Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili complesse

22 Settembre 2023

Università di Pisa
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Candidato: Marco Vergamini Relatore: Prof. Marco Abate

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *una funzione olomorfa.*

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *la funzione f ha un punto fisso nel disco;*

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *la funzione f ha un punto fisso nel disco; oppure,*
- *esiste un unico punto del bordo del disco tale che la successione delle iterate di f converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Il teorema di Wolff-Denjoy

- Abate, 1991: generalizzazione in più variabili al caso di domini limitati, strettamente pseudoconvessi e taut.

- Abate, 1991: generalizzazione in più variabili al caso di domini limitati, strettamente pseudoconvessi e taut.
Cosa cambia: non più un punto fisso, ma orbite relativamente compatte. In questo caso, la dinamica è nota;

Il teorema di Wolff-Denjoy

- Abate, 1991: generalizzazione in più variabili al caso di domini limitati, strettamente pseudoconvessi e taut.
Cosa cambia: non più un punto fisso, ma orbite relativamente compatte. In questo caso, la dinamica è nota;
- Abate, Heinzner, 1992: esistono esempi con orbite relativamente compatte, ma senza punti fissi;

Il teorema di Wolff-Denjoy

- Abate, 1991: generalizzazione in più variabili al caso di domini limitati, strettamente pseudoconvessi e taut.
Cosa cambia: non più un punto fisso, ma orbite relativamente compatte. In questo caso, la dinamica è nota;
- Abate, Heinzner, 1992: esistono esempi con orbite relativamente compatte, ma senza punti fissi;
- Balogh, Bonk, 2000: i domini limitati e strettamente pseudoconvessi, dotati di un'opportuna distanza, sono Gromov-iperbolici.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x;Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x;Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.
Se X è connessa, la *pseudodistanza di Kobayashi* è k_X, la forma integrata di K_X.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.
Se X è connessa, la *pseudodistanza di Kobayashi* è k_X, la forma integrata di K_X.

Le funzioni olomorfe sono semicontrazioni sia rispetto a K_X che rispetto a k_X.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.
Se X è connessa, la *pseudodistanza di Kobayashi* è k_X, la forma integrata di K_X.

Le funzioni olomorfe sono semicontrazioni sia rispetto a K_X che rispetto a k_X.
Se k_X è una distanza, induce la topologia di varietà; in tal caso, X è detta *Kobayashi-iperbolica*.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo;

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha

$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t-s| + \kappa;$$

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha

$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t-s| + \kappa;$$

2. σ è assolutamente continua (quindi $\sigma'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in I$) e per quasi ogni $t \in I$ si ha

$$K_X\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq \lambda.$$

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

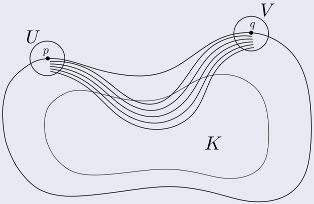
1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;

La condizione di visibilità

Definizione

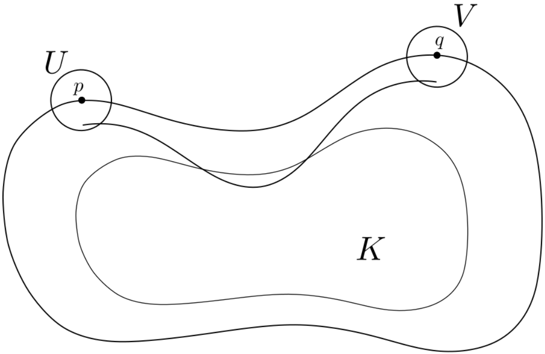
Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ,κ)-*visibile* se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ,κ)-simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti $p, q \in \partial_Y X$ con $p \neq q$, esistono in $\overline{X}$ due intorni V e W, di p e q rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto K di X tali che ogni (λ,κ)-simil-geodetica in X che collega un punto di V a un punto di W interseca K.



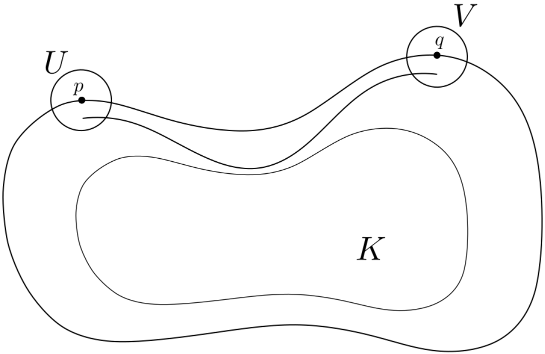
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



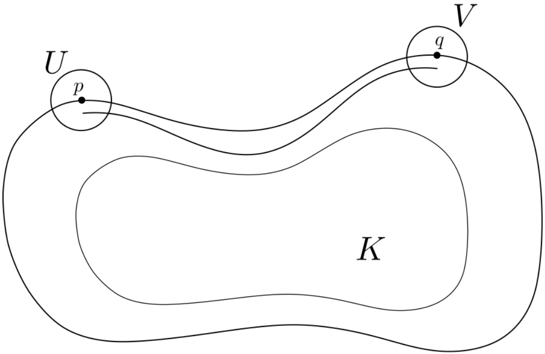
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



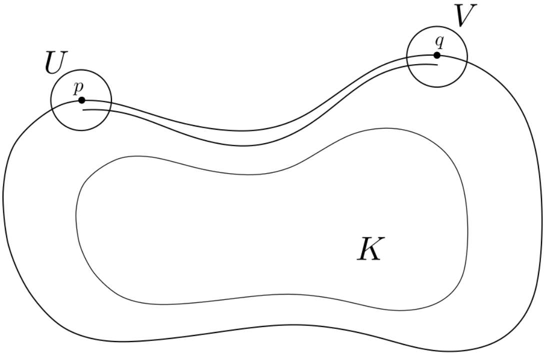
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



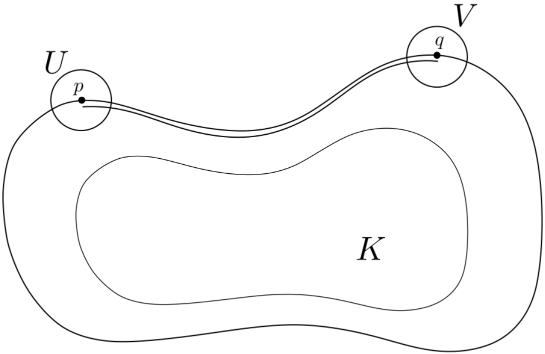
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.

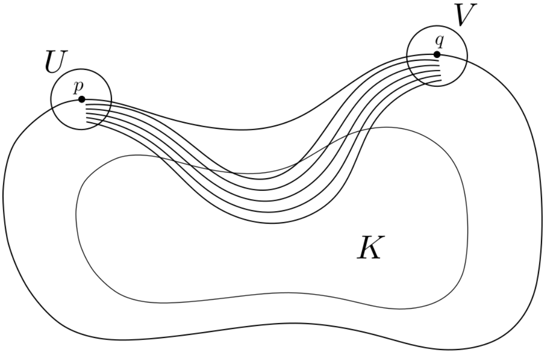


La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



La condizione di visibilità



Condizione di visibilità: le simil-geodetiche "curvano verso l'interno", rimanendo dentro il compatto K.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Definizione

Una varietà complessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura (rispetto alla topologia compatta-aperta) di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Definizione

Una varietà complessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura (rispetto alla topologia compatta-aperta) di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞.

Si può dimostrare che ogni varietà taut è Kobayashi-iperbolica.

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa.

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X *una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa* Y*. Supponiamo che esista un* $\kappa_0 > 0$ *tale che* X *sia* $(1, \kappa_0)$*-visibile.*
Sia $F : X \longrightarrow X$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di* X *tramite* F *sono relativamente compatte in* X*;*

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial_Y X$ tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo "Wolff-Denjoy"

1. dall'ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

1. dall’ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;
2. dalle ipotesi di visibilità e di relativa compattezza segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza uniforme sui compatti a una costante nel bordo della varietà;

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

1. dall’ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;
2. dalle ipotesi di visibilità e di relativa compattezza segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza uniforme sui compatti a una costante nel bordo della varietà;
3. sempre per la condizione di visibilità, tale limite è lo stesso per ogni sottosuccessione, dunque dev’essere il limite di tutta la successione.

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X *una varietà taut e consideriamo* $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *la successione* $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *delle iterate di* f *non è compattamente divergente;*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
2. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
2. *la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*
3. *la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(X, X)$;*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
2. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*
3. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(X, X)$;*
4. *l'orbita di z è relativamente compatta in X per ogni $z \in X$;*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
2. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*
3. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(X, X)$;*
4. *l'orbita di z è relativamente compatta in X per ogni $z \in X$;*
5. *esiste $z_0 \in X$ la cui orbita è relativamente compatta in X.*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Esempio

La palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ meno l'origine è Kobayashi-iperbolica e (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$, ma non è taut.

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Esempio

La palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ meno l'origine è Kobayashi-iperbolica e (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$, ma non è taut. La funzione $f(z, w) = (z/2, e^{i\theta} w)$ è un esempio che mostra come l'ipotesi taut sia indispensabile nel teorema di Abate.

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Esempio

La palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ meno l'origine è Kobayashi-iperbolica e (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$, ma non è taut. La funzione $f(z, w) = (z/2, e^{i\theta} w)$ è un esempio che mostra come l'ipotesi taut sia indispensabile nel teorema di Abate. Inoltre, mostra anche che è indispensabile nel teorema di tipo "Wolff-Denjoy".

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente.

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo, troviamo (a meno di sottosuccessioni) $z_0, z_1 \in Z$ con $k_Z(z_0, z_1) < \kappa_0/2$ e $f_n(z_0) \longrightarrow \xi_0, f_n(z_1) \longrightarrow \xi_1$, dove $\xi_0, \xi_1 \in \partial_Y X$ e $\xi_0 \neq \xi_1$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo, troviamo (a meno di sottosuccessioni) $z_0, z_1 \in Z$ con $k_Z(z_0, z_1) < \kappa_0/2$ e $f_n(z_0) \longrightarrow \xi_0, f_n(z_1) \longrightarrow \xi_1$, dove $\xi_0, \xi_1 \in \partial_Y X$ e $\xi_0 \neq \xi_1$.
Le varietà Kobayashi-iperboliche sono connesse da $(1, \kappa)$-simil-geodetiche per $\kappa > 0$, quindi prendiamone una $\sigma : [0, T] \longrightarrow Z$ per $\kappa = \kappa_0/2$ con $\sigma(0) = z_0, \sigma(T) = z_1$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Traccia della dimostrazione: Si verifica che le curve $f_n \circ \sigma$ sono $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Traccia della dimostrazione: Si verifica che le curve $f_n \circ \sigma$ sono $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche. Per visibilità, esiste un compatto K tale che

$$\varnothing \neq K \cap f_n\big(\sigma([0, T])\big)$$

per ogni n, ma $\sigma([0, T])$ è compatto e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è compattamente divergente, contraddizione. □

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 2

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

Lemma 2

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 2

Sia X *una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa* Y. *Supponiamo che esista* $\kappa_0 > 0$ *tale che* X *sia* $(1, \kappa_0)$*-visibile. Sia* $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ *tale che la successione* $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *sia compattamente divergente.*
Supponiamo che esistano un compatto $K \subseteq X$, *una funzione strettamente crescente* $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *e* $\xi \in \partial_Y X$ *tali che la successione* $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ *converge alla costante* ξ *uniformemente su* K.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 2

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Supponiamo che esistano un compatto $K \subseteq X$, una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\xi \in \partial_Y X$ tali che la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente su K. Allora la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- si ha $z_n \longrightarrow \tilde{z} \in H$;

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- si ha $z_n \longrightarrow \tilde{z} \in H$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \longrightarrow \xi' \in \partial_Y X$;

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- si ha $z_n \longrightarrow \tilde{z} \in H$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \longrightarrow \xi' \in \partial_Y X$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(\tilde{z}) \longrightarrow \xi''$.

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- si ha $z_n \longrightarrow \tilde{z} \in H$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \longrightarrow \xi' \in \partial_Y X$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(\tilde{z}) \longrightarrow \xi''$.

A meno di prendere prima una sottosuccessione che converga puntualmente a ξ su tutta X, abbiamo $\xi'' = \xi$.

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- si ha $z_n \longrightarrow \tilde{z} \in H$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \longrightarrow \xi' \in \partial_Y X$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(\tilde{z}) \longrightarrow \xi''$.

A meno di prendere prima una sottosuccessione che converga puntualmente a ξ su tutta X, abbiamo $\xi'' = \xi$. Poiché $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni n, abbiamo $\xi' \neq \xi$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- si ha $z_n \longrightarrow \tilde{z} \in H$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \longrightarrow \xi' \in \partial_Y X$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(\tilde{z}) \longrightarrow \xi''$.

A meno di prendere prima una sottosuccessione che converga puntualmente a ξ su tutta X, abbiamo $\xi'' = \xi$. Poiché $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni n, abbiamo $\xi' \neq \xi$. Infine,

$$k_X\big(F^{\mu(j_n)}(z_n), F^{\mu(j_n)}(\tilde{z})\big) \leq k_X(z_n, \tilde{z}) \longrightarrow 0;$$

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Traccia della dimostrazione: sia ξ dato dal Lemma 1 applicato a $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Supponiamo per assurdo che esistano un intorno U di ξ, un compatto H di X, una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e degli $z_n \in H$ tali che:

- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- si ha $z_n \longrightarrow \tilde{z} \in H$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(z_n) \longrightarrow \xi' \in \partial_Y X$;
- si ha $F^{\mu(j_n)}(\tilde{z}) \longrightarrow \xi''$.

A meno di prendere prima una sottosuccessione che converga puntualmente a ξ su tutta X, abbiamo $\xi'' = \xi$. Poiché $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni n, abbiamo $\xi' \neq \xi$. Infine,

$$k_X\big(F^{\mu(j_n)}(z_n), F^{\mu(j_n)}(\tilde{z})\big) \leq k_X(z_n, \tilde{z}) \longrightarrow 0;$$

si può dimostrare che, sotto condizioni di visibilità, questo non è possibile per successioni che tendono a punti distinti del bordo. $\square$

Caso non relativamente compatto

Esempio

Consideriamo $Y = \mathbb{C}, X = \{0 < \mathfrak{Im} z < 1\}$ e $F(z) = z + 1$ o $F(z) = z - 1$.

Caso non relativamente compatto

Esempio

Consideriamo $Y = \mathbb{C}, X = \{0 < \mathfrak{Im} z < 1\}$ e $F(z) = z + 1$ o $F(z) = z - 1$.

$Y = \mathbb{C}$

$$\xleftarrow{z \longmapsto z-1} \qquad X = \{0 < \mathfrak{Im} z < 1\} \qquad \xrightarrow{z \longmapsto z+1}$$

Caso non relativamente compatto

Definizione

Sia X uno spazio topologico non compatto.

Caso non relativamente compatto

Definizione

Sia X uno spazio topologico non compatto. Una *fine* di X è una funzione e con dominio $\{K \subseteq X \mid K \text{ è compatto}\}$ tale che:

Caso non relativamente compatto

Definizione

Sia X uno spazio topologico non compatto. Una *fine* di X è una funzione e con dominio $\{K \subseteq X \mid K \text{ è compatto}\}$ tale che:

1. a ogni compatto $K \subseteq X$ associa una componente connessa non vuota di $X \setminus K$;

Caso non relativamente compatto

Definizione

Sia X uno spazio topologico non compatto. Una *fine* di X è una funzione e con dominio $\{K \subseteq X \mid K \text{ è compatto}\}$ tale che:

1. a ogni compatto $K \subseteq X$ associa una componente connessa non vuota di $X \setminus K$;
2. per ogni coppia di compatti $K_1 \subseteq K_2 \subseteq X$ si ha $e(K_2) \subseteq e(K_1)$.

Caso non relativamente compatto

Definizione

Sia X uno spazio topologico non compatto. Una *fine* di X è una funzione e con dominio $\{K \subseteq X \mid K \text{ è compatto}\}$ tale che:

1. a ogni compatto $K \subseteq X$ associa una componente connessa non vuota di $X \setminus K$;
2. per ogni coppia di compatti $K_1 \subseteq K_2 \subseteq X$ si ha $e(K_2) \subseteq e(K_1)$.

Indichiamo con $\mathcal{E}(X)$ l'insieme di tutte le fini di X.

Caso non relativamente compatto

Definizione

Sia X uno spazio topologico non compatto. Una *fine* di X è una funzione e con dominio $\{K \subseteq X \mid K \text{ è compatto}\}$ tale che:

1. a ogni compatto $K \subseteq X$ associa una componente connessa non vuota di $X \setminus K$;
2. per ogni coppia di compatti $K_1 \subseteq K_2 \subseteq X$ si ha $e(K_2) \subseteq e(K_1)$.

Indichiamo con $\mathcal{E}(X)$ l'insieme di tutte le fini di X.

Proposizione

Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso, localmente compatto, di Hausdorff e che ammette un'esaustione in compatti.

Caso non relativamente compatto

Definizione

Sia X uno spazio topologico non compatto. Una *fine* di X è una funzione e con dominio $\{K \subseteq X \mid K \text{ è compatto}\}$ tale che:

1. a ogni compatto $K \subseteq X$ associa una componente connessa non vuota di $X \setminus K$;
2. per ogni coppia di compatti $K_1 \subseteq K_2 \subseteq X$ si ha $e(K_2) \subseteq e(K_1)$.

Indichiamo con $\mathcal{E}(X)$ l'insieme di tutte le fini di X.

Proposizione

Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso, localmente compatto, di Hausdorff e che ammette un'esaustione in compatti. Allora $X^{\mathcal{E}} = X \cup \mathcal{E}(X)$ ammette una topologia che lo rende una compattificazione di X.

Caso non relativamente compatto

Problema: se X è sottovarietà di Y, non sempre $\overline{X}$ è localmente connessa.

Caso non relativamente compatto

Problema: se X è sottovarietà di Y, non sempre $\overline{X}$ è localmente connessa.

Teorema (Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut di una varietà complessa Y.

Caso non relativamente compatto

Problema: se X è sottovarietà di Y, non sempre $\overline{X}$ è localmente connessa.

Teorema (Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile.

Caso non relativamente compatto

Problema: se X è sottovarietà di Y, non sempre $\overline{X}$ è localmente connessa.

Teorema (Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

Caso non relativamente compatto

Problema: se X è sottovarietà di Y, non sempre $\overline{X}$ è localmente connessa.

Teorema (Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

1. *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X;*

Caso non relativamente compatto

Problema: se X è sottovarietà di Y, non sempre $\overline{X}$ è localmente connessa.

Teorema (Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

1. *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
2. *esiste un unico punto $\xi \in \partial^{\mathcal{E}} X$ tale che la successione delle iterate di F converge alla costante ξ in $C^0(X, \overline{X}^{\mathcal{E}})$.*

Caso non relativamente compatto

Problema: se X è sottovarietà di Y, non sempre $\overline{X}$ è localmente connessa.

Teorema (Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

1. *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
2. *esiste un unico punto $\xi \in \partial^{\mathcal{E}} X$ tale che la successione delle iterate di F converge alla costante ξ in $C^0(X, \overline{X}^{\mathcal{E}})$.*

Domanda: ultravisibilità implica locale connessione della chiusura?

Grazie per l'attenzione!

Bibliografia principale

- M. Abate: Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Serie IV*, **18** (1991), no. 2, 167–191
- G. Bharali, A. Maitra: A weak notion of visibility, a family of examples, and Wolff-Denjoy theorems. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. Serie V*, **22** (2021), no. 1, 195–240
- G. Bharali, A. Zimmer: Goldilocks domains, a weak notion of visibility, and applications. *Adv. Math.*, **310** (2017), 377–425
- G. Bharali, A. Zimmer: Unbounded visibility domains, the end compactification, and applications. Preprint, arXiv:2206.13869v1 (2022)
- V. S. Chandel, A. Maitra, A. D. Sarkar: Notions of Visibility with respect to the Kobayashi distance: Comparison and Applications. Preprint, arXiv:2111.00549v1 (2021)