Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili complesse

22 Settembre 2023 (realisticamente)

Università di Pisa
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Candidato: Marco Vergamini   Relatore: Prof. Marco Abate

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa.

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *la funzione* f *ha un punto fisso nel disco;*

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *la funzione f ha un punto fisso nel disco; oppure,*
- *esiste un unico punto del bordo del disco tale che la successione delle iterate di f converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) ω su $\mathbb{D}$ è data da

$$\omega(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$k_X(z,w) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1},\zeta_j) \middle| \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N},\ \text{punti } \zeta_0,\dots,\zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1,\dots,\varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \\ \varphi_m(\zeta_m) = w \text{ e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1,\dots,m-1 \end{array} \right\}$$

per $z, w \in X$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$k_X(z,w) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1},\zeta_j) \middle| \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0,\dots,\zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1,\dots,\varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \\ \varphi_m(\zeta_m) = w \text{ e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1,\dots,m-1 \end{array} \right\}$$

per $z, w \in X$.
Se k_X è una distanza, diremo che X è *Kobayashi-iperbolica*.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa.*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

1. *le orbite di* f *sono relativamente compatte in* Ω*;*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

1. *le orbite di* f *sono relativamente compatte in* Ω*; oppure,*
2. *esiste un unico punto di* $\partial\Omega$ *tale che le iterate di* f *convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

1. *le orbite di* f *sono relativamente compatte in* Ω*; oppure,*
2. *esiste un unico punto di* $\partial\Omega$ *tale che le iterate di* f *convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

1. *le orbite di f sono relativamente compatte in Ω; oppure,*
2. *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.
Allora soddisfa le ipotesi di un teorema di Karlsson del 2001, per cui le orbite sono limitate (in k_Ω) o convergono a un unico punto del bordo.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

1. *le orbite di* f *sono relativamente compatte in* Ω*; oppure,*
2. *esiste un unico punto di* $\partial\Omega$ *tale che le iterate di* f *convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.
Allora soddisfa le ipotesi di un teorema di Karlsson del 2001, per cui le orbite sono limitate (in k_Ω) o convergono a un unico punto del bordo.
Per avere la convergenza uniforme sui compatti si applica il teorema di Montel. □

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$\begin{aligned} K_X(x;Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\} \end{aligned}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo;

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha

$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t-s| + \kappa;$$

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha
$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t-s| + \kappa;$$
2. σ è assolutamente continua rispetto a d_X (quindi $\sigma'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in I$) e per quasi ogni $t \in I$ si ha
$$K_X\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq \lambda.$$

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;

La condizione di visibilità

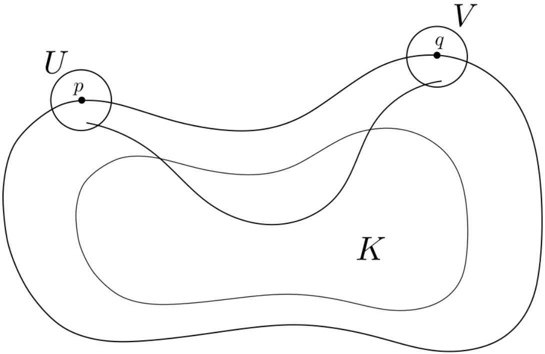
Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti $p, q \in \partial_Y X$ con $p \neq q$, esistono in $\overline{X}$ due intorni V e W, di p e q rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto K di X tali che ogni (λ, κ)-simil-geodetica in X che collega un punto di V a un punto di W interseca K.

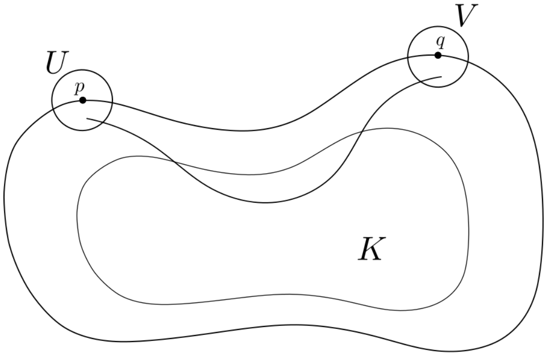
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



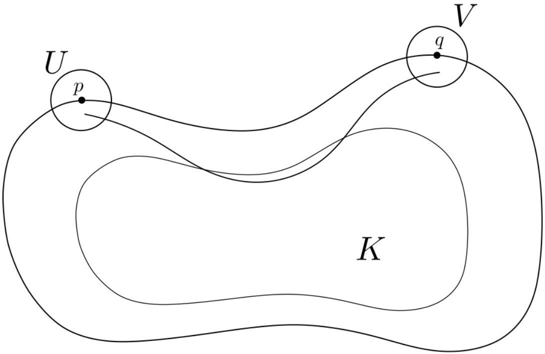
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



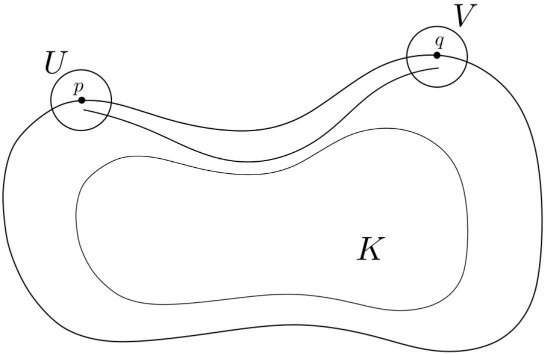
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



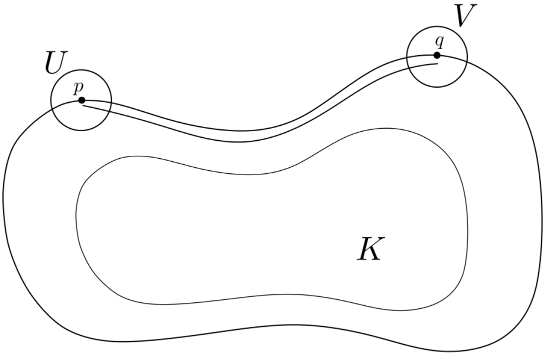
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.

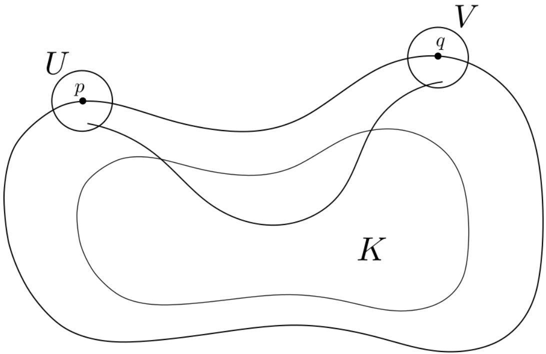


La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



La condizione di visibilità



Condizione di visibilità: le simil-geodetiche "curvano verso l'interno", rimanendo dentro il compatto K.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Definizione

Una varietà complessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura (rispetto alla topologia compatta-aperta) di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞.

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Definizione

Una varietà complessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura (rispetto alla topologia compatta-aperta) di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞.

Si può dimostrare che ogni varietà taut è Kobayashi-iperbolica.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X;*

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial_Y X$ tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze;

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze; usando tali disuguaglianze si può dimostrare che k_Ω, vicino al bordo, differisce per una costante da una certa funzione g che è sostanzialmente l'equivalente di r per Ω (si dice che k_Ω e g sono quasi-isometriche).

Strada per la dimostrazione del teorema di BB

1. Dato (Z, d) spazio metrico completo e limitato, si può costruire uno spazio Gromov-iperbolico $\big(\mathrm{Con}(Z), r\big)$ tale che Z è identificato con il bordo.
2. La metrica di Kobayashi soddisfa una particolare catena di disuguaglianze; usando tali disuguaglianze si può dimostrare che k_Ω, vicino al bordo, differisce per una costante da una certa funzione g che è sostanzialmente l'equivalente di r per Ω (si dice che k_Ω e g sono quasi-isometriche).
3. Poiché la Gromov-iperbolicità è invariante per quasi-isometrie, questo ci permette di dire che (Ω, k_Ω) è Gromov-iperbolico.