

Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili complesse

22 Settembre 2023 (realisticamente)



Università di Pisa
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Candidato: Marco Vergamini

Relatore: Prof. Marco Abate

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia \mathbb{D} il disco unitario in \mathbb{C} .

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia \mathbb{D} il disco unitario in \mathbb{C} .

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa.

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia \mathbb{D} il disco unitario in \mathbb{C} .

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia \mathbb{D} il disco unitario in \mathbb{C} .

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *la funzione f ha un punto fisso nel disco;*

Il teorema di Wolff-Denjoy

Sia \mathbb{D} il disco unitario in \mathbb{C} .

Teorema (Wolff-Denjoy, 1926)

Sia $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *la funzione f ha un punto fisso nel disco; oppure,*
- *esiste un unico punto del bordo del disco tale che la successione delle iterate di f converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) ω su \mathbb{D} è data da

$$\omega(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$k_X(z, w) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \mid \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{funzioni } \varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \\ \varphi_m(\zeta_m) = w \text{ e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1, \dots, m-1 \end{array} \right\}$$

per $z, w \in X$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$k_X(z, w) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \left| \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \\ \varphi_m(\zeta_m) = w \text{ e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\}$$

per $z, w \in X$.

Se k_X è una distanza, diremo che X è *Kobayashi-iperbolica*.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2 , cioè esiste una *funzione di definizione* $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $d\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2 , cioè esiste una *funzione di definizione* $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $d\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2 , cioè esiste una *funzione di definizione* $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $d\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* in p se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geq 2$ un dominio limitato con bordo C^2 , cioè esiste una *funzione di definizione* $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $d\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è $H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}$. Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso in p* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è definita positiva in $H_p\partial\Omega$.

Diciamo che Ω è *strettamente pseudoconvesso* se è strettamente pseudoconvesso in p per ogni $p \in \partial\Omega$.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

1. *le orbite di f sono relativamente compatte in Ω ;*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \rightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- 1. le orbite di f sono relativamente compatte in Ω ; oppure,*
- 2. esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \rightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- 1. le orbite di f sono relativamente compatte in Ω ; oppure,*
- 2. esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \rightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- 1. le orbite di f sono relativamente compatte in Ω ; oppure,*
- 2. esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.

Allora soddisfa le ipotesi di un teorema di Karlsson del 2001, per cui le orbite sono limitate (in k_Ω) o convergono a un unico punto del bordo.

Generalizzazione ai domini limitati e strettamente pseudoconvessi

Teorema (Abate, 1991)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- 1. le orbite di f sono relativamente compatte in Ω ; oppure,*
- 2. esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Traccia della dimostrazione: Per un teorema di Balogh e Bonk del 2000, (Ω, k_Ω) è uno spazio metrico Gromov-iperbolico.

Allora soddisfa le ipotesi di un teorema di Karlsson del 2001, per cui le orbite sono limitate (in k_Ω) o convergono a un unico punto del bordo.

Per avere la convergenza uniforme sui compatti si applica il teorema di Montel. □

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x; Z) = \inf \{ |v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, d_0 f(v) = Z \}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Definizione

Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x; Z) = \inf \{ |v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, d_0 f(v) = Z \}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Le funzioni olomorfe sono semicontrazioni sia rispetto a K_X che rispetto a k_X .

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo;

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ) -*simil-geodetica* se:

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \rightarrow X$ è detta una (λ, κ) -*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha

$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - \kappa \leq k_X(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \lambda|t - s| + \kappa;$$

Definizione

Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \rightarrow X$ è detta una (λ, κ) -*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha

$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - \kappa \leq k_X(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \lambda|t - s| + \kappa;$$

2. σ è assolutamente continua rispetto a d_X (quindi $\sigma'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in I$) e per quasi ogni $t \in I$ si ha

$$K_X(\sigma(t); \sigma'(t)) \leq \lambda.$$

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y , e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$.

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y , e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ) -visibile se:

Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y , e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ) -visibile se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ) -simil-geodetica;

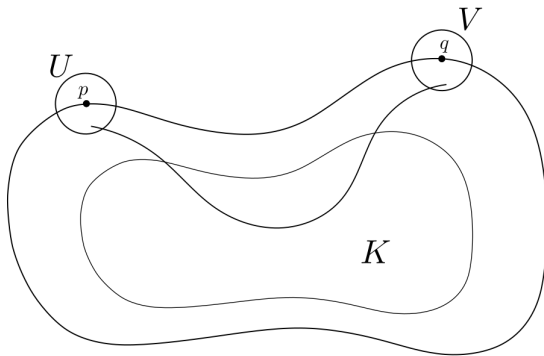
Definizione

Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y , e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ) -visibile se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ) -simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti $p, q \in \partial_Y X$ con $p \neq q$, esistono in \overline{X} due intorni V e W , di p e q rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto K di X tali che ogni (λ, κ) -simil-geodetica in X che collega un punto di V a un punto di W interseca K .

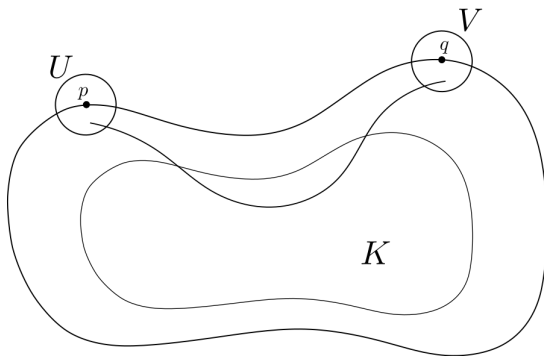
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K .



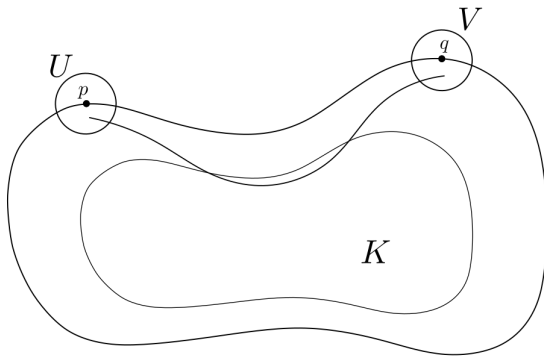
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K .



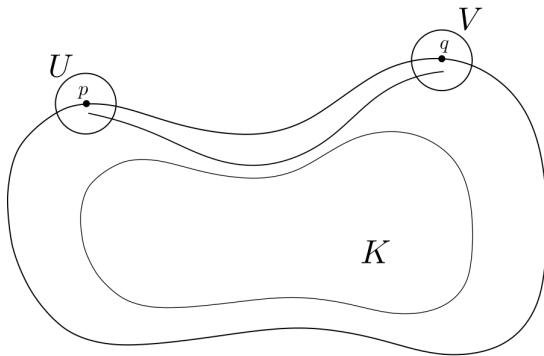
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K .



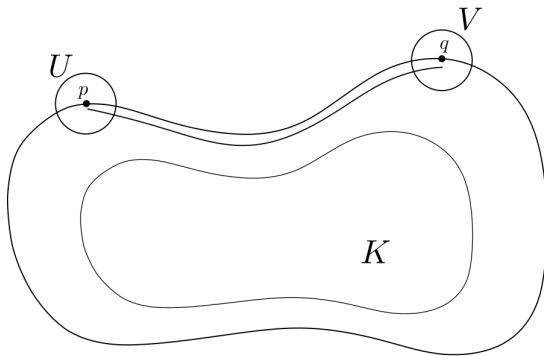
La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K .

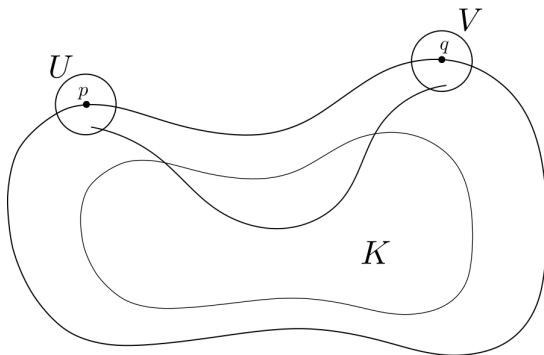


La condizione di visibilità

Caso escluso: le simil-geodetiche da U a V fuggono dal compatto K .



La condizione di visibilità



Condizione di visibilità: le simil-geodetiche “curvano verso l’interno”, rimanendo dentro il compatto K .

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Definizione

Una varietà complessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura (rispetto alla topologia compatta-aperta) di $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞ .

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Definizione

Una varietà complessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura (rispetto alla topologia compatta-aperta) di $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞ .

Si può dimostrare che ogni varietà taut è Kobayashi-iperbolica.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y .

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y . Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$ -visibile.

Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa.

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y . Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$ -visibile.

Sia $F : X \rightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y . Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$ -visibile.

Sia $F : X \rightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X ;*

Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per sottovarietà relativamente compatte

Teorema (Chandel, Maitra, Sarkar, 2021; Bharali, Zimmer, 2022)

Sia X una sottovarietà taut e relativamente compatta di una varietà complessa Y . Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$ -visibile.

Sia $F : X \rightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X ; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial_Y X$ tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Definizione

Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, è detto *dominio Caltrop* se esiste un insieme finito di punti $\{q_1, \dots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$ tale che:

Definizione

Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, è detto *dominio Caltrop* se esiste un insieme finito di punti $\{q_1, \dots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$ tale che:

- il sottoinsieme del bordo $\partial\Omega \setminus \{q_1, \dots, q_N\}$ è C^2 e Ω è strettamente pseudoconvesso in ogni punto di tale insieme;

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrop

Definizione

Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, è detto *dominio Caltrop* se esiste un insieme finito di punti $\{q_1, \dots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$ tale che:

- il sottoinsieme del bordo $\partial\Omega \setminus \{q_1, \dots, q_N\}$ è C^2 e Ω è strettamente pseudoconvesso in ogni punto di tale insieme;
- per ogni $j = 1, \dots, N$ esistono un intorno aperto e connesso $V_j \ni q_j$, due costanti $p_j \in (1, 3/2)$ e $C_j > 1$, una trasformazione unitaria $\mathbb{U}^{(j)}$ e una funzione continua $\psi_j : [0, A_j] \rightarrow [0, +\infty)$, con $A_j > 0$, tali che $\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j)$ è un “solido di rivoluzione”:

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \in (0, A_j), \right. \\ \left. (\Im z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\Re z_n)^2 \right\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$.

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \in (0, A_j), \right. \\ \left. (\Im z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\Re z_n)^2 \right\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \in (0, A_j), \right. \\ \left. (\Im z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\Re z_n)^2 \right\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

- è di classe C^2 su $(0, A_j)$;

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \in (0, A_j), \right. \\ \left. (\Im z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\Re z_n)^2 \right\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

- è di classe C^2 su $(0, A_j)$;
- per ogni $x \in [0, A_j]$ si ha $(1/C_j)x^{p_j} \leq \psi_j(x) \leq C_jx^{p_j}$;

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \in (0, A_j), \right. \\ \left. (\Im z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\Re z_n)^2 \right\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

- è di classe C^2 su $(0, A_j)$;
- per ogni $x \in [0, A_j]$ si ha $(1/C_j)x^{p_j} \leq \psi_j(x) \leq C_j x^{p_j}$;
- si ha che ψ_j è strettamente crescente e ψ'_j è crescente su $(0, A_j)$;

Definizione

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \in (0, A_j), \right. \\ \left. (\Im z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\Re z_n)^2 \right\}$$

dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, ψ_j ha le seguenti proprietà:

- è di classe C^2 su $(0, A_j)$;
- per ogni $x \in [0, A_j]$ si ha $(1/C_j)x^{p_j} \leq \psi_j(x) \leq C_j x^{p_j}$;
- si ha che ψ_j è strettamente crescente e ψ_j' è crescente su $(0, A_j)$;
- si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi_j(x) \psi_j''(x) = 0$.

Un esempio di Bharali e Maitra: i domini Caltrops

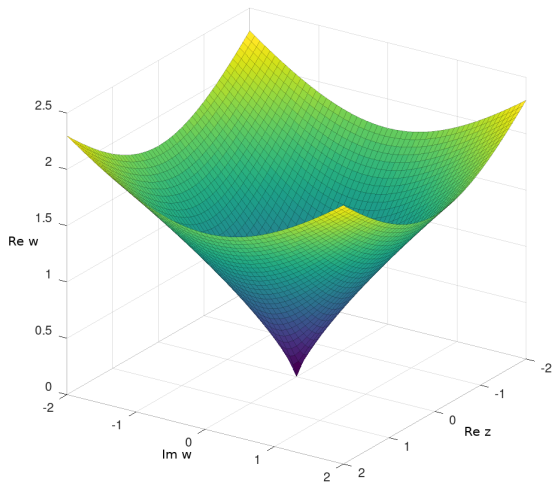


Figura: proiezione a $\Im m z = 0$ del bordo della punta in \mathbb{C}^2 con coordinate (z, w) corrispondente a $\psi(x) = x^{5/4}$

Costruzione di un dominio Caltrap in \mathbb{C}^2

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

Costruzione di un dominio Caltrap in \mathbb{C}^2

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;

Costruzione di un dominio Caltrop in \mathbb{C}^2

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
2. per ogni $t \in (0, \beta)$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$.

Costruzione di un dominio Caltrap in \mathbb{C}^2

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
2. per ogni $t \in (0, \beta)$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$. Il dominio cercato è

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\Im w|^2 < C\psi(\Re w)^2, -A < \Re w < \beta\},$$

dove $C > 0$ è una costante opportunamente scelta.

Costruzione di un dominio Caltrap in \mathbb{C}^2

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
2. per ogni $t \in (0, \beta)$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$. Il dominio cercato è

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\Im w|^2 < C\psi(\Re w)^2, -A < \Re w < \beta\},$$

dove $C > 0$ è una costante opportunamente scelta.

Le verifiche necessarie seguono da come è definita ψ ;

Costruzione di un dominio Caltrap in \mathbb{C}^2

Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

1. per ogni $t \in (-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
2. per ogni $t \in (0, \beta)$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$. Il dominio cercato è

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\Im w|^2 < C\psi(\Re w)^2, -A < \Re w < \beta\},$$

dove $C > 0$ è una costante opportunamente scelta.

Le verifiche necessarie seguono da come è definita ψ ; per la pseudoconvessità, la funzione di definizione è

$$\rho(z, w) := |z|^2 + |\Im w|^2 - C\psi(\Re w)^2.$$

I domini Caltraps sono (λ, κ) -visibili

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Poniamo

$$M_{\Omega}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_{\Omega}(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_{\Omega}(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_{Ω} indica la distanza da $\partial\Omega$.

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Poniamo

$$M_{\Omega}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_{\Omega}(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_{\Omega}(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_{Ω} indica la distanza da $\partial\Omega$.

Teorema

(Bharali, Maitra, 2021) Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d .

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Poniamo

$$M_{\Omega}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_{\Omega}(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_{\Omega}(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_{Ω} indica la distanza da $\partial\Omega$.

Teorema

(Bharali, Maitra, 2021) Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Supponiamo che per esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, tali che:

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Poniamo

$$M_{\Omega}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_{\Omega}(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_{\Omega}(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_{Ω} indica la distanza da $\partial\Omega$.

Teorema

(Bharali, Maitra, 2021) Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Supponiamo che per esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, tali che:

1. *si ha $k_{\Omega}(z_0, z) \leq f(1/\delta_{\Omega}(z))$ per ogni $z \in \Omega$;*

I domini Caltraps sono (λ, κ) -visibili

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Poniamo

$$M_{\Omega}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_{\Omega}(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_{\Omega}(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_{Ω} indica la distanza da $\partial\Omega$.

Teorema

(Bharali, Maitra, 2021) Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Supponiamo che per esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, tali che:

- 1. si ha $k_{\Omega}(z_0, z) \leq f(1/\delta_{\Omega}(z))$ per ogni $z \in \Omega$;*
- 2. si ha $M_{\Omega}(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$;*

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Poniamo

$$M_{\Omega}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_{\Omega}(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_{\Omega}(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_{Ω} indica la distanza da $\partial\Omega$.

Teorema

(Bharali, Maitra, 2021) Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Supponiamo che per esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, tali che:

1. si ha $k_{\Omega}(z_0, z) \leq f(1/\delta_{\Omega}(z))$ per ogni $z \in \Omega$;
2. si ha $M_{\Omega}(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$;
3. esiste $r_0 > 0$ tale che $\int_0^{r_0} \frac{M_{\Omega}(r)}{r^2} f' \left(\frac{1}{r} \right) dr < +\infty$.

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Poniamo

$$M_{\Omega}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_{\Omega}(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_{\Omega}(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\},$$

dove δ_{Ω} indica la distanza da $\partial\Omega$.

Teorema

(Bharali, Maitra, 2021) Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{C}^d . Supponiamo che per esistano uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, tali che:

1. si ha $k_{\Omega}(z_0, z) \leq f(1/\delta_{\Omega}(z))$ per ogni $z \in \Omega$;
2. si ha $M_{\Omega}(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$;
3. esiste $r_0 > 0$ tale che $\int_0^{r_0} \frac{M_{\Omega}(r)}{r^2} f' \left(\frac{1}{r} \right) dr < +\infty$.

Allora Ω è (λ, κ) -visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Idea della dimostrazione: si usa il teorema di Bharali e Maitra. Per vedere che un dominio Caltrop Ω ne soddisfa le ipotesi:

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Idea della dimostrazione: si usa il teorema di Bharali e Maitra. Per vedere che un dominio Caltrop Ω ne soddisfa le ipotesi: si calcola k_D per un dominio planare D usato come modello;

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili

Proposizione

I domini Caltrops sono (λ, κ) -visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Idea della dimostrazione: si usa il teorema di Bharali e Maitra. Per vedere che un dominio Caltrop Ω ne soddisfa le ipotesi: si calcola k_D per un dominio planare D usato come modello; dopodiché si immergono copie di D in Ω in maniera affine, di modo che ogni punto di Ω sufficientemente vicino al bordo sia contenuto in una di queste copie;

I domini Caltrrops sono (λ, κ) -visibili

Proposizione

I domini Caltrrops sono (λ, κ) -visibili per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Idea della dimostrazione: si usa il teorema di Bharali e Maitra. Per vedere che un dominio Caltrop Ω ne soddisfa le ipotesi: si calcola k_D per un dominio planare D usato come modello; dopodiché si immergono copie di D in Ω in maniera affine, di modo che ogni punto di Ω sufficientemente vicino al bordo sia contenuto in una di queste copie; a questo punto, si usa il fatto che le funzioni olomorfe sono contrazioni per k_X per stimare la distanza di Kobayashi su Ω .

I domini Caltrap sono taut

Lemma

Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica e k_X completa è taut.

I domini Caltrap sono taut

Lemma

Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica e k_X completa è taut.

Lemma

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato tale che esiste uno $z_0 \in \Omega$ tale che per ogni $\xi \in \partial\Omega$ si ha $\lim_{w \rightarrow \xi} k_\Omega(z_0, w) = +\infty$; allora (Ω, k_Ω) è completo.

I domini Caltrop sono taut

Proposizione

I domini Caltrop sono taut.

I domini Caltrop sono taut

Proposizione

I domini Caltrops sono taut.

Idea della dimostrazione: Si usano i lemmi precedenti. Si distinguono due casi.

I domini Caltrop sono taut

Proposizione

I domini Caltrop sono taut.

Idea della dimostrazione: Si usano i lemmi precedenti. Si distinguono due casi.

$\xi \in \partial\Omega \setminus \{q_1, \dots, q_N\}$: si usa la pseudoconvessità;

I domini Caltrop sono taut

Proposizione

I domini Caltrop sono taut.

Idea della dimostrazione: Si usano i lemmi precedenti. Si distinguono due casi.

$\xi \in \partial\Omega \setminus \{q_1, \dots, q_N\}$: si usa la pseudoconvessità;

$\xi = q_j$ per $j = 1, \dots, N$: si usa la forma di Ω vicino a q_j .

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

1. dall'ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

1. dall'ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;
2. dalle ipotesi di visibilità e di relativa compattezza segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza uniforme sui compatti a una costante nel bordo della varietà;

Strada per la dimostrazione del teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

1. dall'ipotesi che la varietà sia taut, per un teorema di Abate segue che se le orbite non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente;
2. dalle ipotesi di visibilità e di relativa compattezza segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza uniforme sui compatti a una costante nel bordo della varietà;
3. sempre per la condizione di visibilità, tale limite è lo stesso per ogni sottosuccessione, dunque dev'essere il limite di tutta la successione.