. Diciamo che un gruppo G *agisce fedelmente* su uno spazio X se per ogni $g \in G$ è data una bigezione $\gamma_g : X \longrightarrow X$ tale che $\gamma_e = \mathrm{id}$ e $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$, inoltre $\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2}$ se e solo se $g_1 = g_2$.

Chiamiamo inoltre *gruppo di isotropia* di $x_0 \in X$ il sottogruppo di G dato da $G_{x_0} = \{g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0\}$.

Lemma 1.1.9. *Sia G un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio X e sia G_{x_0} il gruppo di isotropia di $x_0 \in X$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $g_x \in G$ tale che $\gamma_{g_x}(x) = x_0$ e sia $\Gamma = \{g_x \mid x \in X\}$. Allora G è generato da Γ e G_{x_0}, cioè ogni $g \in G$ è della forma $g = hg_x$ con $x \in X$ e $h \in G_{x_0}$.*

Dimostrazione. Sia $g \in G$ e $x = \gamma_{g^{-1}}(x_0)$. Allora $(\gamma_{g_x} \circ \gamma_{g^{-1}})(x_0) = x_0$ da cui $\gamma_{g_x} \circ \gamma_{g^{-1}} = \gamma_{g_x g^{-1}} = \gamma_h$ con $h \in G_{x_0}$, dunque $g_x g^{-1} = h$ e quindi $g = h^{-1} g_x$ con $h^{-1} \in G_{x_0}$. $\square$

Proposizione 1.1.10. *Si ha che $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ se e solo se esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - a}{1 - \bar{a} z}$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sia f come nell'enunciato. Con semplici conti possiamo vedere che per $z, w \in \mathbb{C}$ con $\bar{w} z \neq 1$ si ha

$$1 - \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right|^2 = \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{w} z|^2} \tag{2}$$

da cui segue che se $a, z \in \mathbb{D}$ allora

$$1 - |f(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} > 0,$$

per cui $|f(z)| < 1$, cioè $f(z) \in \mathbb{D}$. L'inversa è $f^{-1}(z) = e^{-i\theta}\dfrac{z + ae^{i\theta}}{z + \bar{a}e^{-i\theta}z}$, della stessa forma. Si noti che $f(a) = 0$.

($\Rightarrow$) Scriviamo per semplicità $f_{a,\theta} = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Vediamo $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ come gruppo che agisce su $\mathbb{D}$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})_0$ è, per il Corollario 1.1.7, $\{f_{0,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, mentre possiamo prendere $\Gamma = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D}\}$ poiché $f_{a,0}(a) = 0$. Per il Lemma 1.1.9, $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è generato da $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})_0$ e Γ, cioè ogni $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è della forma $\gamma = f_{0,\theta} \circ f_{a,0} = f_{a,\theta}$. $\square$

Osservazione 1.1.11. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su $\mathbb{D}$, cioè si ha che per ogni $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ esiste $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $\gamma(z_0) = z_1$. Infatti, basta prendere $\gamma = f_{z_1,0}^{-1} \circ f_{z_0,0}$.

Lemma 1.1.12. *(lemma di Schwarz-Pick) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha*

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| \le \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| \quad e \quad \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Dimostrazione. Fissato $w \in \mathbb{D}$ siano $\gamma_1(z) = \dfrac{z+w}{1+\bar{w}z}$ e $\gamma_2(z) = \dfrac{z - f(w)}{1-\overline{f(w)}z}$. Si ha $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Si ha anche che $\gamma_1(0) = w$ e $\gamma_2\big(f(w)\big) = 0$; inoltre $\gamma_1^{-1}(z) = \dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}$. Per il lemma di Schwarz applicato a $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$ abbiamo che per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$ si ha $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| \le |\zeta|$, da cui prendendo $\zeta = \gamma_1^{-1}(z)$ otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|(\gamma_2 \circ f)(z)| \le |\gamma_1^{-1}(z)|$, che è la prima disuguaglianza. Abbiamo poi $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \le 1$, da cui $|\gamma_2'\big(f(w)\big)f'(w)\gamma_1'(0)| \le 1$. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\gamma_1'(z) = \frac{1+\bar{w}z - \bar{w}(z+w)}{(1+\bar{w}z)^2} \Rightarrow \gamma_1'(0) = 1 - |w|^2,$$

$$\gamma_2'(z) = \frac{1-\overline{f(w)}z + \overline{f(w)}\big(z - f(w)\big)}{\big(1-\overline{f(w)}z\big)^2} \Rightarrow \gamma_2'\big(f(w)\big) = \frac{1}{1-|f(w)|^2}.$$

Sostituendo si ottiene la seconda disuguaglianza con w al posto di z.

Per l'uguaglianza, nel primo caso avremmo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| = |\zeta|$, mentre nel secondo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| = 1$. In entrambi i casi, per il lemma di Schwarz $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1 = g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, dunque $f = \gamma_2^{-1} \circ g \circ \gamma_1^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. $\square$

Definizione 1.1.13. Scriviamo $[z, w] := f_{w,0}(z)$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che la quantità $p(z, w)$ è contratta da $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Vediamo adesso una distanza costruita a partire da questa quantità, con la quale dimostreremo una serie di disuguaglianze che ci permetteranno di dimostrare la disuguaglianza di Golusin, dalla quale seguirà la versione al bordo del lemma.

Consideriamo $\omega(z, w) := \operatorname{arctanh}\big(p(z, w)\big) = \dfrac{1}{2} \log \left(\dfrac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right)$.

Proposizione 1.1.14. *La funzione* $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ *è ben definita ed è effettivamente una distanza.*

Dimostrazione. Notiamo che per $z, w \in \mathbb{D}$ l'equazione (2) ci dà immediatamente $p(z, w) < 1$, per cui ω è ben definita e resta solo da mostrare che è una distanza.

L'unica cosa non ovvia da dimostrare è la disuguaglianza triangolare. Applicando la tangente iperbolica a entrambi i membri della disuguaglianza triangolare per ω e sfruttando l'uguaglianza $\tanh{(a+b)} = \frac{\tanh{(a)} + \tanh{(b)}}{1 + \tanh{(a)} \tanh{(b)}}$ si ha

$$\begin{aligned} \tanh\big(\omega(z_1, z_2)\big) &\leq \tanh\big(\omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2)\big) \\ &= \frac{\tanh\big(\omega(z_1, z_0)\big) + \tanh\big(\omega(z_0, z_2)\big)}{1 + \tanh\big(\omega(z_1, z_0)\big)\tanh\big(\omega(z_0, z_2)\big)}; \end{aligned}$$

infine, dalla definizione di ω troviamo

$$p(z_1, z_2) \leq \frac{p(z_1, z_0) + p(z_0, z_2)}{1 + p(z_1, z_0)p(z_0, z_2)}. \tag{3}$$

Notiamo che per il lemma di Schwarz-Pick abbiamo che p è invariante sotto l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Grazie all'Osservazione 1.1.11, possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che $z_0 = 0$. Dato che $|1 - \bar{z}_2 z_1| \leq 1 + |z_1||z_2|$ e $1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2 > 0$, ricordando l'equazione (2), per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ si ha che

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|^2 &= \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \\ &\geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_1||z_2|)^2} = 1 - \left(\frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|} \right)^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|},$$

che è quello che otteniamo inserendo $z_0 = 0$ nella disuguaglianza (3) e usando che $p(0, z) = |z|$. $\square$

Definizione 1.1.15. La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *distanza di Poincaré (o iperbolica)* del disco.

Definizione 1.1.16. Data $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \longrightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1-|w|^2)}{1-|f(w)|^2},$$

mentre il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z,w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Notiamo che, poiché il limite di $f^*(z, w)$ per $z \longrightarrow w$ è ben definito per ogni w, per la Proposizione 1.1.4 abbiamo che la funzione $f^*(z, w)$ è olomorfa in $z \in \mathbb{D}$ per ogni $w \in \mathbb{D}$ fissato.

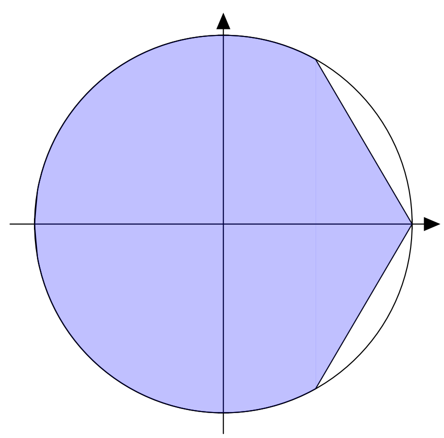
Osservazione 1.1.17.

(i) Le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick possono essere riscritte come $|f^*(z, w)| \leq 1$, con uguaglianza se e solo se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$;
(ii) un altro modo di scrivere le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick è $p\big(f(z), f(w)\big) \leq p(z, w)$, che è equivalente a $\omega\big(f(z), f(w)\big) \leq \omega(z, w)$ in quanto arctanh è strettamente crescente;
(iii) $p(z, 0) = |z|$, quindi $\omega(z, 0) = \omega(|z|, 0)$; analogamente, $\omega(0, z) = \omega(0, |z|)$;
(iv) per definizione, $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$.

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

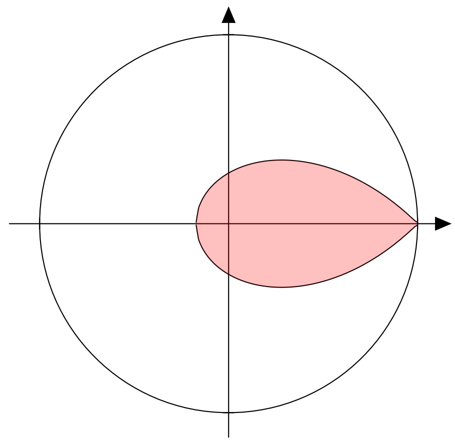
1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali

Definizione 1.2.1. Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *settore di vertice* σ *e angolo* 2α l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α.



In blu, il settore $S(1, 2\pi/3)$

Definizione 1.2.2. Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{z \in \mathbb{D} \mid \dfrac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M\right\}$.



In rosso, la regione di Stolz $K(1, 2)$

Proposizione 1.2.3. *Dato* $M > 1$*, sia* $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$*. Per ogni* $\alpha' < \alpha$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che, detto* $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$*, si ha*

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Dimostrazione. Per definizione, $S(\sigma, \alpha)$ corrisponde all'insieme $S(1, \alpha)$ ruotato moltiplicando per σ. Lo stesso vale per $K(\sigma, M)$: infatti, $\dfrac{|\sigma - z|}{1 - |z|} = \dfrac{|1 - \sigma^{-1}z|}{1 - |\sigma^{-1}z|}$. Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. È utile osservare che in questo caso $S(1, \alpha) = \big\{z \in \mathbb{D} \mid |\mathfrak{Im}(z)| < (\tan\alpha)\big(1 - \mathfrak{Re}(z)\big)\big\}$.

Mostriamo la seconda inclusione. Poiché $1 > |z| > \mathfrak{Re}(z)$, abbiamo

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \mathfrak{Re}(z)},$$

da cui

$$M^2 - 1 > \frac{|1 - z|^2}{\big(1 - \mathfrak{Re}(z)\big)^2} - 1 = \frac{1 - 2\mathfrak{Re}(z) + |z|^2}{\big(1 - \mathfrak{Re}(z)\big)^2} - 1 = \frac{|\mathfrak{Im}(z)|^2}{\big(1 - \mathfrak{Re}(z)\big)^2},$$

perciò

$$\frac{|\mathfrak{Im}(z)|}{1 - \mathfrak{Re}(z)} < \sqrt{M^2 - 1} = \tan\alpha.$$

Mostriamo adesso la prima inclusione. Fissiamo $\alpha' < \alpha$. Supponiamo per assurdo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$. Per tali z si ha allora $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} \geq M$, da cui

$$\frac{1-|z|}{|1-z|} \leq \frac{1}{M}; \tag{4}$$

inoltre, poiché $z \in S(1, \alpha')$ abbiamo

$$\frac{|\mathfrak{Im}(z)|}{1-\mathfrak{Re}(z)} < \tan \alpha'.$$

Elevando al quadrato, sommando 1 e sfruttando l'uguaglianza vista sopra otteniamo

$$\frac{|1-z|^2}{\big(1-\mathfrak{Re}(z)\big)^2} = \frac{|\mathfrak{Im}(z)|^2}{\big(1-\mathfrak{Re}(z)\big)^2} + 1 < \tan^2 \alpha' + 1,$$

che ci dà

$$\frac{|1-z|}{1-\mathfrak{Re}(z)} < \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} = M', \tag{5}$$

dove $\alpha' < \alpha$, quindi $\tan \alpha' < \tan \alpha$ e dunque $M' < M$. Moltiplicando tra loro le disuguaglianze (4) e (5) troviamo $\dfrac{1-|z|}{1-\mathfrak{Re}(z)} < \dfrac{M'}{M} < 1$. Se mostriamo che $\lim\limits_{\substack{z \longrightarrow 1, \\ z \in S(1,\alpha')}} \dfrac{1-|z|}{1-\mathfrak{Re}(z)} = 1$ avremo trovato una contraddizione. Scriviamo dunque $x = \mathfrak{Re}(z)$ e $y = \mathfrak{Im}(z)$, e supponiamo senza perdita di generalità $y > 0$, per cui la condizione $z \in S(1, \alpha')$ si scrive come $y/(1-x) < \tan \alpha'$. Inoltre vale che

$$\frac{1-|z|}{1-\mathfrak{Re}(z)} = \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1-x} = 1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{1-x}.$$

Notiamo che $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{1-x} > 0$, dunque per mostrare che tende a 0 ci basta osservare che

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{1-x} &< \tan \alpha' \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \\
&= \tan \alpha' \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\
&= \tan \alpha' \cdot \frac{y^2}{y(\sqrt{x^2+y^2}+x)} = \tan \alpha' \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}
\end{aligned}$$

Ho provato con due righe, ma viene tutto accrocchiato e non mi sembra comprensibilissimo. Posso provare a riformulare questi ultimi passaggi

e quest'ultima espressione tende a 0 per $x \longrightarrow 1$ e $y \longrightarrow 0$. □

Definizione 1.2.4. Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \longrightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$.

Date altre due funzioni $g, h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o\big(h(z)\big)$ per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\operatorname*{nt-lim}_{z \longrightarrow \sigma} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

La seguente proposizione asserisce che, per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente, un certo andamento di f può essere tradotto nell'andamento di $|f^h|$. È questo che ci permetterà di dimostrare il teorema 2.1 di [BK] passando per la versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Proposizione 1.2.5. *Siano* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *e* $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ *tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{6}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente. Allora*

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - \sigma)^2\big) \tag{7}$$

per $z \longrightarrow \sigma$ *non tangenzialmente.*

Dimostrazione. A meno di considerare $g(z) = \sigma^{-1} f(\sigma z)$, possiamo supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Infatti, è facile verificare che nell'ipotesi (6) si ha $g(z) = 1 + (z-1) + o\big((z-1)^3\big)$. Se inoltre avessimo $|g^h(z)| = 1 + o\big((z-1)^2\big)$, poiché vale

$$\begin{aligned} |g^h(z)| = |g'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |g(z)|^2} &= |f'(\sigma z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |\sigma^{-1} f(\sigma z)|^2} \\ &= |f'(\sigma z)| \frac{1 - |\sigma z|^2}{1 - |f(\sigma z)|^2} = |f^h(\sigma z)| \end{aligned}$$

e mediante la sostituzione $\zeta = \sigma z$ si ha

$$o\big((z-1)^2\big) = o\big(\sigma^{-2}(\zeta - \sigma)^2\big) = o\big((\zeta - \sigma)^2\big)$$

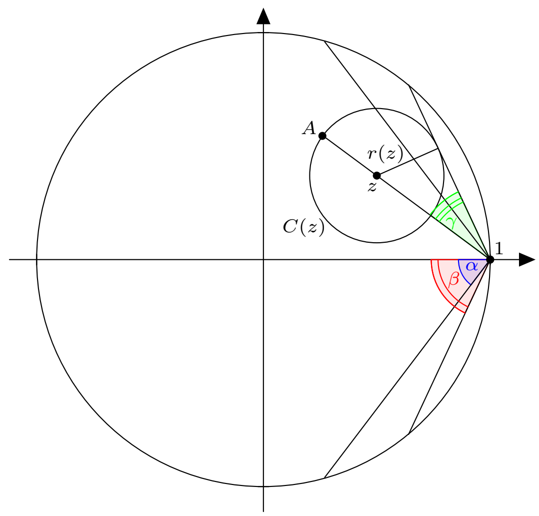
e ovviamente $|f^h(\sigma z)| = |f^h(\zeta)|$, troviamo l'equazione (7) con ζ al posto di z.

Sia $M > 1$ e consideriamo $z \in K(1, M)$. Allora per la Proposizione 1.2.3 si ha $z \in S(1, \alpha)$ dove $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1}$. Sia inoltre $\beta \in (0, \pi/2)$ con $\beta > \alpha$ e sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \mathrm{dist}\big(z, \partial S(1, \beta)\big)$, la distanza euclidea di z dal bordo di $S(1,\beta)$. Allora per la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione $f(z) - z$ si ha

$$f'(z) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w-z)^2} \, \mathrm{d}w,$$

che scriviamo come

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w-z)^2} \, \mathrm{d}w =: 1 + I(z).$$



Per la Proposizione 1.2.3 esiste $\delta > 0$ tale che, se $w \in S(1,\beta) \cap B(1,\delta)$, si ha $w \in K(1, M')$ con $M' > \sqrt{\tan^2 \beta + 1}$. Dato $\varepsilon > 0$ fissato e prendendo δ sufficientemente piccolo, per ipotesi abbiamo che $|f(w) - w| < \varepsilon |1-w|^3$ per ogni $w \in K(1,M') \cap B(1,\delta)$ e di conseguenza per ogni $w \in S(1,\beta) \cap B(1,\delta)$. Poiché $S(1,\beta) \subset \mathbb{D}$, dev'essere $r(z) \leq \operatorname{dist}(z, \mathbb{D}) = 1 - |z|$. Si ha anche $1 - |z| \leq |1 - z|$; quindi prendendo $z \in B(1, \delta/2)$ abbiamo $r(z) \leq |z-1| < \delta/2$. Dunque per ogni $w \in C(z)$ troviamo che $|w-1| \leq |w-z| + |z-1| = r(z) + |z-1| < \delta$. Per questi z vale che

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z + r(z)e^{i\theta}) - z|^2} r(z) \, \mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta \in [0,2\pi]} |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3 = \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1-w|^3. \end{aligned}$$

Il massimo è raggiunto per l'intersezione più lontana da 1 tra la circonferenza $C(z)$ e la retta passante per 1 e z (il punto A in figura). Perciò, detto γ l'angolo tra la retta congiungente 1 e z e il tratto affine di $\partial S(1,\beta)$ più vicino a z (che è effettivamente il tratto di bordo più vicino a z se lo si prende sufficientemente vicino a 1), si ha

$$\begin{aligned}|I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)}\big(r(z)+|z-1|\big)^3 = \varepsilon r(z)^2\left(1+\frac{|z-1|}{r(z)}\right)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2(1+\csc\gamma)^3 \leq \varepsilon r(z)^2\big(1+\csc(\beta-\alpha)\big)^3 \\ &\leq \varepsilon|z-1|^2\big(1+\csc(\beta-\alpha)\big)^3.\end{aligned}$$

La penultima disuguaglianza segue da $\gamma \geq \beta-\alpha$ e dal fatto che csc è decrescente sui positivi, mentre l'ultima segue da quanto visto sopra. Otteniamo dunque $f'(z) = 1 + o\big((z-1)^2\big)$ per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente.

Notiamo che all'interno della regione di Stolz $K(1, M)$ si ha $1 \leq \dfrac{|z-1|}{1-|z|} \leq M$, il che ci permette di usare indipendentemente $z-1$ o $1-|z|$ negli o-piccoli per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Per ipotesi

$$\frac{1-|f(z)|}{1-|z|} = \frac{1-|z|+o\big((z-1)^3\big)}{1-|z|} = 1+o\big((z-1)^2\big)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Possiamo quindi concludere che

$$|f^h(z)| = |f'(z)|\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} = 1+o\big((z-1)^2\big)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. □

2 Lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

2.1 Teorema di Beardon-Minda e corollari

Adesso possiamo procedere a dimostrare la serie di disuguaglianze di [BM], che coinvolgono la distanza di Poincaré ω e le funzioni olomorfe dal disco in sé che non sono automorfismi.

Proposizione 2.1.1. *Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ e $v \in \mathbb{D}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha che $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ e la funzione $z \longmapsto f^*(z, v)$ è olomorfa.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia, dalla definizione sappiamo che l'unico punto che potrebbe dar problemi è v; abbiamo però visto che la funzione ammette limite finito per $z \longrightarrow v$, perciò v è una singolarità rimovibile. Per il lemma di Schwarz-Pick, $|f^*(z, v)| \leq 1$; inoltre, vale l'uguaglianza in qualche punto solo se f è un automorfismo. Dunque le ipotesi su f assicurano che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. □

Teorema 2.1.2. *(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega\big(f^*(z, v), f^*(w, v)\big) \leq \omega(z, w). \tag{8}$$

Dimostrazione. Poiché f non è un automorfismo, per la Proposizione 2.1.1 la funzione $z \longmapsto f^*(z, v)$ è in $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; perciò il membro sinistro della disuguaglianza (8) è ben definito e la tesi segue dal lemma di Schwarz-Pick e dall'osservazione 1.1.17, punto (ii). □

Corollario 2.1.3. *Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega\big(0, f^*(z, v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(w, v)\big) + \omega(z, w). \tag{9}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\omega\big(0, f^*(z, v)\big) &\leq \omega\big(0, f^*(w, v)\big) + \omega\big(f^*(w, v), f^*(z, v)\big)\\ &\leq \omega\big(0, f^*(w, v)\big) + \omega(z, w),\end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per la distanza ω e la seconda segue dal Teorema 2.1.2. □

Corollario 2.1.4. *Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega\big(0, f^*(z, v)\big) \leq \omega\big(0, f^*(u, w)\big) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \tag{10}$$

sia qui che in generale dove uso uno di quei fattarelli, devo citare l'osservazione 1.1.17?

Dimostrazione. Applicando il Corollario 2.1.3 si ha

$$\begin{aligned}\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\le \omega\big(0, f^*(w,v)\big) + \omega(z,w) = \omega\big(0, |f^*(w,v)|\big) + \omega(z,w)\\ &= \omega\big(0, |f^*(v,w)|\big) + \omega(z,w) = \omega\big(0, f^*(v,w)\big) + \omega(z,w).\end{aligned}$$

Sempre per il Corollario 2.1.3 abbiamo

$$\le \omega\big(0, f^*(u,w)\big) + \omega(z,w) + \omega(v,u).$$

Concatenando le due disuguaglianze otteniamo la tesi. □

Il risultato seguente non ci servirà nel seguito, ma viene riportato per completezza. Prima di enunciarlo, è però necessario dare una definizione.

Definizione 2.1.5. Una *geodetica* per ω è una curva $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{D}$ tale che per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ si ha $\omega\big(\sigma(t_1), \sigma(t_2)\big) = |t_1 - t_2|$.

Corollario 2.1.6. *Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e siano $z, w \in \mathbb{D}$. Sia σ una geodetica con $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$ e sia $w = \sigma(t)$ con $t_1 < t < t_2$. Allora*

$$2\omega\big(f(z), f(v)\big) \le \log\Big(\cosh\big(2\omega(z,v)\big) + |f^h(w)| \sinh\big(2\omega(z,v)\big)\Big). \tag{11}$$

da rivedere

Dimostrazione. Osserviamo che se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora per il lemma di Schwarz-Pick $|f^h(w)| = 1$ e il membro destro della disuguaglianza (11) è esattamente $2\omega(z,v)$. In questo caso, per il lemma di Schwarz-Pick si ha l'uguaglianza.

Supponiamo ora $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, allora possiamo applicare il Corollario 2.1.4 con $u = v$ per ottenere

$$\begin{aligned}\omega\big(0, f^*(z,v)\big) &\le \omega\big(0, f^h(w)\big) + \omega(z,v)\\ p\big(0, f^*(z,v)\big) &\le \tanh\Big(\omega\big(0, f^h(w)\big) + \omega(z,v)\Big)\\ \frac{p\big(f(z), f(v)\big)}{p(z,v)} &\le \frac{|f^h(w)| + p(z,v)}{1 + |f^h(w)|p(z,v)},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $p = \tanh\omega$, $f^*(z,v) = \frac{[f(z),f(v)]}{[z,v]}$, $\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1+\tanh a \tanh b}$ e $p(0,\zeta) = |\zeta|$. Riscriviamo come

$$\begin{aligned}\frac{p\big(f(z), f(v)\big)}{p(z,v)} - p(z,v) &\le |f^h(w)|\Big(1 - p\big(f(z), f(v)\big)\Big)\\ \frac{p\big(f(z), f(v)\big) - p^2(z,v)}{p(z,v)\Big(1 - p\big(f(z), f(v)\big)\Big)} &\le |f^h(w)|\\ \frac{2\Big(p\big(f(z), f(v)\big) - p^2(z,v)\Big)}{\big(1 - p^2(z,v)\big)\Big(1 - p\big(f(z), f(v)\big)\Big)} &\le |f^h(w)| \cdot \frac{2p(z,v)}{1 - p^2(z,v)}.\end{aligned}$$

Adesso usiamo le seguenti uguaglianze:

$$\frac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega) \text{ e } \frac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega).$$

Sommando appunto la quantità $\dfrac{1+p^2(z,v)}{1-p^2(z,v)}$ all'ultima disuguaglianza ottenuta, il membro destro diventa $\cosh\big(2\omega(z,v)\big) + |f^h(w)|\sinh\big(2\omega(z,v)\big)$. Ci basta dunque mostrare che il membro sinistro è uguale a $\exp\Big(2\omega\big(f(z),f(v)\big)\Big)$, cioè $\dfrac{1+p\big(f(z),f(v)\big)}{1-p\big(f(z),f(v)\big)}$. Si ha infatti

da capire come vuole che le allinei

$$\begin{aligned}
&\frac{2\Big(p\big(f(z),f(v)\big)-p^2(z,v)\Big)}{\big(1-p^2(z,v)\big)\Big(1-p\big(f(z),f(v)\big)\Big)} + \frac{1+p^2(z,v)}{1-p^2(z,v)} \\
&\qquad = \frac{p\big(f(z),f(v)\big)-p^2(z,v)+1-p^2(z,v)p\big(f(z),f(v)\big)}{\big(1-p^2(z,v)\big)\Big(1-p\big(f(z),f(v)\big)\Big)} \\
&\qquad = \frac{\big(1-p^2(z,v)\big)\Big(1+p\big(f(z),f(v)\big)\Big)}{\big(1-p^2(z,v)\big)\Big(1-p\big(f(z),f(v)\big)\Big)} = \frac{1+p\big(f(z),f(v)\big)}{1-p\big(f(z),f(v)\big)}.
\end{aligned}$$

□

Corollario 2.1.7. *Sia* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *tale che* $f(0)=0$. *Allora*

$$\omega\big(f^h(0), f^h(z)\big) \le 2\omega(0,z). \tag{12}$$

Inoltre, 2 è la migliore costante possibile.

Dimostrazione. Notiamo che $f(0)=0$ e dunque $f^*(z,0) = f^*(0,z)$, quindi si ha

$$\begin{aligned}
\omega\big(f^h(0), f^h(z)\big) &= \omega\big(f^*(0,0), f^*(z,z)\big) \\
&\le \omega\big(f^*(0,0), f^*(z,0)\big) + \omega\big(f^*(0,z), f^*(z,z)\big) \le 2\omega(0,z)
\end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per ω e la seconda segue applicando il Teorema 2.1.2.

Per dire che 2 è la migliore costante possibile, basta prendere $f(z) = z^2$ e $z \in \mathbb{D}$ con $|z| = 1/3$ per ottenere l'uguaglianza. □

Il prossimo risultato è quello che ci permetterà di dimostrare la disuguaglianza di Golusin.

Corollario 2.1.8. *Sia* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. *Allora per ogni* $z, w \in \mathbb{D}$ *vale*

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) \le 2\omega(z,w). \tag{13}$$

Dimostrazione. Siano $z, w \in \mathbb{D}$; senza perdita di generalità possiamo supporre $|f^h(z)| \geq |f^h(w)|$. Allora dalla definizione di ω abbiamo

$$\begin{aligned}
\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(w)| - |f^h(z)|}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(w)|}{1 + |f^h(w)|}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|}\right)
\end{aligned}$$

Usando di nuovo la definizione di ω otteniamo dunque

$$\begin{aligned}
\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(w)|\big) &= \omega\big(0, |f^h(z)|\big) - \omega\big(0, |f^h(w)|\big) \\
&= \omega\big(0, f^h(z)\big) - \omega\big(0, f^h(w)\big) \leq 2\omega(z, w),
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal Corollario 2.1.4 prendendo $u = w$ e $v = z$. □

Concludiamo la sezione con il lemma di Dieudonné ([D] pagina 351), per il quale l'approccio dell'articolo di Beardon e Minda semplifica le dimostrazioni.

da vedere come impostare la citazione

Lemma 2.1.9. *(lemma di Dieudonné) Sia $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$ e sia $z_0 \in \mathbb{D}$ con $|f(z_0)| \leq |z_0|$. Allora*

$$|f'(z_0) - f(z_0)/z_0| \leq \frac{|z_0|^2 - |f(z_0)|^2}{|z_0|(1 - |z_0|^2)}. \tag{14}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.1.2 con $z = v = z_0$ e $w = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\omega\big(f^h(z_0), f^*(0, z_0)\big) \leq \omega(0, z_0) \\
\iff\ &p\big(f^h(z_0), f^*(0, z_0)\big) \leq p(0, z_0) = |z_0|,
\end{aligned}$$

dove l'equivalenza fra le due disuguaglianze segue dal fatto che arctanh è strettamente crescente. Per semplificare, scriviamo $f^h(z_0) = a$, $f^*(0, z_0) = b$ e $|z_0| = r$. Vogliamo portare la disuguaglianza in forma euclidea. Abbiamo

$$\left|\frac{a - b}{1 - \bar{b}a}\right| = p(a, b) \leq r,$$

che si riscrive come

trova un modo più leggibile di fare tutta 'sta roba

$$
\begin{aligned}
&(a-b)(\bar a-\bar b) \le r^2(1-\bar b a)(1-b\bar a)\\
&\qquad\qquad \iff |a|^2 - a\bar b - \bar a b + |b|^2 \le r^2 - r^2 a\bar b - r^2\bar a b + r^2|b|^2|a|^2\\
&\qquad\qquad \iff |a|^2(1-r^2|b|^2) - a\bar b(1-r^2) - \bar a b(1-r^2) \le r^2 - |b|^2\\
&\qquad\qquad \iff |a|^2 - a\cdot\frac{\bar b(1-r^2)}{1-r^2|b|^2} - \bar a\cdot\frac{b(1-r^2)}{1-r^2|b|^2} \le \frac{r^2-|b|^2}{1-r^2|b|^2};
\end{aligned}
$$

ponendo $\alpha = \dfrac{b(1-r^2)}{1-r^2|b|^2}$ e $R^2 = \dfrac{r^2-|b|^2}{1-r^2|b|^2} + |b|^2\left(\dfrac{1-r^2}{1-r^2|b|^2}\right)^2$ si ha

$$
\begin{aligned}
&|a|^2 - a\bar\alpha - \bar a\alpha \le R^2 - |\alpha|^2\\
&\qquad\qquad \iff (a-\alpha)(\bar a-\bar\alpha) \le R^2 \iff |a-\alpha| \le R,
\end{aligned}
$$

Ricordando che $r = |z_0|$ e osservando che $b = f^*(0,z_0) = \frac{[f(0),f(z_0)]}{[0,z_0]} = \frac{f(z_0)}{z_0}$, troviamo $\alpha = \dfrac{f(z_0)(1-|z_0|^2)}{z_0\big(1-|f(z_0)|^2\big)}$ e $R = \dfrac{|z_0|^2-|f(z_0)|^2}{|z_0|\big(1-|f(z_0)|^2\big)}$. Riprendendo infine la definizione di a, cioè $a = f^h(z_0) = \frac{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}{1-|f(z_0)|^2}$, otteniamo che

$$
\left|\frac{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}{1-|f(z_0)|^2} - \frac{f(z_0)(1-|z_0|^2)}{z_0\big(1-|f(z_0)|^2\big)}\right| \le \frac{|z_0|^2-|f(z_0)|^2}{|z_0|\big(1-|f(z_0)|^2\big)},
$$

che è equivalente alla tesi moltiplicando entrambi i membri per $\frac{1-|f(z_0)|^2}{1-|z_0|^2}$. $\square$

2.2 Applicazioni dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Vediamo ora alcune applicazioni dei risultati visti nella sezione precedente.

Teorema 2.2.1. *Dato $b \in [0,1)$, scriviamo $F_b(z) = \dfrac{z(z+b)}{1+bz}$. Consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ tale che $f(0)=0$. Se $|f'(0)|<1$, allora per ogni $z\in\mathbb{D}$ si ha*

$$
\left|\frac{f^h(0)-f^h(z)}{1-f^h(0)f^h(z)}\right| \le \frac{2|z|}{1+|z|^2} \tag{15}
$$

e

$$
F^h_{|f^h(0)|}(-|z|) \le |f^h(z)| \le F^h_{|f^h(0)|}(|z|). \tag{16}
$$

Dimostrazione. Poiché $|f'(0)|<1$, per il lemma di Schwarz si ha $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Inoltre $f(0)=0$, perciò possiamo applicare il Corollario 2.1.7; si ha dunque

$$
\omega\big(f^h(0), f^h(z)\big) \le 2\omega(0,z).
$$

Applicando la tangente iperbolica, sfruttando l'uguaglianza $\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$ e ricordando la definizione di ω si ha

$$
p\big(f^h(0), f^h(z)\big) \le \frac{2p(0,z)}{1+p^2(0,z)},
$$

da cui
$$\left|\frac{f^h(0)-f^h(z)}{1-f^h(0)f^h(z)}\right| \leq \frac{2|z|}{1+|z|^2}.$$

Per dimostrare la seconda disuguaglianza, supponiamo dapprima che si abbia $f^h(0) = b \in [0,1)$. Possiamo ripetere i passaggi svolti nella dimostrazione del lemma di Dieudonné ponendo $a = f^h(z)$ e $r = \frac{2|z|}{1+|z|^2}$. Otteniamo la disuguaglianza $|f^h(z) - \alpha| \leq R$, dove $\alpha = \dfrac{b(1-r^2)}{1-r^2b^2}$ e $R^2 = \dfrac{r^2-b^2}{1-r^2b^2} + b^2\left(\dfrac{1-r^2}{1-r^2b^2}\right)^2$. Sostituendo troviamo

$$\alpha = \frac{b(1-|z|^2)^2}{(1+2b|z|+|z|^2)(1-2b|z|+|z|^2)},$$

$$R = \frac{2|z|(|z|^2+1)(1-b^2)}{(1+2b|z|+|z|^2)(1-2b|z|+|z|^2)}.$$

Consideriamo adesso $F_b^h(z) = \dfrac{bz^2+2z+b}{|z|^2+2b\,\mathfrak{Re}z+1}\left(\dfrac{|1+bz|}{1+bz}\right)^2$. Si ha

$$F_b^h(|z|) = \frac{b|z|^2+2|z|+b}{|z|^2+2b|z|+1} \text{ e } F_b^h(-|z|) = \frac{b|z|^2-2|z|+b}{|z|^2-2b|z|+1}.$$

Notiamo che $\alpha = \big(F_b^h(|z|) + F_b^h(-|z|)\big)/2$ e $R = \big(F_b^h(|z|) - F_b^h(-|z|)\big)/2$, perciò la disuguaglianza $|f^h(z) - \alpha| \leq R$ ci dice che $f^h(z)$ appartiene al cerchio con diametro sull'asse reale passante per i punti $F_b^h(|z|)$ e $F_b^h(-|z|)$. Con semplici considerazioni geometriche otteniamo la seguente disuguaglianza:

$$F_b^h(-|z|) \leq \mathfrak{Re} f^h(z) \leq |f^h(z)| \leq F_b^h(|z|),$$

la quale, ricordando che $b = f^h(0)$, ci dà

$$F_{f^h(0)}^h(-|z|) \leq |f^h(z)| \leq F_{f^h(0)}^h(|z|).$$

Per passare al caso generale consideriamo la funzione $g(z) = |f^h(0)|f(z)/f'(0)$. Osserviamo che $f(0) = 0$ ci dice che $f'(0) = f^h(0)$, dunque $|g(z)| = |f(z)|$ e $|g'(z)| = |f'(z)|$, pertanto $|g^h(z)| = |f^h(z)|$; inoltre si ha anche $g(0) = 0$, da cui $g^h(0) = g'(0) = |f^h(0)|$. Perciò applicando l'ultima disuguaglianza trovata alla funzione g otteniamo proprio la seconda disuguaglianza della tesi. □

Corollario 2.2.2. *Sia $f \in Hol(\mathbb{D},\mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) \in [0,1)$. Allora $\mathfrak{Re} f'(z) > 0$ per $|z| < f^h(0)/\Big(1+\sqrt{1-\big(f^h(0)\big)^2}\Big)$.*

Dimostrazione. Per $0 \leq b < 1$ e $z \in \mathbb{D}$ si ha $|z|^2 - 2b|z| + 1 > |z|^2 - 2|z| + 1 > 0$, dunque abbiamo che il segno di $F_b^h(-|z|)$ coincide con quello di $b|z|^2 - 2|z| + b$. Quest'ultima quantità è minore di 0 per $|z| \in \big((1-\sqrt{1-b^2})/b, (1+\sqrt{1-b^2})/b\big)$, zero agli estremi e maggiore di 0 altrove. Prendendo $b = f'(0) = f^h(0)$, nella dimostrazione del Teorema 2.2.1 abbiamo visto che $\mathfrak{Re} f^h(z) \geq F^h_{f^h(0)}(-|z|)$; per gli z tali che $|z| < \left(1 - \sqrt{1 - \left(f^h(0)\right)^2}\right)/f^h(0) = f^h(0)/\left(1 + \sqrt{1 - \left(f^h(0)\right)^2}\right)$ si ha quindi $\mathfrak{Re} f^h(z) > 0$. Ricordando che $f^h(z) = \frac{f'(z)(1-|z|^2)}{1-|f(z)|^2}$ e $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, per tali z si ha anche $\mathfrak{Re} f'(z) > 0$. $\square$

Del prossimo enunciato, dimostrato indipendentemente da Pick nel 1916 e Nevanlinna nel 1919, vedremo nel dettaglio solo un paio di casi particolari.

Teorema 2.2.3. *(Pick-Nevanlinna, [JBG, Chapter 1, Theorem 2.2]) Siano dati n punti distinti $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ e altri n punti distinti (non necessariamente diversi dai primi) $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$. Per $k = 1, \dots, n$, sia A_k la matrice $k \times k$ data da $A_k(i,j) = \dfrac{1 - w_i \bar{w}_j}{1 - z_i \bar{z}_j}$. Allora esiste una funzione $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(z_i) = w_i$ per $j = 1, \dots, n$ se e solo se $\det A_k \geq 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$.*

Vediamo il caso $n = 2$.

Dimostrazione. La condizione è sempre verificata per $k = 1$, mentre per $k = 2$ si riscrive come

$$\frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2} \cdot \frac{1-|w_2|^2}{1-|z_2|^2} - \frac{1-w_1\bar{w}_2}{1-z_1\bar{z}_2} \cdot \frac{1-\bar{w}_1 w_2}{1-\bar{z}_1 z_2} \geq 0$$
$$\frac{(1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2)}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)} \geq \frac{|1-w_1\bar{w}_2|^2}{|1-z_1\bar{z}_2|^2}$$
$$\frac{|1-z_1\bar{z}_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)} \geq \frac{|1-w_1\bar{w}_2|^2}{(1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2)}$$
$$\frac{|1-z_1\bar{z}_2|^2}{1-|z_1|^2-|z_2|^2+|z_1|^2|z_2|^2} \geq \frac{|1-w_1\bar{w}_2|^2}{1-|w_1|^2-|w_2|^2+|w_1|^2|w_2|^2}$$
$$\frac{|1-z_1\bar{z}_2|^2}{|1-\bar{z}_2 z_1|^2-|z_1-z_2|^2} \geq \frac{|1-w_1\bar{w}_2|^2}{|1-\bar{w}_2 w_1|^2-|w_1-w_2|^2}$$
$$\frac{1}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_2 z_1}\right|^2} \geq \frac{1}{1-\left|\frac{w_1-w_2}{1-\bar{w}_2 w_1}\right|^2}$$
$$\frac{1}{1-p^2(w_1,w_2)} \leq \frac{1}{1-p^2(z_1,z_2)}$$
$$p(w_1,w_2) \leq p(z_1,z_2).$$

Ricordiamo adesso che p è invariante per azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; quindi, a meno di comporre a sinistra e a destra con opportuni automorfismi olomorfi di $\mathbb{D}$, possiamo supporre senza perdita di generalità $z_1 = w_1 = 0$. La condizione diventa dunque $p(0, w_2) \leq p(0, z_2)$, da cui $|w_2| \leq |z_2|$; perciò basta prendere la funzione $f(z) = w_2 z/z_2$. $\square$

Andiamo adesso a dimostrare il Teorema di Pick-Nevanlinna nel caso $n = 3$, con una formulazione differente.

Teorema 2.2.4. *Siano z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 due triple di punti distinti in $\mathbb{D}$. Allora esiste $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $f(z_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

(i) $\omega(w_i, w_j) < \omega(z_i, z_j)$ *per* $i, j = 1, 2, 3$ *e* $i \neq j$;

(ii) $\omega\left(\dfrac{[w_2, w_1]}{[z_2, z_1]}, \dfrac{[w_3, w_1]}{[z_3, z_1]}\right) \leq \omega(z_2, z_3)$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista siffatta f. Allora la condizione (i) segue dal lemma di Schwarz-Pick. La condizione (ii) invece si riscrive come $\omega\big(f^*(z_2, z_1), f^*(z_3, z_1)\big) \leq \omega(z_2, z_3)$, che è l'enunciato del Teorema 2.1.2.

Adesso dimostriamo l'altra freccia. Vediamola prima nel caso $z_1 = w_1 = 0$. Allora per la condizione (i) abbiamo $\omega(0, w_i) < \omega(0, z_i)$, quindi $|w_i/z_i| < 1$ per $i = 2, 3$. La condizione (ii) si riscrive invece come $\omega(w_2/z_2, w_3/z_3) \leq \omega(z_2, z_3)$, cioè $p(w_2/z_2, w_3/z_3) \leq p(z_2, z_3)$. Dunque, per il caso $n = 2$ del Teorema di Pick-Nevanlinna, esiste $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $g(z_2) = w_2/z_2$ e $g(z_3) = w_3/z_3$. Allora basta prendere $f(z) = zg(z)$.

Mostriamo che ci si può ridurre a questo caso. Consideriamo $h, g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ date da

$$g(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \text{ e } h(z) = \frac{z - w_1}{1 - \bar{w}_1 z}.$$

Allora esiste f come quella richiesta dal Teorema se e solo se esiste $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, con $F = h \circ f \circ g^{-1}$, tale che $F(0) = 0$, $F\big(g(z_2)\big) = h(w_2)$ e $F\big(g(z_3)\big) = h(w_3)$. Questo corrisponde proprio al caso precedente, quindi tale F esiste se e solo se

$$\omega\big(h(w_i), h(w_j)\big) \leq \omega\big(g(z_i), g(z_j)\big)$$

per $i, j = 1, 2, 3$ con $i \neq j$ e

$$\omega\left(\frac{h(w_2)}{g(z_2)}, \frac{h(w_3)}{g(z_3)}\right) \leq \omega\big(g(z_2), g(z_3)\big).$$

Poiché p, e di conseguenza ω, è invariante per azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, la prima disuguaglianza è equivalente alla condizione (i). Sempre per questo motivo, sostituendo $h(z) = [z, w_1]$ e $g(z) = [z, z_1]$ otteniamo che la seconda è equivalente alla condizione (ii). $\square$

Concludiamo la sezione con il risultato che, come già anticipato, ci permetterà di dimostrare i teoremi successivi. L'enunciato originale si trova in [GMG], ma vedremo una formulazione che ci tornerà più utile, in particolare perché coinvolge la funzione f^h.

Teorema 2.2.5. *(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \tag{17}$$

Dimostrazione. Con passaggi analoghi a quelli della dimostrazione del Corollario 2.1.8 abbiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\omega\big(|f^h(z)|, |f^h(0)|\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right)$$
$$\omega(z,0) = \omega(|z|,0) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (13) otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|}\cdot\frac{1-|f^h(0)|}{1+|f^h(0)|}\right) \leq \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$$
$$\frac{1+|f^h(z)|}{1-|f^h(z)|} \leq \frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2. \tag{18}$$

Adesso, dalla Proposizione 2.1.1 sappiamo che $f^h(z), f^h(0) \in \mathbb{D}$, in particolare $|f^h(z)|, |f^h(0)| < 1$, perciò è giustificato il seguente passaggio:

$$\begin{aligned}
|f^h(z)| &\leq \frac{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2 - 1}{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) - (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)}{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) + (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)} \\
&= \frac{2|f^h(0)| + 2|f^h(0)||z|^2 + 4|z|}{2+2|z|^2+4|f^h(0)||z|} = \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1+|f^h(0)|\frac{2|z|}{1+|z|^2}}.
\end{aligned}$$

$\square$

3 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

3.1 Rigidità al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare un risultato di rigidità al Bordo, seguendo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR].

Teorema 3.1.1. *(Bracci-Kraus-Roth, 2020) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che*

$$|f^h(z_n)| = 1 + o\big((|z_n| - 1)^2\big) \tag{19}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \longrightarrow 1$. Allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Possiamo applicare la disuguaglianza di Golusin 2.2.5 nella forma (18), che riscriviamo come

$$\frac{1 + |f^h(0)|}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)}\big(1 - |f^h(z_n)|\big) \geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}.$$

Per ipotesi vale (19), dunque

$$\begin{aligned} \frac{1 + |f^h(0)|}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)} o\big((|z_n| - 1)^2\big) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2} \\ \frac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)} o(1) &\geq 1. \end{aligned}$$

Se $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, per il lemma di Schwarz-Pick si ha necessariamente $|f^h(0)| < 1$, dunque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{\big(1 + |f^h(0)|\big)(1 + |z_n|)^2}{\big(1 - |f^h(0)|\big)\big(1 + |f^h(z_n)|\big)} = \dfrac{2\big(1 + |f^h(0)|\big)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty$ e otteniamo una contraddizione. □

Siamo ora pronti a dimostrare il Theorem 2.1 di [BK].

3.2 Teorema di Burns-Krantz

Teorema 3.2.1. *(Burns-Krantz, 1994) Siano $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che*

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o\big((z - \sigma)^3\big) \tag{20}$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Dimostrazione. Come già visto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.5, a meno di considerare $\sigma^{-1}f(\sigma z)$ possiamo supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione 1.2.5 segue anche che vale

$$|f^h(z)| = 1 + o\big((z - 1)^2\big)$$

per $z \longrightarrow 1$ non tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1.1 (usiamo di nuovo che, non tangenzialmente, $|z-1|$ e $1-|z|$ possono essere scambiati negli o-piccoli); dunque f è un automorfismo. Per la Proposizione 1.1.10 esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Poiché vale (20), dev'essere $f''(1) = 0$. Si ha $f''(z) = \dfrac{e^{i\theta}\bar{a}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}z)^3}$; siccome $e^{i\theta} \neq 0$ e $|a| < 1$, deve necessariamente essere $\bar{a} = 0$, perciò $f(z) = e^{i\theta}z$. Il fatto che $f(z) = z$ segue da $\lim_{z \longrightarrow 1} f(z) = 1$ sempre per (20). □

Esempio 3.2.2. Sia $f : \mathbb{C}\backslash\{\pm i\sqrt{3}\} \longrightarrow \mathbb{C}$ data da $f(z) = \dfrac{1+3z^2}{3+z^2}$. Verifichiamo che $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Se $z \in \mathbb{D}$ allora $|z| < 1$ da cui $1-|z|^4 > 0$. Dunque abbiamo $1-|z|^4 < 9(1-|z|^4)$ che riscriviamo come $1+9|z|^4 < 9+|z|^4$, perciò

$$\begin{aligned}(1+3z^2)(1+3\bar{z}^2) &= 1+3z^2+3\bar{z}^2+9|z|^4 \\ &< 9+3z^2+3\bar{z}^2+|z|^4 = (3+z^2)(3+\bar{z}^2),\end{aligned}$$

quindi

$$|f(z)|^2 = \frac{(1+3z^2)(1+3\bar{z}^2)}{(3+z^2)(3+\bar{z}^2)} < 1$$

e l'ultima disuguaglianza ci dice che $|f(z)| < 1$, cioè $f(z) \in \mathbb{D}$.

Ovviamente f non può essere iniettiva su $\mathbb{D}$ perché $f(z) = f(-z)$; dunque non è un automorfismo. Adesso mostriamo che $f(z) - 1 - (z-1)$ è $O\big((z-1)^3\big)$ ma non $o\big((z-1)^3\big)$ per $z \longrightarrow 1$:

$$\begin{aligned}g(z) := f(z) - z &= \frac{1+3z^2}{3+z^2} - z \\ &= \frac{1+3z^2-3z-z^3}{3+z^2} = \frac{(1-z)^3}{3+z^2}.\end{aligned}$$

Poiché $\lim_{z \longrightarrow 1} g(z)/(z-1)^3 = -1/4$ si ha che $g(z)$ è $O\big((z-1)^3\big)$ ma non $o\big((z-1)^3\big)$ per $z \longrightarrow 1$. Dunque il termine $o\big((z-1)^3\big)$ nel Teorema 3.2.1 non è migliorabile.

Riferimenti bibliografici

[BK] D. M. Burns, S. G. Krantz: Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary. *Journal of the American Mathematical Society*, **7** (1994), no. 3, 661–676

[BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth: A new Schwarz-Pick Lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps. Preprint, ArXiv:2003.02019v1 (2020)

[BM] A. F. Beardon, D. Minda: A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse Mathématique*, **92** (2004), 81–104

[D] J. Dieudonné: Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **48** (1931), 247–358

[GMG] G. M. Golusin: Some estimations of derivatives of bounded functions. *Recueil Mathématique [Matematicheskiĭ Sbornik]*, **16(58)** (1945), no. 3, 295–306

[JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007

[NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001

Ringraziamenti

Da scrivere.