Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili complesse

22 Settembre 2023 (realisticamente)

Università di Pisa
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Candidato: Marco Vergamini   Relatore: Prof. Marco Abate

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *una funzione olomorfa.*

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *la funzione f ha un punto fisso nel disco;*

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$.

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *la funzione f ha un punto fisso nel disco; oppure,*
- *esiste un unico punto del bordo del disco tale che la successione delle iterate di f converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) ω su $\mathbb{D}$ è data da

$$\omega(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$k_X(z,w) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1},\zeta_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N},\ \text{punti } \zeta_0,\dots,\zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1,\dots,\varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \\ \varphi_m(\zeta_m) = w \text{ e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1,\dots,m-1 \end{array} \right\}$$

per $z, w \in X$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$k_X(z,w) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1},\zeta_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N},\ \text{punti } \zeta_0,\dots,\zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1,\dots,\varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \\ \varphi_m(\zeta_m) = w \text{ e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1,\dots,m-1 \end{array} \right\}$$

per $z, w \in X$.

Se k_X è una distanza, diremo che X è *Kobayashi-iperbolica*; in tal caso, si può dimostrare che k_X induce la topologia di varietà.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste una *funzione di definizione* $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste una *funzione di definizione* $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle\bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste una *funzione di definizione* $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle\bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso in* p se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2, cioè esiste una *funzione di definizione* $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso in* p se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$.
Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se è strettamente pseudoconvesso in p per ogni $p \in \partial\Omega$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa.*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

1. *le orbite di f sono relativamente compatte in Ω;*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

1. *le orbite di* f *sono relativamente compatte in* Ω*; oppure,*
2. *esiste un unico punto di* $\partial\Omega$ *tale che le iterate di* f *convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

1. *le orbite di* f *sono relativamente compatte in* Ω*; oppure,*
2. *esiste un unico punto di* $\partial\Omega$ *tale che le iterate di* f *convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

1. *le orbite di* f *sono relativamente compatte in* Ω*; oppure,*
2. *esiste un unico punto di* $\partial\Omega$ *tale che le iterate di* f *convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.
Allora soddisfa le ipotesi di un teorema di Karlsson del 2001, per cui le orbite sono limitate (in k_Ω) o convergono a un unico punto del bordo.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

1. *le orbite di f sono relativamente compatte in Ω; oppure,*
2. *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.
Allora soddisfa le ipotesi di un teorema di Karlsson del 2001, per cui le orbite sono limitate (in k_Ω) o convergono a un unico punto del bordo.
Per avere la convergenza uniforme sui compatti si applica il teorema di Montel. $\square$

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x;Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x;Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Se X è connessa, si può dimostrare che k_X è la forma integrata di K_X.

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x;Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Se X è connessa, si può dimostrare che k_X è la forma integrata di K_X. Le funzioni olomorfe sono semicontrazioni sia rispetto a K_X che rispetto a k_X.

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo;

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha

$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t - s| + \kappa;$$

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha
$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t-s| + \kappa;$$
2. σ è assolutamente continua (quindi $\sigma'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in I$) e per quasi ogni $t \in I$ si ha
$$K_X\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq \lambda.$$

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$.

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

La condizione di visibilità

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;

La condizione di visibilità

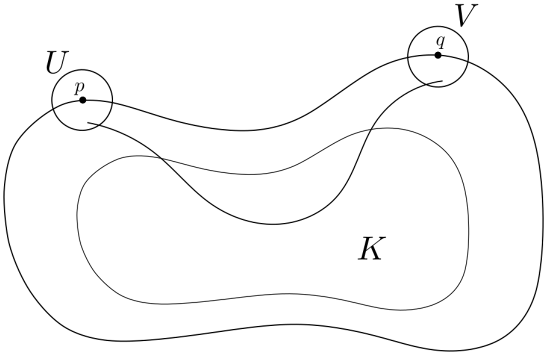
Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti $p, q \in \partial_Y X$ con $p \neq q$, esistono in $\overline{X}$ due intorni V e W, di p e q rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto K di X tali che ogni (λ, κ)-simil-geodetica in X che collega un punto di V a un punto di W interseca K.

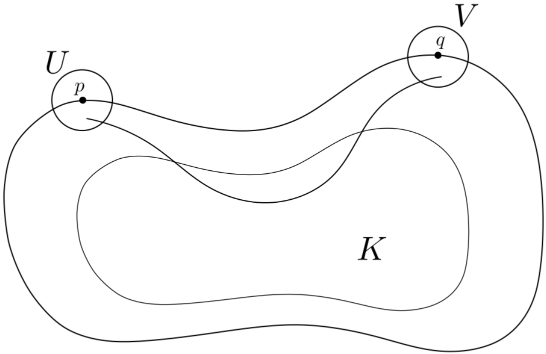
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



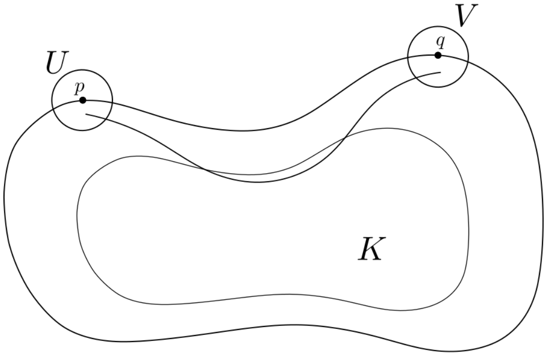
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



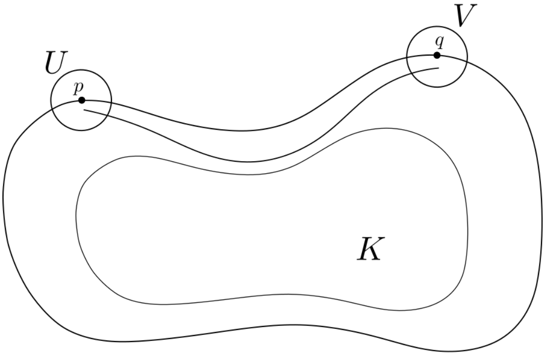
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



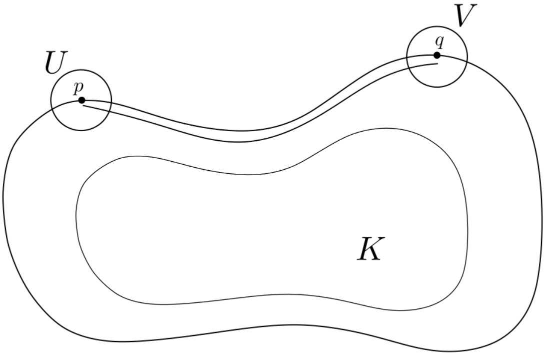
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.

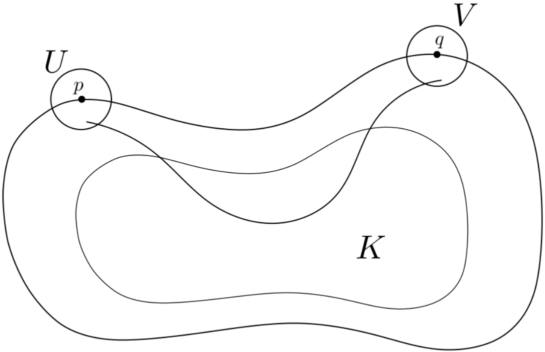


La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K.



La condizione di visibilità



Condizione di visibilità: le simil-geodetiche “curvano verso l’interno”, rimanendo dentro il compatto K.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Definizione

Una varietà complessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura (rispetto alla topologia compatta-aperta) di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Definizione

Una varietà complessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura (rispetto alla topologia compatta-aperta) di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞.

Si può dimostrare che ogni varietà taut è Kobayashi-iperbolica.

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X;*

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.
Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial_Y X$ tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

Definizione

Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, è detto *dominio Caltrop* se esiste un insieme finito di punti $\{q_1, \ldots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$ tale che:

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

Definizione

Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, è detto *dominio Caltrop* se esiste un insieme finito di punti $\{q_1, \ldots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$ tale che:

- il sottoinsieme del bordo $\partial\Omega \setminus \{q_1, \ldots, q_N\}$ è C^2 e Ω è strettamente pseudoconvesso in ogni punto di tale insieme;

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

Definizione

Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, è detto *dominio Caltrop* se esiste un insieme finito di punti $\{q_1, \ldots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$ tale che:

- il sottoinsieme del bordo $\partial\Omega \setminus \{q_1, \ldots, q_N\}$ è C^2 e Ω è strettamente pseudoconvesso in ogni punto di tale insieme;
- per ogni $j = 1, \ldots, N$ esistono un intorno aperto e connesso $V_j \ni q_j$, due costanti $p_j \in (1, 3/2)$ e $C_j > 1$, una trasformazione unitaria $\mathbb{U}^{(j)}$ e una funzione continua $\psi_j : [0, A_j] \longrightarrow [0, +\infty)$, con $A_j > 0$, tali che $\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j)$ è un "solido di rivoluzione":

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \Big\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n \in (0, A_j), \\ (\mathfrak{Im} z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\mathfrak{Re} z_n)^2 \Big\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$.

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \Bigg\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n \in (0, A_j), \\ (\mathfrak{Im} z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\mathfrak{Re} z_n)^2 \Bigg\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \Bigg\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n \in (0, A_j),$$
$$(\mathfrak{Im} z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\mathfrak{Re} z_n)^2 \Bigg\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

- è di classe C^2 su $(0, A_j)$;

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re}\, z_n \in (0, A_j), \right.$$
$$\left. (\mathfrak{Im}\, z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\mathfrak{Re}\, z_n)^2 \right\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

- è di classe C^2 su $(0, A_j)$;
- per ogni $x \in [0, A_j]$ si ha $(1/C_j)x^{p_j} \leq \psi_j(x) \leq C_j x^{p_j}$;

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n \in (0, A_j), \right.$$
$$\left. (\mathfrak{Im} z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\mathfrak{Re} z_n)^2 \right\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

- è di classe C^2 su $(0, A_j)$;
- per ogni $x \in [0, A_j]$ si ha $(1/C_j)x^{p_j} \leq \psi_j(x) \leq C_j x^{p_j}$;
- si ha che ψ_j è strettamente crescente e ψ_j' è crescente su $(0, A_j)$;

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \Bigg\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n \in (0, A_j),$$

$$(\mathfrak{Im} z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\mathfrak{Re} z_n)^2 \Bigg\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

- è di classe C^2 su $(0, A_j)$;
- per ogni $x \in [0, A_j]$ si ha $(1/C_j)x^{p_j} \leq \psi_j(x) \leq C_j x^{p_j}$;
- si ha che ψ_j è strettamente crescente e ψ_j' è crescente su $(0, A_j)$;
- si ha $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \psi_j(x)\psi_j''(x) = 0$.

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

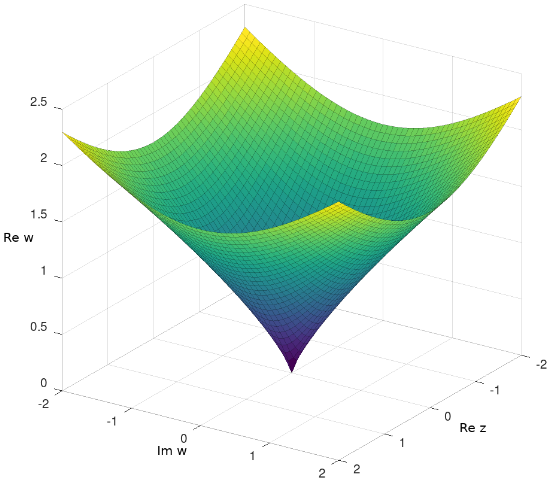


Figura: proiezione a $\mathfrak{Im} z = 0$ del bordo della punta in $\mathbb{C}^2$ con coordinate (z, w) corrispondente a $\psi(x) = x^{5/4}$

Costruzione di un dominio Caltrop in $\mathbb{C}^2$

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

Costruzione di un dominio Caltrop in $\mathbb{C}^2$

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;

Costruzione di un dominio Caltrop in $\mathbb{C}^2$

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
2. per ogni $t \in (0, \beta)$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$.

Costruzione di un dominio Caltrop in $\mathbb{C}^2$

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
2. per ogni $t \in (0, \beta)$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$. Il dominio cercato è

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\mathfrak{Im} w|^2 < C\psi(\mathfrak{Re} w)^2, -A < \mathfrak{Re} w < \beta\},$$

dove $C > 0$ è una costante opportunamente scelta.

Costruzione di un dominio Caltrop in $\mathbb{C}^2$

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
2. per ogni $t \in (0, \beta)$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$. Il dominio cercato è

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\mathfrak{Im} w|^2 < C\psi(\mathfrak{Re} w)^2, -A < \mathfrak{Re} w < \beta\},$$

dove $C > 0$ è una costante opportunamente scelta.
Le verifiche necessarie seguono da come è definita ψ;

Costruzione di un dominio Caltrop in $\mathbb{C}^2$

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
2. per ogni $t \in (0, \beta)$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$. Il dominio cercato è

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\mathfrak{Im} w|^2 < C\psi(\mathfrak{Re} w)^2, -A < \mathfrak{Re} w < \beta\},$$

dove $C > 0$ è una costante opportunamente scelta.
Le verifiche necessarie seguono da come è definita ψ; per la pseudoconvessità, la funzione di definizione è

$$\rho(z, w) := |z|^2 + |\mathfrak{Im} w|^2 - C\psi(\mathfrak{Re} w)^2.$$

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Poniamo

$$M_\Omega(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_\Omega(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_Ω indica la distanza euclidea da $\partial\Omega$.

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Poniamo

$$M_\Omega(r) := \sup\left\{\frac{1}{K_\Omega(x;v)} \mid x \in \Omega, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1\right\},$$

dove δ_Ω indica la distanza euclidea da $\partial\Omega$.

Teorema (Bharali, Maitra, 2021)

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$.

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Poniamo

$$M_\Omega(r) := \sup\left\{\frac{1}{K_\Omega(x;v)} \mid x \in \Omega, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1\right\},$$

dove δ_Ω indica la distanza euclidea da $\partial\Omega$.

Teorema (Bharali, Maitra, 2021)

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \longrightarrow +\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$, tali che:

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Poniamo

$$M_\Omega(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_\Omega(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_Ω indica la distanza euclidea da $\partial\Omega$.

Teorema (Bharali, Maitra, 2021)

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \longrightarrow +\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$, tali che:

1. *si ha $k_\Omega(z_0, z) \leq f\big(1/\delta_\Omega(z)\big)$ per ogni $z \in \Omega$;*

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Poniamo

$$M_\Omega(r) := \sup\left\{ \frac{1}{K_\Omega(x;v)} \mid x \in \Omega, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_Ω indica la distanza euclidea da $\partial\Omega$.

Teorema (Bharali, Maitra, 2021)

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \longrightarrow +\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$, tali che:

1. *si ha $k_\Omega(z_0, z) \leq f\big(1/\delta_\Omega(z)\big)$ per ogni $z \in \Omega$;*
2. *si ha $M_\Omega(r) \longrightarrow 0$ per $r \longrightarrow 0$;*

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Poniamo

$$M_\Omega(r) := \sup\left\{\frac{1}{K_\Omega(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1\right\},$$

dove δ_Ω indica la distanza euclidea da $\partial\Omega$.

Teorema (Bharali, Maitra, 2021)

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \longrightarrow +\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$, tali che:

1. *si ha $k_\Omega(z_0, z) \leq f\big(1/\delta_\Omega(z)\big)$ per ogni $z \in \Omega$;*
2. *si ha $M_\Omega(r) \longrightarrow 0$ per $r \longrightarrow 0$;*
3. *esiste $r_0 > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^{r_0} \frac{M_\Omega(r)}{r^2} f'\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}r < +\infty$.*

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Poniamo

$$M_\Omega(r) := \sup\left\{\frac{1}{K_\Omega(x;v)} \mid x \in \Omega, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1\right\},$$

dove δ_Ω indica la distanza euclidea da $\partial\Omega$.

Teorema (Bharali, Maitra, 2021)

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \longrightarrow +\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$, tali che:

1. *si ha $k_\Omega(z_0, z) \leq f\big(1/\delta_\Omega(z)\big)$ per ogni $z \in \Omega$;*
2. *si ha $M_\Omega(r) \longrightarrow 0$ per $r \longrightarrow 0$;*
3. *esiste $r_0 > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^{r_0} \frac{M_\Omega(r)}{r^2} f'\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}r < +\infty$.*

Allora Ω è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Idea della dimostrazione: si usa il teorema di Bharali e Maitra. Per vedere che un dominio Caltrop Ω ne soddisfa le ipotesi:

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Idea della dimostrazione: si usa il teorema di Bharali e Maitra. Per vedere che un dominio Caltrop Ω ne soddisfa le ipotesi: si calcola k_D per un certo dominio planare D usato come modello;

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Idea della dimostrazione: si usa il teorema di Bharali e Maitra. Per vedere che un dominio Caltrop Ω ne soddisfa le ipotesi: si calcola k_D per un certo dominio planare D usato come modello; dopodiché si immergono copie di D in Ω in maniera affine, di modo che ogni punto di Ω sufficientemente vicino al bordo sia contenuto in una di queste copie;

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ)-visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Idea della dimostrazione: si usa il teorema di Bharali e Maitra. Per vedere che un dominio Caltrop Ω ne soddisfa le ipotesi: si calcola k_D per un certo dominio planare D usato come modello; dopodiché si immergono copie di D in Ω in maniera affine, di modo che ogni punto di Ω sufficientemente vicino al bordo sia contenuto in una di queste copie; a questo punto, si usa il fatto che le funzioni olomorfe sono contrazioni per k_X per stimare la distanza di Kobayashi su Ω.

I domini Caltrop sono taut

Lemma

Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica e k_X-completa è taut.

I domini Caltrop sono taut

Lemma

Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica e k_X-completa è taut.

Lemma

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato tale che esiste uno $z_0 \in \Omega$ tale che per ogni $\xi \in \partial\Omega$ si ha $\lim_{w \longrightarrow \xi} k_\Omega(z_0, w) = +\infty$; allora (Ω, k_Ω) è completo.

I domini Caltrop sono taut

Lemma

Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica e k_X-completa è taut.

Lemma

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato tale che esiste uno $z_0 \in \Omega$ tale che per ogni $\xi \in \partial\Omega$ si ha $\lim\limits_{w \longrightarrow \xi} k_\Omega(z_0, w) = +\infty$; allora (Ω, k_Ω) è completo.

Proposizione

I domini Caltrops sono taut.

I domini Caltrop sono taut

Lemma

Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica e k_X-completa è taut.

Lemma

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato tale che esiste uno $z_0 \in \Omega$ tale che per ogni $\xi \in \partial\Omega$ si ha $\lim\limits_{w \longrightarrow \xi} k_\Omega(z_0, w) = +\infty$; allora (Ω, k_Ω) è completo.

Proposizione

I domini Caltrops sono taut.

Idea della dimostrazione: Si usano i Lemmi. Si distinguono due casi.

I domini Caltrop sono taut

Lemma

Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica e k_X-completa è taut.

Lemma

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato tale che esiste uno $z_0 \in \Omega$ tale che per ogni $\xi \in \partial\Omega$ si ha $\lim\limits_{w \longrightarrow \xi} k_\Omega(z_0, w) = +\infty$; allora (Ω, k_Ω) è completo.

Proposizione

I domini Caltrops sono taut.

Idea della dimostrazione: Si usano i Lemmi. Si distinguono due casi.
$\xi \in \partial\Omega \setminus \{q_1, \ldots, q_N\}$: si usa la pseudoconvessità;

I domini Caltrop sono taut

Lemma

Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica e k_X-completa è taut.

Lemma

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato tale che esiste uno $z_0 \in \Omega$ tale che per ogni $\xi \in \partial\Omega$ si ha $\lim\limits_{w \longrightarrow \xi} k_\Omega(z_0, w) = +\infty$; allora (Ω, k_Ω) è completo.

Proposizione

I domini Caltrops sono taut.

Idea della dimostrazione: Si usano i Lemmi. Si distinguono due casi.
$\xi \in \partial\Omega \setminus \{q_1, \ldots, q_N\}$: si usa la pseudoconvessità;
$\xi = q_j$ per $j = 1, \ldots, N$: si usa la forma di Ω vicino a q_j.

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

1. dall’ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo "Wolff-Denjoy"

1. dall'ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;
2. dalle ipotesi di visibilità e di relativa compattezza segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza uniforme sui compatti a una costante nel bordo della varietà;

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

1. dall’ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;
2. dalle ipotesi di visibilità e di relativa compattezza segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza uniforme sui compatti a una costante nel bordo della varietà;
3. sempre per la condizione di visibilità, tale limite è lo stesso per ogni sottosuccessione, dunque dev’essere il limite di tutta la successione.

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
2. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
2. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*
3. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(X, X)$;*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
2. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*
3. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(X, X)$;*
4. *l'orbita di z è relativamente compatta in X per ogni $z \in X$;*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Teorema (Abate, 1991)

Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
2. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*
3. *la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(X, X)$;*
4. *l'orbita di z è relativamente compatta in X per ogni $z \in X$;*
5. *esiste $z_0 \in X$ la cui orbita è relativamente compatta in X.*

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Esempio

La palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ meno l'origine è Kobayashi-iperbolica e (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$, ma non è taut.

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Esempio

La palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ meno l'origine è Kobayashi-iperbolica e (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$, ma non è taut. La funzione $f(z, w) = (z/2, e^{i\theta} w)$ è un controesempio al teorema di Abate.

1. Orbite relativamente compatte o iterate compattamente divergenti

Esempio

La palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ meno l'origine è Kobayashi-iperbolica e (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$, ma non è taut. La funzione $f(z, w) = (z/2, e^{i\theta}w)$ è un controesempio al teorema di Abate. Dunque, è anche un controesempio al teorema di tipo "Wolff-Denjoy".

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo, troviamo (a meno di sottosuccessioni) $z_0, z_1 \in Z$ con $k_Z(z_0, z_1) < \kappa_0/2$ e $f_n(z_0) \longrightarrow \xi_0, f_n(z_1) \longrightarrow \xi_1$, dove $\xi_0, \xi_1 \in \partial_Y X$ e $\xi_0 \neq \xi_1$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Traccia della dimostrazione: per assurdo, troviamo (a meno di sottosuccessioni) $z_0, z_1 \in Z$ con $k_Z(z_0, z_1) < \kappa_0/2$ e $f_n(z_0) \longrightarrow \xi_0, f_n(z_1) \longrightarrow \xi_1$, dove $\xi_0, \xi_1 \in \partial_Y X$ e $\xi_0 \neq \xi_1$.
Le varietà Kobayashi-iperboliche sono connesse da $(1, \kappa)$-simil-geodetiche per $\kappa > 0$, quindi prendiamone una $\sigma : [0, T] \longrightarrow Z$ per $\kappa = \kappa_0/2$ con $\sigma(0) = z_0, \sigma(T) = z_1$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Traccia della dimostrazione: Si verifica che le curve $f_n \circ \sigma$ sono $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 1

Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Traccia della dimostrazione: Si verifica che le curve $f_n \circ \sigma$ sono $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche. Per visibilità, esiste un compatto K tale che

$$\varnothing \neq K \cap f_n\big(\sigma([0, T])\big)$$

per ogni n, ma $\sigma([0, T])$ è compatto e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è compattamente divergente, contraddizione. □

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 2

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 2

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.

Lemma 2

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente. Allora esiste $\xi \in \partial_Y X$ tale che per ogni funzione $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente per cui esiste $y_0 \in X$ tale che

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} k_X\left(F^{\mu(j)}(y_0), y_0\right) = +\infty$$

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 2

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente. Allora esiste $\xi \in \partial_Y X$ tale che per ogni funzione $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente per cui esiste $y_0 \in X$ tale che

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} k_X\left(F^{\mu(j)}(y_0), y_0\right) = +\infty$$

si ha

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} F^{\mu(j)}(z) = \xi$$

per ogni $z \in X$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: si costruisce $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che:

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: si costruisce $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che:

- si ha $k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) \geq k_X\big(F^k(x_0), x_0\big)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \leq \nu(j)$;

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: si costruisce $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che:

- si ha $k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) \geq k_X\big(F^k(x_0), x_0\big)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \leq \nu(j)$;
- si ha $\lim_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) = +\infty$;

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: si costruisce $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che:

- si ha $k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) \geq k_X\big(F^k(x_0), x_0\big)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \leq \nu(j)$;
- si ha $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) = +\infty$;
- la successione $\{F^{\nu(j)}(x_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un certo $\xi \in \partial_Y X$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: si costruisce $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che:

- si ha $k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) \geq k_X\big(F^k(x_0), x_0\big)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \leq \nu(j)$;
- si ha $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) = +\infty$;
- la successione $\{F^{\nu(j)}(x_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un certo $\xi \in \partial_Y X$.

Si scelgono $\tau, \tau' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescenti tali che $F^{(\mu\circ\tau)(j)}(z) \longrightarrow \xi' \in \partial_Y X$ e $\nu \circ \tau' \geq \mu \circ \tau$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: si costruisce $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che:

- si ha $k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) \geq k_X\big(F^k(x_0), x_0\big)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \leq \nu(j)$;
- si ha $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) = +\infty$;
- la successione $\{F^{\nu(j)}(x_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un certo $\xi \in \partial_Y X$.

Si scelgono $\tau, \tau' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescenti tali che $F^{(\mu\circ\tau)(j)}(z) \longrightarrow \xi' \in \partial_Y X$ e $\nu \circ \tau' \geq \mu \circ \tau$.
Si applica il seguente fatto.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: siano $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e $z_0, z'_0 \in X$ tali che:

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: siano $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e $z_0, z'_0 \in X$ tali che:

1. per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha $m_j \geq m'_j$;

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: siano $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e $z_0, z'_0 \in X$ tali che:

1. per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha $m_j \geq m'_j$;
2. per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k \leq m_j$ si ha $k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) \geq k_X\big(F^k(z_0), z_0\big)$;

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: siano $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e $z_0, z'_0 \in X$ tali che:

1. per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha $m_j \geq m'_j$;
2. per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k \leq m_j$ si ha $k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) \geq k_X\big(F^k(z_0), z_0\big)$;
3. si ha $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) = \lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{m'_j}(z'_0), z_0\big) = +\infty$;

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: siano $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e $z_0, z'_0 \in X$ tali che:

1. per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha $m_j \geq m'_j$;
2. per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k \leq m_j$ si ha $k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) \geq k_X\big(F^k(z_0), z_0\big)$;
3. si ha $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) = \lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{m'_j}(z'_0), z_0\big) = +\infty$;
4. le successioni $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergono, rispettivamente, a ζ e ζ' in $\partial_Y X$;

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Idea della dimostrazione: siano $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e $z_0, z'_0 \in X$ tali che:

1. per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha $m_j \geq m'_j$;
2. per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k \leq m_j$ si ha $k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) \geq k_X\big(F^k(z_0), z_0\big)$;
3. si ha $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) = \lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{m'_j}(z'_0), z_0\big) = +\infty$;
4. le successioni $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergono, rispettivamente, a ζ e ζ' in $\partial_Y X$;

allora $\zeta = \zeta'$.

Lemma 3

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

Lemma 3

Sia X *una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa* Y*. Supponiamo che esista* $\kappa_0 > 0$ *tale che* X *sia* $(1, \kappa_0)$*-visibile. Sia* $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ *tale che la successione* $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sia compattamente divergente.*

Lemma 3

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Supponiamo che esistano un compatto $K \subseteq X$, una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\xi \in \partial_Y X$ tali che la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente su K.

Lemma 3

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Supponiamo che esistano un compatto $K \subseteq X$, una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\xi \in \partial_Y X$ tali che la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente su K. Allora la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

Lemma 3

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Supponiamo che esistano un compatto $K \subseteq X$, una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\xi \in \partial_Y X$ tali che la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente su K. Allora la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

Idea della dimostrazione: è un semplice assurdo. Si usano il Lemma 1, la compattezza e il seguente fatto:

Lemma 3

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Supponiamo che esistano un compatto $K \subseteq X$, una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\xi \in \partial_Y X$ tali che la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente su K. Allora la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

Idea della dimostrazione: è un semplice assurdo. Si usano il Lemma 1, la compattezza e il seguente fatto:
due successioni che convergono a due punti distinti del bordo non possono avere distanza di Kobayashi tendente a 0.

Lemma 4

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

Lemma 4

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 4

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Per ogni funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 4

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Per ogni funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

Dimostrazione: Fissiamo $z_0 \in X$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 4

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Per ogni funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

Dimostrazione: Fissiamo $z_0 \in X$. Per la compattezza di $\overline{X}$ e la divergenza dai compatti di $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che $F^{\mu(j_n)}(z_0) \longrightarrow \xi$.

2. Convergenza a una costante a meno di sottosuccessioni

Lemma 4

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Per ogni funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

Dimostrazione: Fissiamo $z_0 \in X$. Per la compattezza di $\overline{X}$ e la divergenza dai compatti di $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che $F^{\mu(j_n)}(z_0) \longrightarrow \xi$. Allora la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sul compatto $\{z_0\}$.

Lemma 4

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Per ogni funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sui compatti.

Dimostrazione: Fissiamo $z_0 \in X$. Per la compattezza di $\overline{X}$ e la divergenza dai compatti di $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che $F^{\mu(j_n)}(z_0) \longrightarrow \xi$. Allora la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sul compatto $\{z_0\}$. Si conclude applicando il Lemma 3. □

3. Unicità del limite

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y.

3. Unicità del limite

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.

3. Unicità del limite

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

3. Unicità del limite

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: Siano per assurdo ξ, η due costanti che siano anche funzioni limite di F.

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: Siano per assurdo ξ, η due costanti che siano anche funzioni limite di F.
Caso 1: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} k_X\left(F^\nu(o), o\right) = +\infty.$$

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: Siano per assurdo ξ, η due costanti che siano anche funzioni limite di F.
Caso 1: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} k_X\left(F^\nu(o), o\right) = +\infty.$$

Si usano i Lemmi precedenti, in particolare si usa più volte il Lemma 2, per ottenere una contraddizione.

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: caso 2: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} k_X\left(F^\nu(o), o\right) < +\infty.$$

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: caso 2: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} k_X\left(F^\nu(o), o\right) < +\infty.$$

Poniamo

$$G(x_1, x_2) := \lim_{\delta \longrightarrow 0} \inf \left\{ k_X\left(F^m(x_1), x_2\right) \mid m \in \mathbb{N}, d_Y\left(F^m(x_1), \xi\right) < \delta \right\}$$

3. Unicità del limite

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: caso 2: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu\longrightarrow+\infty} k_X\left(F^\nu(o), o\right) < +\infty.$$

Poniamo

$$G(x_1, x_2) := \lim_{\delta\longrightarrow 0} \inf\left\{k_X\left(F^m(x_1), x_2\right) \mid m \in \mathbb{N}, d_Y\left(F^m(x_1), \xi\right) < \delta\right\}$$

e, detto K il compatto dato dalla visibilità per ξ e η,

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: $\varepsilon := \liminf_{z \longrightarrow \eta} \inf_{y \in K} k_X(z, y) > 0.$

3. Unicità del limite

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: $\quad \varepsilon := \liminf_{z \longrightarrow \eta} \inf_{y \in K} k_X(z, y) > 0.$

Prendiamo $q_1, q_2 \in K$ tali che

$$G(q_1, q_2) < \inf_{x_1, x_2 \in K} G(x_1, x_2) + \varepsilon.$$

3. Unicità del limite

Teorema

Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.
Allora l'insieme delle funzioni limite di F è costituito da un'unica costante.

Idea della dimostrazione: $\varepsilon := \liminf_{z \longrightarrow \eta} \inf_{y \in K} k_X(z, y) > 0.$

Prendiamo $q_1, q_2 \in K$ tali che

$$G(q_1, q_2) < \inf_{x_1, x_2 \in K} G(x_1, x_2) + \varepsilon.$$

Usando la visibilità e alcuni dei Lemmi precedenti, troviamo $x^* \in K$ tale che $G(q_1, q_2) \geq G(q_1, x^*) + \varepsilon$, contraddizione.

Grazie per l'attenzione!

Bibliografia principale

- M. Abate: Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Serie IV*, **18** (1991), no. 2, 167–191
- G. Bharali, A. Maitra: A weak notion of visibility, a family of examples, and Wolff-Denjoy theorems. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. Serie V*, **22** (2021), no. 1, 195–240
- G. Bharali, A. Zimmer: Goldilocks domains, a weak notion of visibility, and applications. *Adv. Math.*, **310** (2017), 377–425
- G. Bharali, A. Zimmer: Unbounded visibility domains, the end compactification, and applications. Preprint, arXiv:2206.13869v1 (2022)
- V. S. Chandel, A. Maitra, A. D. Sarkar: Notions of Visibility with respect to the Kobayashi distance: Comparison and Applications. Preprint, arXiv:2111.00549v1 (2021)