

# Appunti di Teoria Analitica dei Numeri A

Marco Vergamini

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Titolo da decidere</b>	<b>4</b>
1.1 Strumenti di analisi complessa (titolo provvisorio) . . . . .	4
<b>Ringraziamenti</b>	<b>6</b>

## Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Teoria Analitica dei Numeri A tenuto dal professor Giuseppe Puglisi nel secondo semestre dell'anno accademico 2020/2021. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) i corsi di Aritmetica, Analisi 1 e 2 e Teoria dei Numeri Elementare, più le basi dell'analisi complessa in una variabile. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc. . . . Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia. . . ), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali. . . insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

Ho inoltre deciso di omettere gli appunti delle prime due/tre ore di lezione, nelle quali sono stati esposti a grandi linee gli argomenti e i principali risultati trattati nel corso, poiché sono stati descritti in modo discorsivo e impreciso, e comunque verranno ovviamente trattati dettagliatamente nel seguito.

# 1 Titolo da decidere

## 1.1 Strumenti di analisi complessa (titolo provvisorio)

**Lemma 1.1.1.** (Mittag-Leffler) Sia  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri complessi t.c.  $|z_n| \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$  e  $0 < |z_n| \leq |z_{n+1}|$  per ogni  $n$ . Sia inoltre  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un'altra successione con  $m_n \in \mathbb{C}^*$  per ogni  $n$ . Allora esistono  $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  t.c.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$

converge in  $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$  compatto. Inoltre, se  $|z| < |z_1|$ , si ha

$$f(z) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^{k-1}.$$

*Dimostrazione.* Prendiamo  $r_n$  reali positivi con  $r_n \leq r_{n+1}$  e  $r_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , e t.c.  $r_n < |z_n|$ . Per  $|z| \leq r_n$  si ha

$$\left| \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \frac{m_n}{|z_n| - r_n}, \quad \left| \frac{z}{z_n} \right| < \frac{|z|}{r_n} \leq 1 \Rightarrow$$

perciò si ha che esistono  $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  t.c.  $\left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} < \varepsilon_n \frac{|z_n| - r_n}{|m_n|}$ , con  $\varepsilon_n > 0$

e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty$ . Abbiamo dunque  $\left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n} < \varepsilon_n$ .

Fissiamo ora il compatto  $K$  e consideriamo  $N$  t.c.  $|z| \leq r_N$  per ogni  $z \in K$ .

Poniamo  $M_n = \max_{z \in K} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right|$ , per  $n \leq N-1$ . Per ogni  $z \in K$  si ha che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} M_n + \sum_{n=N}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty.$$

Se  $|z| < |z_1|$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n z^{p_n}}{z_n^{p_n+1}} \frac{1}{1 - z/z_n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \sum_{k=p_n+1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{z_n^k}. \end{aligned}$$

Poiché nella prima parte della dimostrazione abbiamo visto che c'è convergenza totale, possiamo scambiare le due sommatorie ottenendo così la seconda parte della tesi.  $\square$

**Osservazione 1.1.2.** Per  $|z| \leq r_n$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z_n} \right| &= \frac{2|z|}{|z_n| + |z_n|} < \frac{2|z|}{|z_n| + r_n} \leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \\ |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} &\leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} |m_n| = 2|z| \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \\ \sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} &\leq 2|z| \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| < +\infty. \end{aligned}$$

**Esempio 1.1.3.** Se  $z_n = n$  e  $m_n = 1$  per ogni  $n$ , basta prendere  $p_n = 1$ .

Sia invece  $|z_0| > \max_K |z|$  e consideriamo  $|z_n| > |z_0| + 1$ . Si ha che

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| &\leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z_0|} \frac{|z_n|}{|z_0|} \\ &\leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \frac{|z_0| + 1}{|z_0| + 1 - |z_0|} \frac{|m_n|}{|z_0|} = |m_n| \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \left( 1 + \frac{1}{|z_0|} \right), \end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal fatto che la funzione  $\frac{t}{t-|z_0|}$  è decrescente. In questo caso, vale la maggiorazione opposta a quella dell'osservazione 1.1.2.

**Lemma 1.1.4.** Sia  $f$  meromorfa con poli semplici nei punti  $z_n \neq 0$ , con residui  $m_n \in \mathbb{Z}$ , e t.c.  $|z_n| \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Allora la funzione

$$\varphi(z) = \exp \int_0^z f(w) dw$$

è meromorfa, con zeri  $z_n$  con molteplicità  $m_n$  se  $m_n > 0$  e poli  $z_n$  con molteplicità  $-m_n$  se  $m_n < 0$ .

**Osservazione 1.1.5.** Sia  $\gamma$  il cammino dell'integrale del lemma 1.1.4 e  $\gamma'$  un altro cammino, t.c.  $\gamma \cup \gamma'$  sia una curva di Jordan (piana, semplice, chiusa) contenuta in  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ . A patto di scegliere correttamente il verso di percorrenza, per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma'} f(w) dw + 2\pi i R,$$

con  $R = \sum_{\substack{n: z_n \in A, \\ \partial A = \gamma \cup \gamma'}} m_n$ . Dunque  $\varphi(z) = \exp \left( \int_{\gamma'} f(w) dw \right) e^{2\pi i R}$ .

## Riferimenti bibliografici

- [D] Davenport Multiplicative Number Theory (da riportare meglio)
- [JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007
- [NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001

## Ringraziamenti

Da scrivere alla fine del corso.

JBG e NN sopra nella bibliografia sono degli esempi lasciati per ricordarsi qual è il modo giusto di scriverli, da togliere dopo aver inserito la bibliografia giusta per queste dispense.