Problem Solving ad Alta Voce

Marco Vergamini

Indice

Introduzione

Attenzione: queste non vogliono essere assolutamente delle soluzioni scritte bene, con tutti i crismi e senza fronzoli inutili. Sono invece un flusso di coscienza di ciò che mi viene in mente man mano che provo il problema: non saranno perciò esenti da tentativi a vuoto, ragionamenti sbagliati, errori di conto, passaggi saltati o dati per ovvi, e un sacco di parole messe alla rinfusa, ed è giusto che sia così. Il contenuto di questo file è pensato per aiutare a capire cosa si pensa e come lo si pensa quando si risolve un problema. Le soluzioni scritte bene sono utili a capire cosa scrivere sulla bella, queste vogliono essere un indizio non su come dev'essere la brutta (cioè, anche), ma soprattutto su quello che vi deve (e quello che NON vi deve) passare per la testa mentre risolvete un problema. Spero che vi sarà utile per affinare i vostri ragionamenti in gara.
Buona lettura!

PS: raccomando di provare a risolvere i problemi per conto proprio prima di leggere le soluzioni, anche al fine di rendere più utile la lettura con un confronto dei ragionamenti.

1 Teoria dei numeri

1.1 N1

Problema Determinare tutti i numeri primi p per i quali esistono interi m, n tali che $p = m^2 + n^2, p \mid m^3 + n^3 - 4$.

Soluzione Premessa: sto scrivendo questa soluzione a mente fredda e problema già risolto, ma un amico mi aveva chiesto di aiutarlo quindi tra messaggi e appunti dovrei riuscire a ricostruire il flusso di pensieri.
Ok, il problema mi sembra di averlo già visto, è uno dei tanti che so come si fanno ma non so fare. La prima cosa che mi viene in mente è che conosciamo tutti i numeri primi che soddisfano la prima equazione, sono quelli della forma $4k + 1$, ma a giudicare dai cubi nell'altra espressione, né questo né i primi di Gauss ci potranno aiutare - dopotutto è teoria piuttosto avanzata.
Ok, quello che vogliamo è diminuire il grado di $m^3 + n^3 - 4$. Proviamo con un po' di congruenze modulo p, otteniamo $(m + n)mn + 4 \equiv 0$, resta comunque di grado 3... però nelle singole è di grado 2, chissà se forse Vieta Jumping... Ma no, che mi dice il cervello! Sono troppo incasinate, e poi si perderebbe l'informazione sul primo.
Facciamo una cosa a caso: proviamo a elevare $(m+n)mn+4$ al quadrato. Viene
$(m + n)^2m^2n^2 + 8(m + n)mn + 16 \equiv 0$
$2m^3n^3 + 8((m + n)mn + 4) - 16 \equiv 0$
$m^3n^3 \equiv 8$ (sto escludendo il caso $p = 2$ che si fa a mano).
Proviamo a scomporlo: $(mn - 2)(m^2n^2 + 2mn + 4) \equiv 0$... no, non mi dice niente.
La prima pazzia ha portato a qualcosa, chissà se... ma sì, eleviamo anche al cubo: $(m + n)^3 + 3 \cdot 4(m + n)^2m^2n^2 + 3 \cdot 16(m + n)mn + 64 \equiv 0$
$8(m + n)^3 + 12((m + n)^2m^2n^2 + 8(m + n)mn + 16) - 48(m + n)mn - 128 \equiv 0$
$8(m + n)^3 - 48((m + n)mn + 4) + 64 \equiv 0$
(di nuovo $p \neq 2$)
$(m + n)^3 + 8 \equiv 0$
$m^3 + n^3 + 3(m^2 + n^2) + 8 \equiv 0 \Rightarrow 12 \equiv 0.$
Inaspettatamente semplice. Rifacciamo i conti per sicurezza (i non stupidi come me fra di voi se ne saranno accorti da un pezzo). Non so più elevare al cubo...
$m^3 + n^3 + 3mn(m + n) + 8 \equiv 0$
$4 + 3mn(m + n) + 8 \equiv 0$
$3[mn(m + n) + 4] \equiv 0$. Ah.
Ok, ripassiamo il manuale. Passo 1: sporcarsi le mani.
Almeno dobbiamo controllare solo la metà dei casi.
$2 = 1^2 + 1^2$, avoja.
$5 = 2^2 + 1^2, 2^3 + 1^3 - 4 = 5$, bene.
$13 = 3^2 + 2^2, 3^3 + 2^3 - 4 = 31$.
$17 = 4^2 + 1^2, 4^3 + 1^3 - 4 = 61$.
$29 = 5^2 + 2^2, 5^3 + 2^3 - 4 = 129$.
Ok. Da dove ricomincio? $m^3n^3 \equiv 8$ sembra un buon risultato.

$(mn-2)(m^2n^2+2mn+4) \equiv 0$. Adesso lo vedo!
$2mn+4 = (m+n)mn+4-(m+n-2)mn$. Allora:
$(mn-2)(m^2n^2-(m+n-2)mn) \equiv 0$. Ovviamente $p \nmid mn$, quindi:
$(mn-2)(mn-m-n+2) \equiv 0$.
Bello, mi piace. Primo caso: $mn \equiv 2$. Ricordando $(m+n)mn+4 \equiv 0$ e $p \neq 2$, otteniamo $m+n \equiv -2$, cioè ad esempio $m \equiv -(n+2)$. Con i cubi:
$-(n+2)^3+n^3-4 \equiv 0$
$6n^2+12n+4 \equiv 0$
$3n^2+6n+2 \equiv 0$. Con i quadrati:
$(n+2)^2+n^2 = 2n^2+4n+4 \equiv 0, p \neq 2 \Rightarrow n^2+2n+2 \equiv 0$.
Sottraggo 3 di questa da quella prima e ottengo $-4 \equiv 0$, bene, non ci sono soluzioni.
Secondo caso: $mn \equiv m+n-2$, cioè $m+n \equiv mn+2$.
Allora $0 \equiv (m+n)mn+4 \equiv m^2n^2+2mn+4$. Mh, no?
$0 \equiv (m+n)mn+4 \equiv (m+n)(m+n-2)+4$
$(m+n)^2-2(m+n)+4 \equiv 0$
$2mn-2(m+n)+4 \equiv 0$
$mn-m-n+2 \equiv 0$. No. Cioè, sì, ma già lo sapevo. Proviamo con $m^3n^3 \equiv 8$.
$(m+n-2)^3 \equiv 8$
$(m+n)^3-6(m+n)^2+12(m+n)-8 \equiv 8$
$m^3+n^3+3mn(m+n)-12mn+12(m+n)-8 \equiv 8$
$4-12-12mn+12(m+n)-8 \equiv 8$
$12(m+n-mn) \equiv 24 \Rightarrow m+n-mn-2 \equiv 0$ (ho diviso anche per 3 perché 3 non può essere). Ma ancora nulla. Rivediamo il caso prima... Ehi! $p=5$ dovrebbe rientrarci! Ah, ho di nuovo sbagliato i conti... vediamo:
$n^2+2n+2 \equiv 0$ è giusto.
$-(n+2)^3+n^3-4 \equiv 0$
$6n^2+12n+12 \equiv 0$ (3 non può essere, ricordiamo)
$n^2+2n+2 \equiv 0$. Sebbene non sia di facile risoluzione, spendiamo una parola su quest'equazione di secondo grado coi moduli. A cose normali verrebbe $n = -1 \pm \sqrt{-1}$ e sappiamo che questa ha soluzione anche modulo p perché $p = m^2+n^2 \Rightarrow p = 4k+1 \Rightarrow i^2 \equiv 1$ ha soluzione modulo p, quindi viene $n \equiv -1 \pm i$. Peccato che se sostituiamo viene $m \equiv -1 \mp i$ e in qualunque equazione li si metta viene l'identità $0 \equiv 0$. Se fosse stato $n \equiv i$ avremmo avuto $m \equiv \pm 1$, che limitava i valori di m: a parte casi piccoli di p fatti a mano, avremmo ottenuto $m^2 > p$ a parte per $m = \pm 1$, che si possono fare a mano con n incognito. Peccato.
Ok, ricapitoliamo. $p = m^2+n^2, p \mid m^3+n^3-4$. Ottengo $(m+n)mn+4 \equiv 0$ da cui $m^3n^3 \equiv 8$. Rimaneggiando questa ho $(mn-2)(mn-m-n+2) \equiv 0$.
*Le parole di darkcrystal rimbombano: "**Principio fondamentale:** ogni problema di teoria dei numeri (serio) ha una parte di congruenze e una parte di disuguaglianze."* (sì, sono andato a cercare la citazione esatta).
Era a questo che mi riferivo quando parlavo di abbassare il grado: per fare le disuguaglianze. Ora che ci sono riuscito, perché mettermi a girare in tondo?
Però, attenzione: il testo dice interi, non interi positivi/non negativi! Ma allora devo rifare i casi a mano...

$13 = (-3)^2 + (-2)^2, (-3)^3 + (-2)^3 - 4 = -39$. Aha! Eccone un altro! Provando a mente 17 sembra che non venga... speriamo! Però le disuguaglianze tocca guardarle coi valori assoluti.
Primo caso: $m^2 + n^2 \mid mn - 2 \Rightarrow m^2 + n^2 \leq |mn - 2|$.
$|mn| \leq (m^2 + n^2)/2 \leq |mn - 2|/2$ (AM-GM)
$2|mn| \leq |mn - 2| \leq |mn| + 2$ (disuguaglianza triangolare)
$|mn| \leq 2$. Si fa abbastanza a mano, non scordiamo che $mn = 2$, se non fosse rientrato nella disuguaglianza, andava fatto a parte. Qui direi che abbiamo fatto.
Secondo caso: con passaggi analoghi si ottiene (tenendosi larghi)
$|mn| \leq |m| + |n| + 2$.
Ok, basta trovare gli interi positivi per cui vale e poi fare tutte le prove a mano con i segni (che gran divertimento). Se $m \geq n \geq 3$ si ottiene
$mn \geq 3m \geq m + n + 3 > m + n + 2$, nessuna soluzione. Però negli altri casi? Se $n = 2$ viene $2m \leq m + 4 \Rightarrow m \leq 4$ (Yeee! $p = 13$ rientra in questi casi!). Ma se $n = 1$? $m \leq m + 3$, che è sempre vero. Ma poi, piccola nota a margine, è ancora una congettura l'esistenza di infiniti primi della forma $m^2 + 1$, che ne so io di 'sta roba? Ne so, solo che sono stupido: se $n = 1$ viene $m^2 + 1 \mid m^3 - 3$ (o, nel caso di negativi $m^3 - 5$). Questa altro che da manuale, è proprio da esercizio da libro di testo - non la faccio, ma è necessaria per risolvere il problema. Per chi non lo sa, con una variabile sola si riesce sempre ad abbassare il grado tramite divisibilità.
Non ci scordiamo dell'eventualità $mn - m - n + 2 = 0$. Anche questo è un esercizio da libro di testo: diventa $(m - 1)(n - 1) = -1$. Il lettore è invitato a portare a termine i conti.

1.2 N2

Problema Sia x_n una successione che parte da x_0 intero e così definita:
$x_{n+1} = -2x_n + 3$. È vero che essa contiene infiniti quadrati perfetti solo se $x_0 = 1$?

Soluzione Se l'affermazione fosse falsa credo che il metodo più ovvio di dimostrarla sarebbe con un controesempio, e visto che se ci fosse un controesempio semplice il problema sarebbe idiota non voglio perdere tempo a cercarlo, quindi punto su "l'affermazione è vera" (se poi c'è davvero un controesempio semplice avrò perso un sacco di tempo).
Bene, quand'è che $3 - 2a = m^2$? Dev'essre $a \equiv m^2 \pmod 3$. Allora $a \equiv 0 \vee 1 \pmod 3$. In generale non ci dice nulla... no, falso: ci dice che zero non può essere perché dopo non ci sarebbe un quadrato... no, controfalso: dice infiniti, ma non tutti, né definitivamente (ce ne sono infiniti=frequentemente). Ok, modulo 3 è quasi inutile, modulo 2 non ci provo nemmeno.
Facciamo qualche manipolazione: $2a + 1 = 4 - m^2 = (2 + m)(2 - m)$. Non mi dice niente. Mi viene da pensare alla grandezza e al segno dei termini della successione, però non so. Beh, in effetti se $x_n > 0$ allora x_{n+1} è un quadrato se

e solo se $x_n = 1$ e allora dev'essere tutto 1. Sarei tentato di provare una cosa tipo $x_{n-1} = \frac{3 - x_n}{2}$. Oppure mi accorgo che sono un coglione e che c'è una formula chiusa in funzione di x_0 e n da poter studiare... faccio i conti e vi faccio sapere.
Eccomi: $x_n = 3 \cdot ((-2)^n - 1) + (-2)^n x_0$. Ok, adesso modulo 2^n forse si può dire qualcosa, vediamo. Uh, forse non riesco più a fare i conti bene... $x_n = 1 - (-2)^n + (-2)^n x_0$, adesso garantisco che è quella giusta. Se x_0 è negativo x_1 è positivo, quindi WLOG $x_0 > 0$ e se $x_0 = 1$ è sempre 1, se $x_0 \geq 2$ allora x_n è negativo per i dispari, quindi dobbiamo guardare agli n pari: $n = 2m$, allora vogliamo studiare $1 - 4^m + 4^m x_0$. Ho una certa voglia di tornare ai moduli, ma non sono sicuro che funzionino. Adesso devo andare, riprenderò dopo.
Nuova idea: stringere tra quadrati. Definitivamente $1-4^m+4^m x_0 < (1-4^m)^2$... vero? Cercando di non sbagliare i conti, $4^{2m} > 4^m(x_0+1)$, sì, sembra definitivamente vero. Sarà anche definitivamente maggiore del quadrato successivo? Mai nella vita, quello pure va come 4^{2m}. Per stargli sotto i quadrati devono essere dell'ordine di 2^{2m}, una cosa del tipo $(2^m)^2 < 1-4^m+4^m x_0$. In effetti è ovvio: se voglio stimare questa cosa tra due quadrati devo stimare la sua radice quadrata, che va circa come $2^m \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor$. Ovviamente $(2^m \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor)^2 \leq 4^m(x_0 - 1) < 4^m x_0 - 4^m + 1$. $(2^m \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor + 1)^2 = 4^m(\lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor)^2 + 2^{m+1} \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor + 1 > 4^m(\sqrt{x_0 - 1} - 1)^2 + 2^{m+1}(\sqrt{x_0 - 1} - 1) + 1$ dove in questo passaggio può servire che $x_0 \geq 2$ per evitare che il quadrato diventi più grande e la disuguaglianza non sia più vera, come effettivamente accade per $x_0 = 1$ (oddio in realtà ricontrollando no, però va comunque specificata 'sta cosa per poi fare il caso strano a parte). Tornando a noi, $4^m(\sqrt{x_0 - 1} - 1)^2 + 2^{m+1}(\sqrt{x_0 - 1} - 1) + 1 = 4^m x_0 - 2 \cdot 4^m \sqrt{x_0 - 1} + 4^m + 1 + 2 \cdot 2^m(\sqrt{x_0 - 1} - 1) + 1$... non mi sembra avere molte speranze. Fatemi rivedere com'è fatta la versione con ancora le parti intere.Vogliamo $4^m(\lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor)^2 + 2^{m+1} \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor + 1 > 4^m x_0 - 4^m + 1$. Purtroppo però in generale $x_0 - 1 > (\lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor)^2$, quindi è falso. Sto avendo idee sul prendere $x_0 = y^2$ per usare y. Ok, proviamo.
WLOG $x_0 = y^2$, sennò bella, abbiamo finito. Definitivamente $(2^m y)^2 > 4^m y^2 - 4^m + 1$. E $(2^m y - 1)^2$? $(2^m y - 1)^2 = 4^m y^2 - 4^m y + 1 < 4^m y^2 - 4^m + 1$ per $y > 1$. Yeee, in tre righe ho chiuso l'idea del paragrafo precedente. Potevo essere più veloce, ma almeno ho proseguito nella giusta strada.

2 Combinatoria

2.1 C1

Problema Dimostrare che $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Soluzione Come prima cosa ho pensato a un'induzione, ma sotto ci sono un k e un $n-k$ e non saprei come gestirli. Proviamo con un'intuizione combinatoria: vogliamo scegliere n persone in un gruppo di di $2n$. Possiamo fare così: dividiamo il gruppo di $2n$ persone in due gruppi da n (fissati). Dobbiamo allora sceglierne k da una parte e $n-k$, dove k può andare da 0 a n. Dato che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, il gioco è fatto.

3 Algebra

3.1 A1

Problema Sia $\mathbb{Q}^+$ l'insieme dei razionali strettamente maggiori di 0. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ t.c. $f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Soluzione Al solito, sia $P(x, y)$ l'uguaglianza del testo. Vorrei provare $P(0, 0)$, ma siamo nei razionali positivi. $P(1, 1)$? Viene $f(f(1)^2) = f(1)^3$. $f(x) = x^{3/2}$? A parte che non mi sembra che funzioni, poi non andrebbe nei razionali. Ci sono delle condizioni moltiplicative, quindi è poco probabile che sia una cosa affine generica (o polinomi in generale). $f(x) = x^n$? Vediamo subito che otteniamo la costante $f \equiv 1$. (Nota: sto riportando gli appunti e noto ora che se avessi fatto un check più dettagliato la condizione sull'esponente della y che pensavo essere $2n = n$ si sarebbe invece rivelata essere $2n^2 = n$, che avrebbe portato a $n = 1/2$. Non so se così sarei arrivato alla soluzione più o meno in fretta, fatto sta che ci sono arrivato comunque; la lezione qui è: state bene attenti ai passaggi che fate!)
Voglio poter giocare un po': nell'argomento a sinistra posso far comparire un 1 controllando $P(1/f(y), y)$: $f(1) = f(1/f(y))^2 f(y)$. Allora $f(y) = g(y)^2 f(1)$, cioè è un quadrato per una qualche costante. Provo a vedere se mi dice qualcosa su $f(1)$, ma ottengo che $f(1)^2$ è un quadrato.
Iniettività e suriettività? Boh, non sono controllabili con condizioni così "chiuse" (è così che le penso quando non ci sono variabili fuori da f).
Proviamo cose. $P(1, y)$: $f(f(y)^2) = f(1)^2 f(y)$. Noi sappiamo anche che $f(f(y)^2) = g(f(y)^2)^2 f(1)$. Prese da sole non portano a molto (vi risparmio una o due tautologie sceme), quindi provo un confronto: la stessa cosa scritta in due modi diversi. In questo caso, $f(y)$, così come l'abbiamo appena trovata e poi esplicitando $g(y)$. Quindi, ricordando che in $\mathbb{Q}^+$ possiamo dividere:

$$f(1)/f(1/f(y))^2 = f(y) = f(f(y)^2)/f(1)^2 \Rightarrow f(1)^3 = f(f(y)^2) f(1/f(y))^2$$

Ho anche pensato di sostituire nell'uguaglianza originale, ma a occhio direi che peggiorerebbe e basta. $x = y$? Fa schifo. La condizione su $f(y)$ per $y = 1$? $f(1) = f(1/f(1))^2 f(1) \Rightarrow f(1/f(1))^2 = 1 \Rightarrow f(1/f(1)) = 1$. Abbiamo ottenuto $1 \in \operatorname{Im} f$. Da qui possiamo lavorare un po'. (Consiglio: cercare sempre di ottenere che valori particolari nell'immagine, specialmente zero se si somma e uno se si moltiplica)
Prendendo $y_1 = 1/f(1)$ abbiamo che $(P(x, y_1))$: $f(x^2) = f(x)^2$ (*). Potente! $P(x, y)$ si può riscrivere in molti modi, tra cui $f(xf(y))^2 = f(x)^2 f(y)$. Quindi gli elementi dell'immagine sono tutti dei quadrati. Di più: da (*) otteniamo $f(1) = f(1)^2 \Rightarrow f(1) = 1$. Proviamo $P(1, y)$: $f(f(y)^2) = f(y)$, sempre per (*) ci dà $f(f(y))^2 = f(y)$, quindi sulla sua immagine f agisce come radice quadrata (Visto? È saltata fuori comunque! E continuavo a non accorgermi che sarebbe dovuta uscire prima...). In effetti, sarebbe una bella soluzione, se funzionasse su tutto il dominio. Riusciamo a forzarla? Boh, proviamo.

Sappiamo che l'immagine è composta da quadrati. Ok, prendiamo $x_0 \in \operatorname{Im} f$. Allora dev'essere $x_0 = x_1^2$ e visto che f agisce sull'immagine come la radice quadrata abbiamo che $x_1 \in \operatorname{Im} f$. Per induzione otteniamo $x_0 = x_n^{2^n}$. Ragionando ad esempio per assurdo otteniamo che dev'essere per forza $x_0 = 1$, quindi c'è solo la costante.

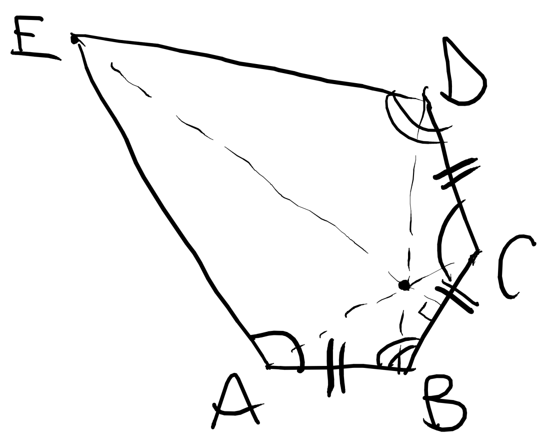
Piccola nota finale: abbiamo usato implicitamente un sacco di volte che un quadrato perfetto, in $\mathbb{Q}$, è qualcosa degno di nota. In $\mathbb{R}$ non sarebbe stato possibile.

4 Geometria

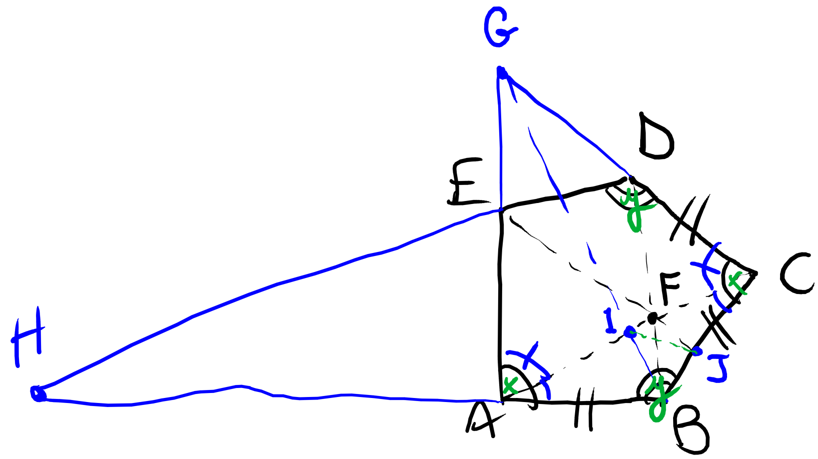
4.1 G1

Problema Sia $ABCDE$ un pentagono convesso t.c. $AB = BC = CD$, $\widehat{EAB} = \widehat{BCD}$ e $\widehat{EDC} = \widehat{CBA}$. Dimostra che la perpendicolare da E a BC e i segmenti AC e BD sono concorrenti.

Soluzione Geometria, la mia vecchia nemica. E non un triangolo, nemmeno un quadrato, ma addirittura un pentagono! Devo ammetterlo, quella tesi mi fa venire voglia di baricentriche, ma su quale triangolo? Ogni cosa a suo tempo: prima un bel (si fa per dire...) disegno. Se riesco, vi metto quello fatto a mano.



E adesso, la mia parte preferita: fissarlo finché non mi viene in mente qualche strano elemento geometrico da aggiungere che potrebbe funzionare. Mi è stato detto che ci sono diversi modi per approcciarlo, perciò intanto penso: quale triangolo userei per le baricentriche? Me ne è venuto in mente uno complicato, con un vertice in E e lati EA, ED, BC (quindi prolungando), oppure EBC stesso, ma non mi piacciono i conti che sembrano venir fuori. Anche se quella di prolungare non è una cattiva idea. Devo stare attento, il disegno è (come sempre) viziato: sembrano vere cose che in generale non lo sono, tipo $EA = ED$. Vediamo se riesco a farne uno più generico... Ok, è di nuovo viziato, ma in modo totalmente diverso (ci sono un po' di angoli retti), inoltre sembra essere più accurato ma allo stesso tempo sembra che la tesi sia falsa. Buffo. Ok, no, ricontrollando ho fatto confusione con l'ultima condizione sugli angoli. Guardate il disegno, capirete perché ci sto perdendo tanto tempo - è complicato! Ora va un po' meglio. Ok, vediamo.



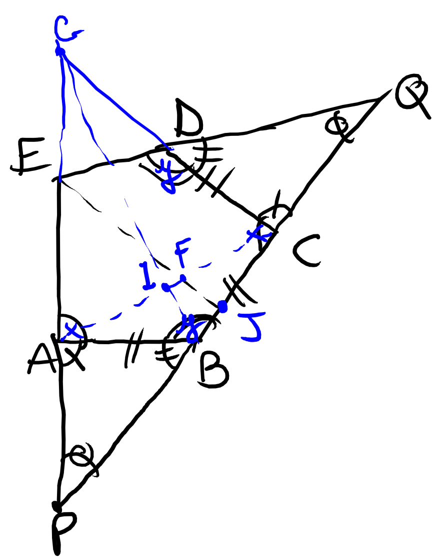
Ci sono un po' di triangoli isosceli fatti usando i segmenti AB, BC, CD, il che vuol dire angoli uguali, e a noi piacciono gli angoli, ma come gestisco una concorrenza? E ora che ci penso, l'ipotesi sugli angoli farebbe schifo in baricentriche o in qualunque contesto che non sia la geometria sintetica, perciò è da buttare. Oh, giusto! Un classico per gestire le concorrenze è pensarle al contrario: fissiamo due rette, prendiamo la retta che passa per il punto di intersezione e un altro punto obbligato e verifichiamo che coincida con quella che ci manca. In questo caso, procederò così: chiamo $F = AC \cap BD$ e voglio dimostrare che $EF \perp BC$. Leviamo quell'ipotesi dal disegno e mettiamoci F. Ah-ah! Ho visto una cosa. Vale la pena tentare. In blu nel disegno trovate le cose che ho aggiunto d'ora in avanti. Da $AB = BC$ otteniamo $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ che combinato all'ipotesi sugli angoli in A e in C ci dà $\widehat{EAC} = \widehat{DCA}$, perciò se chiamo $G = AE \cap DC$ otterrò che AGC è isoscele di base AC. Analogamente, chiamando $H = AB \cap ED$, BHD sarà isoscele di base BD. Chissa se queste cose torneranno utili.

Ok, adesso sto provando a vedere un'altra cosa: che angoli ci sono in giro? Per esempio, c'è un modo di calcolare l'angolo $\widehat{AEF}$? Sarebbe perfetto. Vediamo un po'. Così a occhio non mi sembra che ci sia un modo ovvio di trovarlo. Posso impostare delle equazioni per l'angolo $\widehat{AED}$ basate sui poligoni $ABCDE$ e $ACDE$ (o $ABDE$), ma a che servirebbe? E invece il quadrilatero $AFDE$? Promette bene. E c'è anche un'altra cosa che sto considerando: prolungare AB e DC fino alla loro intersezione. Ma non mi ispira più di tanto.
Ok, sono rimasto silenzioso a fissare la figura per un po', scartando un'idea dopo l'altra, finché non mi sono accorto di una cosa: il quadrilatero $ABCG$ è un deltoide, quindi $AC \perp BG$. Lo stesso per il suo amico $BCDH$. È bello, perché c'è un angolo retto, ma non so come ci possa aiutare. Forse con qualche similitudine! Disegno un paio di rette e guardo i triangoli, se ne trovo due che sembrano somilgiarsi cercherò conferma nell'altro deltoide, in modo da essere sicuro. Ok, fatto. Chiamiamo $I = BG \cap AC$ e $J = EF \cap BC$. Il piano è

dimostrare che ABI è simile a CJF, in quest'ordine. Si va per angoli.

Meglio passare al verde, così riesco a capire quello che faccio. O forse non avrò neanche bisogno di disegnarli. Facciamo così: chiamiamo $\widehat{EAB} = \widehat{BCD} = x$ e $\widehat{EDC} = \widehat{CBA} = y$. Cominciamo da $\widehat{ABI} = \widehat{ABG} = \pi - x - \widehat{AGB}$. Ora, $\widehat{AGB} = \widehat{AGI} = \pi/2 - \widehat{IAG} = \pi/2 - (x - (\pi - y)/2) = \pi + (x + y)/2$ (abbiamo sfruttato il fatto che ABC è isoscele), dunque mettendo insieme otteniamo... uh, devo aver sbagliato qualche conto, ma sono anche stupido: $\widehat{ABI} = y/2$. Uau. E adesso che guardo la tesi, scopro che in effetti la similitudine che voglio dimostrare è vera (ovvia, a posteriori). E l'uguaglianza per gli angoli in A e in C è gratis. Come faccio allora per calcolare $\widehat{JFC}$? Urge un'altra sessione in cui fisso intensamente il disegno.

Ok, sto seriamente pensando di ritornare all'ipotesi di perpendicolarità, ma voglio comunque sfruttare l'idea di "far fittare la terza retta". Prendo EF e AC, quella che deve tornare adesso è BD. Intanto abbiamo il quadrilatero $BIFJ$ ciclico (angoli in I e J retti), ma c'è anche un bel po' di angle chasing da fare. Di nuovo a fissare il disegno, stavolta con intenzioni serie. Ok, vediamo: Sappiamo che $\widehat{EDC} = y$ e $\widehat{DCF} = x - (\pi - y)/2$. Sotto queste ipotesi e sfruttando il quadrilatero ciclico, $\widehat{EFC} = \widehat{IFJ} = \pi - \widehat{IBJ} = \pi - y/2$, dunque $\widehat{FED} = 2\pi - y - x + (\pi - y)/2 - \pi + y/2 = \frac{3}{2}\pi - x - y$. Non mi piace. O forse sì? Per simmetria dovrebbe essere uguale all'angolo $\widehat{AED}$, perciò oltre che "altezza" quella retta è anche bisettrice... No, sto correndo troppo: stiamo considerando solo il segmento AC, altrimenti è come assumere la tesi. Forse ci sono. Ricopio il disegno vuoto per schiarirmi le idee.



Siano $P = EA \cap BC$ e $Q = ED \cap BC$. È banale vedere che EPQ è isoscele di base PQ, perciò la retta che abbiamo tracciato è sia altezza che bisettrice. Riprendiamo i punti F, G, I e J. Adesso è ovvio che il calcolo di prima era giusto, ma in realtà era ovvio anche prima che fosse davvero la bisettrice. Ehi, è vero, ci sono molti modi per approcciarlo! (E io faccio davvero schifo in sintetica)
Vediamo se da qui si può concludere, perché tra poco devo andare. Beh, DB si intersecherà da qualche parte con EJ, ma se non si intersecasse in F l'angolo formato... no, non funziona. Ok, ho capito cosa mi sta sfuggendo: mi sono scordato che ci sono anche i lati uguali in gioco (almeno, spero sia questo). Ora devo proprio andare, cercherò di non pensarci, magari mi aiuta pure a schiarirmi le idee.

Rieccomi. Sono riuscito a pensarci poco, ho pensato di guardare le lunghezze, ma poi ho scartato subito l'idea, poi mi sono reso conto che forse avevo già visto questo problema (ecco perché una vocina nella mia testa mi diceva "prolunga, prolunga... isoscele, isoscele..."), ma forse vi sarete accorti che non ricordo come si concludeva. Quindi non rimane che dare un'occhiata a quello che ho fatto e vedere se c'è qualcosa che mi sono perso. In effetti, se non mi sbaglio dovrebbe essere possibile dire tutte le cose un minimo rilevanti che ho detto finora senza usare l'ipotesi $BC = CD$; vediamo se c'è qualcosa che si può ottenere da quest'ipotesi che mi sono perso. Ok, qualcosina c'è, ma segue più dall'uguaglianza $AB = CD$ e da ovvie uguaglianze d'angoli: i triangoli APB e CQD sono uguali. Non so se può servire a molto, ma è qualcosa. Non vorrei aver bisogno di un hint per questo problema.
Non perdiamoci d'animo: torniamo a fissare il disegno. Anzi, proviamo a ragionare così: abbiamo un triangolo isoscele, da cui ai due vertici con angoli uguali tagliamo due triangoli congruenti come quello poc'anzi mensionati. Per questioni di continuità, tutto bello e caruccio, prima o poi si raggiungerà una condizione come quella data dal disegno, e ciò fisserà la posizione di F sulla retta EJ. Quindi trovare una lunghezza "neutra" e verificare che effettivamente non cambia per simmetria potrebbe funzionare. Oppure... qualcosa di non neutro ma che dipende sempre della posizione di F e che cambia in modo che l'unico punto che lo possa far funzionare anche dall'altra parte è F stesso (ok, ammetto che questo è un po' troppo contorto). Proviamo.
Fissiamo $AB = BC = CD = l$. Voglio ad esempio la lunghezza CQ. Concentriamoci sul triangolo CQD. Gli angoli in C e in D sono rispettivamente $\pi - x$ e $\pi - y$. Di conseguenza, quello in Q è $x + y - \pi$. Per il teorema dei seni, $CQ/\sin \pi - y = l/\sin x + y - \pi \Rightarrow CQ = -l\frac{\sin y}{\sin x+y}$ (ricordando che il seno può anche essere negativo, ha senso). Con ragionamento analogo, $PB = -l\frac{\sin x}{\sin x+y}$. Perciò $JC = PQ/2 - CQ = (PB + l + CQ)/2 - CQ = (PB + l - CQ)/2 = l\left(1/2 + \frac{\sin y - \sin x}{2\sin x+y}\right)$. Ricordiamo che, con la costruzione $F = AC \cap EJ$, $\widehat{JCF} = (\pi - y)/2 = z$, quindi $JF/JC = \sin z/\cos z \Rightarrow JF = l\left(1/2 + \frac{\sin y - \sin x}{2\sin x+y}\right) \cdot \frac{\sin{(\pi-y)/2}}{\cos{(\pi-y)/2}}$, che adesso spero si trasformi in una bellissima espressione simme-

trica in x e y. Intanto trasformiamolo in $l\left(1/2+\frac{\sin y-\sin x}{2\sin x+y}\right)\cdot\frac{\cos y/2}{\sin y/2}$... Sentite, facciamo una bella cosa: cerco le formule, faccio i conti e vi faccio sapere. Eeed eccomi tornato con buone notizie! Bastava scambiare x e y, fare i conti giusti (occhio a non usare bisezione, può essere tricky!) e in effetti l'espressione è simmetrica (viene uguale all'analoga), perciò la lunghezza JF è fissata dagli angoli x e y e dunque è lo stesso punto su EJ, sia che si faccia la costruzione intersecando con AC, sia con BD. Piccola nota: nelle ipotesi c'è quella che il pentagono sia convesso, che aiuta a capire quali seni sono negativi e quali no, così tutti i conti sono validati al cento per cento.