

# Appunti di Teoria Analitica dei Numeri A

Marco Vergamini

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Funzioni intere e funzione <math>\Gamma</math></b>	<b>4</b>
1.1 Strumenti di analisi complessa . . . . .	4
1.2 Funzioni intere di ordine finito . . . . .	8
1.3 Numeri e polinomi di Bernoulli e $\zeta(2k)$ . . . . .	16
1.4 La funzione $\Gamma$ di Eulero . . . . .	19
<b>2 Titolo da decidere</b>	<b>31</b>
2.1 Lo spazio di Schwarz . . . . .	31
2.2 La memoria di Riemann . . . . .	33
2.3 Le funzioni intere $\xi(s)$ e $(s-1)\zeta(s)$ . . . . .	42
2.4 A proposito di $\psi$ . . . . .	48
<b>Ringraziamenti</b>	<b>57</b>

## Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Teoria Analitica dei Numeri A tenuto dal professor Giuseppe Puglisi nel secondo semestre dell'anno accademico 2020/2021. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) i corsi di Aritmetica, Analisi 1 e 2 e Teoria dei Numeri Elementare, più le base dell'analisi complessa in una variabile. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc. . . . Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia. . . ), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali. . . insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

Ho inoltre deciso di omettere gli appunti delle prime due/tre ore di lezione, nelle quali sono stati esposti a grandi linee gli argomenti e i principali risultati trattati nel corso, poiché sono stati descritti in modo discorsivo e impreciso, e comunque verranno ovviamente trattati dettagliatamente nel seguito.

# 1 Funzioni intere e funzione $\Gamma$

## 1.1 Strumenti di analisi complessa

**Lemma 1.1.1.** (Mittag-Leffler) Sia  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri complessi t.c.  $|z_n| \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$  e  $0 < |z_n| \leq |z_{n+1}|$  per ogni  $n$ . Sia inoltre  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un'altra successione con  $m_n \in \mathbb{C}^*$  per ogni  $n$ . Allora esistono  $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  t.c.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$

converge in  $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$  compatto. Inoltre, se  $|z| < |z_1|$ , si ha

$$f(z) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^{k-1}.$$

*Dimostrazione.* Prendiamo  $r_n$  reali positivi con  $r_n \leq r_{n+1}$  e  $r_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , e t.c.  $r_n < |z_n|$ . Per  $|z| \leq r_n$  si ha

$$\left| \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \frac{m_n}{|z_n| - r_n}, \quad \left| \frac{z}{z_n} \right| < \frac{|z|}{r_n} \leq 1 \Rightarrow$$

perciò si ha che esistono  $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  t.c.  $\left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} < \varepsilon_n \frac{|z_n| - r_n}{|m_n|}$ , con  $\varepsilon_n > 0$

e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty$ . Abbiamo dunque  $\left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n} < \varepsilon_n$ .

Fissiamo ora il compatto  $K$  e consideriamo  $N$  t.c.  $|z| \leq r_N$  per ogni  $z \in K$ .

Poniamo  $M_n = \max_{z \in K} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right|$ , per  $n \leq N-1$ . Per ogni  $z \in K$  si ha che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} M_n + \sum_{n=N}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty.$$

Se  $|z| < |z_1|$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n z^{p_n}}{z_n^{p_n+1}} \frac{1}{1 - z/z_n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \sum_{k=p_n+1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{z_n^k}. \end{aligned}$$

Poiché nella prima parte della dimostrazione abbiamo visto che c'è convergenza totale, possiamo scambiare le due sommatorie ottenendo così la seconda parte della tesi.  $\square$

**Osservazione 1.1.2.** Per  $|z| \leq r_n$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z_n} \right| &= \frac{2|z|}{|z_n| + |z_n|} < \frac{2|z|}{|z_n| + r_n} \leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \\ |m_m| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} &\leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} |m_n| = 2|z| \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \\ \sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} &\leq 2|z| \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| < +\infty. \end{aligned}$$

**Esempio 1.1.3.** Se  $z_n = n$  e  $m_n = 1$  per ogni  $n$ , basta prendere  $p_n = 1$ .

Sia invece  $|z_0| > \max_K |z|$  e consideriamo  $|z_n| > |z_0| + 1$ . Si ha che

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| &\leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z_0|} \frac{|z_n|}{|z_0|} \\ &\leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \frac{|z_0| + 1}{|z_0| + 1 - |z_0|} \frac{|m_n|}{|z_0|} = |m_n| \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \left( 1 + \frac{1}{|z_0|} \right), \end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal fatto che la funzione  $\frac{t}{t-|z_0|}$  è decrescente. In questo caso, vale la maggiorazione opposta a quella dell'osservazione 1.1.2.

**Lemma 1.1.4.** Sia  $f$  meromorfa con poli semplici nei punti  $z_n \neq 0$ , con residui  $m_n \in \mathbb{Z}$ , e t.c.  $|z_n| \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Sia  $\gamma(0, z)$  un cammino da 0 a  $z$  non passante per i punti  $z_n$ . Allora la funzione

$$\varphi(z) = \exp \left( \int_{\gamma(0, z)} f(w) dw \right)$$

è meromorfa, con zeri  $z_n$  con molteplicità  $m_n$  se  $m_n > 0$  e poli  $z_n$  con molteplicità  $-m_n$  se  $m_n < 0$ .

**Osservazione 1.1.5.** Sia  $\gamma$  il cammino dell'integrale del lemma 1.1.4 e  $\gamma'$  un altro cammino, t.c.  $\gamma' \cup -\gamma$  sia una curva di Jordan (piana, semplice, chiusa) contenuta in  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ . Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma'} f(w) dw + 2\pi i R,$$

$$\text{con } R = \sum_{\substack{n: z_n \in A, \\ \partial A = \gamma' \cup -\gamma}} m_n. \text{ Dunque } \varphi(z) = \exp \left( \int_{\gamma'} f(w) dw \right) e^{2\pi i R}.$$

*Dimostrazione.* Poiché  $m_n \in \mathbb{Z}$ , per l'osservazione 1.1.5  $\varphi$  non dipende dal cammino scelto. Consideriamo  $f_1(z) = f(z) - \frac{m_1}{z - z_1}$ .  $f_1$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$ , quindi  $\exp\left(\int_0^z f_1(w) dw\right)$  è olomorfa e mai nulla in  $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$ .

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \exp\left(\int_0^z f_1(w) dw + m_1 \int_0^z \frac{dw}{w - z_1}\right), \int_0^z \frac{dw}{w - z_1} = \log\left(\frac{z - z_1}{-z_1}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(z) = \exp\left(\int_0^z f_1(w) dw\right) \cdot \exp\left(m_1 \log\left(\frac{z - z_1}{-z_1}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\int_0^z f_1(w) dw\right) \cdot (-z_1)^{-m_1} \cdot (z - z_1)^{m_1} = \varphi_1(z)(z - z_1)^{m_1},\end{aligned}$$

dove  $\varphi_1$  è una funzione olomorfa e mai nulla in  $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$ . Allora  $\varphi$  ha uno zero o un polo dell'ordine voluto in  $z_1$ . Ripetendo per ogni  $n$  si ha la tesi.  $\square$

Con i due lemmi appena mostrati si può costruire una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con zeri e poli di molteplicità assegnata, assumendo che la successione degli stessi non abbia alcun limite finito.

**Teorema 1.1.6.** (*prodotto di Weierstrass*) Sia  $F$  meromorfa in  $\mathbb{C}$  e siano  $z_n \neq 0$  gli zeri e i poli di molteplicità  $|m_n|$ . Esistono una successione  $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e una funzione intera  $G(z)$  t.c.

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n} \exp\left(m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right), \quad (1)$$

dove il prodotto infinito converge uniformemente in ogni  $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$  compatto. Inoltre  $\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} < +\infty$  per ogni  $z \in K$ .

*Dimostrazione.* Costruiamo  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$  come nel lemma 1.1.1 e

$$\varphi = \exp\left(\int_0^z f(w) dw\right) = \exp\left(\int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{w - z_n} dw\right) \text{ come nel lemma}$$

1.1.4. Osserviamo che

$$\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n} \frac{1}{w - z_n} = \frac{1}{w - z_n} + \frac{1}{z_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \left(\frac{w}{z_n}\right)^k,$$

quindi

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp \left[ \int_0^z \left( \frac{m_n}{w - z_n} + \frac{m_n}{z_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \left( \frac{w}{z_n} \right)^k \right) dw \right] = \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp \left( m_n \log \left( \frac{z - z_n}{-z_n} \right) + m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right) = \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right)^{m_n} \exp \left( m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right).\end{aligned}$$

Osserviamo ora che  $\frac{F(z)}{\varphi(z)}$  è intera e mai nulla in  $\mathbb{C}$ , dunque esiste  $G(z)$  intera t.c.  $\frac{F(z)}{\varphi(z)} = e^{G(z)} \Rightarrow F(z) = e^{G(z)} \varphi(z)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione 1.1.7.** Se  $F(z)$  ha uno zero o un polo di molteplicità  $|m|$  in 0, basta applicare il teorema 1.1.6 alla funzione  $\tilde{F}(z) = F(z)/z^m$ .

**Corollario 1.1.8.** Sia  $F$  come nel teorema 1.1.6, indichiamo con  $D^k$  la derivata  $k$ -esima. Si ha

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right) \right)_{z=0} + \frac{1}{k} \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} z^k.$$

*Dimostrazione.* Dalla dimostrazione del teorema 1.1.6 e prendendo il logaritmo otteniamo

$$G(z) + \int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{w}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{w - z_n} dw = \log F(z).$$

Ovviamente  $\log F(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0}}{k!} z^k$ . Inoltre

$$\begin{aligned}- \int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{w}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{w - z_n} dw &= \int_0^z \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n: p_n < k} (m_n z_n^{-k}) w^{k-1} dw = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^k.\end{aligned}$$

$\square$

Avviciniamoci alla notazione canonica del prodotto di Weierstrass per una funzione intera:  $F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left( \sum_{k=1}^{p_n} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right)$ , dove gli zeri vengono contati con molteplicità (e d'ora in avanti si sottintenderà sempre così).

## 1.2 Funzioni intere di ordine finito

Introduciamo ora un argomento importante: le funzioni intere di ordine finito.

Notazione: scriviamo che  $f(z) \ll g(z)$  ( $z \rightarrow +\infty$ )  $\iff f(z) = O(g(z))$ . Inoltre, scriveremo  $\ll_\varepsilon$  per indicare che la costante dell' $O$ -grande dipende da un parametro  $\varepsilon$ .

**Definizione 1.2.1.** Data  $F$  intera, si dice che ha *ordine*  $\alpha \geq 0$  se

$$F(z) \ll_\varepsilon e^{|z|^{\alpha+\varepsilon}} \quad (z \rightarrow +\infty)$$

per ogni  $\varepsilon > 0$  e  $\alpha$  è il minimo valore positivo per cui vale questa cosa. Equivalentemente,  $\alpha = \inf\{A \geq 0 \mid F(z) \ll_A e^{|z|^A}\}$ . Scriviamo  $\text{ord}(F) = \alpha$ .

Se non vale  $F(z) \ll_A e^{|z|^A}$  per nessun  $A$  diciamo che  $F$  ha ordine infinito.

**Esempio 1.2.2.**

1. Sia  $p$  un polinomio di grado  $k$ , allora  $|p(z)| \leq |a_k||z|^k(1+o(1)) \ll_\varepsilon e^{|z|^\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , dunque  $p$  ha ordine 0.
2.  $|e^{az+b}| = e^{\Re(az+b)} \ll_\varepsilon e^{|z|^{1+\varepsilon}}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ .
3. Più in generale, dato  $p_k$  un generico polinomio di grado  $k$  abbiamo che  $|e^{p_k(z)}| = e^{\Re(p_k(z))} \leq e^{|p_k(z)|} \leq e^{|a_k||z|^k(1+o(1))} \ll_\varepsilon e^{|z|^{k+\varepsilon}}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Inoltre, prendendo  $z$  sulla retta  $\arg(z) = -\arg(a_k)/k$ , abbiamo che vale  $|e^{p_k(z)}| = e^{\Re(p_k(z))} = e^{a_k z^k(1+o(1))} = e^{|a_k||z|^k(1+o(1))} \gg_\varepsilon e^{|a_k||z|^k}$ . Dunque l'ordine è  $k$  e l'inf nella definizione non viene raggiunto.

**Osservazione 1.2.3.** Se  $F_1$  e  $F_2$  hanno ordine  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , allora  $F_1 + F_2$  e  $F_1 \cdot F_2$  hanno ordine minore o uguale di  $\max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . La dimostrazione è lasciata come esercizio per il lettore.

**Lemma 1.2.4.** Sia  $f$  olomorfa in  $|z - z_0| \leq R$  non costantemente nulla e sia  $0 < r < R$ . Sia inoltre  $N = \#\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r, f(z) = 0\}$  (ricordiamo che sono contati con molteplicità). Allora

$$|f(z_0)| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^N \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo senza perdita di generalità, a meno di una traslazione e di un'omotetia,  $R = 1, z_0 = 0$ . Siano  $z_n$  gli zeri di  $f$  in  $|z| \leq r$  contati con

molteplicità e sia  $g(z) = f(z) \prod_{n=1}^N \frac{1 - \bar{z}_n z}{z - z_n}$ . Per  $|z| = 1$  scriviamo  $z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ .

Allora  $\left| \frac{1 - \bar{z}_n e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_n} \right| = |e^{i\theta}| \left| \frac{\bar{z}_n - e^{-i\theta}}{z_n - e^{i\theta}} \right| = 1$ , quindi, per il principio del massimo



modulo per funzioni olomorfe (che d'ora in avanti useremo senza menzionarlo esplicitamente),  $|g(z)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)|$  per  $|z| \leq 1$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} |f(w)| &= |g(w)| \prod_{n=1}^N \left| \frac{w - z_n}{1 - \bar{z}_n w} \right| \leq \max_{|z|=1} |f(z)| \prod_{n=1}^N \left| \frac{w - z_n}{1 - \bar{z}_n w} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(0)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)| \prod_{n=1}^N |z_n| \leq r^N \max_{|z|=1} |f(z)|. \end{aligned}$$

□

**Corollario 1.2.5.** *Siano  $f, r, R, N$  come nel lemma 1.2.4. Se  $f(z_0) \neq 0$  allora*

$$N \leq \frac{1}{\log(R/r)} \log \left( \frac{\max_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{|f(z_0)|} \right).$$

*Dimostrazione.* Basta prendere la disugaglianza data dal lemma 1.2.4, portarla nella forma  $(\frac{R}{r})^N \leq (\dots)$ , prendere il logaritmo e dividere per  $\log(R/r)$ . □

**Teorema 1.2.6.** *Sia  $F$  una funzione intera di ordine  $\alpha < +\infty$  e consideriamo  $N(r) = \#\{z \in \mathbb{C} \mid F(z) = 0, |z| \leq r\}$ . Allora  $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ .*

*Dimostrazione.* Prendiamo  $R = 2r$ , allora  $\max_{|z|=R} |F(z)| \ll_\varepsilon e^{(2r)^{\alpha+\varepsilon}}$  per ogni

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \log \left( \max_{|z|=R} |F(z)| \right) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Se  $F(0) \neq 0$ , per il corollario 1.2.5 abbiamo  $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Se  $F(0) = 0$ , consideriamo  $\tilde{F}(z) = F(z)/z^m$  dove  $m$  è la molteplicità di 0 come zero. Per  $|z| \leq 1$ ,  $\tilde{F} \ll 1$  per continuità. Per  $|z| > 1$ ,  $\tilde{F}(z) = F(z) \frac{1}{z^m} \Rightarrow \text{ord}(\tilde{F}) \leq \max\{\alpha, 0\} = \alpha$ . Allora si ripete la dimostrazione per  $\tilde{F}$ , poi si osserva che il numero di zeri di  $F$  varia solo per la costante additiva  $m$ . □

**Definizione 1.2.7.** Sia  $z_n \neq 0$  una successione senza limiti finiti. Si dice *esponente di convergenza* di  $z_n$ , se esiste, il numero

$$\beta = \inf \left\{ B > 0 \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^B} < +\infty \right\},$$

ovvero  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} < +\infty$  per ogni  $\varepsilon > 0$  e  $\beta$  è il minimo valore per cui è vero.

**Esempio 1.2.8.**  $z_n = \log n$  non ha esponente di convergenza finito.

**Teorema 1.2.9.** *Sia  $F$  una funzione intera di ordine  $\alpha > 0$ ,  $F(0) \neq 0$  t.c. la successione dei suoi zeri  $z_n$  ha esponente di convergenza  $\beta$ . Allora  $\beta \leq \alpha$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\text{ord}(F) = \alpha < +\infty$ , per il teorema 1.2.6 si ha  $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Prendendo  $r_n = |z_n|$ , ricordando che  $z_n$  sono gli zeri di  $F$  otteniamo  $n \leq N(r_n) \ll_\varepsilon r_n^{\alpha+\varepsilon} = |z_n|^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$  (non è  $n = N(r_n)$  perché potrebbe esserci più di uno zero sul cerchio  $|z| = r_n$ ). Allora  $|z_n| \gg_\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}$  e dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(\alpha+2\varepsilon)} \ll_\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{\alpha+2\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}} < +\infty.$$

Perciò  $\beta \leq \inf\{\alpha + 2\varepsilon \mid \varepsilon > 0\} = \alpha$ .  $\square$

**Teorema 1.2.10.** *Sia  $F$  intera di ordine finito,  $F(0) \neq 0$ . Allora la fattorizzazione di Weierstrass si scrive come*

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right), \quad (2)$$

dove  $p \geq 0$  è indipendente da  $n$  e t.c.  $\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$ . Talvolta si trova scritta con la notazione  $E(z, p) = (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} z^k\right)$  o simili.

*Dimostrazione.* Diamo solamente una traccia. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p+1} < +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Scegliendo  $p+1 = \alpha + \varepsilon$ , per il teorema 1.2.9 si ha  $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$ .  $\square$

**Osservazione 1.2.11.** Sia  $\beta$  l'esponente di convergenza di  $z_n$ , zeri di una funzione  $F$  di ordine  $\alpha$  ( $\beta \leq \alpha$ ). Il  $p$  migliore è:

1. se  $\beta$  non è intero,  $p = \lfloor \beta \rfloor$ ;
2. se  $\beta$  è intero e nella definizione con l'inf è in realtà un minimo, allora  $p = \beta - 1$ ;
3. se  $\beta$  è intero ma nella definizione con l'inf questo non viene raggiunto, cioè  $\beta$  non è un minimo, allora  $p = \beta$ .

Abbiamo dunque  $\beta - 1 \leq p \leq \beta \leq \alpha$ . Scrivendo la fattorizzazione di Weierstrass come in (2) usando il miglior  $p$  possibile si ha la forma canonica.

**Teorema 1.2.12.** (Borel-Carathéodory) *Siano  $0 < r < R$  e sia  $f$  olomorfa in  $|z - z_0| \leq R$ . Allora*

$$\max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z-z_0|=R} \Re(f(z)) + \frac{R+r}{R-r} |f(z_0)|.$$

Se inoltre  $\max_{|z-z_0|=R} \Re(f(z)) \geq 0$ , allora

$$\max_{|z-z_0|=r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!2^{n+2}R}{(R-r)^{n+1}} \left( \max_{|z-z_0|=R} \Re(f(z)) + |f(z_0)| \right).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo senza perdita di generalità  $z_0 = 0$ . Se  $f$  è costante la tesi è banale, consideriamo dunque  $f$  non costante. Facciamo il caso  $f(0) = 0$ . Sia  $A = \max_{|z|=R} \Re(f(z))$ .  $A > 0$ , infatti basta osservare che

$|e^{f(z)}| = e^{\Re(f(z))}$  e applicare il principio del massimo modulo a  $e^{f(z)}$  (se il massimo non fosse maggiore di 1, sarebbe proprio 1 perché  $f(0) = 0$  e per lo stesso motivo sarebbe costante). Sia  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A-f(z)}$ . Osserviamo che  $\Re(2A - f(z)) = 2A - \Re(f(z)) \geq A > 0 \Rightarrow 2A - f(z) \neq 0$ , quindi  $\varphi$  è olomorfa in  $|z| \leq R$ . Posto  $f(z) = u + iv$ , allora  $|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2+v^2}{(2A-u)^2+v^2} \leq 1$ . Infatti,  $u \leq A \Rightarrow u \leq 2A - u$  e ovviamente  $-2A + u \leq u$ , dunque  $u^2 \leq (2A - u)^2$ . Poiché  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(z)/z$  è olomorfa in  $|z| \leq R$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| &\leq \max_{|z|=R} \left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{R} \Rightarrow \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \leq \frac{r}{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(z)| &= \frac{2A|\varphi(z)|}{|1 + \varphi(z)|} \leq \frac{2Ar/R}{1 - |\varphi(z)|} \leq \frac{2Ar}{R-r} \text{ per } |z| = r. \end{aligned}$$

Se  $f(0) \neq 0$ , ripetiamo il ragionamento con  $f(z) - f(0)$  ottenendo

$$\begin{aligned} -|f(0)| + \max_{|z|=r} |f(z)| &\leq \max_{|z|=r} |f(z) - f(0)| \leq \\ &\leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \Re(f(z) - f(0)) \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \Re(f(z)) + \frac{2r}{R-r} |f(0)|. \end{aligned}$$

Sommando  $|f(0)|$  agli estremi di questa catena di disugaglianze otteniamo la prima parte della tesi.

Osserviamo che se  $A \geq 0$  si ha

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} \left( \max_{|z|=R} \Re(f(z)) + |f(z_0)| \right).$$

Prendiamo  $|z| \leq r$  e scriviamo

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\frac{R-r}{2}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Dev'essere  $|w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z| \leq \frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2} < R$ . Allora

$$\begin{aligned} |f(w)| &\leq \max_{|w|=\frac{R+r}{2}} |f(w)| \leq \frac{R + \frac{R+r}{2}}{R - \frac{R+r}{2}} \left( \max_{|w|=R} \Re(f(w)) + |f(0)| \right) \leq \\ &\leq \frac{4R}{R-r} \left( \max_{|w|=R} \Re(f(w)) + |f(0)| \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{4R}{R-r} \cdot \frac{2\pi}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^n} \left( \max_{|w|=R} \Re(f(w)) + |f(0)| \right). \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.2.13.** (Hadamard) Se  $F$  è intera di ordine  $\alpha$  finito e  $F(0) \neq 0$ , allora la funzione intera  $G$  del prodotto di Weierstrass (1) è un polinomio di grado minore o uguale a  $\alpha$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\nu = \lfloor \alpha \rfloor$ , vogliamo  $G^{(\nu+1)} \equiv 0$ . Ricordiamo che

$$\log F(z) = G(z) + \sum_n \log \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k.$$

Derivando troviamo

$$\begin{aligned} \frac{F'}{F}(z) &= G'(z) - \sum_n \frac{1}{z_n - z} + D \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right) \\ D^\nu \left( \frac{F'}{F}(z) \right) &= G^{(\nu+1)}(z) - \nu! \sum_n \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}} + 0. \end{aligned}$$

dove lo 0 in fondo è perché  $p \leq \alpha$ . Fissiamo  $R > 0$  e definiamo la funzione

$$\varphi_R(z) = \frac{F(z)}{F(0)} \prod_{|z_n| \leq R} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right)^{-1}.$$

Per  $|z_n| \leq R$  e  $|z| = 2R$  si ha

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| &\geq \left| \frac{z}{z_n} \right| - 1 \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varphi_R(z)| &\leq \frac{|F(z)|}{|F(0)|} \ll_\varepsilon e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}} \text{ per ogni } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Per il principio del massimo, è vero per ogni  $|z| \leq 2R$  e di conseguenza abbiamo che  $\log |\varphi_R(z)| \leq C(\varepsilon)R^{\alpha+\varepsilon}$ . Sia  $\psi_R(z) = \log \varphi_R(z)$ ; è olomorfa in  $|z| \leq R$  e  $\psi_R(0) = 0$ . Si ha  $\Re \psi_R(z) = \log |\varphi_R(z)|$ , dunque per il teorema di Borel-Carathéodory

$$\max_{|z|=R/2} |\psi_R^{(\nu+1)}(z)| \ll_{\varepsilon, \nu} \frac{R}{R^{\nu+2}} R^{\alpha+\varepsilon} = R^{\alpha-\nu-1+\varepsilon}.$$

Sia  $\varepsilon > 0$  t.c.  $\alpha - \nu - 1 + \varepsilon < 0$ . Allora

$$\psi'_R(z) = \frac{\varphi'_R(z)}{\varphi_R(z)} + \sum_{|z_n| \leq R} \frac{1}{z_n - z}$$

$$\psi_R^{(\nu+1)}(z) = D^\nu \left( \frac{F'}{F}(z) \right) + \sum_{|z_n| \leq R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}} = G^{(\nu+1)}(z) - \sum_{|z_n| > R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}}.$$

Supponiamo  $|z| = R/2$ , si ha

$$\left| \sum_{|z_n| > R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}} \right| \leq C_1(\nu) \sum_{|z_n| > R} \frac{1}{|z_n|^{\nu+1}} = o(1) \text{ per } R \rightarrow +\infty.$$

Si ha allora  $|G^{(\nu+1)}(z)| \leq C(\nu, \varepsilon)R^{-\delta} + o(1)$  per  $|z| = R/2$  e dunque anche per  $|z| \leq R/2$ . Basta fissare  $z$  e mandare  $R \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Corollario 1.2.14.** *Sia  $G$  come nel teorema di Hadamard. Se  $q \leq p$  si ha*

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^q D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(0) \right) \frac{z^k}{k!};$$

se invece  $p < q$  si ha

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^q D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(0) \right) \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^q \left( \sum_n z_n^{-k} \right) \frac{z^k}{k}.$$

Inoltre, per  $k > \max\{p, q\}$  si ha

$$\sum_n z_n^{-k} = -\frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0}.$$

*Dimostrazione.* Per il corollario 1.1.8 si ha

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0} + \frac{1}{k} \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^k,$$

con  $p_n = p$  per ogni  $n$ . Abbiamo che  $G$  è un polinomio di grado  $q$ . Se  $q \leq p$ , si ha  $k \leq q \leq p$ , quindi non c'è il termine  $\frac{1}{k} \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k}$ , come voluto.

Se  $q > p$ , abbiamo il termine  $\frac{1}{k} \sum_n m_n z_n^{-k}$  per  $p < k \leq q$ , cioè il termine

$$\sum_{k=p+1}^q \left( \sum_n z_n^{-k} \right) z^k.$$

Se  $k > \max\{p, q\}$ , non c'è il termine  $z^k$  (nel quale la somma, poiché vale  $k > p = p_n$ , è fatta su tutti gli  $n$ ). Allora si ha

$$\frac{1}{k!} D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0} + \frac{1}{k} \sum_n z_n^{-k}$$

che è ovviamente equivalente alla tesi.  $\square$

**Teorema 1.2.15.** *Sia  $z_n \neq 0$  una successione con esponente di convergenza  $\beta$  finito e  $p$  il minimo intero t.c.  $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$ . Sappiamo già che il prodotto di Weierstrass in forma canonica,*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right),$$

*è uniformemente convergente, in particolare è una funzione intera. L'ordine di tale funzione, finito, è proprio  $\beta$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $F(z) = \prod_n E \left( \frac{z}{z_n}, p \right)$ , Vogliamo mostrare che

$$\log \left| \prod_n E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| = \sum_n \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| \leq C(\varepsilon) |z|^{\beta+\varepsilon} \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

Distinguiamo due casi.

Caso  $|z/z_n| \leq 1/2$ . Allora

$$\begin{aligned} \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| &\leq \left| \log E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| = \\ &= \left| \log \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right| = \left| \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^k \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} (1 + 1/2 + 1/4 + \dots) = 2 \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| \leq 2|z|^{p+1} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}. \end{aligned}$$

Adesso, se  $\beta = p + 1$  l'ultima quantità è uguale a  $2|z|^\beta \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} \leq C|z|^\beta$ .

Se invece  $\beta < p + 1$  prendiamo  $\varepsilon < p + 1 - \beta$  per ottenere

$$\begin{aligned} & 2|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} |z|^{p+1-\beta-\varepsilon} \leq \\ & \leq \frac{|z|^{\beta+\varepsilon}}{2^{p-\beta-\varepsilon}} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Caso  $|z/z_n| > 1/2$ . Allora

$$\begin{aligned} \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| &= \log \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| + \Re \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right) \leq \\ &\leq \log \left( 1 + \left| \frac{z}{z_n} \right| \right) + \sum_{k=1}^p \left| \frac{z}{z_n} \right|^k. \end{aligned}$$

Adesso, se  $p = 0$  l'ultima quantità è  $\leq C(\varepsilon) \left| \frac{z}{z_n} \right|^\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , dunque

$$\begin{aligned} \sum_{|z_n| < 2|z|} \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| &\leq C(\varepsilon)|z|^\varepsilon \sum_{|z_n| < 2|z|} |z_n|^{-\varepsilon} = \\ &= C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| < 2|z|} |z_n|^{-\varepsilon} |z|^{-\beta} \leq \\ &C(\varepsilon)2^\beta |z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| < 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq \tilde{C}(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Se invece  $p \geq 1$ , la quantità di prima è  $\leq C \left| \frac{z}{z_n} \right|^p$ , dunque

$$\begin{aligned} \sum_{|z_n| < 2|z|} \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| &\leq C|z|^p \sum_{|z_n| < 2|z|} |z_n|^{-p} = \\ &= C|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| < 2|z|} |z_n|^{-p} |z|^{p-\beta-\varepsilon} \leq \\ &\leq C2^{\beta+\varepsilon-p} |z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| < 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}. \end{aligned}$$

È lasciato al lettore il divertentissimo esercizio di verificare che le varie costanti moltiplicative (i cui nomi non sono stati scelti con troppa cura dall'autore) non creano davvero problemi, cioè che sono tutte maggiorate da una costante che dipende solo da  $\varepsilon$  e non da  $|z|$ . Abbiamo adesso  $\alpha \leq \beta$  e l'altra disuguaglianza già la sapevamo.  $\square$

**Corollario 1.2.16.** *Se la funzione*

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

*ha ordine  $\alpha$ , la successione  $z_n \neq 0$  ha esponente di convergenza  $\beta$  e  $G$  è un polinomio di grado  $q$ , allora  $\alpha = \max\{q, \beta\}$ .*

*Dimostrazione.*  $e^{G(z)}$  ha ordine  $q$  e il prodotto, per il teorema 1.2.15, ha ordine  $\beta$ . Poiché l'ordine del prodotto di due funzioni è minore o uguale del massimo fra i due ordini, allora  $\alpha \leq \max\{q, \beta\}$ . Ma abbiamo già visto che  $\alpha \geq \beta$  e per il teorema di Hadamard 1.2.13 si ha anche  $\alpha \geq q$ .  $\square$

### 1.3 Numeri e polinomi di Bernoulli e $\zeta(2k)$

In questa sezione sfrutteremo i risultati visti finora per calcolare i valori della  $\zeta$  di Riemann sui pari.

**Definizione 1.3.1.** Data  $F$  intera, il *genere* è  $g = \max\{p, q\}$ .

**Osservazione 1.3.2.**  $\alpha - 1 \leq g \leq \alpha$ . La seconda è ovvia. Se fosse  $g < \alpha - 1$ , avremmo  $p < \alpha - 1 \Rightarrow \beta \leq p + 1 < \alpha$ , ma anche  $q < \alpha - 1$ ; dato che abbiamo  $\alpha = \max\{\beta, q\}$ , si ha un assurdo.

**Esempio 1.3.3.** Sia  $F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ . Si ha

$$\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \ll_{\varepsilon} e^{|z|^{1+\varepsilon}} \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

dunque  $F$  ha ordine  $\alpha \leq 1$ . Gli zeri sono  $z_n = \pm n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{1+\varepsilon}} < +\infty$  per ogni  $\varepsilon > 0$  ma chiaramente non per  $\varepsilon = 0$ , da cui  $\beta = 1$ ;  $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha = 1$ . Inoltre  $p = 1$ . Studiamo questa funzione.

I termini del prodotto di Weierstrass sono  $E\left(\frac{z}{n}, 1\right) = \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right)$ .  
 $E\left(\frac{z}{n}, 1\right) \cdot E\left(\frac{z}{-n}, 1\right) = \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ . Abbiamo quindi il prodotto  $\prod_n \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ .  
 Per il teorema di Hadamard, il grado del polinomio  $G$  è  $q \leq \alpha = 1 = p$ . Per il corollario 1.2.14,  $G(z) = \log F(0) + \frac{F'}{F}(0)z = \log 1 + 0 = 0$ . Abbiamo allora

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Consideriamo

$$\log(F(z)) = \log\left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right) = \log(\sin(\pi z)) - \log(\pi z);$$



derivando troviamo

$$\frac{F'}{F}(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} - \frac{1}{z} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}.$$

Per  $k \geq 2$ , dal corollario 1.2.14 si ha cot

$$\sum_n \frac{1}{n^k} + \sum_n \frac{1}{(-n)^k} = -\frac{D^{k-1}(\pi \cot(\pi z) - 1/z)_{z=0}}{(k-1)!}.$$

Passando ai pari, per  $k \geq 1$  si ha

$$\begin{aligned} \zeta(2k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{D^{2k-1}(\frac{\pi}{2} \cot(\pi z) - \frac{1}{2z})_{z=0}}{(2k-1)!} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot(\pi z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k) z^{2k-1} \text{ per } |z| < 1. \end{aligned}$$

È un esercizio verificare che  $\zeta(2k) = 1 + O(1/2^{2k}) \sim 1$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Segue che  $\sqrt[k]{\zeta(2k)} \rightarrow 1$  per  $k \rightarrow +\infty$ , ma anche, in particolare,  $\sqrt[2k-1]{\zeta(2k)} \rightarrow 1$  per  $k \rightarrow +\infty$ , dunque il raggio di convergenza della funzione  $\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot(\pi z)$  è proprio 1.

**Definizione 1.3.4.** Si dicono *numeri di Bernoulli* quelli definiti nel modo seguente:

$$B_n = D^n \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)_{z=0}.$$

**Osservazione 1.3.5.** Poiché la funzione  $\frac{z}{e^z - 1}$  ha raggio di convergenza  $2\pi$ , dev'essere  $\limsup \sqrt[n]{B_n} = \frac{1}{2\pi}$ .

**Osservazione 1.3.6.**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z + ze^z}{2(e^z - 1)} = \frac{z(1 + e^z)}{2(e^z - 1)} \\ f(-z) &= \frac{-ze^z}{1 - e^z} - \frac{z}{2} = \frac{-ze^z - z}{2(1 - e^z)} = \frac{z(1 + e^z)}{2(e^z - 1)} \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è pari. Allora

$$D^{2k-1} \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)_{z=0} = -D^{2k-1} \left( \frac{z}{2} \right)_{z=0} = \begin{cases} -1/2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases},$$

dunque  $B_1 = -1/2$  e  $B_{2n-1} = 0$  per ogni  $n > 1$ .

**Osservazione 1.3.7.**

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \frac{e^z - 1}{z} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left( \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^{m-1}}{m!} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \right) \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{z^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

Perciò  $B_0 = 1$  e  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$  per ogni  $n \geq 2$ , che ci dà  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k = B_n$  e

$$B_{n-1} = -\frac{1 + \binom{n}{1} B_1 + \dots + \binom{n}{n-2} B_{n-2}}{\binom{n}{n-1}} \Rightarrow B_n \in \mathbb{Q}.$$

**Osservazione 1.3.8.**

$$\begin{aligned} \cot(z) &= i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i \left( 1 + \frac{2z}{z(e^{2iz} - 1)} \right) = \\ &= i + \frac{1}{z} \cdot \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{1}{z} \left( 1 - iz + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k B_{2k} (2z)^{2k}}{(2k)!} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k B_{2k}}{(2k)!} (2z)^{2k-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k) z^{2k-1} = \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot(\pi z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k} B_{2k} z^{2k-1}}{(2k)!} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + O(1/4^k) = \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-1)^{k-1} B_{2k} = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k). \end{aligned}$$

**Osservazione 1.3.9.**  $B_{2k}(-1)^{k-1} > 0$ . Inoltre,

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \leq |B_{2k}| \leq \frac{2(2k)! \pi^2}{6(2\pi)^{2k}} \text{ per ogni } k \geq 1.$$

Vogliamo vedere quando si ha

$$\begin{aligned} |B_{2(k+1)}| &\geq \frac{2(2(k+1))!}{(2\pi)^{2(k+1)}} \stackrel{?}{\geq} \frac{2(2k)! \pi^2}{6(2\pi)^{2k}} \geq |B_{2k}| \\ \frac{2(k+1)(2k+1)}{4\pi^2} &\stackrel{?}{\geq} \frac{\pi^2}{6} \\ \pi^4 &\stackrel{?}{\leq} 3(k+1)(2k+1), \end{aligned}$$

che è vero per  $k \geq 4$ . Da lì in poi, i numeri di Bernoulli di indice pari hanno moduli crescenti.

**Definizione 1.3.10.** Si dice *polinomio di Bernoulli  $n$ -esimo* il seguente:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

**Fatto 1.3.11.**

- $B_n(0) = B_n$
- $B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k = (-1)^n B_n$

**Osservazione 1.3.12.**

$$\begin{aligned} \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m z^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n B_k \binom{n}{k} x^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n. \end{aligned}$$

Adesso un po' di fatti che chi vuole può divertirsi a dimostrare per esercizio.

**Fatto 1.3.13.**

1.  $B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$ . Per  $y = 1$  si ha  $B_n(x+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x)$ ;
2.  $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ ;
3.  $\sum_{k=m}^{n-1} k^r = \frac{B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m)}{r+1}$ ;
4.  $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ .

## 1.4 La funzione $\Gamma$ di Eulero

Adesso, un caso particolare di un teorema che non dimostreremo; lo utilizzeremo per dimostrare una proposizione che potrebbe essere dimostrata anche con il lemma di sommazione di Abel.

**Teorema 1.4.1.** (*formula di sommazione di Eulero-Maclaurin*) Consideriamo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^1$ . Allora

$$\sum_{a < k \leq b} f(k) = \int_a^b f(x) dx - \left[ B_1(\{x\}) f(x) \right]_a^b + \int_a^b B_1(\{x\}) f'(x) dx.$$

Se  $a = m, b = n$ ,

$$\sum_{m < k \leq n} f(k) = \int_m^n f(x) dx - B_1 \cdot (f(n) - f(m)) + \int_m^n B_1(\{x\}) f'(x) dx.$$

**Corollario 1.4.2.**

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x) dx + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n B_1(\{x\}) f'(x) dx,$$

dove ricordiamo che  $B_1(\{x\}) = \{x\} - 1/2$ .

Per completezza, riportiamo anche il lemma di Abel.

**Lemma 1.4.3.** (formula di sommazione di Abel)

$$\sum_{k=m}^n a_k f(k) = \left( \sum_{k=m}^n a_k \right) f(n) - \int_m^n \left( \sum_{m \leq k \leq [x]} a_k \right) f'(x) dx.$$

**Proposizione 1.4.4.** Esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n = \gamma,$$

con  $0 < \gamma < 1$ .

*Dimostrazione.* Applichiamo il corollario 1.4.2 con  $m = 1$  e  $f(x) = 1/x$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{\{x\} - 1/2}{x^2} dx = \\ &= \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\} - 1/2}{x^2} dx + \int_n^{+\infty} \frac{\{x\} - 1/2}{x^2} dx = \\ &= \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx + \frac{1}{2} + O\left(\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\right) = \\ &= \log n + 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx + O(1/n) =: \log n + \gamma + O(1/n). \end{aligned}$$

Poiché  $0 < \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx < 1$ , si ha  $0 < \gamma < 1$  con  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ .  $\square$

**Osservazione 1.4.5.** Se  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^1$ , infinitesima e non crescente, allora esiste  $C > 0$  t.c.  $\sum_{1 \leq k \leq x} f(k) = \int_1^x f(y) dy + C + O(f(x))$ . La dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Osservazione 1.4.6.** Si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^q \frac{B_{2r}}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}} + O\left(\frac{1}{n^{2q+2}}\right).$$

**Definizione 1.4.7.** Sia  $\frac{1}{z\Gamma(z)}$  la funzione intera  $F$  di ordine 1 con zeri tutti semplici nei punti  $-1, -2, -3, \dots$  e t.c.  $F(0) = 1$  e  $F'(0) = \gamma$ .

Deve essere  $q = \deg G \leq 1$ ,  $\beta = 1$  e  $\alpha = 1$ .  $G(z) = \log(F(0)) + \frac{F'}{F}(0) = \gamma z$ , quindi  $q = 1$ . Vale anche  $p = 1$  e  $g = 1$ . Si ha dunque

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

**Proposizione 1.4.8.** (formula di Gauss) Per  $z \neq -m$  con  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  si ha

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \quad (3)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = \\ &= z \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) n^{-z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z \prod_{k=1}^n k}{z \prod_{k=1}^n (k+z)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.4.9.** Per  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  si ha  $\operatorname{Res}_{z=-k} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$ .

*Dimostrazione.* Fissato  $k$ , consideriamo il limite a partire da  $n \geq k$ . Vogliamo calcolare  $(\Gamma(z)(z+k))_{z=-k}$ . Si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{n^z n! (z+k)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \right)_{z=-k} &= \frac{n^{-k} n!}{-k(-k+1) \cdots (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-k)} = \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \left( \frac{n!}{(n-k)!} n^k \right) \rightarrow \frac{(-1)^k}{k!} \text{ per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.4.10.** (*Eulero*) Per  $z \neq -m$  con  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  si ha la seguente formula:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^z \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^{-1}. \quad (4)$$

*Dimostrazione.* Dalla dimostrazione della formula di Gauss abbiamo trovato  $\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{z}{k} \right) n^{-z}$ . Da  $n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k}$  otteniamo  $n^{-z} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-z}$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{z}{k} \right) n^{-z} &= z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-z} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{z}{k} \right) = \\ &= z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-z} \left( 1 + \frac{z}{k} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^z = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-z} \left( 1 + \frac{z}{n} \right). \end{aligned}$$

Perciò

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^z \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^{-1}.$$

□

**Proposizione 1.4.11.** Si ha  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  per  $z \in \mathbb{C}$ .

*Dimostrazione.* Dalla proposizione 1.4.10 abbiamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{z+1}{n}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(\frac{n+1+z}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n+1}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \frac{1}{z+1} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k+1}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \frac{1}{z+1} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \frac{n+1}{n+1+z} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} = z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

□

**Osservazione 1.4.12.** Abbiamo

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 2 \cdot \Gamma(1) = n!.$$

**Proposizione 1.4.13.** Per  $z \in \mathbb{C}$  si ha la relazione

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (5)$$

*Dimostrazione.* Per le proposizioni 1.4.11 e 1.4.10 si ha

$$\begin{aligned}
z\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \\
&= \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{z+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-z} \left(1 + \frac{z+1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1-z}{n}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{z^2}{n^2} \right)^{-1} = \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{z^2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n+1)^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}.
\end{aligned}$$

□

Per  $n \geq 1$ , vale la seguente formula di moltiplicazione dovuta a Gauss:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz).$$

Per i nostri scopi ci servirà solo un caso particolare, che è quello che dimostremo.

**Proposizione 1.4.14.** (*formula di duplicazione di Legendre*)

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z). \quad (6)$$

*Dimostrazione.* Dalla formula di Gauss abbiamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^z m!}{z(z+1) \cdots (z+m)} = \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^z (m-1)!}{z(z+1) \cdots (z+m-1)} \cdot \frac{m}{z+m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^z (m-1)!}{z(z+1) \cdots (z+m-1)}.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2^{2z-1}}{\frac{(2m)^{2z} (2m-1)!}{2z(2z+1) \cdots (2z+2m-1)}} \cdot \frac{m^z (m-1)!}{z(z+1) \cdots (z+m-1)} \cdot \frac{m^{z+1/2} (m-1)!}{(z+1/2)(z+3/2) \cdots (z+m-1/2)} = \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2^{2z-1} m^{2z+1/2} ((m-1)!)^2 2^m (2z)(2z+1) \cdots (2z+2m-1)}{(2m)^{2z} (2m-1)! z(z+1) \cdots (z+m-1) (2z+1)(2z+3) \cdots (2z+2m-1)} = \\
&\quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2^{2m-1} m^{1/2} ((m-1)!)^2}{(2m-1)!}.
\end{aligned}$$



Questa quantità non dipende da  $z$ , perciò è costante. Per la proposizione 1.4.13 si ha  $\Gamma^2(1/2) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ; allora la costante è proprio  $\sqrt{\pi}$ , come voluto.  $\square$

**Osservazione 1.4.15.**  $\Gamma(1/2)\Gamma(1) = \sqrt{\pi}\Gamma(2) \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .  
 $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2 < 1$ .

**Osservazione 1.4.16.**

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sin(\pi z/2)}{\pi} \sqrt{\pi} 2^{1-(1-z)} \Gamma(1-z) = \frac{\sin(\pi z/2)}{\sqrt{\pi}} 2^z \Gamma(1-z). \end{aligned}$$

**Proposizione 1.4.17.** Fuori dai poli di  $\Gamma$  si ha  $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(n+z)}$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \\ \log(\Gamma(z)) &= -\log z - \gamma z + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right) \\ \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(n+z)}. \end{aligned}$$

$\square$

**Osservazione 1.4.18.** Dalla proposizione 1.4.17 si ha

$$\Gamma'(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -\gamma.$$

L'integrale  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$  converge per  $\Re z > 0$  e definisce una funzione olomorfa in  $z$ . Vale il seguente risultato.

**Teorema 1.4.19.** Per  $\Re z > 0$  si ha

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx. \quad (7)$$

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare due cose:

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx;$
2.  $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$

La tesi seguirà dalla formula di Gauss.

1. Il primo passo è mostrare la seguente catena di disuguaglianze:

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x}. \quad (\star)$$

Notiamo che si ha

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x}{n} &\leq 1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2!n^2} + \frac{x^3}{3!n^3} + \cdots \leq 1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \cdots \iff \\ &\iff 1 + \frac{x}{n} \leq e^{x/n} \leq \frac{1}{1 - x/n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \text{ e } \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x} \left(1 - e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) \leq e^{-x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Ricordiamo la disuguaglianza di Bernoulli: per  $\alpha \geq 0$  e  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  abbiamo che  $(1 - \alpha)^n \geq 1 - n\alpha$ . Allora

$$e^{-x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leq e^{-x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) = \frac{x^2}{n} e^{-x}.$$

Ne deduciamo che

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx &= \int_0^n e^{-x} x^{z-1} dx - \left(\int_0^n e^{-x} x^{z-1} dx - \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx\right) \text{ e } \\ \left|\int_0^n \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) x^{z-1} dx\right| &\leq \int_0^n x^{\Re z - 1} \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^n x^{\Re z - 1 + 2} e^{-x} dx \ll \frac{1}{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx. \end{aligned}$$

2. Effettuando il cambio di variabile  $y = x/n$  troviamo

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = n^z \int_0^1 (1 - y)^n y^{z-1} dy;$$

integrando per parti più volte si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-y)^n y^{z-1} dy &= \frac{n}{z} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^z dy = \dots = \\ &= \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 y^{z+n-1} dy = \frac{n!}{z(z+1) \dots (z+n)}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.4.20.** (Stirling) Sia  $\varepsilon > 0$ . Si ha la seguente formula asintotica:

$$\log(\Gamma(z)) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (8)$$

uniformemente per  $|z| \geq \varepsilon$  e  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ . In particolare,

$$\begin{aligned} \log n! &= (n+1/2) \left( \log n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - n - 1 + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|n+1|}\right) = \\ &= (n+1/2) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Abbiamo  $\log(\Gamma(z)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n)}\right)$ . Notiamo che

$$\log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n)}\right) = z \log n - \log(z+n) - \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{z-1}{k}\right).$$

Applicando la formula di Eulero-Maclaurin alla funzione  $f_z(x) = \log\left(1 + \frac{z-1}{x}\right)$  troviamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{z-1}{k}\right) &= \int_1^n \log\left(1 + \frac{z-1}{x}\right) dx + \\ &+ \frac{1}{2} (\log z + \log(z+n-1) - \log n) + \int_1^n B_1(\{x\}) \left(\frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n)}\right) &= \dots = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - \left(z + n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{z-1}{n}\right) + \\ &+ \log\left(1 - \frac{1}{z+n}\right) - \int_1^n B_1(\{x\}) \left(\frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx; \end{aligned}$$

poiché  $\left(z + n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{z-1}{n}\right) \sim \frac{z-1}{n} \left(z + n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z-1$  con un resto di  $O_\varepsilon(1/n)$ , si ha

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + 1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) + \\ &- \int_1^{+\infty} B_1(\{x\}) \left(\frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx + \int_n^{+\infty} B_1(\{x\}) \left(\frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + C + O_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) + R_z(n). \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $DB_k(x) = kB_{k-1}(x)$  e che  $\{x\} - 1/2 = x - \lfloor x \rfloor - 1/2$ , dunque una primitiva di  $B_1(\{x\})$  è  $\frac{(x-\lfloor x \rfloor)^2}{2} - \frac{x-\lfloor x \rfloor}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}B_2(\{x\})$ ; allora integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{x\})}{z+x-1} dx &= \left[ \frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{12z} + \int_1^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)^2} dx. \end{aligned}$$

Poniamo anche  $C = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{x\})}{x} dx$ . Vogliamo vedere se

$$-\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{(z+x-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{(z+x)^2} dx \stackrel{?}{\ll_\varepsilon} \frac{1}{|z|}.$$

Si ha

$$\left| -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{(z+x)^2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{|z+x|^2}.$$

Da  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ , abbiamo  $|z+x|^2 = |z|^2 + x^2 + 2\langle z, x \rangle \geq |z|^2 + x^2 - 2|z|x \cos \varepsilon$ ; scrivendo  $y = x - |z| \cos \varepsilon$  e cambiando di variabile nei passaggi giusti troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{|z+x|^2} &\leq \int_{-|z|\cos \varepsilon}^{+\infty} \frac{dy}{|z|^2 \sin^2 \varepsilon + y^2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|z|^2 \sin^2 \varepsilon + y^2} = \\ &= \frac{1}{|z| \sin \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} \ll_\varepsilon \frac{1}{|z|}. \end{aligned}$$

Ricordiamo adesso che

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(z+1/2) &= \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(\Gamma(z)) + \log(\Gamma(z+1/2)) &= \frac{1}{2} \log \pi + (1-2z) \log 2 + \log(\Gamma(2z)); \end{aligned}$$

si ha anche  $\log(\Gamma(z)) = (z-1/2) \log z - z + C + O_\varepsilon(1/|z|)$ , da cui con un po' di conti si trova che  $C - \frac{1}{2} \log(2\pi) \ll_\varepsilon \frac{1}{|z|} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \log(2\pi)$ .  $\square$

**Corollario 1.4.21.** Se  $|z| \geq \varepsilon$  e  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  si ha

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

*Dimostrazione.* Sia  $f(z) = \log(\Gamma(z)) - (z - 1/2) \log z + z - \frac{1}{2} \log(2\pi)$ . Preso  $z_0$  che soddisfi le ipotesi e z.t.c.  $|z - z_0| = \varepsilon/2$ , abbiamo  $f(z) \ll_\varepsilon \frac{1}{|z|} \ll \frac{1}{|z_0|}$ . Per la formula integrale di Cauchy troviamo

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \ll_\varepsilon \frac{1}{|z_0|},$$

dove  $\gamma$  è il cerchio di centro  $z_0$  e raggio  $\varepsilon/2$ . La tesi segue notando che vale  $f'(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) - \log z + \frac{1}{2z}$ .  $\square$

**Corollario 1.4.22.** Per  $|z| \geq \varepsilon$  e  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  si ha

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right)\right).$$

$$\text{In particolare } n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

*Dimostrazione.* Per esercizio.  $\square$

**Corollario 1.4.23.** Se  $k \geq 1$ , allora  $(-1)^k B_{2k} = 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{e\pi}\right)^{2k} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$ .

*Dimostrazione.* Si ha infatti  $(-1)^k B_{2k} = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$ , ma

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = 1 + \frac{1}{2k-1} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

$\square$

**Osservazione 1.4.24.** Si ritrova il raggio di convergenza di  $\frac{z}{e^z - 1}$ .

**Corollario 1.4.25.** Sia  $z = x + iy$  con  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Allora

$$|\Gamma(x + iy)| = \sqrt{2\pi} |y|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|y|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|y|}\right)\right).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
\log(\Gamma(x+iy)) &= \left(x - \frac{1}{2} + iy\right) \log(x+iy) - x - iy + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) \\
\Re\left(\log(\Gamma(x+iy))\right) &= \Re\left((x-1/2+iy)(\log(iy) + \log(1-i \cdot x/y))\right) - x + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) = \\
&= (x-1/2) \log|y| + iy \left(\frac{\pi}{2} \cdot i \cdot \operatorname{sgn}(y)\right) + iy \left(-\frac{ix}{y}\right) - x + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) = \\
&= (x-1/2) \log|y| - |y| \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right)
\end{aligned}$$

□

## 2 Titolo da decidere

### 2.1 Lo spazio di Schwarz

**Definizione 2.1.1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ; si dice che  $f$  *tende rapidamente* a 0 per  $|x| \rightarrow +\infty$  se  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^n f(x) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Osservazione 2.1.2.**  $f$  tende rapidamente a 0 se e solo se  $f(x)|x|^n$  è limitata per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Definizione 2.1.3.** Si dice *spazio di Schwarz*  $\mathcal{S}$  lo spazio su  $\mathbb{C}$  delle funzioni  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  (a valori complessi) tendenti rapidamente a 0 insieme a tutte le loro derivate.

**Osservazione 2.1.4.** L'operatore  $D^k$  manda  $\mathcal{S}$  in sé per ogni  $k \geq 0$ .

Notazione: indichiamo con  $M^k$  l'operatore  $(M^k f)(x) = x^k f(x)$ ; abbiamo che anche  $M^k$  manda  $\mathcal{S}$  in sé.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}$  definita come

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Si ha che è ben definita.

**Osservazione 2.1.5.**  $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$ , quindi  $\hat{f}$  è limitata se  $f \in \mathcal{S}$ .

**Lemma 2.1.6.** *L'operatore  $\widehat{\cdot}$  manda  $\mathcal{S}$  in sé.*

*Dimostrazione.* Derivando sotto il segno di integrale abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = -2\pi i \widehat{Mf}(\xi) \Rightarrow \\ \Rightarrow D\hat{f} &= (-2\pi i) \widehat{Mf} \Rightarrow D^k \hat{f} = (-2\pi i)^k \widehat{M^k f} \Rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \xi \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \xi e^{-2\pi i \xi x} dx = \\ &= \left[ -\frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi i \xi x} f(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{2\pi i} \widehat{Df}(\xi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow M^k \hat{f} = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^k \widehat{D^k f}. \end{aligned}$$

Vogliamo concludere applicando l'osservazione 2.1.2 alle funzioni  $D^k \hat{f}$ . Notiamo che

$$M^h D^k \hat{f} = M^h (-2\pi i)^k \widehat{M^k f} = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^h (-2\pi i)^k \widehat{D^h M^k f};$$

ci basta dunque mostrare che  $\widehat{D^h M^k f}$  è limitata, ma questo segue dall'osservazione 2.1.5 e dal fatto che gli operatori  $D$  e  $M$  mandano  $\mathcal{S}$  in sé.  $\square$

**Lemma 2.1.7.** (*formula di Poisson*) Se  $f \in \mathcal{S}$  allora

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

*Dimostrazione.* Sia  $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ .  $g$  ha periodo 1. Poiché  $f \in \mathcal{S}$ , abbiamo che  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} D^k f(x+n)$  converge uniformemente per ogni  $k \geq 0$ , dunque è uguale a  $D^k g$ , quindi  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Scriviamo  $g$  in serie di Fourier:  $g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2\pi i m x}$ . Si ha

$$\begin{aligned} c_m &= \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx \stackrel{y=x+n}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m (y-n)} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i m x} dx = \hat{f}(m). \end{aligned}$$

Basta allora guardare  $g(0)$ .  $\square$

**Lemma 2.1.8.** Sia  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  per  $x \in \mathbb{R}$ . Allora  $f \in \mathcal{S}$  e inoltre  $\hat{f} = f$ .

*Dimostrazione.* Che  $f \in \mathcal{S}$  è facile da dimostrare.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow D \hat{f}(\xi) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} dx \stackrel{\text{per parti}}{=} \\ &= \left[ i e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i(2\pi i \xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} dx = -2\pi \xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$



Abbiamo

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= -2\pi\xi u(\xi) \Rightarrow \frac{u'}{u}(\xi) = -2\pi\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(u(\xi)) &= -\pi\xi^2 + c \Rightarrow u(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{f}(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2}. \end{aligned}$$

Si ha anche  $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1 \Rightarrow C = 1$ . □

**Osservazione 2.1.9.** La serie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}$  converge totalmente per  $\Re z \geq \varepsilon > 0$ .

## 2.2 La memoria di Riemann

**Definizione 2.2.1.** Sia  $z = x + iy$  con  $x > 0$ . Si dice *funzione  $\vartheta$  di Jacobi* la seguente serie totalmente convergente:

$$\vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}.$$

**Lemma 2.2.2.** Per  $x = \Re z > 0$  si ha

$$\vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \vartheta\left(\frac{1}{z}\right).$$

*Dimostrazione.* Possiamo dimostrare la formula per  $z = x > 0$ , che valga in tutto il semipiano  $\Re z > 0$  segue per prolungamento analitico. Sia  $f(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$  e sia  $f_x(\xi) = f(\sqrt{x}\xi) = e^{-\pi x \xi^2}$ . Allora

$$\begin{aligned} \hat{f}_x(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{x}t) e^{-2\pi i \xi t} dt \stackrel{s=t\sqrt{x}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-2\pi i \frac{\xi}{\sqrt{x}} s} ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} f\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_{\frac{1}{x}}(\xi). \end{aligned}$$

Applicando la formula di Poisson abbiamo

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_x(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_x(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{x}} f_{\frac{1}{x}}(n),$$

quindi

$$\vartheta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{x} n^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

□

Vogliamo usare quest'identità della funzione di Jacobi per dimostrare il teorema di Riemann sulla funzione  $\zeta$ . D'ora in avanti, per motivi storici la variabile sarà  $s = \sigma + it$  con  $\sigma, t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.2.3.** (Riemann, 1860) La funzione  $\zeta(s)$  è meromorfa in  $\mathbb{C}$  con un polo semplice in  $s = 1$  con residuo 1. Inoltre, posta

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

allora  $\xi$  è intera e fornisce il prolungamento analitico di  $\zeta$ . Si ha

$$\xi(s) = \xi(1-s). \quad (9)$$

*Dimostrazione.* Se  $\sigma > 0$ , allora

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\pi^{-s/2}}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\pi n^2}\right)^{s/2} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Se  $\sigma > 1$ , allora

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\pi n^2}\right)^{s/2} \frac{dx}{x} \stackrel{y=\frac{x}{\pi n^2}}{=} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{s/2} \frac{dy}{y} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{s/2} \frac{dy}{y} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\vartheta(y) - 1) y^{s/2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) (\vartheta(y) - 1) y^{s/2} \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^1 (\vartheta(y) - 1) y^{s/2} \frac{dy}{y} \stackrel{x=\frac{1}{y}}{=} \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left( \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) x^{-s/2} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1) \sqrt{x} \cdot x^{-s/2} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1) \cdot x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1) \cdot x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{s(s-1)}. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1)(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}) \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{4} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1)(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}) \frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{1}{2}(\vartheta(x) - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n x} = \frac{1}{e^{\pi x} - 1} \ll e^{-\pi x},$$

l'ultimo integrale nella formula per  $\xi(s)$  converge uniformemente in ogni striscia  $a \leq \sigma \leq b$ ; allora  $\xi$  definita da quell'integrale è una funzione intera e la relazione con  $\Gamma$  e  $\zeta$  data nell'enunciato è valida per  $\sigma > 1$ . Che  $\xi(1-s) = \xi(s)$  è ovvio. Poiché  $\Gamma$  non ha zeri e lo zero semplice di  $s/2$  in 0 è cancellato dal polo di  $\Gamma$ , questo definisce l'estensione analitica di  $\zeta$  a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Sappiamo già che sui reali  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1$ . Mostriamo che è un polo semplice di residuo 1. Si ha

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \xi(s) \frac{\pi^{s/2}}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{1}{s-1} \text{ e} \\ \text{Res}_{s=1} \zeta &= \lim_{s \rightarrow 1} (\zeta(s)(s-1)) = \xi(1) \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 1.\end{aligned}$$

□

**Osservazione 2.2.4.**  $\xi$  non ha zeri fuori dalla striscia  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

**Corollario 2.2.5.**  $\zeta(-2k) = 0$  per ogni  $k \geq 1$ .

*Dimostrazione.* Guardare i poli di  $\Gamma$ .

□

**Osservazione 2.2.6.** All'interno della striscia  $0 \leq \sigma \leq 1$  abbiamo che  $\zeta$  e  $\xi$  si annullano insieme.

**Osservazione 2.2.7.** Se  $\rho$  è uno zero, dalla (9) anche  $1-\rho$  è uno zero. Poiché  $\xi$  è reale sui reali, se  $\rho$  è uno 0 anche  $\bar{\rho}$  è uno zero.

**Osservazione 2.2.8.** Definendo  $\Xi(s) = \xi(is + 1/2)$  si ha

$$\Xi(-s) = \xi(1/2 - is) = \xi(1/2 + is) = \Xi(s).$$

Se  $s = x \in \mathbb{R}$ , allora  $\overline{\xi(1/2 + ix)} = \xi(1/2 - ix) = \xi(1/2 + ix)$ , quindi  $\Xi(x)$  è reale.

**Osservazione 2.2.9.**  $\zeta(s) \neq 0$  per  $\sigma > 1$ . Infatti

$$\begin{aligned} \left| \zeta(s) \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right| &= \left| \prod_{p > N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| = \\ &= \left| 1 + \sum_{p|n \Rightarrow p > N} \frac{1}{n^s} \right| \geq 1 - \sum_{n > N} \frac{1}{n^\sigma} = 1 + O\left(\frac{1}{N^{\sigma-1}}\right). \end{aligned}$$

**Osservazione 2.2.10.** Prendiamo  $0 \leq \sigma \leq 1$  e  $t = 0$ . Si ha

$$\xi(\sigma) = \frac{1}{2} + \frac{\sigma(\sigma-1)}{4} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1) (x^{\frac{\sigma}{2}} + x^{\frac{1-\sigma}{2}}) \frac{dx}{x}.$$

Ricordiamo che  $\frac{\vartheta(x) - 1}{2} \leq \frac{1}{e^{\pi x} - 1}$  e per  $x \geq 1$  vale che  $x \geq \sqrt{x}$ , dunque  $e^{\pi x} - 1 \geq \pi x \geq 2\sqrt{x}$ , perciò  $\vartheta(x) - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Inoltre

$$\int_1^{+\infty} (x^{\frac{\sigma-1}{2}} + x^{\frac{-\sigma}{2}}) \frac{dx}{x} = \frac{2}{\sigma(\sigma-1)}.$$

Mettendo assieme, troviamo che

$$\xi(\sigma) \geq \frac{1}{2} - \frac{\sigma(1-\sigma)}{4} \cdot \frac{2}{\sigma(1-\sigma)} = 0.$$

**Osservazione 2.2.11.**  $\xi(0) = 1/2$  e  $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = 1$ , dunque dalla formula che lega  $\zeta$  e  $\xi$  si ha  $\zeta(0) = -1/2$ .

**Esercizio 2.2.12.** Dimostrare che  $\zeta(-1) = -1/12$ .

Vogliamo ora capire qual è l'ordine di  $\xi$ . Abbiamo  $\xi(s) = (s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)$ . Analizziamo i vari fattori.

Con  $s = 2n$  si ha  $\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \Gamma(n+1) = n! \sim e^{(n+\frac{1}{2}) \log n - n + (\dots)} \ll_{\varepsilon} e^{n^{1+\varepsilon}}$ . Più in particolare, per il corollario 1.4.22 abbiamo che questo vale in generale per  $\sigma > 1$ . Nella stessa regione,  $\zeta(s)$  e  $\pi^{-\frac{s}{2}}$  sono limitate a infinito e  $s-1$  è “piccola”. Questo ci dice che dev'essere  $\text{ord}(\xi) \geq 1$  e, per quanto visto su  $\Gamma$ , se valesse l'uguale l'ordine sarebbe un inf e non un min.

Per simmetria, ci resta da verificare solo la regione  $1/2 \leq \sigma \leq 1$ . Vediamo che, se l'ordine fosse proprio 1, per il teorema di Hadamard avremmo che  $\xi$  ha un prodotto di Weierstrass della forma  $\xi(s) = e^{as+b} \prod_p (\dots)$ . Se non ci fossero

zeri, il prodotto vuoto sarebbe 1 e  $\xi(s) \ll e^{a|s|}$ , assurdo per via del contributo  $e^{s \log s}$  dovuto a  $\Gamma$ . Per lo stesso motivo, gli zeri devono essere infiniti.

**Lemma 2.2.13.** Per  $\sigma \geq \varepsilon$  si ha  $\zeta(s) \ll_{\varepsilon} |s|$  (*o*  $|t|$ ) uniformemente.

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma > 1$ . Per somministrazione parziale,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{\lfloor u \rfloor}{u^{s+1}} du = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{du}{u^s} - s \int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + \frac{s}{s-1} - s \int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du \Rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du; \end{aligned}$$

questa è l'estensione di  $\zeta$  a  $\sigma > 0$  (l'integrale converge uniformemente per  $\sigma \geq \varepsilon$ ).

**Osservazione 2.2.14.** Prendendo  $s = 1$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= 1 - \frac{\{x\}}{x} + \log x - \int_1^x \frac{\{u\}}{u^2} du \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right) &= 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du = \gamma. \end{aligned}$$

Ma passiamo oltre.

Utilizzando i polinomio di Bernoulli, abbiamo

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + 1 - \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{s+1}} - s \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{u\})}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{1}{s-1} + 1 - \frac{1}{2} - s \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{u\})}{u^{s+1}} du. \end{aligned}$$

**Osservazione 2.2.15.** Ricordando la relazione tra polinomi di Bernoulli successivi e le loro derivate, si può integrare per parti fino a ottenere il prolungamento di  $\zeta$  in un semipiano che inizia arbitrariamente a sinistra. Ma, senza l'equazione funzione, questa costruzione è abbastanza inutile.

Tornando a noi, per  $\sigma \geq \varepsilon$  e usando che  $B_1(\{u\})$  è limitato, abbiamo

$$|\zeta(s)| \ll 1 + |s| \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} \ll \frac{|s|}{\varepsilon} \ll_\varepsilon |s|.$$

□

Curiosità: la congettura di Lindelöf ipotizza che  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon t^\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ .

**Proposizione 2.2.16.** (*formula di Riemann-Von Mangoldt*) Contando con molteplicità, sia

$$N(T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma \mid \zeta(\rho) = 0, 0 \leq \beta \leq 1, 0 < \gamma < T\},$$

allora per  $T \rightarrow +\infty$  si ha

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \quad (10)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il bordo rettangolare  $R$ , in verde nella figura.



Poiché  $\xi$  è una funzione intera senza zeri fuori dalla striscia critica, all'interno della quale ha invece gli stessi zeri di  $\zeta$  con la stessa molteplicità, abbiamo che

$$N(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_R \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \frac{1}{2\pi} \Delta_R \arg(\xi(s)).$$

Adesso notiamo che, per quello che sappiamo di  $\xi$  tra 0 e 1 e fuori dalla striscia critica e usando l'equazione funzionale, essa è sempre reale e mai nulla tra  $-1$  e  $2$ , dunque l'argomento non cambia e possiamo trascurare quel segmento. Dato che  $\xi$  è reale sui reali, si ha anche  $\xi(s) = \xi(1-s) = \xi(1-\bar{s})$ ; perciò la variazione da  $\frac{1}{2} + iT$  a  $-1$  è la stessa che tra  $2$  e  $\frac{1}{2} + iT$ . Detto allora  $L$  il sottotratto di  $R$  formato dai due segmenti da  $2$  a  $2 + iT$  e da  $2 + iT$  e  $\frac{1}{2} + iT$ , si ha  $N(T) = \frac{1}{\pi} \Delta_L \arg(\xi(s))$ . Ricordiamo ora la definizione di  $\xi$ :

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s);$$

si ha dunque

$$\Delta_L \arg(\xi(s)) = \Delta_L \arg(s-1) + \Delta_L \arg(\pi^{-\frac{s}{2}}) + \Delta_L \arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) + \Delta_L \arg(\zeta(s)).$$

Studiamo i singoli pezzi.

$$\begin{aligned}\Delta_L \arg(s-1) &= \arg\left(-\frac{1}{2} + iT\right) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) \text{ e} \\ \Delta_L \arg\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\right) &= \Delta_L \arg\left(e^{-\frac{s}{2} \log \pi}\right) = -\frac{T}{2} \log \pi.\end{aligned}$$

Ricordiamo la formula di Stirling:

$$\log(\Gamma(z)) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|z|}\right);$$

abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}\Delta_L \arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) &= \Im \log\left(\Gamma\left(\frac{5}{4} + i\frac{T}{2}\right)\right) = \\ &= \Im\left(\left(\frac{3}{4} + i\frac{T}{2}\right) \log\left(\frac{5}{4} + i\frac{T}{2}\right) - \frac{5}{4} - i\frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right)\right) = \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right)\right) + \frac{T}{2} \log \sqrt{\frac{T^2}{4} + \frac{25}{16}} - \frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) = \\ &= \frac{3}{8}\pi + \frac{T}{2} \log\left(\frac{T}{2}\right) + \frac{T}{2} \log\left(1 + \frac{25}{4T^2}\right) - \frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) = \\ &= \frac{3}{8}\pi + \frac{T}{2} \log\left(\frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right).\end{aligned}$$

Mettendo assieme si ha  $N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) + \frac{7}{8} - \frac{T}{2\pi} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right)$ , dove poniamo  $S(T) = \frac{1}{\pi} \arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right)$ . Si conclude con il lemma seguente.  $\square$

**Lemma 2.2.17.** *Sia  $S(T) = \frac{1}{\pi} \arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right)$ ; allora*

$$S(T) \ll \log T.$$

*Dimostrazione.* Scriviamo

$$\arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right) = \arg(\zeta(2 + iT)) + \left[\arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right) - \arg(\zeta(2 + iT))\right]$$

e stimiamo i due addendi. Si ha

$$\begin{aligned}\Re \zeta(2 + iT) &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Re \frac{1}{n^{2+iT}} \geq 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) > \frac{1}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\arg(\zeta(2 + iT))| \leq \pi/2.\end{aligned}$$

Sia  $m = \#\{\sigma_j \in [1/2, 2] \mid \Re \zeta(\sigma_j + iT) = 0\}$ . Per come sono definiti, tra un  $\sigma_j$  e il successivo l'argomento di  $\zeta$  cambia al più di  $\pi$ . Allora

$$\left| \arg \left( \zeta \left( \frac{1}{2} + iT \right) \right) - \arg(\zeta(2 + iT)) \right| \leq (m + 1)\pi.$$

Dobbiamo stimare  $m$ . Definiamo  $f(s) = \zeta(s + iT) + \zeta(s - iT)$ , che è una funzione olomorfa per  $s + iT \neq 1$ , quindi lo è in particolare per  $T$  sufficientemente grande in modulo ( $\neq 0$ ), che è quello che ci interessa. Per motivi di coniugio ( $\zeta$  è reale sui reali), abbiamo che  $f(\sigma) = 2\Re \zeta(\sigma + iT)$ . Perciò otteniamo che  $m = \#\{\sigma_j \in [1/2, 2] \mid f(\sigma_j) = 0\}$ ; vale dunque che

$$m \leq M = \#\{s \in \mathbb{C} \mid |s - 2| \leq 3/2, f(s) = 0\}.$$

Per il corollario 1.2.5 con  $r = 3/2$  e  $R = 7/4$ , troviamo

$$\begin{aligned}M &\leq \frac{1}{\log(R/r)} \log \left( \frac{\max_{|s-2| \leq 7/4} |f(s)|}{f(2)} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\log(7/6)} \log \left( \frac{\max_{|s-2| \leq 7/4} 2|\zeta(s + iT)|}{2/3} \right) \leq C_1 \log T + C_2 \ll \log T,\end{aligned}$$

dove abbiamo stimato  $f(2)$  usando quanto trovato per  $\Re \zeta(2 + iT)$ , mentre il massimo dentro al logaritmo è stimato usando che  $|\zeta(\sigma + iT)| \ll T$  per il lemma 2.2.13 con  $\sigma \geq 1/4$ .  $\square$

**Fatto 2.2.18.** Il termine che è  $O(\log T)$  in (10) è comunemente chiamato  $\mathcal{R}$ . L'ipotesi di Lindelöf implica  $\mathcal{R} = o(\log T)$ , mentre l'ipotesi di Riemann implica  $\mathcal{R} = O\left(\frac{\log T}{\log \log T}\right)$ .

Dalla dimostrazione della formula di Riemann-Von Mangoldt abbiamo che  $N(T) - \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) + \frac{T}{2\pi} = \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right)$ ; Littlewood ha dimostrato che  $S_1(T) = \int_0^T S(t) dt \ll \log T$  (se il risultato del lemma 2.2.17 fosse ottimale, questo significherebbe che  $S$  cambia spesso di segno, quindi ha molti zeri). Si ha dunque

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ N(t) - \frac{t}{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} \right) - \frac{t}{2\pi} \right] dt = \frac{7}{8},$$



che ci dice che la quantità  $\frac{7}{8}$  nella formula è relativamente importante, quindi non possiamo trascurarla con troppa leggerezza.

**Corollario 2.2.19.** *uniformemente in  $T$  e  $H$  si ha che*

$$N(T+H) - N(T) \ll (H+1) \log(T+H).$$

*Inoltre, esiste  $H_0$  t.c. per  $H \geq H_0$  si ha*

$$N(T+H) - N(T) \gg H \log T.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} N(T+H) - N(T) &= \\ &= \frac{T+H}{2\pi} \log \left( \frac{T+H}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) + O(\log(T+H)) = \\ &= \int_{\frac{T}{2\pi}}^{\frac{T+H}{2\pi}} \log t \, dt + O(\log(T+H)). \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio, esiste  $0 \leq \delta \leq 1$  t.c.

$$N(T+H) - N(T) = \frac{H}{2\pi} \log \left( \frac{T+\delta H}{2\pi} \right) + O(\log(T+H));$$

la prima parte della tesi segue immediatamente. Per la seconda, notiamo che

$$\frac{H}{2\pi} \log \left( \frac{T+\delta H}{2\pi} \right) + O(\log(T+H)) > \frac{H}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) + O(\log(T+H)) \gg H \log T,$$

dove serve  $H \geq H_0$  per evitare che domini il termine  $O$ -grande, che non potremmo stimare dal basso.  $\square$

**Corollario 2.2.20.** *Siano  $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$  gli zeri non banali di  $\zeta$ , ordinati per parte immaginaria crescente (consideriamo solo  $\gamma_n > 0$ ) e contati con molteplicità; allora si ha  $\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}$ .*

$$(Littlewood: \gamma_{n+1} - \gamma_n \ll \frac{1}{\log \log \log \gamma_n})$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \gamma_n &\sim \frac{\gamma_n + 1}{2\pi} \log \left( \frac{\gamma_n + 1}{2\pi} \right) \sim N(\gamma_n + 1) \geq n \geq \\ &\geq N(\gamma_n - 1) \sim \frac{\gamma_n - 1}{2\pi} \log \left( \frac{\gamma_n - 1}{2\pi} \right) \sim \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \gamma_n \Rightarrow \\ \Rightarrow n &\sim \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \gamma_n \Rightarrow \log n \sim \log \gamma_n + \log \log \gamma_n - \log 2\pi \sim \log \gamma_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log \gamma_n} \sim \frac{2\pi n}{\log n}. \end{aligned}$$

$\square$

**Corollario 2.2.21.** *La successione  $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$  ha esponente di convergenza 1.*

*Dimostrazione.* Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\gamma_n|^{1+\varepsilon}} \leq c_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^{1+\varepsilon}}{n^{1+\varepsilon}} \leq c_2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}} < +\infty,$$

ma, poiché  $|\beta_n| \leq 1$ , abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+|\gamma_n|} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{c_3 n}{\log n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{\log n + c_3 n} = +\infty.$$

□

### 2.3 Le funzioni intere $\xi(s)$ e $(s-1)\zeta(s)$

Dovevamo capire qual è l'ordine di  $\xi$  come funzione intera. Avevamo già controllato per  $\sigma > 1$ , quindi ci manca  $\sigma \geq 1/2$ . Ricordiamo che  $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ . Per il lemma 2.2.13 abbiamo già  $\zeta(s) \ll |s|$  per  $\sigma \geq 1/2$ ; inoltre, ricordando il corollario 1.4.22, abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &\ll_{\varepsilon} e^{|s|^{1+\varepsilon}} \text{ per ogni } \varepsilon > 0, \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \ll 1, \quad \frac{s(s-1)}{2} \ll |s^2| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi(s) \ll_{\varepsilon} e^{|s|^{1+\varepsilon}} \text{ per } \sigma \geq 1/2. \end{aligned}$$

Da  $\xi(s) = \xi(1-s)$ , otteniamo che è vero per ogni  $\sigma$ . Scriviamo  $\xi$  con il prodotto di Weierstrass:

$$\xi(s) = e^{a+As} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}};$$

$$\text{dev'essere } a = \log(\xi(0)) = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \xi(s) = \frac{1}{2} e^{As} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}.$$

Consideriamo invece  $(s-1)\zeta(s) = \xi(s) \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ . Dall'equazione appena scritta otteniamo che ha ordine 1, dunque si ha (ricordando anche gli zeri banali)

$$(s-1)\zeta(s) = e^{b+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}};$$

$$\text{dev'essere } b = \left( \log(s-1)\zeta(s) \right)_{s=0} = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} e^{Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}}.$$

Confrontando i prodotti di Weierstrass per  $\zeta$  e  $\xi$  usando l'equazione che lega le due funzioni, ricordando anche la definizione di  $\Gamma$ , si ha  $B = A + \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma}{2}$ . Andiamo a calcolarci  $A$  e  $B$ .

$$A = \frac{\xi'}{\xi}(0) = 2\xi'(0), \quad B = \left( \frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'}{\zeta}(0) \right)_{s=0} = -2\zeta'(0) - 1.$$

Si ha anche

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} &= \frac{A}{2} + \frac{1}{4} \log \pi + \frac{\gamma}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi'(0) + \zeta'(0) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \pi - \frac{\gamma}{4}. \end{aligned}$$

Vogliamo calcolare  $\xi'(0)$  usando l'equazione funzionale per  $\xi$ . Dalla definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \xi'(s) &= \frac{(s-1)\zeta(s)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{4} \log \pi \cdot s(s-1)\zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} + \\ &+ \frac{s}{4} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma'\left(\frac{s}{2}\right) (s-1)\zeta(s) + \frac{s}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) D(\zeta(s)(s-1)) \end{aligned}$$

Nella dimostrazione del lemma 2.2.13 abbiamo visto che

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1} \left( \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma,$$

dunque dev'essere  $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + (s-1)g(s)$ , con  $g$  una qualche funzione intera. Allora otteniamo

$$\xi'(1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{4} \log \pi \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sqrt{\pi}} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \gamma;$$

dobbiamo calcolare  $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$ . Dalla proposizione 1.4.17 abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(n+z)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n(2n+1)} = -\gamma - 2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \\ &= -\gamma - 2 + 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right) = -\gamma - 2 + 2 - 2 \log 2 = -\gamma - 2 \log 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2 \log 2), \end{aligned}$$

quindi

$$\xi'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \pi - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log(4\pi).$$

Adesso usiamo l'equazione funzionale:

$$\begin{aligned}
\xi(1-s) &= \xi(s) \Rightarrow -\xi'(1-s) = \xi'(s) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \xi'(0) = -\xi'(1) = \frac{1}{4} \log(4\pi) - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{2} \text{ e} \\
\zeta'(0) &= \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log(4\pi) - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{4} \log \pi = \\
&= -\frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \log 2 = -\frac{1}{2} \log(2\pi);
\end{aligned}$$

abbiamo quindi

$$B = -2\zeta'(0) - 1 = \log(2\pi) - 1 \text{ e } A = 2\zeta'(0) = \frac{1}{2} \log(4\pi) - 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Ora, vogliamo dire che non ci sono zeri per  $\sigma = 1$  (e dalla funzionale, nemmeno per  $\sigma = 0$ ). Dal prodotto di Weierstrass troviamo

$$\begin{aligned}
\frac{\xi'}{\xi}(s) &= A + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \text{ e} \\
\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= -\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\xi'}{\xi}(s) = \\
&= -\frac{1}{s-1} + A + \frac{1}{2} \log \pi + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s}{2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che ci sia uno zero in  $1+it$ . Ci tornerà utile la seguente disuguaglianza, valida per ogni  $\theta$  reale:  $3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) \geq 0$ . Infatti, la si riscrive come  $2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2 = 2(\cos \theta + 1)^2$ . Sia ora  $\sigma > 1$ , abbiamo

$$\log(\zeta(s)) = \log \left( \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \right) = - \sum_p \log \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mp^{ms}},$$

da cui prendendo la parte reale

$$\log |\zeta(\sigma + it)| = \sum_p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mp^{\sigma m}} \cos(mt \log p).$$

Adesso, sfruttando la disuguaglianza vista sopra con  $\theta = mt \log p$  al variare di  $m$  e  $p$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
&3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + i2t)| = \\
&= \sum_p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}} (3 + 4 \cos(mt \log p) + \cos(2mt \log p)) \geq 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + i2t)| \geq 1.
\end{aligned}$$

Adesso,  $\zeta$  ha un polo semplice in 1, perciò  $\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1} + g(\sigma)$  con  $g$  una qualche funzione intera; invece, se ci fosse uno zero in  $1+it$ , avremmo

$$\zeta(\sigma+it) = (\sigma+it-1-it)h(\sigma+it) = (\sigma-1)h(\sigma+it),$$

con  $h$  una qualche funzione olomorfa in un intorno di  $1+it$ . Ma allora, poiché  $4 > 3$ , si ha

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \zeta^3(\sigma) \zeta(\sigma+it)^4 \zeta(\sigma+2it) = 0,$$

in contraddizione con la disuguaglianza trovata.

Diamo un'altra dimostrazione di questo fatto, dovuta a Ingham (si veda [T], capitolo III paragrafo 3.4). Dati  $a, b \in \mathbb{C}$ , usiamo che

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s},$$

dove  $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$ . Prendendo  $a = -b = i\gamma$  troviamo

$$\frac{\zeta^2(s)\zeta(s-i\gamma)\zeta(s+i\gamma)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_{i\gamma}(n)\sigma_{-i\gamma}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sigma_{i\gamma}(n)|^2}{n^s}.$$

Sia  $\sigma_0$  l'ascissa di convergenza dell'ultima serie che abbiamo scritto. Poiché i coefficienti della stessa sono maggiori o uguali a zero, abbiamo che la funzione  $\frac{\zeta^2(s)\zeta(s-i\gamma)\zeta(s+i\gamma)}{\zeta(2s)}$  ha un polo in  $\sigma_0$ . Supponiamo per assurdo che abbia uno zero in  $1+i\gamma$ , dunque anche in  $1-i\gamma$ ; allora per  $s=1$  c'è un doppio zero che annulla il polo doppio di  $\zeta^2(s)$  al numeratore. Dunque il primo polo che si incontra dev'essere in uno zero del denominatore, cioè (ci stiamo restringendo alla retta reale perché i coefficienti della serie sono non negativi) in  $s=-1$ . Allora dev'essere  $\sigma_0 \leq -1$ , ma prendendo  $s=1/2$  troviamo facilmente un assurdo (la funzione si annulla grazie al polo al denominatore, la serie no).

Andiamo ora a cercare una regione in cui sono contenuti gli zeri non banali di  $\zeta$ . Abbiamo già visto che

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\frac{1}{s-1} + A + \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s}{2} + 1 \right) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

**Proposizione 2.3.1.** *(de la Vallée-Poussin, 1899) Esiste una costante  $C_0 > 0$  t.c., se  $\rho = \beta + i\gamma$  con  $\gamma > 0$  è uno zero non banale, allora*

$$\beta < 1 - \frac{C_0}{\log \gamma}. \quad (11)$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$-\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - A_1 + \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) - \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Per  $t \geq 2, 1 < \sigma \leq 2$ , usando il corollario 1.4.21 otteniamo

$$\begin{aligned} -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right) &< C \log t - \sum_{\rho} \left( \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \right) < \\ &< C \log t - \sum_{\rho} \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}. \end{aligned}$$

Adesso, tenendo eventualmente solo lo zero dell'ipotesi, abbiamo

$$t = \begin{cases} \gamma & \Rightarrow -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma)\right) < C \log \gamma - \frac{1}{\sigma-\beta} \\ 2\gamma & \Rightarrow -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i2\gamma)\right) < C \log(2\gamma) \leq C_1 \log \gamma \\ = 0 & \Rightarrow -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right) = \frac{1}{\sigma-1} + O(1). \end{cases}$$

Poiché siamo nel giusto semipiano di convergenza, scriviamo

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \cos(t \log n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3 \cdot \Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right) - 4 \cdot \Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma)\right) - \Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i2\gamma)\right) \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} + C_2 \log \gamma \Rightarrow \frac{4}{\sigma-\beta} \leq \frac{3}{\sigma-1} + C_2 \log \gamma. \end{aligned}$$

Prendendo  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log \gamma}$  con  $\delta > 0$ , si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 2.3.2.** Si può dire che il primo zero ha  $\gamma \geq 6$ . Prendendo anche  $6 \leq \gamma \leq t$ , dato che  $1 - \frac{C_0}{\log \gamma} \leq 1 - \frac{C_0}{\log t}$ , quello che troviamo è che la regione  $\sigma > 1 - \frac{C_0}{\log(|t|+2)}$  è libera da zeri di  $\zeta$ . Questo risultato è stato migliorato:

$$\text{Littlewood, 1922: } \sigma > 1 - \frac{C_0 \log \log(|t|+2)}{\log(|t|+2)};$$

$$\text{Vinogradov, 1958: } \sigma > 1 - \frac{C_0(\varepsilon)}{(\log(|t|+2))^{2/3+\varepsilon}} \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

Per  $t \geq 2$ , abbiamo visto che

$$-\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) < C \log t - \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Prendendo  $s = 2 + it$ , la quantità  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  è limitata, dunque a meno di cambiare costante troviamo

$$\begin{aligned} \Re \sum_{\rho} \left( \frac{1}{(2-\beta) + i(t-\gamma)} + \frac{1}{\rho} \right) &< C \log t \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{\rho} \frac{1}{4 + (t-\gamma)^2} &\leq \sum_{\rho} \left( \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right) < C \log t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{|\gamma-t| \geq 1} \frac{1}{4 + (t-\gamma)^2} \leq C \log t. \end{aligned}$$

Otteniamo il seguente lemma.

**Lemma 2.3.3.** *Se  $-1 \leq \sigma \leq 2$  si ha*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log(|t|+2)).$$

*Dimostrazione.* Per  $|t| \geq 2$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + O(\log t) \\ \frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) &= \sum_{\rho} \left( \frac{1}{2+it-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + O(\log t); \end{aligned}$$

poiché  $\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)$  è limitata, facendo la differenza otteniamo

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log t) = \sum_{\rho} \frac{2-\sigma}{(s-\rho)(2+it-\rho)} + O(\log t).$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\gamma-t| > 1} \frac{2-\sigma}{(s-\rho)(2+it-\rho)} \right| &\leq \sum_{|\gamma-t| > 1} \frac{3}{(\gamma-t)^2} \ll \log t \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \left( \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log t) \text{ e} \\ \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \frac{1}{|2+it-\rho|} &\leq \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \frac{1}{2-\beta} \leq N(t+1) - N(t-1) \ll \log t, \end{aligned}$$

da cui la tesi.  $\square$

Torniamo su

$$\begin{aligned}
S(T) &= \frac{1}{\pi} \arg \left( \zeta \left( \frac{1}{2} + iT \right) \right) - \frac{1}{\pi} \arg (\zeta(2 + iT)) = \\
&= \frac{1}{\pi} \Im \left[ \log \left( \zeta \left( \frac{1}{2} + iT \right) \right) - \log (\zeta(2 + iT)) \right] = \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{1/2}^2 \Im \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) \right) d\sigma = \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{1/2}^2 \sum_{|\gamma-T| \leq 1} \Im \left( \frac{1}{\sigma + iT - \rho} \right) d\sigma + O(\log T) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{|\gamma-T| \leq 1} \Delta_l \arg(s - \rho) + O(\log T) \ll \sum_{|\gamma-T| \leq 1} 1 + O(\log T) \ll \log T,
\end{aligned}$$

dove dalla terza alla quarta riga abbiamo usato il lemma 2.3.3 ( $l$  è il segmento da  $\frac{1}{2} + iT$  a  $2 + iT$ ). Che valga  $\Delta_l \arg(s - \rho) \ll 1$  per  $|\gamma - T| \leq 1$  segue da un po' di geometria.

## 2.4 A proposito di $\psi$

Riemann congetturerà che

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Beh, non proprio: l'espressione a destra è continua, a differenza di  $\psi$ . Utilizzeremo  $\psi_0(x) = \sum_{n < x} \Lambda(n) + \frac{1}{2} \Lambda(x)$ , dove poniamo  $\Lambda = 0$  fuori dagli interi. L'idea di Riemann è di scrivere

$$\psi_0(x) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} dx$$

con  $c > 1$  e applicare il teorema dei residui. Ma come ha fatto a derivare un'espressione tanto precisa? Ha guardato i poli dell'integranda.

**Lemma 2.4.1.** *Dato  $c > 0$ , sia  $I(y, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s}$ ; allora*

$$|I(y, T) - \delta(y)| \leq \begin{cases} y^c \min \left\{ 1, \frac{1}{T|\log y|} \right\} & \text{se } y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{se } y = 1, \end{cases}$$

$$\text{dove } \delta(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } y = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < y < 1 \end{cases}. \text{ Di conseguenza, } \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \delta(y).$$



*Dimostrazione.* Preso  $0 < y < 1$ , consideriamo l'integrale sul cammino in figura, percorso in senso orario.



In teoria dovremmo fare un integrale chiuso e poi mandare un lato a infinito, ma visto che non ci sono poli per  $y^s/s$  nella regione considerata e sul lato che si manda a infinito la funzione va a 0 uniformemente, saltiamo il passaggio. Per il teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{c-iT}^{+\infty-iT} - \int_{c+iT}^{+\infty+iT} \right) y^s \frac{ds}{s} = \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2.$$

Si ha  $|\mathcal{I}_1| \leq \frac{1}{T} \int_c^{+\infty} y^\sigma d\sigma = \frac{1}{T} \cdot \frac{y^c}{|\log y|}$  e  $\mathcal{I}_2$  si stima allo stesso modo.

Per l'altro argomento del minimo, consideriamo la circonferenza di centro l'origine e raggio  $R = \sqrt{c^2 + T^2}$  e prendiamo il cammino da  $c - iT$  a  $c + iT$  e ritorno che gira in senso orario (quindi il segmento passante per  $c$  all'andata e l'arco destro al ritorno). Sia  $\gamma$  l'arco percorso al ritorno.



Allora per il teorema dei residui

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \frac{y^c}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{d|s|}{|s|} \leq y^c \frac{\pi R}{2\pi R} \leq \frac{y^c}{2}.$$

Per  $y > 1$ , basta ripetere le stesse stime ma con i cammini “di sinistra” percorsi in senso antiorario, facendo attenzione al polo in 0:  $\text{Res}_{s=0} \frac{y^s}{s} = 1$ .

Adesso facciamo  $y = 1$  (non saremo rigorosi, ma si può sistemare facilmente):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^T \frac{i dt}{c + it} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c - it}{c^2 + t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c}{c^2 + t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{c}{c^2 + t^2} dt \stackrel{x=t/c}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{T/c} \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_{T/c}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \right) \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{T}. \end{aligned}$$

□

Prendiamo ora  $y = \frac{x}{n}$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\Lambda(n)}{n^s} x^s \frac{ds}{s} = \Lambda(n) \cdot \begin{cases} 1 + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left\{1, \frac{1}{T|\log(\frac{x}{n})|}\right\}\right) & \text{se } n < x \\ \frac{1}{2} + O\left(\frac{c}{T}\right) & \text{se } n = x \text{ (e } n = p^a) \\ O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left\{1, \frac{1}{T|\log(\frac{x}{n})|}\right\}\right) & \text{se } n > x. \end{cases}$$

Di conseguenza, per  $c > 1$  abbiamo

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) + \frac{\Lambda(x)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \frac{x^s}{s} ds + \\ + O \left( \sum_{n=1, n \neq x}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} x^c \min \left\{ 1, \frac{1}{T |\log(\frac{x}{n})|} \right\} + \frac{c\Lambda(x)}{T} \right).$$

Vogliamo dare una stima del resto, facendo un po' di casi. Prendiamo anche  $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ , per avere  $x^c = ex \ll x$ . Resterà così.

1. Partiamo dal più semplice:  $\frac{c\Lambda(x)}{T} \ll \frac{\log x}{T}$ .
2. Ora facciamo la somma per  $n \leq \frac{3}{4}x$  o  $n \geq \frac{5}{4}x$ , per cui  $|\log(\frac{x}{n})| \gg 1$ . Dobbiamo dunque stimare

$$\left( \sum_{n \leq \frac{3}{4}x} + \sum_{n \geq \frac{5}{4}x} \right) \frac{\Lambda(n)}{n^c} \cdot \frac{x^c}{T} \ll \frac{x}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \ll \frac{x \log x}{T},$$

dove l'ultimo passaggio segue scrivendo la somma come  $-\frac{\zeta'}{\zeta}(c)$  e usando che  $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma-1}$ .

3. Per  $\frac{3}{4}x < n < x$ , sia  $\frac{3}{4}x < x_1 < x$  la massima tra le potenze di un primo in quell'intervallo. Allora

$$\log \left( \frac{x}{x_1} \right) = -\log \left( \frac{x_1}{x} \right) = -\log \left( 1 - \frac{x - x_1}{x} \right) = \\ = \frac{x - x_1}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{x - x_1}{x} \right)^2 + \dots > \frac{x - x_1}{x},$$

dunque la stima del termine  $n = x_1$  diventa

$$\Rightarrow \Lambda(x_1) \left( \frac{x}{x_1} \right)^c \frac{x}{T(x - x_1)} \ll \frac{x \log x}{T(x - x_1)}.$$

E  $\frac{3}{4}x < n < x_1$ ? Abbiamo

$$\log \left( \frac{x}{n} \right) \geq \log \left( \frac{x_1}{n} \right) = -\log \left( \frac{n}{x_1} \right) = \\ = -\log \left( 1 - \frac{x_1 - n}{x_1} \right) \geq \frac{x_1 - n}{x_1} = \frac{\nu}{x_1}$$

e troviamo

$$\sum_{1 \leq \nu < x_1} \frac{\Lambda(x_1 - \nu) x^c x_1}{(x_1 - \nu)^c T \nu} \ll \frac{x(\log x)^2}{T}.$$

Il caso  $x < n < \frac{5}{4}x$  è analogo, prendendo  $x_2$  la minima potenza di primo.

Ora, definendo  $\langle x \rangle$  come la distanza di  $x$  dalla potenza di primo più vicina, mettendo assieme abbiamo trovato che

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} + \frac{x \log x}{T \langle x \rangle}\right);$$

dunque

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x, T),$$

dove  $R(x, T) \ll \frac{x \log^2 x}{T}$  per  $x \in \mathbb{N}$ . Consideriamo ora il cammino in figura.



Prendiamo  $T \neq \gamma$  per non passare dagli zeri non banali, allora usando ancora una volta il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \sum_{1 \leq n \leq \frac{U}{2}} \frac{x^{-2n}}{-2n} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-U+iT}^{c+iT} - \int_{-U-iT}^{c-iT} + \int_{-U-iT}^{-U+iT} \right) \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \right) + R(x, T). \end{aligned}$$

Per il corollario della formula di Riemann-Von Mangoldt abbiamo

$$N(T+1) - N(T-1) \leq C_0 \log T.$$

Suddividiamo l'intervallo  $[T-1, T+1]$  in  $2C_0 \log T$  intervalli, di modo che ce ne sia sempre uno senza zeri. Allora possiamo scegliere  $T$ , variandolo al più di una quantità minore o uguale a 1, t.c.  $|\gamma - T| \gg \frac{1}{\log T}$ . Usando allora il lemma 2.3.3 otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) &\ll \sum_{|\gamma - T| \leq 1} \frac{1}{|s - \rho|} + O(\log T) \ll \log T \sum_{|\gamma - T| \leq 1} 1 \ll \log^2 T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{-1 \pm iT}^{c \pm iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{x^c \log^2 T}{T} \ll \frac{x \log^2 T}{T}. \end{aligned}$$

**Osservazione 2.4.2.** Se  $\sigma \leq -1$  e  $|s+2n| \geq 1/2$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , come vedremo in seguito si ha

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &\ll \log(2|s|) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(2|U \pm iT|)x^{-U} \int_0^T \frac{dt}{U+t} &\ll \frac{\log(2|U \pm iT|)}{x^U} \log T \xrightarrow{U \rightarrow +\infty} 0; \end{aligned}$$

questa era la parte “verticale” dell’integrale di  $\psi_0$ , con stime fatte alla buona. Mandando  $U$  a infinito, rimangono da stimare i pezzi “orizzontali” da  $-1$  a  $-\infty$ . Viene la seguente stima trascurabile:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{-1} \log(2|\sigma + iT|)x^\sigma d\sigma \ll \frac{x^{-1} \log T}{T \log x}.$$

Anche questa stima è fatta alla buona. Si veda [D] per una dimostrazione più precisa.

Mettendo assieme quanto visto finora, otteniamo la seguente proposizione.

**Proposizione 2.4.3.**

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + R(x, T),$$

dove  $R(x, T) \ll \frac{x \log^2(xT)}{T}$  per  $x \in \mathbb{N}$  e  $T \geq 2$ .

Bisogna stare attenti agli zeri mancanti (perché abbiamo cambiato un po’  $T$ , quindi dobbiamo sistemare), che però sono in un intervallo limitato, perciò sempre per il corollario di Riemann-Von Mangoldt un  $O(\log T)$ . Allora il loro contributo è  $O$ -grande di:

$$\frac{x^\rho}{\rho} \log T \ll \frac{x^\beta \log T}{T} \ll \frac{x \log T}{T}.$$

Dimostriamo adesso l’asserzione usata all’inizio dell’osservazione 2.4.2, e per farlo passeremo dall’equazione funzionale per la  $\zeta$ . Si ha

$$\begin{aligned} \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \xi(s) = \\ = \xi(1-s) &= \frac{s(s-1)}{2} \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta(1-s) &= \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \zeta(s). \end{aligned}$$

Usando la proposizione 1.4.13 e la formula di duplicazione di Legendre, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}2^{1-s}\Gamma(s)}{\pi/\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi s}{2}\right)} = 2^{1-s}\pi^{-1/2}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s); \end{aligned}$$

si ottiene dunque l'equazione funzionale per  $\zeta$ :

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\Gamma(s)\zeta(s). \quad (12)$$

Prendendo la derivata logaritmica si ha

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) = \log 2 + \log \pi + \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}s\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s).$$

Per  $\sigma \geq 2$ , cioè  $1-\sigma \leq -1$ , si ha

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ll 1;$$

inoltre

$$\begin{aligned} \left|\tan\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right| &= \left|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}s} - e^{-i\frac{\pi}{2}s}}{i(e^{i\frac{\pi}{2}s} + e^{-i\frac{\pi}{2}s})}\right| = \left|\frac{e^{\pi i s} - 1}{e^{\pi i s} + 1}\right| \leq \\ &\leq \frac{e^{\pi t} + 1}{e^{\pi t} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{\pi t} - 1} \leq 3, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza vale per  $t \geq 1/2$ , preso fuori da un intorno dei punti  $-2n$ . Infine, per il corollario 1.4.21 abbiamo

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \ll \log|s| + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Allora, per  $\sigma \leq -1 \Rightarrow |s| \geq 1$ , possiamo riarrangiare quanto trovato per ottenere

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \log(2|1-s|) \leq \log(2|s|),$$

in quanto  $|1-s| \leq 1+|s| \leq 2|s|$ .

Torniamo a  $\psi_0$ .

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sum_{n < x} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_0(x) &= x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2(xT)}{T} + \log x \cdot \min\left\{1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right\}\right). \end{aligned}$$

Per de la Vallée-Poussin si ha che esiste  $c_0 > 0$  t.c.

$$\begin{aligned} \beta < 1 - \frac{c_0}{\log T} \text{ per ogni } \rho = \beta + i\gamma \text{ con } |\gamma| < T \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \max_{|\gamma| < T} x^\beta \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\rho|} \leq x \exp\left(-\frac{c_0 \log x}{\log T}\right) \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\rho|}. \end{aligned}$$

Adesso, sommando per parti e usando Riemann-Von Mangoldt si ha

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\rho|} &\ll \sum_{2 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} = \left( \sum_{2 \leq \gamma \leq T} 1 \right) \frac{1}{T} - \int_2^T \left( \sum_{2 \leq \gamma \leq u} 1 \right) \frac{du}{u^2} = \\ &= \frac{N(T)}{T} + \int_2^T \frac{N(u)}{u^2} du \ll \frac{T \log T}{T} + \int_2^T \frac{\log u}{u} du \ll \\ &\ll \log T + \log^2 T \ll \log^2 T. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} &\ll x \log^2 T \exp\left(-\frac{c_0 \log x}{\log T}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_0(x) - x &\ll x \left( \log^2 T \exp\left(-\frac{c_0 \log x}{\log T}\right) + \frac{\log^2(xT)}{T} \right). \end{aligned}$$

Prendendo  $T = \exp(\sqrt{\log x}) \Rightarrow \log x = \log^2 T$ , troviamo che esiste  $0 < c_1 < 1$  t.c.

$$\psi_0(x) - x \ll x \exp(-c_1 \sqrt{\log x}).$$

Questo è un risultato importante.

**Teorema 2.4.4.** (*Prime Number Theorem*) esiste  $0 < c_1 < 1$  t.c.

$$\psi(x) = x + O(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})). \quad (13)$$

**Osservazione 2.4.5.** Littlewood, 1922:  $\psi(x) = x + O(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x \log \log x}))$ ; Vinogradov-Korobov, 1958:  $\psi(x) = x + O_\varepsilon(x \exp(-c_1 (\log x)^{3/5-\varepsilon}))$ . Questi seguono dai miglioramenti a de la Vallée-Poussin con dimostrazione analoga a quella del PNT.

Allo stesso modo, l'Ipotesi di Riemann ci dà  $\psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x)$ . Infatti

$$\left| \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll \sqrt{x} \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\gamma|} \ll \sqrt{x} \log^2 T,$$

poi prendendo  $T = \sqrt{x}$  si procede come nella dimostrazione del PNT.

C'è anche la Quasi Ipotesi di Riemann (QRH): detto  $\theta = \sup_{\rho} \beta$ , allora si congettura che  $1/2 < \theta < 1$ .

**Esercizio 2.4.6.** QRH  $\Rightarrow \psi(x) = x + O(x^{\theta} \log^2 x)$ .

Congettura di Montgomery: il resto è  $x^{1/2}(\log \log x)^2$ . Non possiamo portarlo a  $\sqrt{x}$ , o per meglio dire sarebbe utopistico: si sa che  $\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$ .

**Osservazione 2.4.7.** Se  $\psi(x) = x + O_{\varepsilon}(x^{\theta+\varepsilon})$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , allora  $\beta \leq \theta$  per ogni  $\rho$ . Infatti, per  $\sigma > 1$  si ha per sommazione parziale

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} &= \frac{\psi(N)}{N^s} + s \int_2^N \frac{\psi(u)}{u^{s+1}} du \Rightarrow [R(u) = O_{\varepsilon}(u^{\theta+\varepsilon})] \\ \Rightarrow -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= s \int_2^{+\infty} \frac{\psi(u)}{u^{s+1}} du = s \int_2^{+\infty} u^{-s} du + s \int_2^{+\infty} \frac{R(u)}{u^{s+1}} du = \\ &= \end{aligned}$$



## Riferimenti bibliografici

- [D] Davenport Multiplicative Number Theory (da riportare meglio)
- [T] Titchmarsh The Theory of the Riemann Zeta Function (da riportare meglio)
- [JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007
- [NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001

## Ringraziamenti

Da scrivere alla fine del corso.

JBG e NN sopra nella bibliografia sono degli esempi lasciati per ricordarsi qual è il modo giusto di scriverli, da togliere dopo aver inserito la bibliografia giusta per queste dispense.