Problem Solving ad Alta Voce

Marco Vergamini

Indice

1 Introduzione **3**

2 Teoria dei numeri **4**
2.1 N1 4
2.2 N2 6

3 Combinatoria **8**
3.1 C1 8

4 Algebra **9**

5 Geometria **10**

1 Introduzione

Attenzione: queste non vogliono essere assolutamente delle soluzioni scritte bene, con tutti i crismi e senza fronzoli inutili. Sono invece un flusso di coscienza di ciò che mi viene in mente man mano che provo il problema: non saranno perciò esenti da tentativi a vuoto, ragionamenti sbagliati, errori di conto, passaggi saltati o dati per ovvi, e un sacco di parole messe alla rinfusa, ed è giusto che sia così. Il contenuto di questo file è pensato per aiutare a capire cosa si pensa e come lo si pensa quando si risolve un problema. Le soluzioni scritte bene sono utili a capire cosa scrivere sulla bella, queste vogliono essere un indizio non su come dev'essere la brutta (cioè, anche), ma soprattutto su quello che vi deve (e quello che NON vi deve) passare per la testa mentre risolvete un problema. Spero che vi sarà utile per affinare i vostri ragionamenti in gara.
Buona lettura!

2 Teoria dei numeri

2.1 N1

Problema Determinare tutti i numeri primi p per i quali esistono interi m, n tali che $p = m^2 + n^2, p \mid m^3 + n^3 - 4$.

Soluzione Premessa: sto scrivendo questa soluzione a mente fredda e problema già risolto, ma un amico mi aveva chiesto di aiutarlo quindi tra messaggi e appunti dovrei riuscire a ricostruire il flusso di pensieri.
Ok, il problema mi sembra di averlo già visto, è uno dei tanti che so come si fanno ma non so fare. La prima cosa che mi viene in mente è che conosciamo tutti i numeri primi che soddisfano la prima equazione, sono quelli della forma $4k + 1$, ma a giudicare dai cubi nell'altra espressione, né questo né i primi di Gauss ci potranno aiutare - dopotutto è teoria piuttosto avanzata.
Ok, quello che vogliamo è diminuire il grado di $m^3 + n^3 - 4$. Proviamo con un po' di congruenze modulo p, otteniamo $(m + n)mn + 4 \equiv 0$, resta comunque di grado 3... però nelle singole è di grado 2, chissà se forse Vieta Jumping... Ma no, che mi dice il cervello! Sono troppo incasinate, e poi si perderebbe l'informazione sul primo.
Facciamo una cosa a caso: proviamo a elevare $(m+n)mn+4$ al quadrato. Viene
$(m + n)^2m^2n^2 + 8(m + n)mn + 16 \equiv 0$
$2m^3n^3 + 8((m + n)mn + 4) - 16 \equiv 0$
$m^3n^3 \equiv 8$ (sto escludendo il caso $p = 2$ che si fa a mano).
Proviamo a scomporlo: $(mn - 2)(m^2n^2 + 2mn + 4) \equiv 0$... no, non mi dice niente.
La prima pazzia ha portato a qualcosa, chissà se... ma sì, eleviamo anche al cubo: $(m + n)^3 + 3 \cdot 4(m + n)^2m^2n^2 + 3 \cdot 16(m + n)mn + 64 \equiv 0$
$8(m + n)^3 + 12((m + n)^2m^2n^2 + 8(m + n)mn + 16) - 48(m + n)mn - 128 \equiv 0$
$8(m + n)^3 - 48((m + n)mn + 4) + 64 \equiv 0$
(di nuovo $p \neq 2$)
$(m + n)^3 + 8 \equiv 0$
$m^3 + n^3 + 3(m^2 + n^2) + 8 \equiv 0 \Rightarrow 12 \equiv 0$.
Inaspettatamente semplice. Rifacciamo i conti per sicurezza (i non stupidi come me fra di voi se ne saranno accorti da un pezzo). Non so più elevare al cubo...
$m^3 + n^3 + 3mn(m + n) + 8 \equiv 0$
$4 + 3mn(m + n) + 8 \equiv 0$
$3[mn(m + n) + 4] \equiv 0$. Ah.
Ok, ripassiamo il manuale. Passo 1: sporcarsi le mani.
Almeno dobbiamo controllare solo la metà dei casi.
$2 = 1^2 + 1^2$, avoja.
$5 = 2^2 + 1^2, 2^3 + 1^3 - 4 = 5$, bene.
$13 = 3^2 + 2^2, 3^3 + 2^3 - 4 = 31$.
$17 = 4^2 + 1^2, 4^3 + 1^3 - 4 = 61$.
$29 = 5^2 + 2^2, 5^3 + 2^3 - 4 = 129$.
Ok. Da dove ricomincio? $m^3n^3 \equiv 8$ sembra un buon risultato.

$(mn-2)(m^2n^2+2mn+4) \equiv 0$. Adesso lo vedo!
$2mn+4 = (m+n)mn+4-(m+n-2)mn$. Allora:
$(mn-2)(m^2n^2-(m+n-2)mn) \equiv 0$. Ovviamente $p \nmid mn$, quindi:
$(mn-2)(mn-m-n+2) \equiv 0$.
Bello, mi piace. Primo caso: $mn \equiv 2$. Ricordando $(m+n)mn+4 \equiv 0$ e $p \neq 2$, otteniamo $m+n \equiv -2$, cioè ad esempio $m \equiv -(n+2)$. Con i cubi:
$-(n+2)^3+n^3-4 \equiv 0$
$6n^2+12n+4 \equiv 0$
$3n^2+6n+2 \equiv 0$. Con i quadrati:
$(n+2)^2+n^2 = 2n^2+4n+4 \equiv 0, p \neq 2 \Rightarrow n^2+2n+2 \equiv 0$.
Sottraggo 3 di questa da quella prima e ottengo $-4 \equiv 0$, bene, non ci sono soluzioni.
Secondo caso: $mn \equiv m+n-2$, cioè $m+n \equiv mn+2$.
Allora $0 \equiv (m+n)mn+4 \equiv m^2n^2+2mn+4$. Mh, no?
$0 \equiv (m+n)mn+4 \equiv (m+n)(m+n-2)+4$
$(m+n)^2-2(m+n)+4 \equiv 0$
$2mn-2(m+n)+4 \equiv 0$
$mn-m-n+2 \equiv 0$. No. Cioè, sì, ma già lo sapevo. Proviamo con $m^3n^3 \equiv 8$.
$(m+n-2)^3 \equiv 8$
$(m+n)^3-6(m+n)^2+12(m+n)-8 \equiv 8$
$m^3+n^3+3mn(m+n)-12mn+12(m+n)-8 \equiv 8$
$4-12-12mn+12(m+n)-8 \equiv 8$
$12(m+n-mn) \equiv 24 \Rightarrow m+n-mn-2 \equiv 0$ (ho diviso anche per 3 perché 3 non può essere). Ma ancora nulla. Rivediamo il caso prima... Ehi! $p=5$ dovrebbe rientrarci! Ah, ho di nuovo sbagliato i conti... vediamo:
$n^2+2n+2 \equiv 0$ è giusto.
$-(n+2)^3+n^3-4 \equiv 0$
$6n^2+12n+12 \equiv 0$ (3 non può essere, ricordiamo)
$n^2+2n+2 \equiv 0$. Sebbene non sia di facile risoluzione, spendiamo una parola su quest'equazione di secondo grado coi moduli. A cose normali verrebbe $n = -1 \pm \sqrt{-1}$ e sappiamo che questa ha soluzione anche modulo p perché $p = m^2+n^2 \Rightarrow p = 4k+1 \Rightarrow i^2 \equiv 1$ ha soluzione modulo p, quindi viene $n \equiv -1 \pm i$. Peccato che se sostituiamo viene $m \equiv -1 \mp i$ e in qualunque equazione li si metta viene l'identità $0 \equiv 0$. Se fosse stato $n \equiv i$ avremmo avuto $m \equiv \pm 1$, che limitava i valori di m: a parte casi piccoli di p fatti a mano, avremmo ottenuto $m^2 > p$ a parte per $m = \pm 1$, che si possono fare a mano con n incognito. Peccato.
Ok, ricapitoliamo. $p = m^2+n^2, p \mid m^3+n^3-4$. Ottengo $(m+n)mn+4 \equiv 0$ da cui $m^3n^3 \equiv 8$. Rimaneggiando questa ho $(mn-2)(mn-m-n+2) \equiv 0$.
*Le parole di darkcrystal rimbombano: "**Principio fondamentale:** ogni problema di teoria dei numeri (serio) ha una parte di congruenze e una parte di disuguaglianze."* (sì, sono andato a cercare la citazione esatta).
Era a questo che mi riferivo quando parlavo di abbassare il grado: per fare le disuguaglianze. Ora che ci sono riuscito, perché mettermi a girare in tondo?
Però, attenzione: il testo dice interi, non interi positivi/non negativi! Ma allora devo rifare i casi a mano...

$13 = (-3)^2 + (-2)^2, (-3)^3 + (-2)^3 - 4 = -39$. Aha! Eccone un altro! Provando a mente 17 sembra che non venga... speriamo! Però le disuguaglianze tocca guardarle coi valori assoluti.
Primo caso: $m^2 + n^2 \mid mn - 2 \Rightarrow m^2 + n^2 \leq |mn - 2|$.
$|mn| \leq (m^2 + n^2)/2 \leq |mn - 2|/2$ (AM-GM)
$2|mn| \leq |mn - 2| \leq |mn| + 2$ (disuguaglianza triangolare)
$|mn| \leq 2$. Si fa abbastanza a mano, non scordiamo che $mn = 2$, se non fosse rientrato nella disuguaglianza, andava fatto a parte. Qui direi che abbiamo fatto.
Secondo caso: con passaggi analoghi si ottiene (tenendosi larghi)
$|mn| \leq |m| + |n| + 2$.
Ok, basta trovare gli interi positivi per cui vale e poi fare tutte le prove a mano con i segni (che gran divertimento). Se $m \geq n \geq 3$ si ottiene
$mn \geq 3m \geq m+n+3 > m+n+2$, nessuna soluzione. Però negli altri casi? Se $n = 2$ viene $2m \leq m + 4 \Rightarrow m \leq 4$ (Yeee! $p = 13$ rientra in questi casi!). Ma se $n = 1$? $m \leq m+3$, che è sempre vero. Ma poi, piccola nota a margine, è ancora una congettura l'esistenza di infiniti primi della forma $m^2 + 1$, che ne so io di 'sta roba? Ne so, solo che sono stupido: se $n = 1$ viene $m^2 + 1 \mid m^3 - 3$ (o, nel caso di negativi $m^3 - 5$). Questa altro che da manuale, è proprio da esercizio da libro di testo - non la faccio, ma è necessaria per risolvere il problema. Per chi non lo sa, con una variabile sola si riesce sempre ad abbassare il grado tramite divisibilità.
Non ci scordiamo dell'eventualità $mn - m - n + 2 = 0$. Anche questo è un esercizio da libro di testo: diventa $(m - 1)(n - 1) = -1$. Il lettore è invitato a portare a termine i conti.

2.2 N2

Problema Sia x_n una successione che parte da x_0 intero e così definita:
$x_{n+1} = -2x_n + 3$. È vero che essa contiene infiniti quadrati perfetti solo se $x_0 = 1$?

Soluzione Se l'affermazione fosse falsa credo che il metodo più ovvio di dimostrarla sarebbe con un controesempio, e visto che se ci fosse un controesempio semplice il problema sarebbe idiota non voglio perdere tempo a cercarlo, quindi punto su "l'affermazione è vera" (se poi c'è davvero un controesempio semplice avrò perso un sacco di tempo).
Bene, quand'è che $3 - 2a = m^2$? Dev'essre $a \equiv m^2 \pmod 3$. Allora $a \equiv 0 \vee 1 \pmod 3$. In generale non ci dice nulla... no, falso: ci dice che zero non può essere percHè dopo non ci sarebbe un quadrato... no, controfalso: dice infiniti, ma non tutti, né definitivamente (ce ne sono infiniti=frequentemente). Ok, modulo 3 è quasi inutile, modulo 2 non ci provo nemmeno.
Facciamo qualche manipolazione: $2a + 1 = 4 - m^2 = (2 + m)(2 - m)$. Non mi dice niente. Mi viene da pensare alla grandezza e al segno dei termini della successione, però non so. Beh, in effetti se $x_n > 0$ allora x_{n+1} è un quadrato se

e solo se $x_n = 1$ e allora dev'essere tutto 1. Sarei tentato di provare una cosa tipo $x_{n-1} = \dfrac{3 - x_n}{2}$. Oppure mi accorgo che sono un coglione e che c'è una formula generica in funzione di x_0 da poter studiare... faccio i conti e vi faccio sapere.
Eccomi: $x_n = 3 \cdot ((-2)^n - 1) + (-2)^n x_0$. Ok, adesso modulo 2^n forse si può dire qualcosa, vediamo. Uh, forse non riesco più a fare i conti bene... $x_n = 1 - (-2)^n + (-2)^n x_0$, adesso garantisco che è quella giusta. Se x_0 è negativo x_1 è positivo, quindi WLOG $x_0 > 0$ e se $x_0 = 1$ è sempre 1, se $x_0 \geq 2$ allora x_n è negativo per i dispari, quindi dobbiamo guardare agli n pari: $n = 2m$, allora vogliamo studiare $1 - 4^m + 4^m x_0$. Ho una certa voglia di tornare ai moduli, ma non sono sicuro che funzionino. Adesso devo andare, riprenderò dopo.
Nuova idea: stringere tra quadrati. Definitivamente $1 - 4^m + 4^m x_0 < (1 - 4^m)^2$... vero? Cercando di non sbagliare i conti, $4^{2m} > 4^m(x_0 + 1)$, sì, sembra definitivamente vero. Sarà anche definitivamente maggiore del quadrato successivo? Mai nella vita, quello pure va come 4^{2m}. Per stargli sotto i quadrati devono essere dell'ordine di 2^{2m}, una cosa del tipo $(2^m)^2 < 1 - 4^m + 4^m x_0$. In effetti è ovvio: se voglio stimare questa cosa tra due quadrati devo stimare la sua radice quadrata, che va circa come $2^m \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor$. Ovviamente $(2^m \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor)^2 \leq 4^m(x_0 - 1) < 4^m x_0 - 4^m + 1$. $(2^m \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor + 1)^2 = 4^m(\lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor)^2 + 2^{m+1} \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor + 1 > 4^m(\sqrt{x_0 - 1} - 1)^2 + 2^{m+1}(\sqrt{x_0 - 1} - 1) + 1$ dove in questo passaggio può servire che $x_0 \geq 2$ per evitare che il quadrato diventi più grande e la disuguaglianza non sia più vera, come effettivamente accade per $x_0 = 1$ (oddio in realtà ricontrollando no, però va comunque specificata 'sta cosa per poi fare il caso strano a parte). Tornando a noi, $4^m(\sqrt{x_0 - 1} - 1)^2 + 2^{m+1}(\sqrt{x_0 - 1} - 1) + 1 = 4^m x_0 - 2 \cdot 4^m \sqrt{x_0 - 1} + 4^m + 1 + 2 \cdot 2^m(\sqrt{x_0 - 1} - 1) + 1$... non mi sembra avere molte speranze. Fatemi rivedere com'è fatta la versione con ancora le parti intere.Vogliamo $4^m(\lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor)^2 + 2^{m+1} \lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor + 1 > 4^m x_0 - 4^m + 1$. Purtroppo però in generale $x_0 - 1 > (\lfloor \sqrt{x_0 - 1} \rfloor)^2$, quindi è falso. Sto avendo idee sul prendere $x_0 = y^2$ per usare y. Ok, proviamo.
WLOG $x_0 = y^2$, sennò bella, abbiamo finito. Definitivamente $(2^m y)^2 > 4^m y^2 - 4^m + 1$. E $(2^m y - 1)^2$? $(2^m y - 1)^2 = 4^m y^2 - 4^m y + 1 < 4^m y^2 - 4^m + 1$ per $y > 1$. Yeee, in tre righe ho chiuso l'idea del paragrafo precedente. Potevo essere più veloce, ma almeno ho proseguito nella giusta strada.

3 Combinatoria

3.1 C1

Problema Dimostrare che $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Soluzione Come prima cosa ho pensato a un'induzione, ma sotto ci sono un k e un $n-k$ e non saprei come gestirli. Proviamo con un'intuizione combinatoria: vogliamo scegliere n persone in un gruppo di di $2n$. Possiamo fare così: dividiamo il gruppo di $2n$ persone in due gruppi da n (fissati). Dobbiamo allora sceglierne k da una parte e $n-k$, dove k può andare da 0 a n. Dato che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, il gioco è fatto.

4 Algebra

5 Geometria