

Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini Relatore: Prof. Marco Abate

Indice

Introduzione	3
1 Prerequisiti	4
1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré	4
1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali	8
2 Lemmi di Schwarz-Pick multi-punto	14
2.1 Teorema di Beardon-Minda e corollari	14
2.2 Applicazioni dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto	18
3 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz	23
3.1 Rigidità al bordo	23
3.2 Teorema di Burns-Krantz	23
Ringraziamenti	25

Introduzione

L'obiettivo di questo scritto è dimostrare un teorema del 1994, il teorema di Burns-Krantz (Theorem 2.1 di [BK]), attraverso risultati elementari. L'enunciato del teorema riguarda le funzioni olomorfe sul disco unitario con un certo andamento vicino al bordo: se la funzione dista dall'identità al più per un $o((z - \sigma)^3)$, allora è proprio l'identità.

La dimostrazione originale del teorema non è lunga, ma un po' tecnica. In un recente articolo di Bracci, Kraus e Roth ([BKR]) si trova una dimostrazione alternativa del teorema di Burns-Krantz. Come spiegato nel Remark 2.2 dell'articolo, è possibile passare dalle ipotesi del teorema di Burns-Krantz a quelle del Theorem 2.1 di [BKR] (come dimostrato nella Proposition 8.1 dello stesso articolo), dal quale poi è facile concludere. Il Theorem 2.1 è sostanzialmente una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Bracci, Kraus e Roth dimostrano il Theorem 2.1 usando risultati più generali visti nell'articolo, ma complicati. Tuttavia, nel Remark 5.6 danno una traccia per una dimostrazione più elementare. L'idea è sfruttare una disuguaglianza dovuta a Golusin e vengono indicati vari articoli in cui è stata ridimostrata.

In particolare, l'articolo di Beardon e Minda del 2004 ([BM]) contiene una serie di disuguaglianze di facile dimostrazione, delle quali il Corollary 3.7 ha a sua volta come corollario la disuguaglianza di Golusin. Queste disuguaglianze coinvolgono la distanza di Poincaré sul disco unitario e possono essere applicate per ottenere diversi altri risultati per funzioni olomorfe sul disco, come mostrato nell'articolo.

In questo scritto sviluppiamo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR]. Dimostreremo le disuguaglianze in [BM] e vedremo alcune applicazioni, concludendo con la disuguaglianza di Golusin. Grazie ad essa, e alla Proposition 8.1 di [BKR], otterremo una dimostrazione elementare del Theorem 2.1 di Burns-Krantz e di un risultato più generale dovuto a Bracci-Kraus-Roth.

1 Prerequisiti

1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in Ω se è derivabile in senso complesso per ogni $z \in \Omega$, e scriviamo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\text{Im}(f) \subset \Omega'$ scriviamo $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega')$.

Definizione 1.1.2. Se $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ è biettiva, allora si può dimostrare che anche f^{-1} è olomorfa. In tal caso f è detta *automorfismo* (in senso olomorfo) di Ω e scriviamo $f \in \text{Aut}(\Omega)$.

Com'è noto, la condizione di olomorfia per funzioni a valori complessi è molto più forte della derivabilità in senso reale (in particolare, è equivalente all'analiticità). Fra i vari risultati noti per le funzioni olomorfe, ci interessa studiare il lemma di Schwarz-Pick, fino a dimostrarne una versione al bordo.

Notazione: indichiamo il disco unitario con $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Riportiamo ora alcuni risultati noti di analisi complessa che verranno usati nelle dimostrazioni.

Teorema 1.1.3. (*formula integrale di Cauchy, [NN, Chapter 1.3, Theorems 9 and 10]*) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e D un disco chiuso di centro a contenuto in Ω . Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (1)$$

Proposizione 1.1.4. (*teorema di estensione di Riemann, [NN, Chapter 1.5, Theorem 2]*) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ con $z_0 \in \Omega$. Allora f si estende a una $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se è limitata in un intorno di z_0 . In tal caso, z_0 è detta *singolarità rimovibile*.

Proposizione 1.1.5. (*principio del massimo per funzioni olomorfe, [NN, Chapter 1.3, Corollary of Theorem 3 and Theorem 5]*) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sia inoltre U un aperto relativamente compatto in Ω , cioè $\overline{U} \subset \Omega$ e \overline{U} compatto. Allora per ogni $z \in U$ si ha

$$|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial U} |f(w)|$$

e vale l'uguale per qualche $z \in U$ solo se f è costante sulla componente connessa di U contenente z .

Vediamo adesso i lemmi di Schwarz e Schwarz-Pick.

Lemma 1.1.6. (*lemma di Schwarz*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per $z_0 \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta} z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poiché $f(0) = 0$, possiamo costruire $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ con $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ estendendola per continuità in 0 come $g(0) = f'(0)$. Fissiamo $0 < r < 1$. Per ogni $z \in \mathbb{D}$ tale che $|z| \leq r$, per il principio del massimo per funzioni olomorfe si ha

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Mandando r a 1 otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|g(z)| \leq 1$, da cui $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$.

Se vale una delle due ugaglianze, allora esiste $z_0 \in \mathbb{D}$ tale che $|g(z_0)| = 1$. Dunque, sempre per il principio del massimo g è costantemente uguale a un valore di modulo 1 in ogni disco di centro l'origine e raggio $|z_0| < r < 1$, quindi su \mathbb{D} . Perciò $g(z) = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ da cui $f(z) = e^{i\theta}z$. \square

Corollario 1.1.7. *Se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f(0) = 0$, allora $f(z) = e^{i\theta}z$.*

Dimostrazione. Se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ anche $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$; inoltre $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$. Per il lemma di Schwarz, $|f'(0)| \leq 1$ e $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$, dunque $|f'(0)| = 1$, da cui la tesi sempre per il lemma di Schwarz. \square

Definizione 1.1.8. Diciamo che un gruppo G *agisce fedelmente* su uno spazio X se per ogni $g \in G$ è data una bigezione $\gamma_g : X \rightarrow X$ tale che $\gamma_e = \text{id}$ e $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$, inoltre $\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2}$ se e solo se $g_1 = g_2$.

Chiamiamo inoltre *gruppo di isotropia* di $x_0 \in X$ il sottogruppo di G dato da $G_{x_0} = \{g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0\}$.

Lemma 1.1.9. *Sia G un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio X e sia G_{x_0} il gruppo di isotropia di $x_0 \in X$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $g_x \in G$ tale che $\gamma_{g_x}(x) = x_0$ e sia $\Gamma = \{g_x \mid x \in X\}$. Allora G è generato da Γ e G_{x_0} , cioè ogni $g \in G$ è della forma $g = h g_x$ con $x \in X$ e $h \in G_{x_0}$.*

Dimostrazione. Sia $g \in G$ e $x = \gamma_g(x_0)$. Allora $(\gamma_{g_x} \circ \gamma_g)(x_0) = x_0$ da cui $\gamma_{g_x} \circ \gamma_g = \gamma_{g_x g} = \gamma_h$ con $h \in G_{x_0}$, dunque $g_x g = h$ e quindi $g = g_x^{-1} h$. \square

Proposizione 1.1.10. *Si ha che $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ se e solo se esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$.*

Dimostrazione. (\Leftarrow) Sia f come nell'enunciato. Con semplici conti possiamo vedere che per $z, w \in \mathbb{C}$ con $\bar{w}z \neq 1$ si ha

$$1 - \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|^2 = \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{w}z|^2} \quad (2)$$

A priori così non basta, se il gruppo non è abeliano. Le frecce tra parentesi vanno bene?

da cui segue che se $a, z \in \mathbb{D}$ allora

$$1 - |f(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} > 0,$$

per cui $|f(z)| < 1$, cioè $f(z) \in \mathbb{D}$. L'inversa è $f^{-1}(z) = e^{-i\theta} \frac{z + ae^{i\theta}}{z + \bar{a}e^{-i\theta}}$, della stessa forma. Si noti che $f(a) = 0$.

(\Rightarrow) Scriviamo per semplicità $f_{a,\theta} = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$. Vediamo $\text{Aut}(\mathbb{D})$ come gruppo che agisce su \mathbb{D} . $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$ è, per il Corollario 1.1.7, $\{f_{0,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, mentre possiamo prendere $\Gamma = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D}\}$ poiché $f_{a,0}(a) = 0$. Per il Lemma 1.1.9, $\text{Aut}(\mathbb{D})$ è generato da $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$ e Γ , cioè ogni $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ è della forma $\gamma = f_{0,\theta} \circ f_{a,0} = f_{a,\theta}$. \square

Osservazione 1.1.11. $\text{Aut}(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su \mathbb{D} , cioè si ha che per ogni $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ esiste $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $\gamma(z_0) = z_1$. Infatti, basta prendere $\gamma = f_{z_1,0}^{-1} \circ f_{z_0,0}$.

Lemma 1.1.12. (*lemma di Schwarz-Pick*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Dimostrazione. Fissato $w \in \mathbb{D}$ siano $\gamma_1(z) = \frac{z + w}{1 + \bar{w}z}$ e $\gamma_2(z) = \frac{z - f(w)}{1 - \overline{f(w)}z}$. Si ha $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Si ha anche che $\gamma_1(0) = w$ e $\gamma_2(f(w)) = 0$; inoltre $\gamma_1^{-1}(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$. Per il lemma di Schwarz applicato a $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$ abbiamo che per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$ si ha $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| \leq |\zeta|$, da cui prendendo $\zeta = \gamma_1^{-1}(z)$ otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|(\gamma_2 \circ f)(z)| \leq |\gamma_1^{-1}(z)|$, che è la prima disuguaglianza. Abbiamo poi $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \leq 1$, da cui $|\gamma_2'(f(w))f'(w)\gamma_1'(0)| \leq 1$. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \gamma_1'(z) &= \frac{1 + \bar{w}z - \bar{w}(z + w)}{(1 + \bar{w}z)^2} \Rightarrow \gamma_1'(0) = 1 - |w|^2, \\ \gamma_2'(z) &= \frac{1 - \overline{f(w)}z + \overline{f(w)}(z - f(w))}{(1 - \overline{f(w)}z)^2} \Rightarrow \gamma_2'(f(w)) = \frac{1}{1 - |f(w)|^2}. \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene la seconda disuguaglianza con w al posto di z .

Per l'uguaglianza, nel primo caso avremmo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| = |\zeta|$, mentre nel secondo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| = 1$. In entrambi i casi, per il lemma di Schwarz $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1 = g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ da cui $f = \gamma_2^{-1} \circ g \circ \gamma_1^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. \square

Definizione 1.1.13. Scriviamo $[z, w] := f_{w,0}(z)$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che la quantità $p(z, w)$ è contratta da $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Vediamo adesso una distanza costruita a partire da questa quantità, con la quale dimostreremo una serie di disuguaglianze che ci permetteranno di dimostrare la disuguaglianza di Golusin, dalla quale seguirà la versione al bordo del lemma.

$$\text{Consideriamo } \omega(z, w) := \text{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Proposizione 1.1.14. La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow [0, +\infty)$ è ben definita ed è effettivamente una distanza.

Dimostrazione. Notiamo che per $z, w \in \mathbb{D}$ l'equazione (2) ci dà immediatamente $p(z, w) < 1$, per cui ω è ben definita e resta solo da mostrare che è una distanza.

L'unica cosa non ovvia da dimostrare è la disuguaglianza triangolare. Dati $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, possiamo utilizzare il fatto che \tanh è strettamente crescente e l'uguaglianza $\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$ per scrivere la disuguaglianza triangolare per ω in una forma equivalente. Abbiamo

$$\omega(z_1, z_2) \leq \omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2);$$

applicando la tangente iperbolica a entrambi i membri e sfruttando l'uguaglianza sopracitata si ha

$$\begin{aligned} \tanh(\omega(z_1, z_2)) &\leq \tanh(\omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2)) \\ &= \frac{\tanh(\omega(z_1, z_0)) + \tanh(\omega(z_0, z_2))}{1 + \tanh(\omega(z_1, z_0))\tanh(\omega(z_0, z_2))}; \end{aligned}$$

infine, dalla definizione di ω troviamo

$$p(z_1, z_2) \leq \frac{p(z_1, z_0) + p(z_0, z_2)}{1 + p(z_1, z_0)p(z_0, z_2)}. \quad (3)$$

Osserviamo che il lemma di Schwarz-Pick implica che p è invariante sotto l'azione di $\text{Aut}(\mathbb{D})$. Grazie all'osservazione 1.1.11, possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che $z_0 = 0$. Dato che $|1 - \bar{z}_2 z_1| \leq 1 + |z_1||z_2|$ e $1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2 > 0$, ricordando l'equazione (2), per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ abbiamo che

osservazione
maiuscolo o
minuscolo?

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|^2 &= \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \\ &\geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_1||z_2|)^2} = 1 - \left(\frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|} \right)^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|},$$

che è quello che otteniamo inserendo $z_0 = 0$ nella disuguaglianza (3) e usando che $p(0, z) = |z|$. \square

Definizione 1.1.15. La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *distanza di Poincaré (o iperbolica)* del disco.

Definizione 1.1.16. Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2},$$

mentre il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w \end{cases}$$

Notiamo che, poiché il limite di $f^*(z, w)$ per $z \rightarrow w$ è ben definito per ogni w , per la Proposizione 1.1.4 abbiamo che la funzione $f^*(z, w)$ è olomorfa in $z \in \mathbb{D}$ per ogni $w \in \mathbb{D}$ fissato.

Osservazione 1.1.17.

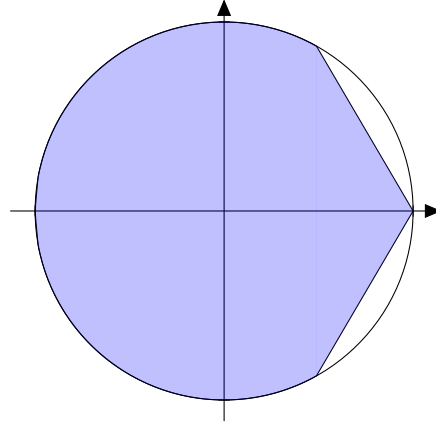
- (i) Le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick possono essere riscritte come $|f^*(z, w)| \leq 1$, con uguaglianza se e solo se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$;
- (ii) un altro modo di scrivere le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick è $p(f(z), f(w)) \leq p(z, w)$, che è equivalente a $\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w)$ in quanto arctanh è strettamente crescente;
- (iii) $p(z, 0) = |z| \Rightarrow \omega(z, 0) = \omega(|z|, 0)$ e analogamente $\omega(0, z) = \omega(0, |z|)$;
- (iv) per definizione, $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$.

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali

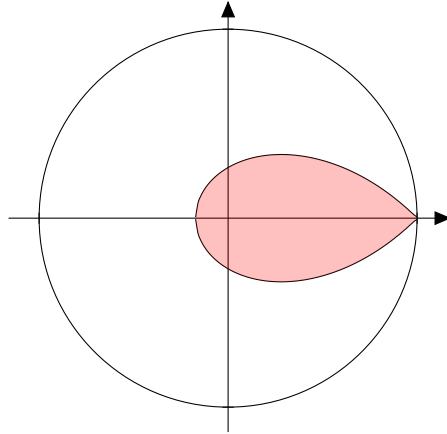
Definizione 1.2.1. Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *setto di vertice σ e angolo 2α* l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α .

si usa "modulo minore di" con gli angoli? Non sapevo



In blu, il settore $S(1, 2\pi/3)$

Definizione 1.2.2. Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.



In rosso, la regione di Stolz $K(1, 2)$

Proposizione 1.2.3. Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Dimostrazione. Per definizione, $S(\sigma, \alpha)$ corrisponde all'insieme $S(1, \alpha)$ ruotato moltiplicando per σ . Lo stesso vale per $K(\sigma, M)$: infatti, $\frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} = \frac{|1 - \sigma^{-1}z|}{1 - |\sigma^{-1}z|}$.

Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. È utile osservare che in questo caso $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < \tan(\alpha)(1 - \Re(z))\}$.

Mostriamo la seconda inclusione. Poiché $1 > |z| > \Re(z)$, abbiamo

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)},$$

da cui

$$M^2 - 1 > \frac{|1 - z|^2}{(1 - \Re(z))^2} - 1 = \frac{1 - 2\Re(z) + |z|^2}{(1 - \Re(z))^2} - 1 = \frac{|\Im(z)|^2}{(1 - \Re(z))^2},$$

perciò

$$\frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{M^2 - 1} = \tan \alpha.$$

Mostriamo adesso la prima inclusione. Fissiamo $\alpha' < \alpha$. Supponiamo per assurdo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$.

Per tali z si ha allora $\frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq M \Rightarrow \frac{1 - |z|}{|1 - z|} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{M}$ e

$$\begin{aligned} \frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} &< \tan \alpha' \\ \frac{|\Im(z)|^2}{(1 - \Re(z))^2} + 1 &< \tan^2 \alpha' + 1 \\ \frac{1 - 2\Re(z) + |z|^2}{(1 - \Re(z))^2} &< \tan^2 \alpha' + 1 \\ \frac{|1 - z|^2}{(1 - \Re(z))^2} &< \tan^2 \alpha' + 1 \\ \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)} &< \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} = M' \quad (**) \end{aligned}$$

dove $\alpha' < \alpha \Rightarrow \tan \alpha' < \tan \alpha \Rightarrow M' < M$. Moltiplicando tra loro le disuguaglianze $(*)$ e $(**)$ troviamo $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$. Se mostriamo

che $\lim_{\substack{z \rightarrow 1, \\ z \in S(1, \alpha')}} \frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} = 1$ avremo trovato una contraddizione. Scrivendo

$x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$ e supponendo senza perdita di generalità $y > 0$, la condizione $z \in S(1, \alpha')$ si scrive come $y/(1 - x) < \tan \alpha'$. Inoltre vale che

$$\begin{aligned} \frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} &= \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 - x} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x}. \end{aligned}$$

così o proprio tutto tanalpha tra parentesi?

Notiamo che $\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x} > 0$, dunque per mostrare che tende a 0 ci basta osservare che

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x} &< \tan \alpha' \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \\ &= \tan \alpha' \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \\ &= \tan \alpha' \cdot \frac{y^2}{y(\sqrt{x^2 + y^2} + x)} \\ &= \tan \alpha' \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \end{aligned}$$

e quest'ultima espressione tende a 0 per $x \rightarrow 1$ e $y \rightarrow 0$. \square

Definizione 1.2.4. Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\text{nt-lim}_{z \rightarrow \sigma} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$.

Date altre due funzioni $g, h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o(h(z))$ per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\text{nt-lim}_{z \rightarrow \sigma} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

La seguente proposizione asserisce che, per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente, un certo andamento di f può essere tradotto nell'andamento di $|f^h|$. È questo che ci permetterà di dimostrare il teorema 2.1 di [BK] passando per la versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Proposizione 1.2.5. Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (4)$$

per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente*. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2) \quad (5)$$

per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente*.

Dimostrazione. A meno di considerare $g(z) = \sigma^{-1}f(\sigma z)$, possiamo supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Infatti, è facile verificare che nell'ipotesi (4)

si ha $g(z) = 1 + (z-1) + o((z-1)^3)$. Se inoltre avessimo $|g^h(z)| = 1 + o((z-1)^2)$, poich  vale

$$\begin{aligned} |g^h(z)| &= |g'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |g(z)|^2} \\ &= |f'(\sigma z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |\sigma^{-1}f(\sigma z)|^2} \\ &= |f'(\sigma z)| \frac{1 - |\sigma z|^2}{1 - |f(\sigma z)|^2} \\ &= |f^h(\sigma z)| \end{aligned}$$

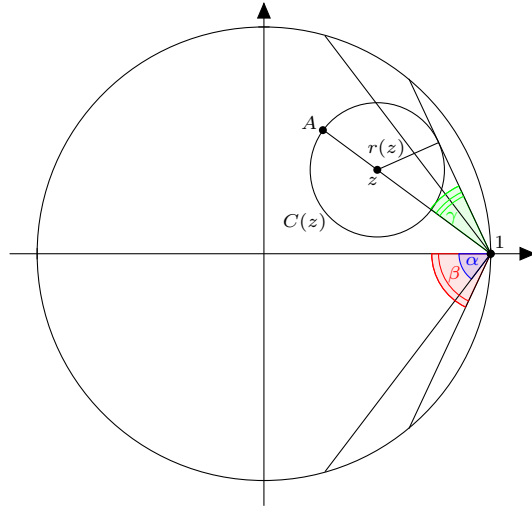
e mediante la sostituzione $\zeta = \sigma z$ si ha

$$o((z-1)^2) = o(\sigma^{-2}(\zeta - \sigma)^2) = o((\zeta - \sigma)^2)$$

e ovviamente $|f^h(\sigma z)| = |f^h(\zeta)|$, troviamo l'equazione (5) con ζ al posto di z .

Sia $M > 1$ e consideriamo $z \in K(1, M)$. Allora per la Proposizione 1.2.3 si ha $z \in S(1, \alpha)$ dove $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1}$. Sia inoltre $\beta \in (0, \pi/2)$ con $\beta > \alpha$ e sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \text{dist}(z, \partial S(1, \beta))$, la distanza euclidea di z dal bordo di $S(1, \beta)$. Allora per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{w-1 + (f(w)-w)}{(w-z)^2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{1}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{z-1 + f(w)-w}{(w-z)^2} dw \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w)-w}{(w-z)^2} dw =: 1 + I(z). \end{aligned}$$



Per la Proposizione 1.2.3 esiste $\delta > 0$ tale che, se $w \in S(1, \beta) \cap B(1, \delta)$, si ha $w \in K(1, M')$ con $M' > \sqrt{\tan^2 \beta + 1}$. Dato $\varepsilon > 0$ fissato e prendendo δ sufficientemente piccolo, per ipotesi abbiamo che $|f(w) - w| < \varepsilon|1 - w|^3$ per ogni $w \in K(1, M') \cap B(1, \delta)$ e di conseguenza per ogni $w \in S(1, \beta) \cap B(1, \delta)$. Poiché $S(1, \beta) \subset \mathbb{D}$, dev'essere $r(z) \leq \text{dist}(z, \mathbb{D}) = 1 - |z|$. Si ha anche $1 - |z| \leq |1 - z|$, quindi prendendo $z \in B(1, \delta/2)$ abbiamo $r(z) \leq |z - 1| < \delta/2$. Dunque per ogni $w \in C(z)$ troviamo che $|w - 1| \leq |w - z| + |z - 1| = r(z) + |z - 1| < \delta$. Per questi z vale che

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z + r(z)e^{i\theta}) - z|^2} r(z) d\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3 \\ &= \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3. \end{aligned}$$

Il massimo è raggiunto per l'intersezione più lontana da 1 tra la circonferenza $C(z)$ e la retta passante per 1 e z (il punto A in figura). Perciò, detto γ l'angolo tra la retta congiungente 1 e z e il tratto affine di $\partial S(1, \beta)$ più vicino a z (che è effettivamente il tratto di bordo più vicino a z se lo si prende sufficientemente vicino a 1), si ha

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} (r(z) + |z - 1|)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2 \left(1 + \frac{|z - 1|}{r(z)}\right)^3 \\ &= \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc \gamma)^3 \\ &\leq \varepsilon r(z)^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3 \\ &\leq \varepsilon |z - 1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3. \end{aligned}$$

La penultima disuguaglianza segue da $\gamma \geq \beta - \alpha$ e dal fatto che \csc è decrescente sui positivi, mentre l'ultima segue da quanto visto sopra. Otteniamo dunque $f'(z) = 1 + o((z - 1)^2)$ per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente.

Notiamo che all'interno della regione di Stolz $K(1, M)$ si ha $1 \leq \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \leq M$, il che ci permette di usare indipendentemente $z - 1$ o $1 - |z|$ negli o -piccoli per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Per ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z - 1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Possiamo quindi concludere che

$$|f^h(z)| = |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. □

2 Lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

2.1 Teorema di Beardon-Minda e corollari

Adesso possiamo procedere a dimostrare la serie di disuguaglianze di [BM], che coinvolgono la distanza di Poincaré ω e le funzioni olomorfe dal disco in sé che non sono automorfismi.

Proposizione 2.1.1. *Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ e $v \in \mathbb{D}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha che $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ e la funzione $z \mapsto f^*(z, v)$ è olomorfa.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia, dalla definizione sappiamo che l'unico punto che potrebbe dar problemi è v ; abbiamo però visto che la funzione ammette limite finito per $z \rightarrow v$, perciò v è una singolarità rimovibile. Per il lemma di Schwarz-Pick, $|f^*(z, v)| \leq 1$; inoltre, vale l'uguaglianza in qualche punto solo se f è un automorfismo. Dunque le ipotesi su f assicurano che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. \square

Teorema 2.1.2. (*Beardon-Minda, 2004*) *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (6)$$

Dimostrazione. Poiché f non è un automorfismo, per la Proposizione 2.1.1 la funzione $z \mapsto f^*(z, v)$ è in $\text{Aut}(\mathbb{D})$; perciò il membro sinistro della disuguaglianza (6) è ben definito e la tesi segue dal lemma di Schwarz-Pick e dall'osservazione 1.1.17, punto (ii). \square

Corollario 2.1.3. *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w). \quad (7)$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w), \end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per la distanza ω e la seconda segue dal Teorema 2.1.2. \square

Corollario 2.1.4. *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (8)$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
\omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w) \\
&= \omega(0, |f^*(w, v)|) + \omega(z, w) \\
&= \omega(0, |f^*(v, w)|) + \omega(z, w) \\
&= \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(z, w) \\
&\leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u),
\end{aligned}$$

dove le due disuguaglianze seguono dal Corollario 2.1.3. \square

Il risultato seguente non ci servirà nel seguito, ma viene riportato per completezza. Prima di enunciarlo, è però necessario dare una definizione.

Definizione 2.1.5. Una *geodetica* per ω è una curva $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{D}$ tale che per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ si ha $\omega(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$.

Corollario 2.1.6. Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e siano $z, w \in \mathbb{D}$. Sia σ una geodetica con $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$ e sia $w = \sigma(t)$ con $t_1 < t < t_2$. Allora

$$2\omega(f(z), f(v)) \leq \log \left(\cosh(2\omega(z, v)) + |f^h(w)| \sinh(2\omega(z, v)) \right). \quad (9)$$

Dimostrazione. Osserviamo che se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora per il lemma di Schwarz-Pick $|f^h(w)| = 1$ e il membro destro della disuguaglianza (9) è esattamente $2\omega(z, v)$. In questo caso, per il lemma di Schwarz-Pick si ha l'uguaglianza.

Supponiamo ora $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, allora possiamo applicare il Corollario 2.1.4 con $u = v$ per ottenere

$$\begin{aligned}
\omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^h(w)) + \omega(z, v) \\
p(0, f^*(z, v)) &\leq \tanh(\omega(0, f^h(w)) + \omega(z, v)) \\
\frac{p(f(z), f(v))}{p(z, v)} &\leq \frac{|f^h(w)| + p(z, v)}{1 + |f^h(w)|p(z, v)},
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $p = \tanh \omega$, $f^*(z, v) = \frac{[f(z), f(v)]}{[z, v]}$, $\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$ e $p(0, \zeta) = |\zeta|$. Riscriviamo come

$$\begin{aligned}
\frac{p(f(z), f(v))}{p(z, v)} - p(z, v) &\leq |f^h(w)| \left(1 - p(f(z), f(v)) \right) \\
\frac{p(f(z), f(v)) - p^2(z, v)}{p(z, v) \left(1 - p(f(z), f(v)) \right)} &\leq |f^h(w)| \\
\frac{2 \left(p(f(z), f(v)) - p^2(z, v) \right)}{(1 - p^2(z, v)) \left(1 - p(f(z), f(v)) \right)} &\leq |f^h(w)| \cdot \frac{2p(z, v)}{1 - p^2(z, v)}.
\end{aligned}$$

Adesso usiamo le seguenti uguaglianze:

$$\frac{1+p^2}{1-p^2} = \cosh(2\omega), \quad \frac{2p}{1-p^2} = \sinh(2\omega).$$

Sommando appunto la quantità $\frac{1+p^2(z,v)}{1-p^2(z,v)}$ all'ultima disuguaglianza ottenuta, il membro destro diventa $\cosh(2\omega(z,v)) + |f^h(w)| \sinh(2\omega(z,v))$. Ci basta dunque mostrare che il membro sinistro è uguale a $\exp(2\omega(f(z), f(v)))$, cioè $\frac{1+p(f(z), f(v))}{1-p(f(z), f(v))}$. Si ha infatti

$$\begin{aligned} & \frac{2(p(f(z), f(v)) - p^2(z, v))}{(1-p^2(z, v))(1-p(f(z), f(v)))} + \frac{1+p^2(z, v)}{1-p^2(z, v)} = \\ &= \frac{p(f(z), f(v)) - p^2(z, v) + 1 - p^2(z, v)p(f(z), f(v))}{(1-p^2(z, v))(1-p(f(z), f(v)))} \\ &= \frac{(1-p^2(z, v))(1+p(f(z), f(v)))}{(1-p^2(z, v))(1-p(f(z), f(v)))} = \frac{1+p(f(z), f(v))}{1-p(f(z), f(v))}. \end{aligned}$$

□

Corollario 2.1.7. *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora*

$$\omega(f^h(0), f^h(z)) \leq 2\omega(0, z). \quad (10)$$

Inoltre, 2 è la migliore costante possibile.

Dimostrazione. Notiamo che $f(0) = 0 \Rightarrow f^*(z, 0) = f^*(0, z)$, dunque si ha

$$\begin{aligned} \omega(f^h(0), f^h(z)) &= \omega(f^*(0, 0), f^*(z, z)) \\ &\leq \omega(f^*(0, 0), f^*(z, 0)) + \omega(f^*(0, z), f^*(z, z)) \\ &\leq 2\omega(0, z) \end{aligned}$$

dove la prima è la disuguaglianza triangolare per ω e la seconda segue applicando il Teorema 2.1.2.

Per dire che 2 è la migliore costante possibile, basta prendere $f(z) = z^2$ e $z \in \mathbb{D}$ con $|z| = 1/3$ per ottenere l'uguaglianza. □

Il prossimo risultato è quello che ci permetterà di dimostrare la disuguaglianza di Golusin.

Corollario 2.1.8. *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (11)$$

Dimostrazione. Siano $z, w \in \mathbb{D}$; senza perdita di generalità possiamo supporre $|f^h(z)| \geq |f^h(w)|$. Allora

$$\begin{aligned}
\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(w)| - |f^h(z)|} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(w)|}{1 + |f^h(w)|} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \\
&= \omega(0, |f^h(z)|) - \omega(0, |f^h(w)|) \\
&= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w),
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal Corollario 2.1.4 prendendo $u = w$ e $v = z$. \square

Concludiamo la sezione con due lemmi sulle funzioni olomorfe dal disco in sé, per i quali l'approccio dell'articolo di Beardon e Minda semplifica le dimostrazioni. Il primo è un risultato dovuto a Rogosinski, si veda [R].

Notazione: dati $E \subset \mathbb{D}$ e $z \in \mathbb{D}$, scriviamo $zE = \{zw \mid w \in E\}$. Inoltre, dati $\gamma \subset \mathbb{D}$ e $r > 0$, scriviamo $\Sigma(\gamma, r) = \{w \mid \omega(z, w) < r, z \in \gamma\}$.

Lemma 2.1.9. (*lemma di Rogosinski*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $f(z) \in z\Sigma((-1, 1), \omega(0, z))$.

Dimostrazione. Sia g definita come nella dimostrazione del lemma di Schwarz, il quale ci dice anche che $g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. La tesi è vera per $z = 0$, supponiamo dunque $z \neq 0$. Per il lemma di Schwarz-Pick si ha

$$\begin{aligned}
\omega(g(0), g(z)) &\leq \omega(0, z) \\
\omega(f'(0), f(z)/z) &\leq \omega(0, z).
\end{aligned}$$

Per il lemma di Schwarz dev'essere $f'(0) \in (-1, 1)$. Abbiamo quindi che $f(z)/z \in \Sigma((-1, 1), \omega(0, z)) \Rightarrow f(z) \in z\Sigma((-1, 1), \omega(0, z))$, come voluto. \square

Il secondo risultato è dovuto a Dieudonné, si veda [D] pagina 351.

Lemma 2.1.10. (*lemma di Dieudonné*) Siano $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ con $|w_0| \leq |z_0|$ e sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$ e $f(z_0) = w_0$. Allora

$$|f'(z_0) - w_0/z_0| \leq \frac{|z_0|^2 - |w_0|^2}{|z_0|(1 - |z_0|^2)}. \quad (12)$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.1.2 con $z = v = z_0$ e $w = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \omega(f^h(z_0), f^*(0, z_0)) &\leq \omega(0, z_0) \\ \iff p(f^h(z_0), f^*(0, z_0)) &\leq p(0, z_0) = |z_0|, \end{aligned}$$

dove l'equivalenza fra le due disuguaglianze segue dal fatto che $\operatorname{arctanh}$ è strettamente crescente. Per semplificare, scriviamo $f^h(z_0) = a$, $f^*(0, z_0) = b$, $|z_0| = r$. Vogliamo portare la disuguaglianza in forma euclidea. Abbiamo

$$\begin{aligned} p(a, b) &\leq r \\ \iff \left| \frac{a - b}{1 - \bar{b}a} \right| &\leq r \\ \iff (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) &\leq r^2(1 - \bar{b}a)(1 - b\bar{a}) \\ \iff |a|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b + |b|^2 &\leq r^2 - r^2a\bar{b} - r^2\bar{a}b + r^2|b|^2|a|^2 \\ \iff |a|^2(1 - r^2|b|^2) - a\bar{b}(1 - r^2) - \bar{a}b(1 - r^2) &\leq r^2 - |b|^2 \\ \iff |a|^2 - a \cdot \frac{\bar{b}(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2} - \bar{a} \cdot \frac{b(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2} &\leq \frac{r^2 - |b|^2}{1 - r^2|b|^2} \\ \iff (a - \alpha)(\bar{a} - \bar{\alpha}) &\leq R^2 \\ \iff |a - \alpha| &\leq R, \end{aligned}$$

dove $\alpha = \frac{b(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2}$ e $R^2 = \frac{r^2 - |b|^2}{1 - r^2|b|^2} + |b|^2 \left(\frac{1 - r^2}{1 - r^2|b|^2} \right)^2$. Ricordando che $r = |z_0|$ e osservando che $b = f^*(0, z_0) = \frac{[f(0), f(z_0)]}{[0, z_0]} = \frac{[0, w_0]}{[0, z_0]} = \frac{w_0}{z_0}$, troviamo $\alpha = \frac{w_0(1 - |z_0|^2)}{z_0(1 - |w_0|^2)}$ e $R = \frac{|z_0|^2 - |w_0|^2}{|z_0|(1 - |w_0|^2)}$. Riprendendo infine la definizione di a , cioè $a = f^h(z_0) = \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{1 - |f(z_0)|^2} = \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{1 - |w_0|^2}$, otteniamo che

$$\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{1 - |w_0|^2} - \frac{w_0(1 - |z_0|^2)}{z_0(1 - |w_0|^2)} \right| \leq \frac{|z_0|^2 - |w_0|^2}{|z_0|(1 - |w_0|^2)},$$

che è equivalente alla tesi moltiplicando entrambi i membri per $\frac{1 - |w_0|^2}{1 - |z_0|^2}$. \square

2.2 Applicazioni dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Vediamo ora alcune applicazioni dei risultati visti nella sezione precedente.

Teorema 2.2.1. *Dato $b \in [0, 1)$, scriviamo $F_b(z) = \frac{z(z + b)}{1 + bz}$. Consideriamo $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Se $f'(0) = b$, allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha*

$$\left| \frac{b - f^h(z)}{1 - bf^h(z)} \right| \leq \frac{2|z|}{1 + |z|^2} \quad (13)$$

e

$$F_b^h(-|z|) \leq \Re f^h(z) \leq |f^h(z)| \leq F_b^h(|z|). \quad (14)$$

Dimostrazione. Poiché $|f'(0)| < 1$, per il lemma di Schwarz si ha $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. Inoltre $f(0) = 0$, perciò possiamo applicare il Corollario 2.1.7; si ha dunque

$$\begin{aligned}\omega(f^h(0), f^h(z)) &\leq 2\omega(0, z) \\ \omega(b, f^h(z)) &\leq 2\omega(0, z) \\ p(b, f^h(z)) &\leq \frac{2p(0, z)}{1 + p^2(0, z)} \\ \left| \frac{b - f^h(z)}{1 - bf^h(z)} \right| &\leq \frac{2|z|}{1 + |z|^2},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che \tanh è strettamente crescente e l'uguaglianza $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$.

Per dimostrare la seconda disuguaglianza, ripetiamo i passaggi svolti nella dimostrazione del lemma di Dieudonné prendendo $a = f^h(z)$ e $r = \frac{2|z|}{1 + |z|^2}$. Otteniamo la disuguaglianza $|f^h(z) - \alpha| \leq R$, dove si ha $\alpha = \frac{b(1 - r^2)}{1 - r^2 b^2}$ e $R^2 = \frac{r^2 - b^2}{1 - r^2 b^2} + b^2 \left(\frac{1 - r^2}{1 - r^2 b^2} \right)^2$. Sostituendo troviamo

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{b(1 - |z|^2)^2}{(1 + 2b|z| + |z|^2)(1 - 2b|z| + |z|^2)}, \\ R &= \frac{2|z|(|z|^2 + 1)(1 - b^2)}{(1 + 2b|z| + |z|^2)(1 - 2b|z| + |z|^2)}.\end{aligned}$$

Consideriamo adesso $F_b^h(z) = \frac{bz^2 + 2z + b}{|z|^2 + 2b\Re z + 1} \left(\frac{|1 + bz|}{1 + bz} \right)^2$. Si ha

$$F_b^h(|z|) = \frac{b|z|^2 + 2|z| + b}{|z|^2 + 2b|z| + 1}, \quad F_b^h(-|z|) = \frac{b|z|^2 - 2|z| + b}{|z|^2 - 2b|z| + 1}.$$

Notiamo che $\alpha = (F_b^h(|z|) + F_b^h(-|z|))/2$ e $R = (F_b^h(|z|) - F_b^h(-|z|))/2$, perciò la disuguaglianza $|f^h(z) - \alpha| \leq R$ ci dice che $f^h(z)$ appartiene al cerchio con diametro sull'asse reale passante per i punti $F_b^h(|z|)$ e $F_b^h(-|z|)$. La seconda disuguaglianza segue allora da semplici considerazioni geometriche. \square

Osservazione 2.2.2. Sapendo solo che $|f'(0)| = b$, si può dimostrare che

$$F_b^h(-|z|) \leq |f^h(z)| \leq F_b^h(|z|).$$

Basta infatti considerare la funzione $bf(z)/f'(0)$.

Corollario 2.2.3. Sia f come nel Teorema 2.2.1. Allora $\Re f'(z) > 0$ per $|z| < b/(1 + \sqrt{1 - b^2})$.

Dimostrazione. Per $0 \leq b < 1$ e $z \in \mathbb{D}$ si ha $|z|^2 - 2b|z| + 1 > |z|^2 - 2|z| + 1 > 0$, dunque il segno di $F_b^h(-|z|)$ coincide con quello di $b|z|^2 - 2|z| + b$. Quest'ultima quantità è minore di 0 per $|z| \in ((1 - \sqrt{1 - b^2})/b, (1 + \sqrt{1 - b^2})/b)$, zero agli estremi e maggiore di 0 altrove. Poiché l'estremo destro è maggiore di 1, è da scartare. Per il teorema 2.2.1 abbiamo dunque che $\Re f'(z) \geq F_b^h(-|z|) > 0$ per gli z tali che $|z| < (1 - \sqrt{1 - b^2})/b = b/(1 + \sqrt{1 - b^2})$. \square

Del prossimo enunciato, dimostrato indipendentemente da Pick nel 1916 e Nevanlinna nel 1919, vedremo nel dettaglio solo un paio di casi particolari.

Teorema 2.2.4. (*Pick-Nevanlinna, Theorem 2.2, Chapter 1 [JBG]*) Siano dati n punti distinti $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ e altri n punti distinti (non necessariamente diversi dai primi) $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$. Per $k = 1, \dots, n$, sia A_k la matrice $k \times k$ data da $A_k(i, j) = \frac{1 - w_i \bar{w}_j}{1 - z_i \bar{z}_j}$. Allora esiste una funzione $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(z_i) = w_i$ per $j = 1, \dots, n$ se e solo se $\det A_k \geq 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Vediamo il caso $n = 2$.

Dimostrazione. La condizione è sempre verificata per $k = 1$, mentre per $k = 2$ si riscrive come

$$\begin{aligned} \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} \cdot \frac{1 - |w_2|^2}{1 - |z_2|^2} - \frac{1 - w_1 \bar{w}_2}{1 - z_1 \bar{z}_2} \cdot \frac{1 - \bar{w}_1 w_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} &\geq 0 \\ \frac{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} &\geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2} \\ \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} &\geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)} \\ \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_2|^2} &\geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{1 - |w_1|^2 - |w_2|^2 + |w_1|^2 |w_2|^2} \\ \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{|1 - \bar{z}_2 z_1|^2 - |z_1 - z_2|^2} &\geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - \bar{w}_2 w_1|^2 - |w_1 - w_2|^2} \\ \frac{1}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|^2} &\geq \frac{1}{1 - \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_2 w_1} \right|^2} \\ \frac{1}{1 - p^2(w_1, w_2)} &\leq \frac{1}{1 - p^2(z_1, z_2)} \\ p(w_1, w_2) &\leq p(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Ricordiamo adesso che p è invariante per azione di $\text{Aut}(\mathbb{D})$; quindi, a meno di comporre a sinistra e a destra con opportuni automorfismi olomorfi di \mathbb{D} , possiamo supporre senza perdita di generalità $z_1 = w_1 = 0$. La condizione diventa dunque $p(0, w_2) \leq p(0, z_2) \Rightarrow |w_2| \leq |z_2|$, perciò basta prendere la funzione $f(z) = w_2 z / z_2$. \square

Andiamo adesso a dimostrare il Teorema di Pick-Nevanlinna nel caso $n = 3$, con una formulazione differente.

Teorema 2.2.5. *Siano z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 due triple di punti distinti in \mathbb{D} . Allora esiste $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $f(z_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

- (i) $\omega(w_i, w_j) < \omega(z_i, z_j)$ per $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$;
- (ii) $\omega\left(\frac{[w_2, w_1]}{[z_2, z_1]}, \frac{[w_3, w_1]}{[z_3, z_1]}\right) \leq \omega(z_2, z_3)$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista siffatta f . Allora la condizione (i) segue dal lemma di Schwarz-Pick. La condizione (ii) invece si riscrive come $\omega(f^*(z_2, z_1), f^*(z_3, z_1)) \leq \omega(z_2, z_3)$, che è l'enunciato del Teorema 2.1.2.

Adesso dimostriamo l'altra freccia. Vediamo prima nel caso $z_1 = w_1 = 0$. Allora per la condizione (i) abbiamo che $\omega(0, w_i) < \omega(0, z_i) \Rightarrow |w_i/z_i| < 1$ per $i = 2, 3$. La condizione (ii) si riscrive invece come $\omega(w_2/z_2, w_3/z_3) \leq \omega(z_2, z_3)$, cioè $p(w_2/z_2, w_3/z_3) \leq p(z_2, z_3)$. Dunque, per il caso $n = 2$ del Teorema di Pick-Nevanlinna, esiste $g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $g(z_2) = w_2/z_2$ e $g(z_3) = w_3/z_3$. Allora basta prendere $f(z) = zg(z)$.

Mostriamo che ci si può ridurre a questo caso. Consideriamo $h, g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ date da

$$g(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}, \quad h(z) = \frac{z - w_1}{1 - \bar{w}_1 z}.$$

Allora esiste f come quella richiesta dal Teorema se e solo se esiste $F \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, con $F = h \circ f \circ g^{-1}$, tale che $F(0) = 0$, $F(g(z_2)) = h(w_2)$ e $F(g(z_3)) = h(w_3)$. Questo corrisponde proprio al caso precedente, quindi tale F esiste se e solo se

$$\omega(h(w_i), h(w_j)) \leq \omega(g(z_i), g(z_j))$$

per $i, j = 1, 2, 3$ con $i \neq j$ e

$$\omega\left(\frac{h(w_2)}{g(z_2)}, \frac{h(w_3)}{g(z_3)}\right) \leq \omega(g(z_2), g(z_3)).$$

Poiché p , e di conseguenza ω , è invariante per azione di $\text{Aut}(\mathbb{D})$, la prima disuguaglianza è equivalente alla condizione (i). Sempre per questo motivo, sostituendo $h(z) = [z, w_1]$ e $g(z) = [z, z_1]$ otteniamo che la seconda è equivalente alla condizione (ii). \square

Concludiamo la sezione con il risultato che, come già anticipato, ci permetterà di dimostrare i teoremi successivi. L'enunciato originale si trova in [GMG], ma vedremo una formulazione che ci tornerà più utile, in particolare perché coinvolge la funzione f^h .

Teorema 2.2.6. *(disuguaglianza di Golusin, 1945) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale*

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (15)$$

Dimostrazione. Con passaggi analoghi a quelli della dimostrazione del Corollario 2.1.8 abbiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\omega(|f^h(z)|, |f^h(0)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \\ \omega(z, 0) = \omega(|z|, 0) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right).\end{aligned}$$

Prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (11) otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) &\leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) \\ \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} &\leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2.\end{aligned}\tag{16}$$

Adesso, dalla Proposizione 2.1.1 sappiamo che $f^h(z), f^h(0) \in \mathbb{D}$, in particolare $|f^h(z)|, |f^h(0)| < 1$, perciò è giustificato il seguente passaggio:

$$\begin{aligned}|f^h(z)| &\leq \frac{\frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2 - 1}{\frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2 + 1} \\ &= \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + 2|z| + |z|^2) - (1 - |f^h(0)|)(1 - 2|z| + |z|^2)}{(1 + |f^h(0)|)(1 + 2|z| + |z|^2) + (1 - |f^h(0)|)(1 - 2|z| + |z|^2)} \\ &= \frac{2|f^h(0)| + 2|f^h(0)||z|^2 + 4|z|}{2 + 2|z|^2 + 4|f^h(0)||z|} = \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1 + |z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1 + |z|^2}}.\end{aligned}$$

□

3 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

3.1 Rigidità al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare un risultato di rigidità al Bordo, seguendo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR].

Teorema 3.1.1. (*Bracci-Kraus-Roth, 2020*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (17)$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. Possiamo applicare la disuguaglianza di Golusin 2.2.6 nella forma (16), che riscriviamo come

$$\begin{aligned} \frac{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)}{(1 - |f^h(z_n)|)(1 + |f^h(0)|)} &\leq \frac{(1 + |z_n|)^2}{(1 - |z_n|)^2} \\ \frac{1 + |f^h(0)|}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}. \end{aligned}$$

Per ipotesi vale (17), dunque

$$\begin{aligned} \frac{1 + |f^h(0)|}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} o((|z_n| - 1)^2) &\geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2} \\ \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} o(1) &\geq 1. \end{aligned}$$

Se $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per il lemma di Schwarz-Pick si ha necessariamente $|f^h(0)| < 1$, dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty$ e otteniamo una contraddizione. \square

Siamo ora pronti a dimostrare il Theorem 2.1 di [BK].

3.2 Teorema di Burns-Krantz

Teorema 3.2.1. (*Burns-Krantz, 1994*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che vale (4) per $z \rightarrow 1$. Allora f è l'identità del disco.

Dimostrazione. Come già visto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.5, a meno di considerare $\sigma^{-1}f(\sigma z)$ possiamo supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Chiaramente, se vale (4) per $z \rightarrow 1$ allora vale anche non tangenzialmente. Dalla Proposizione 1.2.5 segue che anche (5) vale per $z \rightarrow 1$ non

tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1.1 (usiamo di nuovo che, non tangenzialmente, $|z-1|$ e $1-|z|$ possono essere scambiati negli o -piccoli); dunque f è un automorfismo. Allora per la Proposizione 1.1.10 esistono $\theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Poiché vale

$$(4), \text{ dev'essere } f''(1) = 0. \text{ Un semplice conto mostra che } f''(z) = \frac{e^{i\theta} \bar{a}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}z)^3}.$$

Siccome $e^{i\theta} \neq 0$ e $|a| < 1$, deve necessariamente essere $\bar{a} = 0$, perciò $f(z) = e^{i\theta} z$. Il fatto che $f(z) = z$ segue da $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$ sempre per (4). \square

Esempio 3.2.2. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $f(z) = \frac{1+3z^2}{3+z^2}$. Verifichiamo che $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Se $z \in \mathbb{D}$ allora $|z| < 1 \Rightarrow 1-|z|^4 > 0$, dunque si ha

$$\begin{aligned} 1-|z|^4 &< 9(1-|z|^4) \\ 1+3z^2+3\bar{z}^2+9|z|^4 &< 9+3z^2+3\bar{z}^2+|z|^4 \\ (1+3z^2)(1+3\bar{z}^2) &< (3+z^2)(3+\bar{z}^2) \\ \frac{(1+3z^2)(1+3\bar{z}^2)}{(3+z^2)(3+\bar{z}^2)} &< 1 \\ |f(z)|^2 &< 1 \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza ci dice che $|f(z)| < 1 \Rightarrow f(z) \in \mathbb{D}$.

Ovviamente f non può essere iniettiva su \mathbb{D} perché $f(z) = f(-z)$; dunque non è un automorfismo. Adesso mostriamo che $f(z) - 1 - (z-1)$ è $O((z-1)^3)$ ma non $o((z-1)^3)$ per $z \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - z \\ &= \frac{1+3z^2}{3+z^2} - z \\ &= \frac{1+3z^2-3z-z^3}{3+z^2} \\ &= \frac{(1-z)^3}{3+z^2}. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow 1} g(z)/(z-1)^3 = -1/4$ si ha che $g(z)$ è $O((z-1)^3)$ ma non $o((z-1)^3)$ per $z \rightarrow 1$. Dunque il termine $o((z-1)^3)$ nel Teorema 3.2.1 non è migliorabile.

Riferimenti bibliografici

- [BK] D. M. Burns, S. G. Krantz: Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary. *Journal of the American Mathematical Society*, **Volume 7** (1994), no. 3, 661–676
- [BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth: A new Schwarz-Pick Lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps. Preprint, ArXiv:2003.02019v1 (2020)
- [BM] A. F. Beardon, D. Minda: A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse Mathématique*, **Volume 92** (2004), 81–104
- [D] J. Dieudonné: Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **Volume 48** (1931), 247–358
- [GMG] G. M. Golusin: Some estimations of derivatives of bounded functions. *Recueil Mathématique [Matematicheskii Sbornik]*, **Volume 16(58)** (1945), no. 3, 295–306
- [JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007
- [NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001
- [R] W. Rogosinski: Zum Schwarzschen Lemma. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **Volume 44** (1934), 258–261

Ringraziamenti

Da scrivere.