

Appunti di Teoria Analitica dei Numeri A

Marco Vergamini

Indice

Introduzione	3
1 Titolo da decidere	4
1.1 Strumenti di analisi complessa (titolo provvisorio)	4
Ringraziamenti	8

Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Teoria Analitica dei Numeri A tenuto dal professor Giuseppe Puglisi nel secondo semestre dell'anno accademico 2020/2021. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) i corsi di Aritmetica, Analisi 1 e 2 e Teoria dei Numeri Elementare, più le base dell'analisi complessa in una variabile. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc. . . . Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia. . .), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali. . . insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

Ho inoltre deciso di omettere gli appunti delle prime due/tre ore di lezione, nelle quali sono stati esposti a grandi linee gli argomenti e i principali risultati trattati nel corso, poiché sono stati descritti in modo discorsivo e impreciso, e comunque verranno ovviamente trattati dettagliatamente nel seguito.

1 Titolo da decidere

1.1 Strumenti di analisi complessa (titolo provvisorio)

Lemma 1.1.1. (Mittag-Leffler) Sia $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi t.c. $|z_n| \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$ e $0 < |z_n| \leq |z_{n+1}|$ per ogni n . Sia inoltre $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un'altra successione con $m_n \in \mathbb{C}^*$ per ogni n . Allora esistono $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ t.c.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$

converge in $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ compatto. Inoltre, se $|z| < |z_1|$, si ha

$$f(z) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^{k-1}.$$

Dimostrazione. Prendiamo r_n reali positivi con $r_n \leq r_{n+1}$ e $r_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, e t.c. $r_n < |z_n|$. Per $|z| \leq r_n$ si ha

$$\left| \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \frac{m_n}{|z_n| - r_n}, \quad \left| \frac{z}{z_n} \right| < \frac{|z|}{r_n} \leq 1 \Rightarrow$$

perciò si ha che esistono $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ t.c. $\left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} < \varepsilon_n \frac{|z_n| - r_n}{|m_n|}$, con $\varepsilon_n > 0$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty$. Abbiamo dunque $\left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n} < \varepsilon_n$.

Fissiamo ora il compatto K e consideriamo N t.c. $|z| \leq r_N$ per ogni $z \in K$.

Poniamo $M_n = \max_{z \in K} \left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right|$, per $n \leq N-1$. Per ogni $z \in K$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} M_n + \sum_{n=N}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty.$$

Se $|z| < |z_1|$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n z^{p_n}}{z_n^{p_n+1}} \frac{1}{1 - z/z_n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \sum_{k=p_n+1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{z_n^k}. \end{aligned}$$

Poiché nella prima parte della dimostrazione abbiamo visto che c'è convergenza totale, possiamo scambiare le due sommatorie ottenendo così la seconda parte della tesi. \square

Osservazione 1.1.2. Per $|z| \leq r_n$ si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z_n} \right| &= \frac{2|z|}{|z_n| + |z_n|} < \frac{2|z|}{|z_n| + r_n} \leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \\ |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} &\leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} |m_n| = 2|z| \left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \\ \sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} &\leq 2|z| \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| < +\infty. \end{aligned}$$

Esempio 1.1.3. Se $z_n = n$ e $m_n = 1$ per ogni n , basta prendere $p_n = 1$.

Sia invece $|z_0| > \max_K |z|$ e consideriamo $|z_n| > |z_0| + 1$. Si ha che

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| &\leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z_0|} \frac{|z_n|}{|z_0|} \\ &\leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \frac{|z_0| + 1}{|z_0| + 1 - |z_0|} \frac{|m_n|}{|z_0|} = |m_n| \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \left(1 + \frac{1}{|z_0|} \right), \end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal fatto che la funzione $\frac{t}{t-|z_0|}$ è decrescente. In questo caso, vale la maggiorazione opposta a quella dell'osservazione 1.1.2.

Lemma 1.1.4. Sia f meromorfa con poli semplici nei punti $z_n \neq 0$, con residui $m_n \in \mathbb{Z}$, e t.c. $|z_n| \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. Sia $\gamma(0, z)$ un cammino da 0 a z non passante per i punti z_n . Allora la funzione

$$\varphi(z) = \exp \left(\int_{\gamma(0, z)} f(w) dw \right)$$

è meromorfa, con zeri z_n con molteplicità m_n se $m_n > 0$ e poli z_n con molteplicità $-m_n$ se $m_n < 0$.

Osservazione 1.1.5. Sia γ il cammino dell'integrale del lemma 1.1.4 e γ' un altro cammino, t.c. $\gamma' \cup -\gamma$ sia una curva di Jordan (piana, semplice, chiusa) contenuta in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma'} f(w) dw + 2\pi i R,$$

con $R = \sum_{\substack{n: z_n \in A, \\ \partial A = \gamma' \cup -\gamma}} m_n$. Dunque $\varphi(z) = \exp \left(\int_{\gamma'} f(w) dw \right) e^{2\pi i R}$.

Dimostrazione. Poiché $m_n \in \mathbb{Z}$, per l'osservazione 1.1.5 φ non dipende dal cammino scelto. Consideriamo $f_1(z) = f(z) - \frac{m_1}{z - z_1}$. f_1 è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$, quindi $\exp \left(\int_0^z f_1(w) dw \right)$ è olomorfa e mai nulla in $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \exp \left(\int_0^z f_1(w) dw + m_1 \int_0^z \frac{dw}{w - z_1} \right), \int_0^z \frac{dw}{w - z_1} = \log \left(\frac{z - z_1}{-z_1} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(z) = \exp \left(\int_0^z f_1(w) dw \right) \cdot \exp \left(m_1 \log \left(\frac{z - z_1}{-z_1} \right) \right) = \\ &= \exp \left(\int_0^z f_1(w) dw \right) \cdot (-z_1)^{-m_1} \cdot (z - z_1)^{m_1} = \varphi_1(z)(z - z_1)^{m_1}, \end{aligned}$$

dove φ_1 è una funzione olomorfa e mai nulla in $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$. Allora φ ha uno zero o un polo dell'ordine voluto in z_1 . Ripetendo per ogni n si ha la tesi. \square

Con i due lemmi appena mostrati si può costruire una funzione meromorfa su \mathbb{C} con zeri e poli di molteplicità assegnata, assumendo che la successione degli stessi non abbia alcun limite finito.

Teorema 1.1.6. (*prodotto di Weierstrass*) Sia F meromorfa in \mathbb{C} e siano $z_n \neq 0$ gli zeri e i poli di molteplicità $|m_n|$. Esistono una successione $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e una funzione intera $G(z)$ t.c.

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n} \right)^{m_n} \exp \left(m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \right), \quad (1)$$

dove il prodotto infinito converge uniformemente in ogni $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ compatto. Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} < +\infty$ per ogni $z \in K$.

Dimostrazione. Costruiamo $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$ come nel lemma 1.1.1 e

$$\varphi = \exp \left(\int_0^z f(w) dw \right) = \exp \left(\int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{w}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{w - z_n} dw \right) \text{ come nel lemma}$$

1.1.4. Osserviamo che

$$\left(\frac{w}{z_n} \right)^{p_n} \frac{1}{w - z_n} = \frac{1}{w - z_n} + \frac{1}{z_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \left(\frac{w}{z_n} \right)^k,$$

quindi

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp \left[\int_0^z \left(\frac{m_n}{w - z_n} + \frac{m_n}{z_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \left(\frac{w}{z_n} \right)^k \right) dw \right] = \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp \left(m_n \log \left(\frac{z - z_n}{-z_n} \right) + m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \right) = \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right)^{m_n} \exp \left(m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \right).
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\frac{F(z)}{\varphi(z)}$ è intera e mai nulla in \mathbb{C} , dunque esiste $G(z)$ intera
t.c. $\frac{F(z)}{\varphi(z)} = e^{G(z)} \Rightarrow F(z) = e^{G(z)} \varphi(z)$, da cui la tesi. \square

Osservazione 1.1.7. Se $F(z)$ ha uno zero o un polo di molteplicità $|m|$ in 0, basta applicare il teorema 1.1.6 alla funzione $\tilde{F}(z) = F(z)/z^m$.

Riferimenti bibliografici

- [D] Davenport Multiplicative Number Theory (da riportare meglio)
- [JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007
- [NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001

Ringraziamenti

Da scrivere alla fine del corso.

JBG e NN sopra nella bibliografia sono degli esempi lasciati per ricordarsi qual è il modo giusto di scriverli, da togliere dopo aver inserito la bibliografia giusta per queste dispense.