

# Appunti di Teoria Analitica dei Numeri A

Marco Vergamini

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Funzioni intere e funzione <math>\Gamma</math></b>	<b>4</b>
1.1 Strumenti di analisi complessa . . . . .	4
1.2 Funzioni intere di ordine finito . . . . .	8
1.3 Numeri e polinomi di Bernoulli e $\zeta(2k)$ . . . . .	16
1.4 La funzione $\Gamma$ di Eulero . . . . .	19
<b>2 A caccia di zeri</b>	<b>31</b>
2.1 Lo spazio di Schwarz . . . . .	31
2.2 La memoria di Riemann . . . . .	33
2.3 Le funzioni intere $\xi(s)$ e $(s-1)\zeta(s)$ . . . . .	42
2.4 La funzione $\psi$ e il teorema dei numeri primi . . . . .	48
2.5 La trasformata di Mellin e alcune conseguenze . . . . .	56
<b>3 Generalizzazioni della <math>\zeta</math> di Riemann: le funzioni <math>L</math> di Dirichlet</b>	<b>61</b>
3.1 I caratteri e il teorema di Dirichlet . . . . .	61
3.2 Caratteri primitivi e somme di Gauss . . . . .	65
3.3 Equazione funzionale e stime sul numero di zeri per le funzioni $L$ . . . . .	68
3.4 Regioni libere da zeri per le funzioni $L$ . . . . .	72
3.5 Formule esplicite (nel caso dei caratteri) . . . . .	76
<b>Ringraziamenti</b>	<b>82</b>

## Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Teoria Analitica dei Numeri A tenuto dal professor Giuseppe Puglisi nel secondo semestre dell'anno accademico 2020/2021. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) i corsi di Aritmetica, Analisi 1 e 2 e Teoria dei Numeri Elementare, più le basi dell'analisi complessa in una variabile. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc. . . . Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia. . . ), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali. . . insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

Ho inoltre deciso di omettere gli appunti delle prime due/tre ore di lezione, nelle quali sono stati esposti a grandi linee gli argomenti e i principali risultati trattati nel corso, poiché sono stati descritti in modo discorsivo e impreciso, e comunque verranno ovviamente trattati dettagliatamente nel seguito.

# 1 Funzioni intere e funzione $\Gamma$

## 1.1 Strumenti di analisi complessa

**Lemma 1.1.1.** (Mittag-Leffler) Sia  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri complessi t.c.  $|z_n| \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$  e  $0 < |z_n| \leq |z_{n+1}|$  per ogni  $n$ . Sia inoltre  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un'altra successione con  $m_n \in \mathbb{C}^*$  per ogni  $n$ . Allora esistono  $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  t.c.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$

converge in  $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$  compatto. Inoltre, se  $|z| < |z_1|$ , si ha

$$f(z) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^{k-1}.$$

*Dimostrazione.* Prendiamo  $r_n$  reali positivi con  $r_n \leq r_{n+1}$  e  $r_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , e t.c.  $r_n < |z_n|$ . Per  $|z| \leq r_n$  si ha

$$\left| \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \frac{m_n}{|z_n| - r_n}, \quad \left| \frac{z}{z_n} \right| < \frac{|z|}{r_n} \leq 1 \Rightarrow$$

perciò si ha che esistono  $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  t.c.  $\left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} < \varepsilon_n \frac{|z_n| - r_n}{|m_n|}$ , con  $\varepsilon_n > 0$

e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty$ . Abbiamo dunque  $\left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n} < \varepsilon_n$ .

Fissiamo ora il compatto  $K$  e consideriamo  $N$  t.c.  $|z| \leq r_N$  per ogni  $z \in K$ .

Poniamo  $M_n = \max_{z \in K} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right|$ , per  $n \leq N-1$ . Per ogni  $z \in K$  si ha che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} M_n + \sum_{n=N}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty.$$

Se  $|z| < |z_1|$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n z^{p_n}}{z_n^{p_n+1}} \frac{1}{1 - z/z_n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \sum_{k=p_n+1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{z_n^k}. \end{aligned}$$

Poiché nella prima parte della dimostrazione abbiamo visto che c'è convergenza totale, possiamo scambiare le due sommatorie ottenendo così la seconda parte della tesi.  $\square$

**Osservazione 1.1.2.** Per  $|z| \leq r_n$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z_n} \right| &= \frac{2|z|}{|z_n| + |z_n|} < \frac{2|z|}{|z_n| + r_n} \leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \\ |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} &\leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} |m_n| = 2|z| \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \\ \sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} &\leq 2|z| \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| < +\infty. \end{aligned}$$

**Esempio 1.1.3.** Se  $z_n = n$  e  $m_n = 1$  per ogni  $n$ , basta prendere  $p_n = 1$ .

Sia invece  $|z_0| > \max_K |z|$  e consideriamo  $|z_n| > |z_0| + 1$ . Si ha che

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| &\leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z_0|} \frac{|z_n|}{|z_0|} \\ &\leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \frac{|z_0| + 1}{|z_0| + 1 - |z_0|} \frac{|m_n|}{|z_0|} = |m_n| \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n+1} \left( 1 + \frac{1}{|z_0|} \right), \end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal fatto che la funzione  $\frac{t}{t-|z_0|}$  è decrescente. In questo caso, vale la maggiorazione opposta a quella dell'osservazione 1.1.2.

**Lemma 1.1.4.** Sia  $f$  meromorfa con poli semplici nei punti  $z_n \neq 0$ , con residui  $m_n \in \mathbb{Z}$ , e t.c.  $|z_n| \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Sia  $\gamma(0, z)$  un cammino da 0 a  $z$  non passante per i punti  $z_n$ . Allora la funzione

$$\varphi(z) = \exp \left( \int_{\gamma(0, z)} f(w) dw \right)$$

è meromorfa, con zeri  $z_n$  con molteplicità  $m_n$  se  $m_n > 0$  e poli  $z_n$  con molteplicità  $-m_n$  se  $m_n < 0$ .

**Osservazione 1.1.5.** Sia  $\gamma$  il cammino dell'integrale del lemma 1.1.4 e  $\gamma'$  un altro cammino, t.c.  $\gamma' \cup -\gamma$  sia una curva di Jordan (piana, semplice, chiusa) contenuta in  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ . Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma'} f(w) dw + 2\pi i R,$$

$$\text{con } R = \sum_{\substack{n: z_n \in A, \\ \partial A = \gamma' \cup -\gamma}} m_n. \text{ Dunque } \varphi(z) = \exp \left( \int_{\gamma'} f(w) dw \right) e^{2\pi i R}.$$

*Dimostrazione.* Poiché  $m_n \in \mathbb{Z}$ , per l'osservazione 1.1.5  $\varphi$  non dipende dal cammino scelto. Consideriamo  $f_1(z) = f(z) - \frac{m_1}{z - z_1}$ .  $f_1$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$ , quindi  $\exp\left(\int_0^z f_1(w) dw\right)$  è olomorfa e mai nulla in  $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$ .

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \exp\left(\int_0^z f_1(w) dw + m_1 \int_0^z \frac{dw}{w - z_1}\right), \int_0^z \frac{dw}{w - z_1} = \log\left(\frac{z - z_1}{-z_1}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(z) = \exp\left(\int_0^z f_1(w) dw\right) \cdot \exp\left(m_1 \log\left(\frac{z - z_1}{-z_1}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\int_0^z f_1(w) dw\right) \cdot (-z_1)^{-m_1} \cdot (z - z_1)^{m_1} = \varphi_1(z)(z - z_1)^{m_1},\end{aligned}$$

dove  $\varphi_1$  è una funzione olomorfa e mai nulla in  $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$ . Allora  $\varphi$  ha uno zero o un polo dell'ordine voluto in  $z_1$ . Ripetendo per ogni  $n$  si ha la tesi.  $\square$

Con i due lemmi appena mostrati si può costruire una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con zeri e poli di molteplicità assegnata, assumendo che la successione degli stessi non abbia alcun limite finito.

**Teorema 1.1.6.** (*prodotto di Weierstrass*) Sia  $F$  meromorfa in  $\mathbb{C}$  e siano  $z_n \neq 0$  gli zeri e i poli di molteplicità  $|m_n|$ . Esistono una successione  $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e una funzione intera  $G(z)$  t.c.

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n} \exp\left(m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right), \quad (1)$$

dove il prodotto infinito converge uniformemente in ogni  $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$  compatto. Inoltre  $\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} < +\infty$  per ogni  $z \in K$ .

*Dimostrazione.* Costruiamo  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$  come nel lemma 1.1.1 e

$$\varphi = \exp\left(\int_0^z f(w) dw\right) = \exp\left(\int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{w - z_n} dw\right) \text{ come nel lemma}$$

1.1.4. Osserviamo che

$$\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n} \frac{1}{w - z_n} = \frac{1}{w - z_n} + \frac{1}{z_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \left(\frac{w}{z_n}\right)^k,$$

quindi

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp \left[ \int_0^z \left( \frac{m_n}{w - z_n} + \frac{m_n}{z_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \left( \frac{w}{z_n} \right)^k \right) dw \right] = \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp \left( m_n \log \left( \frac{z - z_n}{-z_n} \right) + m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right) = \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right)^{m_n} \exp \left( m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right).\end{aligned}$$

Osserviamo ora che  $\frac{F(z)}{\varphi(z)}$  è intera e mai nulla in  $\mathbb{C}$ , dunque esiste  $G(z)$  intera t.c.  $\frac{F(z)}{\varphi(z)} = e^{G(z)} \Rightarrow F(z) = e^{G(z)}\varphi(z)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione 1.1.7.** Se  $F(z)$  ha uno zero o un polo di molteplicità  $|m|$  in 0, basta applicare il teorema 1.1.6 alla funzione  $\tilde{F}(z) = F(z)/z^m$ .

**Corollario 1.1.8.** Sia  $F$  come nel teorema 1.1.6, indichiamo con  $D^k$  la derivata  $k$ -esima. Si ha

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0} + \frac{1}{k} \sum_{n:p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^k.$$

*Dimostrazione.* Dalla dimostrazione del teorema 1.1.6 e prendendo il logaritmo otteniamo

$$G(z) + \int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{w}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{w - z_n} dw = \log F(z).$$

Ovviamente  $\log F(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0}}{k!} z^k$ . Inoltre

$$\begin{aligned}- \int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{w}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{w - z_n} dw &= \int_0^z \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n:p_n < k} (m_n z_n^{-k}) w^{k-1} dw = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \sum_{n:p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^k.\end{aligned}$$

$\square$

Avviciniamoci alla notazione canonica del prodotto di Weierstrass per una funzione intera:  $F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left( \sum_{k=1}^{p_n} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right)$ , dove gli zeri vengono contati con molteplicità (e d'ora in avanti si sottintenderà sempre così).

## 1.2 Funzioni intere di ordine finito

Introduciamo ora un argomento importante: le funzioni intere di ordine finito.

Notazione: scriviamo che  $f(z) \ll g(z)$  ( $z \rightarrow +\infty$ )  $\iff f(z) = O(g(z))$ . Inoltre, scriveremo  $\ll_\varepsilon$  per indicare che la costante dell' $O$ -grande dipende da un parametro  $\varepsilon$ .

**Definizione 1.2.1.** Data  $F$  intera, si dice che ha *ordine*  $\alpha \geq 0$  se

$$F(z) \ll_\varepsilon e^{|z|^{\alpha+\varepsilon}} \quad (z \rightarrow +\infty)$$

per ogni  $\varepsilon > 0$  e  $\alpha$  è il minimo valore positivo per cui vale questa cosa. Equivalentemente,  $\alpha = \inf\{A \geq 0 \mid F(z) \ll_A e^{|z|^A}\}$ . Scriviamo  $\text{ord}(F) = \alpha$ .

Se non vale  $F(z) \ll_A e^{|z|^A}$  per nessun  $A$  diciamo che  $F$  ha ordine infinito.

**Esempio 1.2.2.**

1. Sia  $p$  un polinomio di grado  $k$ , allora  $|p(z)| \leq |a_k||z|^k(1+o(1)) \ll_\varepsilon e^{|z|^\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , dunque  $p$  ha ordine 0.
2.  $|e^{az+b}| = e^{\Re(az+b)} \ll_\varepsilon e^{|z|^{1+\varepsilon}}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ .
3. Più in generale, dato  $p_k$  un generico polinomio di grado  $k$  abbiamo che  $|e^{p_k(z)}| = e^{\Re(p_k(z))} \leq e^{|p_k(z)|} \leq e^{|a_k||z|^k(1+o(1))} \ll_\varepsilon e^{|z|^{k+\varepsilon}}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Inoltre, prendendo  $z$  sulla retta  $\arg(z) = -\arg(a_k)/k$ , abbiamo che vale  $|e^{p_k(z)}| = e^{\Re(p_k(z))} = e^{a_k z^k(1+o(1))} = e^{|a_k||z|^k(1+o(1))} \gg_\varepsilon e^{|a_k||z|^k}$ . Dunque l'ordine è  $k$  e l'inf nella definizione non viene raggiunto.

**Osservazione 1.2.3.** Se  $F_1$  e  $F_2$  hanno ordine  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , allora  $F_1 + F_2$  e  $F_1 \cdot F_2$  hanno ordine minore o uguale di  $\max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . La dimostrazione è lasciata come esercizio per il lettore.

**Lemma 1.2.4.** Sia  $f$  olomorfa in  $|z - z_0| \leq R$  non costantemente nulla e sia  $0 < r < R$ . Sia inoltre  $N = \#\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r, f(z) = 0\}$  (ricordiamo che sono contati con molteplicità). Allora

$$|f(z_0)| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^N \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo senza perdita di generalità, a meno di una traslazione e di un'omotetia,  $R = 1, z_0 = 0$ . Siano  $z_n$  gli zeri di  $f$  in  $|z| \leq r$  contati con

molteplicità e sia  $g(z) = f(z) \prod_{n=1}^N \frac{1 - \bar{z}_n z}{z - z_n}$ . Per  $|z| = 1$  scriviamo  $z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ .

Allora  $\left| \frac{1 - \bar{z}_n e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_n} \right| = |e^{i\theta}| \left| \frac{\bar{z}_n - e^{-i\theta}}{z_n - e^{i\theta}} \right| = 1$ , quindi, per il principio del massimo



modulo per funzioni olomorfe (che d'ora in avanti useremo senza menzionarlo esplicitamente),  $|g(z)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)|$  per  $|z| \leq 1$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} |f(w)| &= |g(w)| \prod_{n=1}^N \left| \frac{w - z_n}{1 - \bar{z}_n w} \right| \leq \max_{|z|=1} |f(z)| \prod_{n=1}^N \left| \frac{w - z_n}{1 - \bar{z}_n w} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(0)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)| \prod_{n=1}^N |z_n| \leq r^N \max_{|z|=1} |f(z)|. \end{aligned}$$

□

**Corollario 1.2.5.** *Siano  $f, r, R, N$  come nel lemma 1.2.4. Se  $f(z_0) \neq 0$  allora*

$$N \leq \frac{1}{\log(R/r)} \log \left( \frac{\max_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{|f(z_0)|} \right).$$

*Dimostrazione.* Basta prendere la disugaglianza data dal lemma 1.2.4, portarla nella forma  $(\frac{R}{r})^N \leq (\dots)$ , prendere il logaritmo e dividere per  $\log(R/r)$ . □

**Teorema 1.2.6.** *Sia  $F$  una funzione intera di ordine  $\alpha < +\infty$  e consideriamo  $N(r) = \#\{z \in \mathbb{C} \mid F(z) = 0, |z| \leq r\}$ . Allora  $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ .*

*Dimostrazione.* Prendiamo  $R = 2r$ , allora  $\max_{|z|=R} |F(z)| \ll_\varepsilon e^{(2r)^{\alpha+\varepsilon}}$  per ogni

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \log \left( \max_{|z|=R} |F(z)| \right) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Se  $F(0) \neq 0$ , per il corollario 1.2.5 abbiamo  $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Se  $F(0) = 0$ , consideriamo  $\tilde{F}(z) = F(z)/z^m$  dove  $m$  è la molteplicità di 0 come zero. Per  $|z| \leq 1$ ,  $\tilde{F} \ll 1$  per continuità. Per  $|z| > 1$ ,  $\tilde{F}(z) = F(z) \frac{1}{z^m} \Rightarrow \text{ord}(\tilde{F}) \leq \max\{\alpha, 0\} = \alpha$ . Allora si ripete la dimostrazione per  $\tilde{F}$ , poi si osserva che il numero di zeri di  $F$  varia solo per la costante additiva  $m$ . □

**Definizione 1.2.7.** Sia  $z_n \neq 0$  una successione senza limiti finiti. Si dice *esponente di convergenza* di  $z_n$ , se esiste, il numero

$$\beta = \inf \left\{ B > 0 \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^B} < +\infty \right\},$$

ovvero  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} < +\infty$  per ogni  $\varepsilon > 0$  e  $\beta$  è il minimo valore per cui è vero.

**Esempio 1.2.8.**  $z_n = \log n$  non ha esponente di convergenza finito.

**Teorema 1.2.9.** *Sia  $F$  una funzione intera di ordine  $\alpha > 0$ ,  $F(0) \neq 0$  t.c. la successione dei suoi zeri  $z_n$  ha esponente di convergenza  $\beta$ . Allora  $\beta \leq \alpha$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\text{ord}(F) = \alpha < +\infty$ , per il teorema 1.2.6 si ha  $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Prendendo  $r_n = |z_n|$ , ricordando che  $z_n$  sono gli zeri di  $F$  otteniamo  $n \leq N(r_n) \ll_\varepsilon r_n^{\alpha+\varepsilon} = |z_n|^{\alpha+\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$  (non è  $n = N(r_n)$  perché potrebbe esserci più di uno zero sul cerchio  $|z| = r_n$ ). Allora  $|z_n| \gg_\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}$  e dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(\alpha+2\varepsilon)} \ll_\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{\alpha+2\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}} < +\infty.$$

Perciò  $\beta \leq \inf\{\alpha + 2\varepsilon \mid \varepsilon > 0\} = \alpha$ .  $\square$

**Teorema 1.2.10.** *Sia  $F$  intera di ordine finito,  $F(0) \neq 0$ . Allora la fattorizzazione di Weierstrass si scrive come*

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right), \quad (2)$$

dove  $p \geq 0$  è indipendente da  $n$  e t.c.  $\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$ . Talvolta si trova

scritta con la notazione  $E(z, p) = (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} z^k\right)$  o simili.

*Dimostrazione.* Diamo solamente una traccia. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} < +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Scegliendo  $p+1 = \alpha + \varepsilon$ , per il teorema 1.2.9 si ha  $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$ .  $\square$

**Osservazione 1.2.11.** Sia  $\beta$  l'esponente di convergenza di  $z_n$ , zeri di una funzione  $F$  di ordine  $\alpha$  ( $\beta \leq \alpha$ ). Il  $p$  migliore è:

1. se  $\beta$  non è intero,  $p = \lfloor \beta \rfloor$ ;
2. se  $\beta$  è intero e nella definizione con l'inf è in realtà un minimo, allora  $p = \beta - 1$ ;
3. se  $\beta$  è intero ma nella definizione con l'inf questo non viene raggiunto, cioè  $\beta$  non è un minimo, allora  $p = \beta$ .

Abbiamo dunque  $\beta - 1 \leq p \leq \beta \leq \alpha$ . Scrivendo la fattorizzazione di Weierstrass come in (2) usando il miglior  $p$  possibile si ha la forma canonica.

**Teorema 1.2.12.** (Borel-Carathéodory) *Siano  $0 < r < R$  e sia  $f$  olomorfa in  $|z - z_0| \leq R$ . Allora*

$$\max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z-z_0|=R} \Re(f(z)) + \frac{R+r}{R-r} |f(z_0)|.$$

Se inoltre  $\max_{|z-z_0|=R} \Re(f(z)) \geq 0$ , allora

$$\max_{|z-z_0|=r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!2^{n+2}R}{(R-r)^{n+1}} \left( \max_{|z-z_0|=R} \Re(f(z)) + |f(z_0)| \right).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo senza perdita di generalità  $z_0 = 0$ . Se  $f$  è costante la tesi è banale, consideriamo dunque  $f$  non costante. Facciamo il caso  $f(0) = 0$ . Sia  $A = \max_{|z|=R} \Re(f(z))$ .  $A > 0$ , infatti basta osservare che

$|e^{f(z)}| = e^{\Re(f(z))}$  e applicare il principio del massimo modulo a  $e^{f(z)}$  (se il massimo non fosse maggiore di 1, sarebbe proprio 1 perché  $f(0) = 0$  e per lo stesso motivo sarebbe costante). Sia  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A-f(z)}$ . Osserviamo che  $\Re(2A - f(z)) = 2A - \Re(f(z)) \geq A > 0 \Rightarrow 2A - f(z) \neq 0$ , quindi  $\varphi$  è olomorfa in  $|z| \leq R$ . Posto  $f(z) = u + iv$ , allora  $|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2+v^2}{(2A-u)^2+v^2} \leq 1$ . Infatti,  $u \leq A \Rightarrow u \leq 2A - u$  e ovviamente  $-2A + u \leq u$ , dunque  $u^2 \leq (2A - u)^2$ . Poiché  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(z)/z$  è olomorfa in  $|z| \leq R$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| &\leq \max_{|z|=R} \left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{R} \Rightarrow \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \leq \frac{r}{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(z)| &= \frac{2A|\varphi(z)|}{|1 + \varphi(z)|} \leq \frac{2Ar/R}{1 - |\varphi(z)|} \leq \frac{2Ar}{R-r} \text{ per } |z| = r. \end{aligned}$$

Se  $f(0) \neq 0$ , ripetiamo il ragionamento con  $f(z) - f(0)$  ottenendo

$$\begin{aligned} -|f(0)| + \max_{|z|=r} |f(z)| &\leq \max_{|z|=r} |f(z) - f(0)| \leq \\ &\leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \Re(f(z) - f(0)) \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \Re(f(z)) + \frac{2r}{R-r} |f(0)|. \end{aligned}$$

Sommando  $|f(0)|$  agli estremi di questa catena di disugaglianze otteniamo la prima parte della tesi.

Osserviamo che se  $A \geq 0$  si ha

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} \left( \max_{|z|=R} \Re(f(z)) + |f(z_0)| \right).$$

Prendiamo  $|z| \leq r$  e scriviamo

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\frac{R-r}{2}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Dev'essere  $|w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z| \leq \frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2} < R$ . Allora

$$\begin{aligned} |f(w)| &\leq \max_{|w|=\frac{R+r}{2}} |f(w)| \leq \frac{R + \frac{R+r}{2}}{R - \frac{R+r}{2}} \left( \max_{|w|=R} \Re(f(w)) + |f(0)| \right) \leq \\ &\leq \frac{4R}{R-r} \left( \max_{|w|=R} \Re(f(w)) + |f(0)| \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{4R}{R-r} \cdot \frac{2\pi}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^n} \left( \max_{|w|=R} \Re(f(w)) + |f(0)| \right). \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.2.13.** (Hadamard) Se  $F$  è intera di ordine  $\alpha$  finito e  $F(0) \neq 0$ , allora la funzione intera  $G$  del prodotto di Weierstrass (1) è un polinomio di grado minore o uguale a  $\alpha$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\nu = \lfloor \alpha \rfloor$ , vogliamo  $G^{(\nu+1)} \equiv 0$ . Ricordiamo che

$$\log F(z) = G(z) + \sum_n \log \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k.$$

Derivando troviamo

$$\begin{aligned} \frac{F'}{F}(z) &= G'(z) - \sum_n \frac{1}{z_n - z} + D \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right) \\ D^\nu \left( \frac{F'}{F}(z) \right) &= G^{(\nu+1)}(z) - \nu! \sum_n \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}} + 0. \end{aligned}$$

dove lo 0 in fondo è perché  $p \leq \alpha$ . Fissiamo  $R > 0$  e definiamo la funzione

$$\varphi_R(z) = \frac{F(z)}{F(0)} \prod_{|z_n| \leq R} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right)^{-1}.$$

Per  $|z_n| \leq R$  e  $|z| = 2R$  si ha

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| &\geq \left| \frac{z}{z_n} \right| - 1 \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varphi_R(z)| &\leq \frac{|F(z)|}{|F(0)|} \ll_\varepsilon e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}} \text{ per ogni } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Per il principio del massimo, è vero per ogni  $|z| \leq 2R$  e di conseguenza abbiamo che  $\log |\varphi_R(z)| \leq C(\varepsilon)R^{\alpha+\varepsilon}$ . Sia  $\psi_R(z) = \log \varphi_R(z)$ ; è olomorfa in  $|z| \leq R$  e  $\psi_R(0) = 0$ . Si ha  $\Re \psi_R(z) = \log |\varphi_R(z)|$ , dunque per il teorema di Borel-Carathéodory

$$\max_{|z|=R/2} |\psi_R^{(\nu+1)}(z)| \ll_{\varepsilon, \nu} \frac{R}{R^{\nu+2}} R^{\alpha+\varepsilon} = R^{\alpha-\nu-1+\varepsilon}.$$

Sia  $\varepsilon > 0$  t.c.  $\alpha - \nu - 1 + \varepsilon < 0$ . Allora

$$\begin{aligned}\psi'_R(z) &= \frac{\varphi'_R(z)}{\varphi_R(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} + \sum_{|z_n| \leq R} \frac{1}{z_n - z} \\ \psi_R^{(\nu+1)}(z) &= D^\nu \left( \frac{F'}{F}(z) \right) + \sum_{|z_n| \leq R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}} = G^{(\nu+1)}(z) - \sum_{|z_n| > R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}}.\end{aligned}$$

Supponiamo  $|z| = R/2$ , si ha

$$\left| \sum_{|z_n| > R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}} \right| \leq C_1(\nu) \sum_{|z_n| > R} \frac{1}{|z_n|^{\nu+1}} = o(1) \text{ per } R \rightarrow +\infty.$$

Si ha allora  $|G^{(\nu+1)}(z)| \leq C(\nu, \varepsilon)R^{-\delta} + o(1)$  per  $|z| = R/2$  e dunque anche per  $|z| \leq R/2$ . Basta fissare  $z$  e mandare  $R \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Corollario 1.2.14.** *Sia  $G$  come nel teorema di Hadamard di grado  $q$ . Se  $q \leq p$  si ha*

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^q D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(0) \right) \frac{z^k}{k!};$$

se invece  $p < q$  si ha

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^q D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(0) \right) \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^q \left( \sum_n z_n^{-k} \right) \frac{z^k}{k}.$$

Inoltre, per  $k > \max\{p, q\}$  si ha

$$\sum_n z_n^{-k} = -\frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0}.$$

*Dimostrazione.* Per il corollario 1.1.8 si ha

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0} + \frac{1}{k} \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^k,$$

con  $p_n = p$  per ogni  $n$ . Abbiamo che  $G$  è un polinomio di grado  $q$ . Se  $q \leq p$ , si ha  $k \leq q \leq p$ , quindi non c'è il termine  $\frac{1}{k} \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k}$ , come voluto.

Se  $q > p$ , abbiamo il termine  $\frac{1}{k} \sum_n m_n z_n^{-k}$  per  $p < k \leq q$ , cioè il termine

$$\sum_{k=p+1}^q \left( \sum_n z_n^{-k} \right) z^k.$$

Se  $k > \max\{p, q\}$ , non c'è il termine  $z^k$  (nel quale la somma, poiché vale  $k > p = p_n$ , è fatta su tutti gli  $n$ ). Allora si ha

$$0 = \frac{1}{k!} D^{k-1} \left( \frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0} + \frac{1}{k} \sum_n z_n^{-k}$$

che è ovviamente equivalente alla tesi.  $\square$

**Teorema 1.2.15.** *Sia  $z_n \neq 0$  una successione con esponente di convergenza  $\beta$  finito e  $p$  il minimo intero t.c.  $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$ . Sappiamo già che il prodotto di Weierstrass in forma canonica,*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right),$$

*è uniformemente convergente, in particolare è una funzione intera. L'ordine di tale funzione, finito, è proprio  $\beta$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $F(z) = \prod_n E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$ , Vogliamo mostrare che

$$\log \left| \prod_n E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \right| = \sum_n \log \left| E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \right| \leq C(\varepsilon) |z|^{\beta+\varepsilon} \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

Distinguiamo due casi.

Caso  $|z/z_n| \leq 1/2$ . Allora

$$\begin{aligned} \log \left| E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \right| &\leq \left| \log E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \right| = \\ &= \left| \log \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right| = \left| \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^k \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} (1 + 1/2 + 1/4 + \dots) = 2 \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \log \left| E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \right| \leq 2|z|^{p+1} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}. \end{aligned}$$

Adesso, se  $\beta = p + 1$  l'ultima quantità è uguale a  $2|z|^\beta \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} \leq C|z|^\beta$ .

Se invece  $\beta < p + 1$  prendiamo  $\varepsilon < p + 1 - \beta$  per ottenere

$$\begin{aligned} & 2|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} |z|^{p+1-\beta-\varepsilon} \leq \\ & \leq \frac{|z|^{\beta+\varepsilon}}{2^{p-\beta-\varepsilon}} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Caso  $|z/z_n| > 1/2$ . Allora

$$\begin{aligned} \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| &= \log \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| + \Re \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right) \leq \\ &\leq \log \left( 1 + \left| \frac{z}{z_n} \right| \right) + \sum_{k=1}^p \left| \frac{z}{z_n} \right|^k. \end{aligned}$$

Adesso, se  $p = 0$  l'ultima quantità è  $\leq C(\varepsilon) \left| \frac{z}{z_n} \right|^\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , dunque

$$\begin{aligned} \sum_{|z_n| < 2|z|} \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| &\leq C(\varepsilon)|z|^\varepsilon \sum_{|z_n| < 2|z|} |z_n|^{-\varepsilon} = \\ &= C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| < 2|z|} |z_n|^{-\varepsilon} |z|^{-\beta} \leq \\ &C(\varepsilon)2^\beta |z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| < 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq \tilde{C}(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Se invece  $p \geq 1$ , la quantità di prima è  $\leq C \left| \frac{z}{z_n} \right|^p$ , dunque

$$\begin{aligned} \sum_{|z_n| < 2|z|} \log \left| E \left( \frac{z}{z_n}, p \right) \right| &\leq C|z|^p \sum_{|z_n| < 2|z|} |z_n|^{-p} = \\ &= C|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| < 2|z|} |z_n|^{-p} |z|^{p-\beta-\varepsilon} \leq \\ &\leq C2^{\beta+\varepsilon-p} |z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| < 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}. \end{aligned}$$

È lasciato al lettore il divertentissimo esercizio di verificare che le varie costanti moltiplicative (i cui nomi non sono stati scelti con troppa cura dall'autore) non creano davvero problemi, cioè che sono tutte maggiorate da una costante che dipende solo da  $\varepsilon$  e non da  $|z|$ . Abbiamo adesso  $\alpha \leq \beta$  e l'altra disuguaglianza già la sapevamo.  $\square$

**Corollario 1.2.16.** *Se la funzione*

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

*ha ordine  $\alpha$ , la successione  $z_n \neq 0$  ha esponente di convergenza  $\beta$  e  $G$  è un polinomio di grado  $q$ , allora  $\alpha = \max\{q, \beta\}$ .*

*Dimostrazione.*  $e^{G(z)}$  ha ordine  $q$  e il prodotto, per il teorema 1.2.15, ha ordine  $\beta$ . Poiché l'ordine del prodotto di due funzioni è minore o uguale del massimo fra i due ordini, allora  $\alpha \leq \max\{q, \beta\}$ . Ma abbiamo già visto che  $\alpha \geq \beta$  e per il teorema di Hadamard 1.2.13 si ha anche  $\alpha \geq q$ .  $\square$

### 1.3 Numeri e polinomi di Bernoulli e $\zeta(2k)$

In questa sezione sfrutteremo i risultati visti finora per calcolare i valori della  $\zeta$  di Riemann sui pari.

**Definizione 1.3.1.** Data  $F$  intera, il *genere* è  $g = \max\{p, q\}$ .

**Osservazione 1.3.2.**  $\alpha - 1 \leq g \leq \alpha$ . La seconda è ovvia. Se fosse  $g < \alpha - 1$ , avremmo  $p < \alpha - 1 \Rightarrow \beta \leq p + 1 < \alpha$ , ma anche  $q < \alpha - 1$ ; dato che abbiamo  $\alpha = \max\{\beta, q\}$ , si ha un assurdo.

**Esempio 1.3.3.** Sia  $F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ . Si ha

$$\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \ll_{\varepsilon} e^{|z|^{1+\varepsilon}} \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

dunque  $F$  ha ordine  $\alpha \leq 1$ . Gli zeri sono  $z_n = \pm n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{1+\varepsilon}} < +\infty$  per ogni  $\varepsilon > 0$  ma chiaramente non per  $\varepsilon = 0$ , da cui  $\beta = 1$ ;  $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha = 1$ . Inoltre  $p = 1$ . Studiamo questa funzione.

I termini del prodotto di Weierstrass sono  $E\left(\frac{z}{n}, 1\right) = \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right)$ .  
 $E\left(\frac{z}{n}, 1\right) \cdot E\left(\frac{z}{-n}, 1\right) = \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ . Abbiamo quindi il prodotto  $\prod_n \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ .  
 Per il teorema di Hadamard, il grado del polinomio  $G$  è  $q \leq \alpha = 1 = p$ . Per il corollario 1.2.14,  $G(z) = \log F(0) + \frac{F'}{F}(0)z = \log 1 + 0 = 0$ . Abbiamo allora

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Consideriamo

$$\log(F(z)) = \log\left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right) = \log(\sin(\pi z)) - \log(\pi z);$$



derivando troviamo

$$\frac{F'}{F}(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} - \frac{1}{z} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}.$$

Per  $k \geq 2$ , dal corollario 1.2.14 si ha

$$\sum_n \frac{1}{n^k} + \sum_n \frac{1}{(-n)^k} = - \frac{D^{k-1}(\pi \cot(\pi z) - 1/z)_{z=0}}{(k-1)!}.$$

Passando ai pari, per  $k \geq 1$  si ha

$$\begin{aligned} \zeta(2k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = - \frac{D^{2k-1}(\frac{\pi}{2} \cot(\pi z) - \frac{1}{2z})_{z=0}}{(2k-1)!} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot(\pi z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k) z^{2k-1} \text{ per } |z| < 1. \end{aligned}$$

È un esercizio verificare che  $\zeta(2k) = 1 + O(1/2^{2k}) \sim 1$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Segue che  $\sqrt[k]{\zeta(2k)} \rightarrow 1$  per  $k \rightarrow +\infty$ , ma anche, in particolare,  $\sqrt[2k-1]{\zeta(2k)} \rightarrow 1$  per  $k \rightarrow +\infty$ , dunque il raggio di convergenza della funzione  $\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot(\pi z)$  è proprio 1.

**Definizione 1.3.4.** Si dicono *numeri di Bernoulli* quelli definiti nel modo seguente:

$$B_n = D^n \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)_{z=0}.$$

**Osservazione 1.3.5.** Poiché la funzione  $\frac{z}{e^z - 1}$  ha raggio di convergenza  $2\pi$ , dev'essere  $\limsup \sqrt[n]{B_n} = \frac{1}{2\pi}$ .

**Osservazione 1.3.6.**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z + ze^z}{2(e^z - 1)} = \frac{z(1 + e^z)}{2(e^z - 1)} \\ f(-z) &= \frac{-ze^z}{1 - e^z} - \frac{z}{2} = \frac{-ze^z - z}{2(1 - e^z)} = \frac{z(1 + e^z)}{2(e^z - 1)} \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è pari. Allora

$$D^{2k-1} \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)_{z=0} = -D^{2k-1} \left( \frac{z}{2} \right)_{z=0} = \begin{cases} -1/2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases},$$

dunque  $B_1 = -1/2$  e  $B_{2n-1} = 0$  per ogni  $n > 1$ .

**Osservazione 1.3.7.**

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \frac{e^z - 1}{z} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left( \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^{m-1}}{m!} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \right) \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{z^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

Perciò  $B_0 = 1$  e  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$  per ogni  $n \geq 2$ , che ci dà  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k = B_n$  e

$$B_{n-1} = -\frac{1 + \binom{n}{1} B_1 + \dots + \binom{n}{n-2} B_{n-2}}{\binom{n}{n-1}} \Rightarrow B_n \in \mathbb{Q}.$$

**Osservazione 1.3.8.**

$$\begin{aligned} \cot(z) &= i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i \left( 1 + \frac{2z}{z(e^{2iz} - 1)} \right) = \\ &= i + \frac{1}{z} \cdot \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{1}{z} \left( 1 - iz + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k B_{2k} (2z)^{2k}}{(2k)!} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k B_{2k}}{(2k)!} (2z)^{2k-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k) z^{2k-1} &= \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot(\pi z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k} B_{2k} z^{2k-1}}{(2k)!} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + O(1/4^k) &= \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \Rightarrow \\ \Rightarrow (-1)^{k-1} B_{2k} &= \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k). \end{aligned}$$

**Osservazione 1.3.9.**  $B_{2k}(-1)^{k-1} > 0$ . Inoltre,

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \leq |B_{2k}| \leq \frac{2(2k)! \pi^2}{6(2\pi)^{2k}} \text{ per ogni } k \geq 1.$$

Vogliamo vedere quando si ha

$$\begin{aligned} |B_{2(k+1)}| &\geq \frac{2(2(k+1))!}{(2\pi)^{2(k+1)}} \stackrel{?}{\geq} \frac{2(2k)! \pi^2}{6(2\pi)^{2k}} \geq |B_{2k}| \\ \frac{2(k+1)(2k+1)}{4\pi^2} &\stackrel{?}{\geq} \frac{\pi^2}{6} \\ \pi^4 &\stackrel{?}{\leq} 3(k+1)(2k+1), \end{aligned}$$

che è vero per  $k \geq 4$ . Da lì in poi, i numeri di Bernoulli di indice pari hanno moduli crescenti.

**Definizione 1.3.10.** Si dice *polinomio di Bernoulli  $n$ -esimo* il seguente:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

**Fatto 1.3.11.**

- $B_n(0) = B_n$
- $B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k = (-1)^n B_n$

**Osservazione 1.3.12.**

$$\begin{aligned} \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m z^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n B_k \binom{n}{k} x^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n. \end{aligned}$$

Adesso un po' di fatti che chi vuole può divertirsi a dimostrare per esercizio.

**Fatto 1.3.13.**

1.  $B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$ . Per  $y = 1$  si ha  $B_n(x+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x)$ ;
2.  $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ ;
3.  $\sum_{k=m}^{n-1} k^r = \frac{B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m)}{r+1}$ ;
4.  $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ .

## 1.4 La funzione $\Gamma$ di Eulero

Adesso, un caso particolare di un teorema che non dimostreremo; lo utilizzeremo per dimostrare una proposizione che potrebbe essere dimostrata anche con il lemma di sommazione di Abel.

**Teorema 1.4.1.** (*formula di sommazione di Eulero-Maclaurin*) Consideriamo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^1$ . Allora

$$\sum_{a < k \leq b} f(k) = \int_a^b f(x) dx - \left[ B_1(\{x\}) f(x) \right]_a^b + \int_a^b B_1(\{x\}) f'(x) dx.$$

Se  $a = m, b = n$ ,

$$\sum_{m < k \leq n} f(k) = \int_m^n f(x) dx - B_1 \cdot (f(n) - f(m)) + \int_m^n B_1(\{x\}) f'(x) dx.$$

**Corollario 1.4.2.**

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x) dx + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n B_1(\{x\}) f'(x) dx,$$

dove ricordiamo che  $B_1(\{x\}) = \{x\} - 1/2$ .

Riportiamo anche il lemma di Abel.

**Lemma 1.4.3.** (formula di sommazione di Abel)

$$\sum_{k=m}^n a_k f(k) = \left( \sum_{k=m}^n a_k \right) f(n) - \int_m^n \left( \sum_{m \leq k \leq [x]} a_k \right) f'(x) dx.$$

**Proposizione 1.4.4.** Esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n = \gamma,$$

con  $0 < \gamma < 1$ .

*Dimostrazione.* Applichiamo il corollario 1.4.2 con  $m = 1$  e  $f(x) = 1/x$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{\{x\} - 1/2}{x^2} dx = \\ &= \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\} - 1/2}{x^2} dx + \int_n^{+\infty} \frac{\{x\} - 1/2}{x^2} dx = \\ &= \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx + \frac{1}{2} + O\left(\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\right) = \\ &= \log n + 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx + O(1/n) =: \log n + \gamma + O(1/n). \end{aligned}$$

Poiché  $0 < \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx < 1$ , si ha  $0 < \gamma < 1$  con  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ .  $\square$

**Osservazione 1.4.5.** Se  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^1$ , infinitesima e non crescente, allora esiste  $C > 0$  t.c.  $\sum_{1 \leq k \leq x} f(k) = \int_1^x f(y) dy + C + O(f(x))$ . La dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Osservazione 1.4.6.** Si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^q \frac{B_{2r}}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}} + O\left(\frac{1}{n^{2q+2}}\right).$$

**Definizione 1.4.7.** Sia  $\frac{1}{z\Gamma(z)}$  la funzione intera  $F$  di ordine 1 con zeri tutti semplici nei punti  $-1, -2, -3, \dots$  e t.c.  $F(0) = 1$  e  $F'(0) = \gamma$ .

Deve essere  $q = \deg G \leq 1$ ,  $\beta = 1$  e  $\alpha = 1$ .  $G(z) = \log(F(0)) + \frac{F'}{F}(0) = \gamma z$ , quindi  $q = 1$ . Vale anche  $p = 1$  e  $g = 1$ . Si ha dunque

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

**Proposizione 1.4.8.** (formula di Gauss) Per  $z \neq -m$  con  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  si ha

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \quad (3)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = \\ &= z \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) n^{-z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z \prod_{k=1}^n k}{z \prod_{k=1}^n (k+z)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.4.9.** Per  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  si ha  $\operatorname{Res}_{z=-k} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$ .

*Dimostrazione.* Fissato  $k$ , consideriamo il limite a partire da  $n \geq k$ . Vogliamo calcolare  $(\Gamma(z)(z+k))_{z=-k}$ . Si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{n^z n! (z+k)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \right)_{z=-k} &= \frac{n^{-k} n!}{-k(-k+1) \cdots (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-k)} = \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \left( \frac{n!}{(n-k)! n^k} \right) \rightarrow \frac{(-1)^k}{k!} \text{ per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.4.10.** (Eulero) Per  $z \neq -m$  con  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  si ha la seguente formula:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^z \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^{-1}. \quad (4)$$

*Dimostrazione.* Dalla dimostrazione della formula di Gauss abbiamo trovato  $\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{z}{k} \right) n^{-z}$ . Da  $n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k}$  otteniamo  $n^{-z} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-z}$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{z}{k} \right) n^{-z} &= z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-z} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{z}{k} \right) = \\ &= z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-z} \left( 1 + \frac{z}{k} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^z = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-z} \left( 1 + \frac{z}{n} \right). \end{aligned}$$

Perciò

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^z \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^{-1}.$$

□

**Proposizione 1.4.11.** Si ha  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  per  $z \in \mathbb{C}$ .

*Dimostrazione.* Dalla proposizione 1.4.10 abbiamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{z+1}{n}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(\frac{n+1+z}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n+1}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \frac{1}{z+1} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k+1}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \frac{1}{z+1} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \frac{n+1}{n+1+z} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} = z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

□

**Osservazione 1.4.12.** Abbiamo

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 2 \cdot \Gamma(1) = n!.$$

**Proposizione 1.4.13.** Per  $z \in \mathbb{C}$  si ha la relazione

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (5)$$

*Dimostrazione.* Per le proposizioni 1.4.11 e 1.4.10 si ha

$$\begin{aligned}
z\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \\
&= \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{z+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-z} \left(1 + \frac{z+1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1-z}{n}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{z^2}{n^2} \right)^{-1} = \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{z^2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n+1)^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1-z^2} \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}.
\end{aligned}$$

□

Per  $n \geq 1$ , vale la seguente formula di moltiplicazione dovuta a Gauss:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz).$$

Per i nostri scopi ci servirà solo un caso particolare, che è quello che dimostremo.

**Proposizione 1.4.14.** (*formula di duplicazione di Legendre*)

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z). \quad (6)$$

*Dimostrazione.* Dalla formula di Gauss abbiamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^z m!}{z(z+1) \cdots (z+m)} = \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^z (m-1)!}{z(z+1) \cdots (z+m-1)} \cdot \frac{m}{z+m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^z (m-1)!}{z(z+1) \cdots (z+m-1)}.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2^{2z-1}}{\frac{(2m)^{2z} (2m-1)!}{2z(2z+1) \cdots (2z+2m-1)}} \cdot \frac{m^z (m-1)!}{z(z+1) \cdots (z+m-1)} \cdot \frac{m^{z+1/2} (m-1)!}{(z+1/2)(z+3/2) \cdots (z+m-1/2)} = \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2^{2z-1} m^{2z+1/2} ((m-1)!)^2 2^m (2z)(2z+1) \cdots (2z+2m-1)}{(2m)^{2z} (2m-1)! z(z+1) \cdots (z+m-1) (2z+1)(2z+3) \cdots (2z+2m-1)} = \\
&\quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2^{2m-1} m^{1/2} ((m-1)!)^2}{(2m-1)!}.
\end{aligned}$$



Questa quantità non dipende da  $z$ , perciò è costante. Per la proposizione 1.4.13 si ha  $\Gamma^2(1/2) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ; allora la costante è proprio  $\sqrt{\pi}$ , come voluto.  $\square$

**Osservazione 1.4.15.**  $\Gamma(1/2)\Gamma(1) = \sqrt{\pi}\Gamma(2) \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .  
 $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2 < 1$ .

**Osservazione 1.4.16.**

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sin(\pi z/2)}{\pi} \sqrt{\pi} 2^{1-(1-z)} \Gamma(1-z) = \frac{\sin(\pi z/2)}{\sqrt{\pi}} 2^z \Gamma(1-z). \end{aligned}$$

**Proposizione 1.4.17.** Fuori dai poli di  $\Gamma$  si ha  $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(n+z)}$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \\ \log(\Gamma(z)) &= -\log z - \gamma z + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right) \\ \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(n+z)}. \end{aligned}$$

$\square$

**Osservazione 1.4.18.** Dalla proposizione 1.4.17 si ha

$$\Gamma'(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -\gamma.$$

L'integrale  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$  converge per  $\Re z > 0$  e definisce una funzione olomorfa in  $z$ . Vale il seguente risultato.

**Teorema 1.4.19.** Per  $\Re z > 0$  si ha

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx. \quad (7)$$

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare due cose:

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx;$
2.  $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$

La tesi seguirà dalla formula di Gauss.

1. Il primo passo è mostrare la seguente catena di disuguaglianze:

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x}. \quad (\star)$$

Notiamo che si ha

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x}{n} &\leq 1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2!n^2} + \frac{x^3}{3!n^3} + \cdots \leq 1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \cdots \iff \\ &\iff 1 + \frac{x}{n} \leq e^{x/n} \leq \frac{1}{1 - x/n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \text{ e } \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x} \left(1 - e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) \leq e^{-x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Ricordiamo la disuguaglianza di Bernoulli: per  $\alpha \geq 0$  e  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  abbiamo che  $(1 - \alpha)^n \geq 1 - n\alpha$ . Allora

$$e^{-x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leq e^{-x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) = \frac{x^2}{n} e^{-x}.$$

Ne deduciamo che

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx &= \int_0^n e^{-x} x^{z-1} dx - \left(\int_0^n e^{-x} x^{z-1} dx - \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx\right) \text{ e } \\ \left|\int_0^n \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) x^{z-1} dx\right| &\leq \int_0^n x^{\Re z - 1} \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^n x^{\Re z - 1 + 2} e^{-x} dx \ll \frac{1}{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx. \end{aligned}$$

2. Effettuando il cambio di variabile  $y = x/n$  troviamo

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = n^z \int_0^1 (1 - y)^n y^{z-1} dy;$$

integrando per parti più volte si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-y)^n y^{z-1} dy &= \frac{n}{z} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^z dy = \dots = \\ &= \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 y^{z+n-1} dy = \frac{n!}{z(z+1) \dots (z+n)}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.4.20.** (Stirling) Sia  $\varepsilon > 0$ . Si ha la seguente formula asintotica:

$$\log(\Gamma(z)) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (8)$$

uniformemente per  $|z| \geq \varepsilon$  e  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ . In particolare,

$$\begin{aligned} \log n! &= (n+1/2) \left( \log n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - n - 1 + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|n+1|}\right) = \\ &= (n+1/2) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Abbiamo  $\log(\Gamma(z)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n)}\right)$ . Notiamo che

$$\log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n)}\right) = z \log n - \log(z+n) - \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{z-1}{k}\right).$$

Applicando la formula di Eulero-Maclaurin alla funzione  $f_z(x) = \log\left(1 + \frac{z-1}{x}\right)$  troviamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{z-1}{k}\right) &= \int_1^n \log\left(1 + \frac{z-1}{x}\right) dx + \\ &+ \frac{1}{2} (\log z + \log(z+n-1) - \log n) + \int_1^n B_1(\{x\}) \left(\frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n)}\right) &= \dots = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - \left(z + n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{z-1}{n}\right) + \\ &+ \log\left(1 - \frac{1}{z+n}\right) - \int_1^n B_1(\{x\}) \left(\frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx; \end{aligned}$$

poiché  $\left(z + n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{z-1}{n}\right) \sim \frac{z-1}{n} \left(z + n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z-1$  con un resto di  $O_\varepsilon(1/n)$ , si ha

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + 1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) + \\ &- \int_1^{+\infty} B_1(\{x\}) \left(\frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx + \int_n^{+\infty} B_1(\{x\}) \left(\frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + C + O_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) + R_z(n). \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $DB_k(x) = kB_{k-1}(x)$  e che  $\{x\} - 1/2 = x - \lfloor x \rfloor - 1/2$ , dunque una primitiva di  $B_1(\{x\})$  è  $\frac{(x-\lfloor x \rfloor)^2}{2} - \frac{x-\lfloor x \rfloor}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}B_2(\{x\})$ ; allora integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{x\})}{z+x-1} dx &= \left[ \frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{12z} + \int_1^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)^2} dx. \end{aligned}$$

Poniamo anche  $C = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{x\})}{x} dx$ . Vogliamo vedere se

$$-\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{(z+x-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{(z+x)^2} dx \stackrel{?}{\ll_\varepsilon} \frac{1}{|z|}.$$

Si ha

$$\left| -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{B_2(\{x\})}{(z+x)^2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{|z+x|^2}.$$

Da  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ , abbiamo  $|z+x|^2 = |z|^2 + x^2 + 2\langle z, x \rangle \geq |z|^2 + x^2 - 2|z|x \cos \varepsilon$ ; scrivendo  $y = x - |z| \cos \varepsilon$  e cambiando di variabile nei passaggi giusti troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{|z+x|^2} &\leq \int_{-|z|\cos \varepsilon}^{+\infty} \frac{dy}{|z|^2 \sin^2 \varepsilon + y^2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|z|^2 \sin^2 \varepsilon + y^2} = \\ &= \frac{1}{|z| \sin \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} \ll_\varepsilon \frac{1}{|z|}. \end{aligned}$$

Ricordiamo adesso che

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(z+1/2) &= \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(\Gamma(z)) + \log(\Gamma(z+1/2)) &= \frac{1}{2} \log \pi + (1-2z) \log 2 + \log(\Gamma(2z)); \end{aligned}$$

si ha anche  $\log(\Gamma(z)) = (z-1/2) \log z - z + C + O_\varepsilon(1/|z|)$ , da cui con un po' di conti si trova che  $C - \frac{1}{2} \log(2\pi) \ll_\varepsilon \frac{1}{|z|} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \log(2\pi)$ .  $\square$

**Corollario 1.4.21.** Se  $|z| \geq \varepsilon$  e  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  si ha

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

*Dimostrazione.* Sia  $f(z) = \log(\Gamma(z)) - (z - 1/2) \log z + z - \frac{1}{2} \log(2\pi)$ . Preso  $z_0$  che soddisfi le ipotesi e z.t.c.  $|z - z_0| = \varepsilon/2$ , abbiamo  $f(z) \ll_\varepsilon \frac{1}{|z|} \ll \frac{1}{|z_0|}$ . Per la formula integrale di Cauchy troviamo

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \ll_\varepsilon \frac{1}{|z_0|},$$

dove  $\gamma$  è il cerchio di centro  $z_0$  e raggio  $\varepsilon/2$ . La tesi segue notando che vale  $f'(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) - \log z + \frac{1}{2z}$ .  $\square$

**Corollario 1.4.22.** Per  $|z| \geq \varepsilon$  e  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  si ha

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right)\right).$$

$$\text{In particolare } n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

*Dimostrazione.* Per esercizio.  $\square$

**Corollario 1.4.23.** Se  $k \geq 1$ , allora  $(-1)^k B_{2k} = 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{e\pi}\right)^{2k} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$ .

*Dimostrazione.* Si ha infatti  $(-1)^k B_{2k} = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$ , ma

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = 1 + \frac{1}{2k-1} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

$\square$

**Osservazione 1.4.24.** Si ritrova il raggio di convergenza di  $\frac{z}{e^z - 1}$ .

**Corollario 1.4.25.** Sia  $z = x + iy$  con  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Allora

$$|\Gamma(x + iy)| = \sqrt{2\pi} |y|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|y|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|y|}\right)\right).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
\log(\Gamma(x+iy)) &= \left(x - \frac{1}{2} + iy\right) \log(x+iy) - x - iy + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) \\
\Re\left(\log(\Gamma(x+iy))\right) &= \Re\left((x-1/2+iy)(\log(iy) + \log(1-i \cdot x/y))\right) - x + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) = \\
&= (x-1/2) \log|y| + iy \left(\frac{\pi}{2} \cdot i \cdot \operatorname{sgn}(y)\right) + iy \left(-\frac{ix}{y}\right) - x + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) = \\
&= (x-1/2) \log|y| - |y| \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right)
\end{aligned}$$

□

## 2 A caccia di zeri

### 2.1 Lo spazio di Schwarz

**Definizione 2.1.1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ; si dice che  $f$  *tende rapidamente* a 0 per  $|x| \rightarrow +\infty$  se  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^n f(x) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Osservazione 2.1.2.**  $f$  tende rapidamente a 0 se e solo se  $f(x)|x|^n$  è limitata per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Definizione 2.1.3.** Si dice *spazio di Schwarz*  $\mathcal{S}$  lo spazio su  $\mathbb{C}$  delle funzioni  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  (a valori complessi) tendenti rapidamente a 0 insieme a tutte le loro derivate.

**Osservazione 2.1.4.** L'operatore  $D^k$  manda  $\mathcal{S}$  in sé per ogni  $k \geq 0$ .

Notazione: indichiamo con  $M^k$  l'operatore  $(M^k f)(x) = x^k f(x)$ ; abbiamo che anche  $M^k$  manda  $\mathcal{S}$  in sé.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}$  definita come

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Si ha che è ben definita.

**Osservazione 2.1.5.**  $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$ , quindi  $\hat{f}$  è limitata se  $f \in \mathcal{S}$ .

**Lemma 2.1.6.** *L'operatore  $\widehat{\cdot}$  manda  $\mathcal{S}$  in sé.*

*Dimostrazione.* Derivando sotto il segno di integrale abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = -2\pi i \widehat{Mf}(\xi) \Rightarrow \\ \Rightarrow D\hat{f} &= (-2\pi i) \widehat{Mf} \Rightarrow D^k \hat{f} = (-2\pi i)^k \widehat{M^k f} \Rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \xi \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \xi e^{-2\pi i \xi x} dx = \\ &= \left[ -\frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi i \xi x} f(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{2\pi i} \widehat{Df}(\xi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow M^k \hat{f} = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^k \widehat{D^k f}. \end{aligned}$$

Vogliamo concludere applicando l'osservazione 2.1.2 alle funzioni  $D^k \hat{f}$ . Notiamo che

$$M^h D^k \hat{f} = M^h (-2\pi i)^k \widehat{M^k f} = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^h (-2\pi i)^k \widehat{D^h M^k f};$$

ci basta dunque mostrare che  $\widehat{D^h M^k f}$  è limitata, ma questo segue dall'osservazione 2.1.5 e dal fatto che gli operatori  $D$  e  $M$  mandano  $\mathcal{S}$  in sé.  $\square$

**Lemma 2.1.7.** (*formula di Poisson*) Se  $f \in \mathcal{S}$  allora

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

*Dimostrazione.* Sia  $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ .  $g$  ha periodo 1. Poiché  $f \in \mathcal{S}$ , abbiamo che  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} D^k f(x+n)$  converge uniformemente per ogni  $k \geq 0$ , dunque è uguale a  $D^k g$ , quindi  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Scriviamo  $g$  in serie di Fourier:  $g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2\pi i m x}$ . Si ha

$$\begin{aligned} c_m &= \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx \stackrel{y=x+n}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m (y-n)} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i m x} dx = \hat{f}(m). \end{aligned}$$

Basta allora guardare  $g(0)$ .  $\square$

**Lemma 2.1.8.** Sia  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  per  $x \in \mathbb{R}$ . Allora  $f \in \mathcal{S}$  e inoltre  $\hat{f} = f$ .

*Dimostrazione.* Che  $f \in \mathcal{S}$  è facile da dimostrare.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow D\hat{f}(\xi) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} dx \stackrel{\text{per parti}}{=} \\ &= \left[ i e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i(2\pi i \xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} dx = -2\pi \xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$



Abbiamo

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= -2\pi\xi u(\xi) \Rightarrow \frac{u'}{u}(\xi) = -2\pi\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(u(\xi)) &= -\pi\xi^2 + c \Rightarrow u(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{f}(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2}. \end{aligned}$$

Si ha anche  $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1 \Rightarrow C = 1$ . □

**Osservazione 2.1.9.** La serie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}$  converge totalmente per  $\Re z \geq \varepsilon > 0$ .

## 2.2 La memoria di Riemann

**Definizione 2.2.1.** Sia  $z = x + iy$  con  $x > 0$ . Si dice *funzione  $\vartheta$  di Jacobi* la seguente serie totalmente convergente:

$$\vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}.$$

**Lemma 2.2.2.** Per  $x = \Re z > 0$  si ha

$$\vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \vartheta\left(\frac{1}{z}\right).$$

*Dimostrazione.* Possiamo dimostrare la formula per  $z = x > 0$ , che valga in tutto il semipiano  $\Re z > 0$  segue per prolungamento analitico. Sia  $f(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$  e sia  $f_x(\xi) = f(\sqrt{x}\xi) = e^{-\pi x \xi^2}$ . Allora

$$\begin{aligned} \hat{f}_x(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{x}t) e^{-2\pi i \xi t} dt \stackrel{s=t\sqrt{x}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-2\pi i \frac{\xi}{\sqrt{x}} s} ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} f\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_{\frac{1}{x}}(\xi). \end{aligned}$$

Applicando la formula di Poisson abbiamo

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_x(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_x(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{x}} f_{\frac{1}{x}}(n),$$

quindi

$$\vartheta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{x} n^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

□

Vogliamo usare quest'identità della funzione di Jacobi per dimostrare il teorema di Riemann sulla funzione  $\zeta$ . D'ora in avanti, per motivi storici la variabile sarà  $s = \sigma + it$  con  $\sigma, t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.2.3.** (Riemann, 1860) La funzione  $\zeta(s)$  è meromorfa in  $\mathbb{C}$  con un polo semplice in  $s = 1$  con residuo 1. Inoltre, posta

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

allora  $\xi$  è intera e fornisce il prolungamento analitico di  $\zeta$ . Si ha

$$\xi(s) = \xi(1-s). \quad (9)$$

*Dimostrazione.* Se  $\sigma > 0$ , allora

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\pi^{-s/2}}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\pi n^2}\right)^{s/2} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Se  $\sigma > 1$ , allora

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\pi n^2}\right)^{s/2} \frac{dx}{x} \stackrel{y=\frac{x}{\pi n^2}}{=} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{s/2} \frac{dy}{y} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{s/2} \frac{dy}{y} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\vartheta(y) - 1) y^{s/2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) (\vartheta(y) - 1) y^{s/2} \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (\vartheta(y) - 1) y^{s/2} \frac{dy}{y} &\stackrel{x=\frac{1}{y}}{=} \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left( \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) x^{-s/2} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1) \sqrt{x} \cdot x^{-s/2} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1) \cdot x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1) \cdot x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{s(s-1)}. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1)(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}) \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{4} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1)(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}) \frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{1}{2}(\vartheta(x) - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n x} = \frac{1}{e^{\pi x} - 1} \ll e^{-\pi x},$$

l'ultimo integrale nella formula per  $\xi(s)$  converge uniformemente in ogni striscia  $a \leq \sigma \leq b$ ; allora  $\xi$  definita da quell'integrale è una funzione intera e la relazione con  $\Gamma$  e  $\zeta$  data nell'enunciato è valida per  $\sigma > 1$ . Che  $\xi(1-s) = \xi(s)$  è ovvio. Poiché  $\Gamma$  non ha zeri e lo zero semplice di  $s/2$  in 0 è cancellato dal polo di  $\Gamma$ , questo definisce l'estensione analitica di  $\zeta$  a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Sappiamo già che sui reali  $\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = +\infty$ . Mostriamo che è un polo semplice di residuo 1. Si ha

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \xi(s) \frac{\pi^{s/2}}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{1}{s-1} \text{ e} \\ \text{Res}_{s=1} \zeta &= \lim_{s \rightarrow 1} (\zeta(s)(s-1)) = \xi(1) \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 1.\end{aligned}$$

□

**Osservazione 2.2.4.**  $\xi$  non ha zeri fuori dalla striscia  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

**Corollario 2.2.5.**  $\zeta(-2k) = 0$  per ogni  $k \geq 1$ .

*Dimostrazione.* Guardare i poli di  $\Gamma$ .

□

**Osservazione 2.2.6.** All'interno della striscia  $0 \leq \sigma \leq 1$  abbiamo che  $\zeta$  e  $\xi$  si annullano insieme.

**Osservazione 2.2.7.** Se  $\rho$  è uno zero, dalla (9) anche  $1-\rho$  è uno zero. Poiché  $\xi$  è reale sui reali, se  $\rho$  è uno 0 anche  $\bar{\rho}$  è uno zero.

**Osservazione 2.2.8.** Definendo  $\Xi(s) = \xi(is + 1/2)$  si ha

$$\Xi(-s) = \xi(1/2 - is) = \xi(1/2 + is) = \Xi(s).$$

Se  $s = x \in \mathbb{R}$ , allora  $\overline{\xi(1/2 + ix)} = \xi(1/2 - ix) = \xi(1/2 + ix)$ , quindi  $\Xi(x)$  è reale.

**Osservazione 2.2.9.**  $\zeta(s) \neq 0$  per  $\sigma > 1$ . Infatti

$$\begin{aligned} \left| \zeta(s) \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right| &= \left| \prod_{p > N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| = \\ &= \left| 1 + \sum_{p|n \Rightarrow p > N} \frac{1}{n^s} \right| \geq 1 - \sum_{n > N} \frac{1}{n^\sigma} = 1 + O\left(\frac{1}{N^{\sigma-1}}\right). \end{aligned}$$

**Osservazione 2.2.10.** Prendiamo  $0 \leq \sigma \leq 1$  e  $t = 0$ . Si ha

$$\xi(\sigma) = \frac{1}{2} + \frac{\sigma(\sigma-1)}{4} \int_1^{+\infty} (\vartheta(x) - 1) (x^{\frac{\sigma}{2}} + x^{\frac{1-\sigma}{2}}) \frac{dx}{x}.$$

Ricordiamo che  $\frac{\vartheta(x) - 1}{2} \leq \frac{1}{e^{\pi x} - 1}$  e per  $x \geq 1$  vale che  $x \geq \sqrt{x}$ , dunque  $e^{\pi x} - 1 \geq \pi x \geq 2\sqrt{x}$ , perciò  $\vartheta(x) - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Inoltre

$$\int_1^{+\infty} (x^{\frac{\sigma-1}{2}} + x^{\frac{-\sigma}{2}}) \frac{dx}{x} = \frac{2}{\sigma(\sigma-1)}.$$

Mettendo assieme, troviamo che

$$\xi(\sigma) \geq \frac{1}{2} - \frac{\sigma(1-\sigma)}{4} \cdot \frac{2}{\sigma(1-\sigma)} = 0.$$

**Osservazione 2.2.11.**  $\xi(0) = 1/2$  e  $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = 1$ , dunque dalla formula che lega  $\zeta$  e  $\xi$  si ha  $\zeta(0) = -1/2$ .

**Esercizio 2.2.12.** Dimostrare che  $\zeta(-1) = -1/12$ .

Vogliamo ora capire qual è l'ordine di  $\xi$ . Abbiamo  $\xi(s) = (s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)$ . Analizziamo i vari fattori.

Con  $s = 2n$  si ha  $\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \Gamma(n+1) = n! \sim e^{(n+\frac{1}{2}) \log n - n + (\dots)} \ll_{\varepsilon} e^{n^{1+\varepsilon}}$ . Più in particolare, per il corollario 1.4.22 abbiamo che questo vale in generale per  $\sigma > 1$ . Nella stessa regione,  $\zeta(s)$  e  $\pi^{-\frac{s}{2}}$  sono limitate a infinito e  $s-1$  è “piccola”. Questo ci dice che dev'essere  $\text{ord}(\xi) \geq 1$  e, per quanto visto su  $\Gamma$ , se valesse l'uguale l'ordine sarebbe un inf e non un min.

Per simmetria, ci resta da verificare solo la regione  $1/2 \leq \sigma \leq 1$ . Vediamo che, se l'ordine fosse proprio 1, per il teorema di Hadamard avremmo che  $\xi$  ha un prodotto di Weierstrass della forma  $\xi(s) = e^{as+b} \prod_{\rho} (\dots)$ . Se non ci fossero

zeri, il prodotto vuoto sarebbe 1 e  $\xi(s) \ll e^{a|s|}$ , assurdo per via del contributo  $e^{s \log s}$  dovuto a  $\Gamma$ . Per lo stesso motivo, gli zeri devono essere infiniti.

**Lemma 2.2.13.** Per  $\sigma \geq \varepsilon$  si ha  $\zeta(s) \ll_{\varepsilon} |s|$  (*o*  $|t|$ ) uniformemente.

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma > 1$ . Per somministrazione parziale,

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{\lfloor u \rfloor}{u^{s+1}} du = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{du}{u^s} - s \int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + \frac{s}{s-1} - s \int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du \Rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du;\end{aligned}$$

questa è l'estensione di  $\zeta$  a  $\sigma > 0$  (l'integrale converge uniformemente per  $\sigma \geq \varepsilon$ ).

**Osservazione 2.2.14.** Prendendo  $s = 1$ , otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= 1 - \frac{\{x\}}{x} + \log x - \int_1^x \frac{\{u\}}{u^2} du \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right) &= 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du = \gamma.\end{aligned}$$

Ma passiamo oltre.

Utilizzando i polinomio di Bernoulli, abbiamo

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + 1 - \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{s+1}} - s \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{u\})}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{1}{s-1} + 1 - \frac{1}{2} - s \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{u\})}{u^{s+1}} du.\end{aligned}$$

**Osservazione 2.2.15.** Ricordando la relazione tra polinomi di Bernoulli successivi e le loro derivate, si può integrare per parti fino a ottenere il prolungamento di  $\zeta$  in un semipiano che inizia arbitrariamente a sinistra. Ma, senza l'equazione funzionale, questa costruzione è abbastanza inutile.

Tornando a noi, per  $\sigma \geq \varepsilon$  e usando che  $B_1(\{u\})$  è limitato, abbiamo

$$|\zeta(s)| \ll 1 + |s| \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} \ll \frac{|s|}{\varepsilon} \ll_\varepsilon |s|.$$

□

Curiosità: la congettura di Lindelöf ipotizza che  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon t^\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ .

**Proposizione 2.2.16.** (*formula di Riemann-Von Mangoldt*) Contando con molteplicità, sia

$$N(T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma \mid \zeta(\rho) = 0, 0 \leq \beta \leq 1, 0 < \gamma < T\},$$

allora per  $T \rightarrow +\infty$  si ha

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \quad (10)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il bordo rettangolare  $R$ , in verde nella figura.



Poiché  $\xi$  è una funzione intera senza zeri fuori dalla striscia critica, all'interno della quale ha invece gli stessi zeri di  $\zeta$  con la stessa molteplicità, abbiamo che

$$N(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_R \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \frac{1}{2\pi} \Delta_R \arg(\xi(s)).$$

Adesso notiamo che, per quello che sappiamo di  $\xi$  tra 0 e 1 e fuori dalla striscia critica e usando l'equazione funzionale, essa è sempre reale e mai nulla tra  $-1$  e  $2$ , dunque l'argomento non cambia e possiamo trascurare quel segmento. Dato che  $\xi$  è reale sui reali, si ha anche  $\xi(s) = \xi(1-s) = \overline{\xi(1-\bar{s})}$ ; perciò la variazione da  $\frac{1}{2} + iT$  a  $-1$  è la stessa che tra  $2$  e  $\frac{1}{2} + iT$ . Detto allora  $L$  il sottotratto di  $R$  formato dai due segmenti da  $2$  a  $2 + iT$  e da  $2 + iT$  e  $\frac{1}{2} + iT$ , si ha  $N(T) = \frac{1}{\pi} \Delta_L \arg(\xi(s))$ . Ricordiamo ora la definizione di  $\xi$ :

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s);$$

si ha dunque

$$\Delta_L \arg(\xi(s)) = \Delta_L \arg(s-1) + \Delta_L \arg(\pi^{-\frac{s}{2}}) + \Delta_L \arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) + \Delta_L \arg(\zeta(s)).$$

Studiamo i singoli pezzi.

$$\begin{aligned}\Delta_L \arg(s-1) &= \arg\left(-\frac{1}{2} + iT\right) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) \text{ e} \\ \Delta_L \arg\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\right) &= \Delta_L \arg\left(e^{-\frac{s}{2} \log \pi}\right) = -\frac{T}{2} \log \pi.\end{aligned}$$

Ricordiamo la formula di Stirling:

$$\log(\Gamma(z)) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|z|}\right);$$

abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}\Delta_L \arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) &= \Im \log\left(\Gamma\left(\frac{5}{4} + i\frac{T}{2}\right)\right) = \\ &= \Im\left(\left(\frac{3}{4} + i\frac{T}{2}\right) \log\left(\frac{5}{4} + i\frac{T}{2}\right) - \frac{5}{4} - i\frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right)\right) = \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right)\right) + \frac{T}{2} \log \sqrt{\frac{T^2}{4} + \frac{25}{16}} - \frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) = \\ &= \frac{3}{8}\pi + \frac{T}{2} \log\left(\frac{T}{2}\right) + \frac{T}{4} \log\left(1 + \frac{25}{4T^2}\right) - \frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) = \\ &= \frac{3}{8}\pi + \frac{T}{2} \log\left(\frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right).\end{aligned}$$

Mettendo assieme si ha  $N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) + \frac{7}{8} - \frac{T}{2\pi} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right)$ , dove poniamo  $S(T) = \frac{1}{\pi} \arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right)$ . Si conclude con il lemma seguente.  $\square$

**Lemma 2.2.17.** *Sia  $S(T) = \frac{1}{\pi} \arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right)$ ; allora*

$$S(T) \ll \log T.$$

*Dimostrazione.* Scriviamo

$$\arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right) = \arg(\zeta(2 + iT)) + \left[\arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right) - \arg(\zeta(2 + iT))\right]$$

e stimiamo i due addendi. Si ha

$$\begin{aligned}\Re \zeta(2 + iT) &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Re \frac{1}{n^{2+iT}} \geq 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) > \frac{1}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\arg(\zeta(2 + iT))| \leq \pi/2.\end{aligned}$$

Sia  $m = \#\{\sigma_j \in [1/2, 2] \mid \Re \zeta(\sigma_j + iT) = 0\}$ . Per come sono definiti, tra un  $\sigma_j$  e il successivo l'argomento di  $\zeta$  cambia al più di  $\pi$ . Allora

$$\left| \arg \left( \zeta \left( \frac{1}{2} + iT \right) \right) - \arg(\zeta(2 + iT)) \right| \leq (m + 1)\pi.$$

Dobbiamo stimare  $m$ . Definiamo  $f(s) = \zeta(s + iT) + \zeta(s - iT)$ , che è una funzione olomorfa per  $s + iT \neq 1$ , quindi lo è in particolare per  $T$  sufficientemente grande in modulo ( $\neq 0$ ), che è quello che ci interessa. Per motivi di coniugio ( $\zeta$  è reale sui reali), abbiamo che  $f(\sigma) = 2\Re \zeta(\sigma + iT)$ . Perciò otteniamo che  $m = \#\{\sigma_j \in [1/2, 2] \mid f(\sigma_j) = 0\}$ ; vale dunque che

$$m \leq M = \#\{s \in \mathbb{C} \mid |s - 2| \leq 3/2, f(s) = 0\}.$$

Per il corollario 1.2.5 con  $r = 3/2$  e  $R = 7/4$ , troviamo

$$\begin{aligned}M &\leq \frac{1}{\log(R/r)} \log \left( \frac{\max_{|s-2| \leq 7/4} |f(s)|}{f(2)} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\log(7/6)} \log \left( \frac{\max_{|s-2| \leq 7/4} 2|\zeta(s + iT)|}{2/3} \right) \leq C_1 \log T + C_2 \ll \log T,\end{aligned}$$

dove abbiamo stimato  $f(2)$  usando quanto trovato per  $\Re \zeta(2 + iT)$ , mentre il massimo dentro al logaritmo è stimato usando che  $|\zeta(\sigma + iT)| \ll T$  per il lemma 2.2.13 con  $\sigma \geq 1/4$ .  $\square$

**Fatto 2.2.18.** Il termine che è  $O(\log T)$  in (10) è comunemente chiamato  $\mathcal{R}$ . L'ipotesi di Lindelöf implica  $\mathcal{R} = o(\log T)$ , mentre l'ipotesi di Riemann implica  $\mathcal{R} = O\left(\frac{\log T}{\log \log T}\right)$ .

Dalla dimostrazione della formula di Riemann-Von Mangoldt abbiamo che  $N(T) - \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) + \frac{T}{2\pi} = \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right)$ ; Littlewood ha dimostrato che  $S_1(T) = \int_0^T S(t) dt \ll \log T$  (se il risultato del lemma 2.2.17 fosse ottimale, questo significherebbe che  $S$  cambia spesso di segno, quindi ha molti zeri). Si ha dunque

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ N(t) - \frac{t}{2\pi} \log\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{t}{2\pi} \right] dt = \frac{7}{8},$$



che ci dice che la quantità  $\frac{7}{8}$  nella formula è relativamente importante, quindi non possiamo trascurarla con troppa leggerezza.

**Corollario 2.2.19.** *uniformemente in  $T$  e  $H$  si ha che*

$$N(T+H) - N(T) \ll (H+1) \log(T+H).$$

*Inoltre, esiste  $H_0$  t.c. per  $H \geq H_0$  si ha*

$$N(T+H) - N(T) \gg H \log T.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} N(T+H) - N(T) &= \\ &= \frac{T+H}{2\pi} \log \left( \frac{T+H}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) - \left( \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} \right) + O(\log(T+H)) = \\ &= \int_{\frac{T}{2\pi}}^{\frac{T+H}{2\pi}} \log t \, dt + O(\log(T+H)). \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio, esiste  $0 \leq \delta \leq 1$  t.c.

$$N(T+H) - N(T) = \frac{H}{2\pi} \log \left( \frac{T+\delta H}{2\pi} \right) + O(\log(T+H));$$

la prima parte della tesi segue immediatamente. Per la seconda, notiamo che

$$\frac{H}{2\pi} \log \left( \frac{T+\delta H}{2\pi} \right) + O(\log(T+H)) > \frac{H}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) + O(\log(T+H)) \gg H \log T,$$

dove serve  $H \geq H_0$  per evitare che domini il termine  $O$ -grande, che non potremmo stimare dal basso.  $\square$

**Corollario 2.2.20.** *Siano  $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$  gli zeri non banali di  $\zeta$ , ordinati per parte immaginaria crescente (consideriamo solo  $\gamma_n > 0$ ) e contati con molteplicità; allora si ha  $\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}$ .*

$$(Littlewood: \gamma_{n+1} - \gamma_n \ll \frac{1}{\log \log \log \gamma_n})$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \gamma_n &\sim \frac{\gamma_n + 1}{2\pi} \log \left( \frac{\gamma_n + 1}{2\pi} \right) \sim N(\gamma_n + 1) \geq n \geq \\ &\geq N(\gamma_n - 1) \sim \frac{\gamma_n - 1}{2\pi} \log \left( \frac{\gamma_n - 1}{2\pi} \right) \sim \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \gamma_n \Rightarrow \\ \Rightarrow n &\sim \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \gamma_n \Rightarrow \log n \sim \log \gamma_n + \log \log \gamma_n - \log 2\pi \sim \log \gamma_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log \gamma_n} \sim \frac{2\pi n}{\log n}. \end{aligned}$$

$\square$

**Corollario 2.2.21.** *La successione  $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$  ha esponente di convergenza 1.*

*Dimostrazione.* Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\gamma_n|^{1+\varepsilon}} \leq c_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^{1+\varepsilon}}{n^{1+\varepsilon}} \leq c_2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}} < +\infty,$$

ma, poiché  $|\beta_n| \leq 1$ , abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\rho_n|} > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+|\gamma_n|} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{c_3 n}{\log n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{\log n + c_3 n} = +\infty.$$

□

### 2.3 Le funzioni intere $\xi(s)$ e $(s-1)\zeta(s)$

Dovevamo capire qual è l'ordine di  $\xi$  come funzione intera. Avevamo già controllato per  $\sigma > 1$ , quindi ci manca  $\sigma \geq 1/2$ . Ricordiamo che  $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ . Per il lemma 2.2.13 abbiamo già  $\zeta(s) \ll |s|$  per  $\sigma \geq 1/2$ ; inoltre, ricordando il corollario 1.4.22, abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &\ll_{\varepsilon} e^{|s|^{1+\varepsilon}} \text{ per ogni } \varepsilon > 0, \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \ll 1, \quad \frac{s(s-1)}{2} \ll |s^2| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi(s) \ll_{\varepsilon} e^{|s|^{1+\varepsilon}} \text{ per } \sigma \geq 1/2. \end{aligned}$$

Da  $\xi(s) = \xi(1-s)$ , otteniamo che è vero per ogni  $\sigma$ . Scriviamo  $\xi$  con il prodotto di Weierstrass:

$$\xi(s) = e^{a+As} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}};$$

$$\text{dev'essere } a = \log(\xi(0)) = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \xi(s) = \frac{1}{2} e^{As} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}.$$

Consideriamo invece  $(s-1)\zeta(s) = \xi(s) \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ . Dall'equazione appena scritta otteniamo che ha ordine 1, dunque si ha (ricordando anche gli zeri banali)

$$(s-1)\zeta(s) = e^{b+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}};$$

$$\text{dev'essere } b = \left( \log((s-1)\zeta(s)) \right)_{s=0} = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} e^{Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}}.$$

Confrontando i prodotti di Weierstrass per  $\zeta$  e  $\xi$  usando l'equazione che lega le due funzioni, ricordando anche la definizione di  $\Gamma$ , si ha  $B = A + \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma}{2}$ . Andiamo a calcolarci  $A$  e  $B$ .

$$A = \frac{\xi'}{\xi}(0) = 2\xi'(0), \quad B = \left( \frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'}{\zeta}(0) \right)_{s=0} = -2\zeta'(0) - 1.$$

Si ha anche

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} &= \frac{A}{2} + \frac{1}{4} \log \pi + \frac{\gamma}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi'(0) + \zeta'(0) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \pi - \frac{\gamma}{4}. \end{aligned}$$

Vogliamo calcolare  $\xi'(0)$  usando l'equazione funzionale per  $\xi$ . Dalla definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \xi'(s) &= \frac{(s-1)\zeta(s)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{4} \log \pi \cdot s(s-1)\zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} + \\ &+ \frac{s}{4} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma'\left(\frac{s}{2}\right) (s-1)\zeta(s) + \frac{s}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) D(\zeta(s)(s-1)) \end{aligned}$$

Nella dimostrazione del lemma 2.2.13 abbiamo visto che

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1} \left( \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma,$$

dunque dev'essere  $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + (s-1)g(s)$ , con  $g$  una qualche funzione intera. Allora otteniamo

$$\xi'(1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{4} \log \pi \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sqrt{\pi}} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \gamma;$$

dobbiamo calcolare  $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$ . Dalla proposizione 1.4.17 abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(n+z)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n(2n+1)} = -\gamma - 2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \\ &= -\gamma - 2 + 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right) = -\gamma - 2 + 2 - 2 \log 2 = -\gamma - 2 \log 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2 \log 2), \end{aligned}$$

quindi

$$\xi'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \pi - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log(4\pi).$$

Adesso usiamo l'equazione funzionale:

$$\begin{aligned}
\xi(1-s) &= \xi(s) \Rightarrow -\xi'(1-s) = \xi'(s) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \xi'(0) = -\xi'(1) = \frac{1}{4} \log(4\pi) - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{2} \text{ e} \\
\zeta'(0) &= \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log(4\pi) - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{4} \log \pi = \\
&= -\frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \log 2 = -\frac{1}{2} \log(2\pi);
\end{aligned}$$

abbiamo quindi

$$B = -2\zeta'(0) - 1 = \log(2\pi) - 1 \text{ e } A = 2\zeta'(0) = \frac{1}{2} \log(4\pi) - 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Ora, vogliamo dire che non ci sono zeri per  $\sigma = 1$  (e dalla funzionale, nemmeno per  $\sigma = 0$ ). Dal prodotto di Weierstrass troviamo

$$\begin{aligned}
\frac{\xi'}{\xi}(s) &= A + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \text{ e} \\
\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= -\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\xi'}{\xi}(s) = \\
&= -\frac{1}{s-1} + A + \frac{1}{2} \log \pi + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s}{2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che ci sia uno zero in  $1+it$ . Ci tornerà utile la seguente disuguaglianza, valida per ogni  $\theta$  reale:  $3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) \geq 0$ . Infatti, la si riscrive come  $2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2 = 2(\cos \theta + 1)^2$ . Sia ora  $\sigma > 1$ , abbiamo

$$\log(\zeta(s)) = \log \left( \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \right) = - \sum_p \log \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mp^{ms}},$$

da cui prendendo la parte reale

$$\log |\zeta(\sigma + it)| = \sum_p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mp^{\sigma m}} \cos(mt \log p).$$

Adesso, sfruttando la disuguaglianza vista sopra con  $\theta = mt \log p$  al variare di  $m$  e  $p$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
&3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + i2t)| = \\
&= \sum_p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}} (3 + 4 \cos(mt \log p) + \cos(2mt \log p)) \geq 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + i2t)| \geq 1.
\end{aligned}$$

Adesso,  $\zeta$  ha un polo semplice in 1, perciò  $\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1} + g(\sigma)$  con  $g$  una qualche funzione intera; invece, se ci fosse uno zero in  $1+it$ , avremmo

$$\zeta(\sigma+it) = (\sigma+it-1-it)h(\sigma+it) = (\sigma-1)h(\sigma+it),$$

con  $h$  una qualche funzione olomorfa in un intorno di  $1+it$ . Ma allora, poiché  $4 > 3$ , si ha

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \zeta^3(\sigma) \zeta(\sigma+it)^4 \zeta(\sigma+2it) = 0,$$

in contraddizione con la disuguaglianza trovata.

Diamo un'altra dimostrazione di questo fatto, dovuta a Ingham (si veda [T], capitolo III paragrafo 3.4). Dati  $a, b \in \mathbb{C}$ , usiamo che

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s},$$

dove  $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$ . Prendendo  $a = -b = i\gamma$  troviamo

$$\frac{\zeta^2(s)\zeta(s-i\gamma)\zeta(s+i\gamma)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_{i\gamma}(n)\sigma_{-i\gamma}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sigma_{i\gamma}(n)|^2}{n^s}.$$

Sia  $\sigma_0$  l'ascissa di convergenza dell'ultima serie che abbiamo scritto. Poiché i coefficienti della stessa sono maggiori o uguali a zero, abbiamo che la funzione  $\frac{\zeta^2(s)\zeta(s-i\gamma)\zeta(s+i\gamma)}{\zeta(2s)}$  ha un polo in  $\sigma_0$ . Supponiamo per assurdo che abbia uno zero in  $1+i\gamma$ , dunque anche in  $1-i\gamma$ ; allora per  $s=1$  c'è un doppio zero che annulla il polo doppio di  $\zeta^2(s)$  al numeratore. Dunque il primo polo che si incontra dev'essere in uno zero del denominatore, cioè (ci stiamo restringendo alla retta reale perché i coefficienti della serie sono non negativi) in  $s=-1$ . Allora dev'essere  $\sigma_0 \leq -1$ , ma prendendo  $s=1/2$  troviamo facilmente un assurdo (la funzione si annulla grazie al polo al denominatore, la serie no).

Andiamo ora a cercare una regione in cui sono contenuti gli zeri non banali di  $\zeta$ . Abbiamo già visto che

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\frac{1}{s-1} + A + \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s}{2} + 1 \right) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

**Proposizione 2.3.1.** *(de la Vallée-Poussin, 1899) Esiste una costante  $C_0 > 0$  t.c., se  $\rho = \beta + i\gamma$  con  $\gamma > 0$  è uno zero non banale, allora*

$$\beta < 1 - \frac{C_0}{\log \gamma}. \quad (11)$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$-\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - A_1 + \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) - \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Per  $t \geq 2, 1 < \sigma \leq 2$ , usando il corollario 1.4.21 otteniamo

$$\begin{aligned} -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right) &< C \log t - \sum_{\rho} \left( \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \right) < \\ &< C \log t - \sum_{\rho} \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}. \end{aligned}$$

Adesso, tenendo eventualmente solo lo zero dell'ipotesi, abbiamo

$$t = \begin{cases} \gamma & \Rightarrow -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma)\right) < C \log \gamma - \frac{1}{\sigma-\beta} \\ 2\gamma & \Rightarrow -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i2\gamma)\right) < C \log(2\gamma) \leq C_1 \log \gamma \\ = 0 & \Rightarrow -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right) = \frac{1}{\sigma-1} + O(1). \end{cases}$$

Poiché siamo nel giusto semipiano di convergenza, scriviamo

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \cos(t \log n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3 \cdot \Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right) - 4 \cdot \Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma)\right) - \Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i2\gamma)\right) \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} + C_2 \log \gamma \Rightarrow \frac{4}{\sigma-\beta} \leq \frac{3}{\sigma-1} + C_2 \log \gamma. \end{aligned}$$

Prendendo  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log \gamma}$  con  $\delta > 0$ , si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 2.3.2.** Si può dire che il primo zero ha  $\gamma \geq 6$ . Prendendo anche  $6 \leq \gamma \leq t$ , dato che  $1 - \frac{C_0}{\log \gamma} \leq 1 - \frac{C_0}{\log t}$ , quello che troviamo è che la regione  $\sigma > 1 - \frac{C_0}{\log(|t|+2)}$  è libera da zeri di  $\zeta$ . Questo risultato è stato migliorato:

$$\text{Littlewood, 1922: } \sigma > 1 - \frac{C_0 \log \log(|t|+2)}{\log(|t|+2)};$$

$$\text{Vinogradov, 1958: } \sigma > 1 - \frac{C_0(\varepsilon)}{(\log(|t|+2))^{2/3+\varepsilon}} \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

Per  $t \geq 2$ , abbiamo visto che

$$-\Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) < C \log t - \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Prendendo  $s = 2 + it$ , la quantità  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  è limitata, dunque a meno di cambiare costante troviamo

$$\begin{aligned} \Re \sum_{\rho} \left( \frac{1}{(2-\beta) + i(t-\gamma)} + \frac{1}{\rho} \right) &< C \log t \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{\rho} \frac{1}{4 + (t-\gamma)^2} &\leq \sum_{\rho} \left( \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right) < C \log t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{|\gamma-t| \geq 1} \frac{1}{4 + (t-\gamma)^2} \leq C \log t. \end{aligned}$$

Otteniamo il seguente lemma.

**Lemma 2.3.3.** *Se  $-1 \leq \sigma \leq 2$  si ha*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log(|t|+2)).$$

*Dimostrazione.* Per  $|t| \geq 2$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + O(\log t) \\ \frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) &= \sum_{\rho} \left( \frac{1}{2+it-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + O(\log t); \end{aligned}$$

poiché  $\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)$  è limitata, facendo la differenza otteniamo

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log t) = \sum_{\rho} \frac{2-\sigma}{(s-\rho)(2+it-\rho)} + O(\log t).$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\gamma-t| > 1} \frac{2-\sigma}{(s-\rho)(2+it-\rho)} \right| &\leq \sum_{|\gamma-t| > 1} \frac{3}{(\gamma-t)^2} \ll \log t \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \left( \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log t) \text{ e} \\ \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \frac{1}{|2+it-\rho|} &\leq \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \frac{1}{2-\beta} \leq N(t+1) - N(t-1) \ll \log t, \end{aligned}$$

da cui la tesi.  $\square$

Torniamo su

$$\begin{aligned}
S(T) &= \frac{1}{\pi} \arg \left( \zeta \left( \frac{1}{2} + iT \right) \right) - \frac{1}{\pi} \arg (\zeta(2 + iT)) = \\
&= \frac{1}{\pi} \Im \left[ \log \left( \zeta \left( \frac{1}{2} + iT \right) \right) - \log (\zeta(2 + iT)) \right] = \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{1/2}^2 \Im \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) \right) d\sigma = \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{1/2}^2 \sum_{|\gamma-T| \leq 1} \Im \left( \frac{1}{\sigma + iT - \rho} \right) d\sigma + O(\log T) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{|\gamma-T| \leq 1} \Delta_l \arg(s - \rho) + O(\log T) \ll \sum_{|\gamma-T| \leq 1} 1 + O(\log T) \ll \log T,
\end{aligned}$$

dove dalla terza alla quarta riga abbiamo usato il lemma 2.3.3 ( $l$  è il segmento da  $\frac{1}{2} + iT$  a  $2 + iT$ ). Che valga  $\Delta_l \arg(s - \rho) \ll 1$  per  $|\gamma - T| \leq 1$  segue da un po' di geometria.

## 2.4 La funzione $\psi$ e il teorema dei numeri primi

Riemann congetturerò che

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Beh, non proprio: l'espressione a destra è continua, a differenza di  $\psi$ . Utilizzeremo  $\psi_0(x) = \sum_{n < x} \Lambda(n) + \frac{1}{2} \Lambda(x)$ , dove poniamo  $\Lambda = 0$  fuori dagli interi. L'idea di Riemann è di scrivere

$$\psi_0(x) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds$$

con  $c > 1$  e applicare il teorema dei residui. Ma come ha fatto a derivare un'espressione tanto precisa? Ha guardato i poli dell'integranda.

**Lemma 2.4.1.** Dato  $c > 0$ , sia  $I(y, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s}$ ; allora

$$|I(y, T) - \delta(y)| \leq \begin{cases} y^c \min \left\{ 1, \frac{1}{T|\log y|} \right\} & \text{se } y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{se } y = 1, \end{cases}$$

$$\text{dove } \delta(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } y = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < y < 1 \end{cases}. \text{ Di conseguenza, } \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \delta(y).$$



*Dimostrazione.* Preso  $0 < y < 1$ , consideriamo l'integrale sul cammino in figura, percorso in senso orario.



In teoria dovremmo fare un integrale chiuso e poi mandare un lato a infinito, ma visto che non ci sono poli per  $y^s/s$  nella regione considerata e sul lato che si manda a infinito la funzione va a 0 uniformemente, saltiamo il passaggio. Per il teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{c-iT}^{+\infty-iT} - \int_{c+iT}^{+\infty+iT} \right) y^s \frac{ds}{s} = \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2.$$

Si ha  $|\mathcal{I}_1| \leq \frac{1}{T} \int_c^{+\infty} y^\sigma d\sigma = \frac{1}{T} \cdot \frac{y^c}{|\log y|}$  e  $\mathcal{I}_2$  si stima allo stesso modo.

Per l'altro argomento del minimo, consideriamo la circonferenza di centro l'origine e raggio  $R = \sqrt{c^2 + T^2}$  e prendiamo il cammino da  $c - iT$  a  $c + iT$  e ritorno che gira in senso orario (quindi il segmento passante per  $c$  all'andata e l'arco destro al ritorno). Sia  $\gamma$  l'arco percorso al ritorno.



Allora per il teorema dei residui

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \frac{y^c}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{d|s|}{|s|} \leq y^c \frac{\pi R}{2\pi R} \leq \frac{y^c}{2}.$$

Per  $y > 1$ , basta ripetere le stesse stime ma con i cammini “di sinistra” percorsi in senso antiorario, facendo attenzione al polo in 0:  $\text{Res}_{s=0} \frac{y^s}{s} = 1$ .

Adesso facciamo  $y = 1$  (non saremo rigorosi, ma si può sistemare facilmente):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^T \frac{i dt}{c + it} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c - it}{c^2 + t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c}{c^2 + t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{c}{c^2 + t^2} dt \stackrel{x=t/c}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{T/c} \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_{T/c}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \right) \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{T}. \end{aligned}$$

□

Prendiamo ora  $y = \frac{x}{n}$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\Lambda(n)}{n^s} x^s \frac{ds}{s} = \Lambda(n) \cdot \begin{cases} 1 + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left\{1, \frac{1}{T|\log(\frac{x}{n})|}\right\}\right) & \text{se } n < x \\ \frac{1}{2} + O\left(\frac{c}{T}\right) & \text{se } n = x \text{ (e } n = p^a) \\ O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left\{1, \frac{1}{T|\log(\frac{x}{n})|}\right\}\right) & \text{se } n > x. \end{cases}$$

Di conseguenza, per  $c > 1$  abbiamo

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) + \frac{\Lambda(x)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \frac{x^s}{s} ds + \\ + O \left( \sum_{n=1, n \neq x}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} x^c \min \left\{ 1, \frac{1}{T |\log(\frac{x}{n})|} \right\} + \frac{c\Lambda(x)}{T} \right).$$

Vogliamo dare una stima del resto, facendo un po' di casi. Prendiamo anche  $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ , per avere  $x^c = ex \ll x$ . Resterà così.

1. Partiamo dal più semplice:  $\frac{c\Lambda(x)}{T} \ll \frac{\log x}{T}$ .
2. Ora facciamo la somma per  $n \leq \frac{3}{4}x$  o  $n \geq \frac{5}{4}x$ , per cui  $|\log(\frac{x}{n})| \gg 1$ . Dobbiamo dunque stimare

$$\left( \sum_{n \leq \frac{3}{4}x} + \sum_{n \geq \frac{5}{4}x} \right) \frac{\Lambda(n)}{n^c} \cdot \frac{x^c}{T} \ll \frac{x}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \ll \frac{x \log x}{T},$$

dove l'ultimo passaggio segue scrivendo la somma come  $-\frac{\zeta'}{\zeta}(c)$  e usando che  $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma-1}$ .

3. Per  $\frac{3}{4}x < n < x$ , sia  $\frac{3}{4}x < x_1 < x$  la massima tra le potenze di un primo in quell'intervallo. Allora

$$\log \left( \frac{x}{x_1} \right) = -\log \left( \frac{x_1}{x} \right) = -\log \left( 1 - \frac{x - x_1}{x} \right) = \\ = \frac{x - x_1}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{x - x_1}{x} \right)^2 + \dots > \frac{x - x_1}{x},$$

dunque la stima del termine  $n = x_1$  diventa

$$\Rightarrow \Lambda(x_1) \left( \frac{x}{x_1} \right)^c \frac{x}{T(x - x_1)} \ll \frac{x \log x}{T(x - x_1)}.$$

E  $\frac{3}{4}x < n < x_1$ ? Abbiamo

$$\log \left( \frac{x}{n} \right) \geq \log \left( \frac{x_1}{n} \right) = -\log \left( \frac{n}{x_1} \right) = \\ = -\log \left( 1 - \frac{x_1 - n}{x_1} \right) \geq \frac{x_1 - n}{x_1} = \frac{\nu}{x_1}$$

e troviamo

$$\sum_{1 \leq \nu < x_1} \frac{\Lambda(x_1 - \nu) x^c x_1}{(x_1 - \nu)^c T \nu} \ll \frac{x(\log x)^2}{T}.$$

Il caso  $x < n < \frac{5}{4}x$  è analogo, prendendo  $x_2$  la minima potenza di primo.

Ora, definendo  $\langle x \rangle$  come la distanza di  $x$  dalla potenza di primo più vicina, mettendo assieme abbiamo trovato che

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} + \frac{x \log x}{T \langle x \rangle}\right);$$

dunque

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x, T),$$

dove  $R(x, T) \ll \frac{x \log^2 x}{T}$  per  $x \in \mathbb{N}$ . Consideriamo ora il cammino in figura.



Prendiamo  $T \neq \gamma$  per non passare dagli zeri non banali, allora usando ancora una volta il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \sum_{1 \leq n \leq \frac{U}{2}} \frac{x^{-2n}}{-2n} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-U+iT}^{c+iT} - \int_{-U-iT}^{c-iT} + \int_{-U-iT}^{-U+iT} \right) \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \right) + R(x, T). \end{aligned}$$

Per il corollario della formula di Riemann-Von Mangoldt abbiamo

$$N(T+1) - N(T-1) \leq C_0 \log T.$$

Suddividiamo l'intervallo  $[T-1, T+1]$  in  $2C_0 \log T$  intervalli, di modo che ce ne sia sempre uno senza zeri. Allora possiamo scegliere  $T$ , variandolo al più di una quantità minore o uguale a 1, t.c.  $|\gamma - T| \gg \frac{1}{\log T}$ . Usando allora il lemma 2.3.3 otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) &\ll \sum_{|\gamma - T| \leq 1} \frac{1}{|s - \rho|} + O(\log T) \ll \log T \sum_{|\gamma - T| \leq 1} 1 \ll \log^2 T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{-1 \pm iT}^{c \pm iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{x^c \log^2 T}{T} \ll \frac{x \log^2 T}{T}. \end{aligned}$$

**Osservazione 2.4.2.** Se  $\sigma \leq -1$  e  $|s+2n| \geq 1/2$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , come vedremo in seguito si ha

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &\ll \log(2|s|) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(2|U \pm iT|)x^{-U} \int_0^T \frac{dt}{U+t} &\ll \frac{\log(2|U \pm iT|)}{x^U} \log T \xrightarrow{U \rightarrow +\infty} 0; \end{aligned}$$

questa era la parte “verticale” dell’integrale di  $\psi_0$ , con stime fatte alla buona. Mandando  $U$  a infinito, rimangono da stimare i pezzi “orizzontali” da  $-1$  a  $-\infty$ . Viene la seguente stima trascurabile:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{-1} \log(2|\sigma + iT|)x^\sigma d\sigma \ll \frac{x^{-1} \log T}{T \log x}.$$

Anche questa stima è fatta alla buona. Si veda [D] per una dimostrazione più precisa.

Mettendo assieme quanto visto finora, otteniamo la seguente proposizione.

**Proposizione 2.4.3.**

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + R(x, T),$$

dove  $R(x, T) \ll \frac{x \log^2(xT)}{T}$  per  $x \in \mathbb{N}$  e  $T \geq 2$ .

Bisogna stare attenti agli zeri mancanti (perché abbiamo cambiato un po’  $T$ , quindi dobbiamo sistemare), che però sono in un intervallo limitato, perciò sempre per il corollario di Riemann-Von Mangoldt un  $O(\log T)$ . Allora il loro contributo è  $O$ -grande di:

$$\frac{x^\rho}{\rho} \log T \ll \frac{x^\beta \log T}{T} \ll \frac{x \log T}{T}.$$

Dimostriamo adesso l’asserzione usata all’inizio dell’osservazione 2.4.2, e per farlo passeremo dall’equazione funzionale per la  $\zeta$ . Si ha

$$\begin{aligned} \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \xi(s) = \\ = \xi(1-s) &= \frac{s(s-1)}{2} \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta(1-s) &= \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \zeta(s). \end{aligned}$$

Usando la proposizione 1.4.13 e la formula di duplicazione di Legendre, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}2^{1-s}\Gamma(s)}{\pi/\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi s}{2}\right)} = 2^{1-s}\pi^{-1/2}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s); \end{aligned}$$

si ottiene dunque l'equazione funzionale per  $\zeta$ :

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\Gamma(s)\zeta(s). \quad (12)$$

Prendendo la derivata logaritmica si ha

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) = \log 2 + \log \pi + \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}s\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s).$$

Per  $\sigma \geq 2$ , cioè  $1-\sigma \leq -1$ , si ha

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ll 1;$$

inoltre

$$\begin{aligned} \left|\tan\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right| &= \left|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}s} - e^{-i\frac{\pi}{2}s}}{i(e^{i\frac{\pi}{2}s} + e^{-i\frac{\pi}{2}s})}\right| = \left|\frac{e^{\pi is} - 1}{e^{\pi is} + 1}\right| \leq \\ &\leq \frac{e^{\pi t} + 1}{e^{\pi t} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{\pi t} - 1} \leq 3, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza vale per  $t \geq 1/2$ , preso fuori da un intorno dei punti  $-2n$ . Infine, per il corollario 1.4.21 abbiamo

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \ll \log|s| + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Allora, per  $\sigma \leq -1 \Rightarrow |s| \geq 1$ , possiamo riarrangiare quanto trovato per ottenere

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \log(2|1-s|) \leq \log(2|s|),$$

in quanto  $|1-s| \leq 1+|s| \leq 2|s|$ .

Torniamo a  $\psi_0$ .

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sum_{n < x} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_0(x) &= x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2(xT)}{T} + \log x \cdot \min\left\{1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right\}\right). \end{aligned}$$

Per de la Vallée-Poussin si ha che esiste  $c_0 > 0$  t.c.

$$\begin{aligned} \beta < 1 - \frac{c_0}{\log T} \text{ per ogni } \rho = \beta + i\gamma \text{ con } |\gamma| < T \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \max_{|\gamma| < T} x^\beta \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\rho|} \leq x \exp\left(-\frac{c_0 \log x}{\log T}\right) \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\rho|}. \end{aligned}$$

Adesso, sommando per parti e usando Riemann-Von Mangoldt si ha

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\rho|} &\ll \sum_{2 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} = \left( \sum_{2 \leq \gamma \leq T} 1 \right) \frac{1}{T} - \int_2^T \left( \sum_{2 \leq \gamma \leq u} 1 \right) \frac{du}{u^2} = \\ &= \frac{N(T)}{T} + \int_2^T \frac{N(u)}{u^2} du \ll \frac{T \log T}{T} + \int_2^T \frac{\log u}{u} du \ll \\ &\ll \log T + \log^2 T \ll \log^2 T. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} &\ll x \log^2 T \exp\left(-\frac{c_0 \log x}{\log T}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_0(x) - x &\ll x \left( \log^2 T \exp\left(-\frac{c_0 \log x}{\log T}\right) + \frac{\log^2(xT)}{T} \right). \end{aligned}$$

Prendendo  $T = \exp(\sqrt{\log x}) \Rightarrow \log x = \log^2 T$ , troviamo che esiste  $0 < c_1 < 1$  t.c.

$$\psi_0(x) - x \ll x \exp(-c_1 \sqrt{\log x}).$$

Questo è un risultato importante.

**Teorema 2.4.4.** (*Prime Number Theorem*) esiste  $0 < c_1 < 1$  t.c.

$$\psi(x) = x + O(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})). \quad (13)$$

**Osservazione 2.4.5.** Littlewood, 1922:  $\psi(x) = x + O(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x \log \log x}))$ ; Vinogradov-Korobov, 1958:  $\psi(x) = x + O_\varepsilon(x \exp(-c_1 (\log x)^{3/5-\varepsilon}))$ . Questi seguono dai miglioramenti a de la Vallée-Poussin con dimostrazione analoga a quella del PNT.

Allo stesso modo, l'Ipotesi di Riemann ci dà  $\psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x)$ . Infatti

$$\left| \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll \sqrt{x} \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\gamma|} \ll \sqrt{x} \log^2 T,$$

poi prendendo  $T = \sqrt{x}$  si procede come nella dimostrazione del PNT.

C'è anche la Quasi Ipotesi di Riemann (QRH): detto  $\theta = \sup_{\rho} \beta$ , allora si congettura che  $1/2 < \theta < 1$ .

**Esercizio 2.4.6.** QRH  $\Rightarrow \psi(x) = x + O(x^\theta \log^2 x)$ .

Congettura di Montgomery: il resto è  $x^{1/2}(\log \log x)^2$ . Non possiamo portarlo a  $\sqrt{x}$ , o per meglio dire sarebbe utopistico: si sa che  $\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$ .

**Osservazione 2.4.7.** Se  $\psi(x) = x + O_{\varepsilon}(x^{\theta+\varepsilon})$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , allora  $\beta \leq \theta$  per ogni  $\rho$ . Infatti, per  $\sigma > 1$  si ha per sommazione parziale

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} &= \frac{\psi(N)}{N^s} + s \int_2^N \frac{\psi(u)}{u^{s+1}} du \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= s \int_2^{+\infty} \frac{\psi(u)}{u^{s+1}} du = s \int_2^{+\infty} u^{-s} du + s \int_2^{+\infty} \frac{R(u)}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{s}{s-1} + s \int_2^{+\infty} \frac{R(u)}{u^{s+1}} du. \end{aligned}$$

Poiché  $R(u) = O_{\varepsilon}(u^{\theta+\varepsilon})$ , per  $\sigma > \theta + 2\varepsilon$  l'integrale è finito e quindi troveremmo una funzione olomorfa con polo solo in 1, cioè  $\zeta$  non avrebbe zeri in quella regione  $\Rightarrow \beta \leq \theta$ .

Sia  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  (NON è la funzione di Jacobi). Si ha

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \dots + \vartheta(x^{1/N}) \text{ con } x^{1/N} \geq 2 \Rightarrow N \ll \log x.$$

Poiché  $\vartheta(y) \ll y$  per il teorema di Chebyshev, allora

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}) + O(\sqrt[3]{x} \log x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}).$$

Abbiamo che RH  $\Rightarrow \vartheta(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x)$  e analogamente otteniamo che QRH  $\Rightarrow \vartheta(x) = x + O(x^\theta \log^2 x)$ . Dalla prima troviamo  $\pi(x) = \text{li } x + O(\sqrt{x} \log x)$  e analogamente partendo da QRH. Per farlo, si usa  $\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(u)}{u \log^2 u} du$ , che è vera per sommazione parziale.

## 2.5 La trasformata di Mellin e alcune conseguenze

**Definizione 2.5.1.** Sia  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $\int_0^{+\infty} |f(x)| x^\sigma \frac{dx}{x} < +\infty$  per  $\sigma \in \mathbb{R}$  fissato. Si dice *trasformata di Mellin* di  $f$  la seguente:

$$\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(x) x^s \frac{dx}{x} \text{ con } s = \sigma + it.$$



**Esempio 2.5.2.** Se  $f(x) = e^{-x}$  e  $\sigma > 0$ , allora  $\widehat{f}(s) = \Gamma(s)$ .

**Osservazione 2.5.3.** Sia  $x = e^{-2\pi u} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -2\pi du$ . Allora

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\sigma + it) &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-2\pi u}) e^{-2\pi u \sigma - 2\pi i t u} du = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\sigma(u) e^{-2\pi i t u} du = 2\pi \hat{\phi}_\sigma(t).\end{aligned}$$

**Proposizione 2.5.4.** Se  $f$  è di classe  $C^1$  e  $\int_0^{+\infty} |f(x)| x^\sigma \frac{dx}{x} < +\infty$ , si ha

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \widehat{f}(s) x^{-s} ds.$$

*Dimostrazione.* Dall'osservazione 2.5.3 abbiamo

$$\begin{aligned}f(e^{-2\pi u}) e^{-2\pi \sigma u} &= \varphi_\sigma(u) = \widehat{\varphi}_\sigma(-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\sigma + it) e^{2\pi i u t} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow f(e^{-2\pi u}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\sigma + it) e^{2\pi(\sigma + it)u} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \widehat{f}(s) e^{2\pi s u} ds.\end{aligned}$$

Basta porre  $x = e^{-2\pi u}$ . □

**Osservazione 2.5.5.** Se  $f$  è  $C^1$  a tratti con limite destro e sinistro finiti nei punti di discontinuità, la proposizione 2.5.4 continua a valere purché si applichi a  $\tilde{f}$ , che coincide con  $f$  a parte nei punti di discontinuità dove è uguale alla media dei due limiti, e interpretando l'integrale come limite. In tutti i casi si prende  $\sigma > 0$ .

**Osservazione 2.5.6.** Data  $g(s)$  olomorfa in  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$  che sia anche continua in  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$  e t.c.  $g(\sigma + it) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$  per ogni  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ , si può dimostrare che  $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} g(s) x^{-s} ds$  non dipende da  $\sigma$  e si ha  $g(s) = \widehat{f}(s)$ .

**Esempio 2.5.7.** Vediamo la trasformata di Mellin di alcune funzioni, poi applichiamo la formula di inversione scrivendo però  $y = 1/x$ . Nel secondo e terzo esempio, l'integrale della trasformata si fa iterando per parti.

1.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1/2 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 1 \\ 1/2 & \text{se } y = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < y < 1. \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^k}{k!} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)\dots(s+k)},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^k & \text{se } y \geq 1 \\ 0 & \text{se } 0 < y \leq 1. \end{cases}$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-\log x)^k}{k!} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{s^{k+1}}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{y^s}{s^{k+1}} ds = \begin{cases} \frac{(\log y)^k}{k!} & \text{se } y \geq 1 \\ 0 & \text{se } 0 < y \leq 1. \end{cases}$$

Nell'ultimo caso, prendendo  $k = 1$  e  $y = x/n$ , per  $\sigma > 1$  si ha

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log \left( \frac{x}{n} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \frac{x^s}{s^2} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s^2} ds.$$

**Osservazione 2.5.8.** Sommando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log \left( \frac{x}{n} \right) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \cdot 0 + \int_2^x \sum_{n \leq u} \Lambda(u) \frac{du}{u} = \\ &= \int_2^x \frac{\psi(u)}{u} du =: \psi_1(u). \end{aligned}$$

**Osservazione 2.5.9.** Posto  $\psi_l(x) = \int_2^x \frac{\psi_{l-1}(u)}{u} du$  per  $l \geq 2$ , si ha

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left( \log \left( \frac{x}{n} \right) \right)^k.$$

**Proposizione 2.5.10.** Vale la seguente formula esplicita:

$$\psi_1(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho^2} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) \log x - \left( \frac{\zeta'}{\zeta} \right)'(0) - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-2n}}{n^2}.$$

*Dimostrazione.* Basta combinare l'osservazione 2.5.8 e la formula vista subito prima per poi applicare il teorema dei residui.  $\square$

**Corollario 2.5.11.**  $\psi_1(x) = x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$ .

*Dimostrazione.* Basta applicare de la Vallée-Poussin come si è fatto per  $\psi_0$ .  $\square$

Se valesse RH si otterrebbe  $x + O(\sqrt{x})$ , invece con QRH  $x + O(x^{\theta})$ .

Mostriamo adesso che  $\psi_1(x) = x + o(x)$ . Dalla formula esplicita si ha

$$\left| \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho^2} \right| \leq \sum_{\rho} \frac{x^{\beta}}{|\rho|^2} \Rightarrow \frac{\psi_1(x) - x}{x} \ll \sum_{\rho} \frac{x^{\beta-1}}{|\rho|^2}.$$

Poiché  $\beta < 1$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{\rho} \frac{x^{\beta-1}}{|\rho|^2} = \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\beta-1} = 0.$$

**Osservazione 2.5.12.** Per  $x \geq 2$  e  $h \leq x$  abbiamo

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} \frac{\psi(u)}{u} du &\geq \frac{h}{x+h} \psi(x), \quad \int_{x-h}^x \frac{\psi(u)}{u} du \leq \frac{h}{x-h} \psi(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-h) \frac{\psi_1(x) - \psi_1(x-h)}{h} &\leq \psi(x) \leq (x+h) \frac{\psi_1(x+h) - \psi_1(x)}{h}. \end{aligned}$$

**Proposizione 2.5.13.** Si ha  $\psi(x) = x + o(x)$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}\psi_1(y) \sim y &\Rightarrow (x-h) \frac{\psi_1(x) - \psi_1(x-h)}{h} \sim (x-h) \frac{x-x+h}{h} \sim x-h, \\ (x+h) \frac{\psi_1(x+h) - \psi_1(x)}{h} &\sim x+h.\end{aligned}$$

Basta prendere  $h = o(x)$  (con  $h = 1$  costante si va sul sicuro) e dall'osservazione 2.5.12 si ha

$$x \sim f(x) \leq \psi(x) \leq g(x) \sim x \Rightarrow \psi(x) \sim x.$$

□

Non dimostreremo il seguente risultato, che si trova nel capitolo 3 di [T].

**Teorema 2.5.14.** (Landau) *Se si hanno  $\phi(t), \theta(t)$  t.c.  $\phi$  è monotona non decrescente e tende a  $+\infty$ ,  $\theta$  è monotona non crescente e  $0 < \theta(t) \leq 1$ , inoltre  $\frac{\phi(t)}{\theta(t)} = o(e^{\phi(t)})$  e per  $1 - \theta(t) \leq \sigma \leq 2$  si ha  $\zeta(s) \ll e^{\phi(t)}$ , allora esiste  $c_0$  t.c.*

$$\beta < 1 - \frac{\theta(2t+1)}{c_0 \phi(2t+1)}.$$

In particolare, prendendo  $\phi(t) = \log t$  e  $\theta(t) = 1/2$ , si ottiene  $\beta < 1 - \frac{1}{2c_0 \log(2t+1)}$ .

Littlewood:  $\theta(t) = \frac{(\log \log t)^2}{\log t}$ ,  $\phi(t) = A \log \log t \Rightarrow \beta < 1 - \frac{C \log \log t}{\log t}$ .

Vinogradov:  $\theta(t) = \frac{A}{(\log t)^{2/3-2\epsilon}}$ ,  $\phi(t) = (\log t)^\epsilon$ ,  $\zeta(s) \ll \exp((\log t)^\epsilon) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \beta < 1 - \frac{C}{(\log t)^{2/3-\epsilon}}.$

Adesso altre cose che non vedremo nel dettaglio.

1.  $\sum_{N < n \leq 2N} e^{2\pi i \alpha n} \ll \frac{1}{\|\alpha\|}$  con  $0 < \alpha < 1$  e  $\|\alpha\| = \min \{|\alpha - n|, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ;
2.  $\sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n} \ll \left( \frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{Nq} + N^{3/4} \right) \log^4 N$  dove  $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$ .

Con questo risultato si riesce a dimostrare il teorema di Vinogradov (1930):  $2N+1 = p_1 + p_2 + p_3$  (è la versione per i dispari della congettura di Goldbach);

3.  $\sum_{N < n \leq 2N} n^{-it}$  (Vinogradov, 1958). Questo porta a delle stime per  $\zeta(\sigma + it)$  quando  $1 - \sigma \ll \frac{1}{(\log t)^{2/3-\epsilon}}$ ;

4. c'è una stima per  $\sum_{N < n \leq 2N} \frac{\Lambda(n)}{n^{it}}$ ? Non davvero, però vale il seguente risultato dovuto a Turán: se  $\sum_{N < n \leq 2N} \frac{\Lambda(n)}{n^{it}} \ll \frac{N}{t^b}$  per  $N \geq t^a$ , allora  $\beta < 1 - \frac{b^2}{a^3}$  (correggere i coefficienti di  $a$  e  $b$  se e quando lo ridice).

### 3 Generalizzazioni della $\zeta$ di Riemann: le funzioni $L$ di Dirichlet

#### 3.1 I caratteri e il teorema di Dirichlet

**Definizione 3.1.1.** Sia  $q > 1$  un intero. I *caratteri* modulo  $q$  sono i caratteri del gruppo abeliano  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ , definiti come stiamo per vedere.

I caratteri modulo  $q$  sono un gruppo isomorfo a  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ , quindi sono in numero  $\phi(q)$ , e sono funzioni  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  (se si restringe il dominio a  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ , si può osservare, in base alla definizione esplicita, che i caratteri sono omomorfismi a valori nelle radici  $\phi(q)$ -esime dell'unità). C'è un carattere principale  $\chi_0$ , che assume solo i valori 0 e 1 in base a una regola che andiamo a vedere. I caratteri devono soddisfare:

- $(\chi_1 \cdot \chi_2)(n) = \chi_1(n) \cdot \chi_2(n)$ ;
- $\chi^{-1}(n) = \bar{\chi}(n)$ ;
- $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$  per ogni  $n, m \in \mathbb{Z}$  (sono completamente moltiplicativi);
- $\chi$  ha periodo  $q$ ;
- $|\chi(n)| = 1$  se  $(n, q) = 1$ , altrimenti è 0.

Vediamo ora la definizione esplicita, procedendo per casi.

Caso  $p^a$  con  $p > 2$  primo.  $(\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z})^*$  è ciclico, sia  $g$  un generatore. Prendiamo  $\omega$  t.c.  $\omega^{\phi(p^a)} = 1$  (radice  $\phi(p^a)$ -esima dell'unità). Dato  $n$  intero, sia  $\nu(n)$  t.c.  $g^{\nu(n)} = [n]_{\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}}$ . Il carattere corrispondente a  $\omega$  è  $\chi_{p^a}(n) = \omega^{\nu(n)} = e^{\frac{2\pi i m \nu(n)}{\phi(p^a)}}$ .

Il caso  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^*$  è banale.

Caso  $2^2$ :  $\phi(4) = 2$ ; il carattere principale è banale, per l'altro:

$$\chi_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4} \\ 0 & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Caso  $2^a$  con  $a \geq 3$ :  $(\mathbb{Z}/2^a\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{a-2}\mathbb{Z}$ . Sia  $g$  un generatore della parte  $\mathbb{Z}/2^{a-2}\mathbb{Z}$  e  $\nu'_0$  t.c.  $g^{\nu'_0} \equiv [n]$ . Allora  $n \equiv (-1)^{\nu_0} 5^{\nu'_0} \pmod{2^a}$  e poniamo  $\chi(n) = e^{\pi i m_0 \nu_0 + \frac{2\pi i m'_0 \nu'_0}{2^{a-2}}}$ .

Caso generale  $q = 2^a \cdot p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ :

$$\chi_q(n) = e^{\pi i m_0 \nu_0 + \frac{2\pi i m'_0 \nu'_0}{2^{a-2}} + \frac{2\pi i m_1 \nu_1}{\phi(p_1^{a_1})} + \cdots + \frac{2\pi i m_r \nu_r}{\phi(p_r^{a_r})}}.$$

Alla scelta degli  $m_j$  corrisponde il carattere, mentre la dipendenza da  $n$  è data dai  $\nu_j$ .

Per esercizio, il lettore può dimostrare le seguenti formule di ortogonalità:

$$-\sum_{n=1}^q \chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi \neq \chi_0; \\ \phi(q) & \text{se } \chi = \chi_0 \end{cases};$$

$$- \sum_{\chi \bmod q} \chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \not\equiv 1 \pmod{q} \\ \phi(q) & \text{se } n \equiv 1 \pmod{q} \end{cases}.$$

Osserviamo che  $\bar{\chi}(a) = \chi^{-1}(a) = \chi(a^{-1})$ . Dalla seguente formula di ortogonalità segue il seguente risultato: se  $(a, q) = 1$ , allora

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a) \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv a \pmod{q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

questo permette in un qualche senso di isolare i numeri congrui ad  $a$  modulo  $q$ , per poter così dimostrare il teorema di Dirichlet.

Andiamo adesso a definire una classe di funzioni molto importanti, non solo perché ci serviranno nella dimostrazione del suddetto teorema, ma anche perché sono una specie di generalizzazione della  $\zeta$  di Riemann (se vogliamo, la  $\zeta$  corrisponde alla funzione definita a partire dai “caratteri modulo 1”, anche se ovviamente quest’affermazione a poco o nessun senso).

**Definizione 3.1.2.** Sia  $\chi$  un carattere non principale modulo  $q$ . Si dice funzione  $L$  relativa al carattere  $\chi$  la somma della seguente serie, definita per  $\sigma > 1$ :

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

**Proposizione 3.1.3.** Se  $\chi$  non è principale, la serie appena definita converge uniformemente per  $\sigma \geq \varepsilon > 0$ .

*Dimostrazione.* Usando la solita sommazione per parti,

$$\sum_{n \leq N} \frac{\chi(n)}{n^s} = \left( \sum_{n \leq N} \chi(n) \right) N^{-s} + s \int_1^N \left( \sum_{n \leq u} \chi(u) \right) \frac{du}{u^{s+1}}.$$

Dalla prima formula di ortogonalità segue che  $\left| \sum_{n \leq N} \chi(n) \right| \leq q$ , dunque per  $\sigma > 1$  si ha

$$L(s, \chi) = s \int_1^{+\infty} \left( \sum_{n \leq u} \chi(u) \right) \frac{du}{u^{s+1}},$$

e questo integrale converge uniformemente in  $\sigma \geq \varepsilon > 0$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.4.** Se prendiamo  $\chi = \chi_0$  e consideriamo la serie associata, abbiamo  $\sum_{n \leq N} \chi_0(n) \leq \left( \left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor + 1 \right) \phi(q)$ , dunque non si ottiene convergenza uniforme per  $\sigma \geq \varepsilon > 0$ .

**Osservazione 3.1.5.** Per l'identità di Eulero si ha, per  $\sigma > 1$  e per ogni carattere modulo  $q$ :

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

In particolare,

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0) &= \prod_p \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s), \end{aligned}$$

da cui si ottiene che  $L(s, \chi_0)$  è meromorfa con un polo semplice in  $s = 1$  con residuo  $\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\phi(q)}{q}$ . Ha altri zeri oltre quelli di  $\zeta$ , che si ottengono quando  $p^{-s} = 1$ , cioè  $\sigma = 0$  e  $t = \frac{2k\pi}{\log p}$ .

**Osservazione 3.1.6.** Per  $\sigma > 1$  abbiamo

$$\begin{aligned} \log(L(s, \chi)) &= - \sum_p \log \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^n)}{np^{ns}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{L'}{L}(s, \chi) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}. \end{aligned}$$

In particolare,

$$\frac{L'}{L}(s, \chi_0) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n^s} = - \sum_{\substack{n=1, \\ (n,q)=1}}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} + \sum_{\substack{p|q, \\ a \geq 1}} \frac{\log p}{p^{as}}.$$

Scriviamo adesso

$$\begin{aligned} \log(L(s, \chi)) &= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O\left(\sum_p \sum_{n \geq 2} \frac{1}{p^{\sigma n}}\right) = \\ &= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O\left(\sum_p \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma - 1)}\right)^{\sigma > 1/2} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{\chi \bmod q} \log(L(s, \chi)) = \sum_{\chi \bmod q} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(\phi(q)). \end{aligned}$$

Prendendo  $s$  reale, e ricordando che i caratteri complessi sono accoppiati ciascuno con il proprio coniugato, si ha

$$\log \left( \prod_{\chi \bmod q} |L(s, \chi)| \right) = \sum_p \left( \frac{1}{p^s} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{\chi(p)}{p^s} \right) + O(\phi(q)).$$

Ripetendo i passaggi appena visti, nell'ipotesi  $(a, q) = 1$  usando la formula di ortogonalità si dimostra anche che

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a) \log(L(s, \chi)) \stackrel{(\star)}{=} \sum_{p \equiv a \pmod{q}} \frac{1}{p^s} + O(1).$$

Ricordiamo  $L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ ; perciò si ha  $\log(L(s, \chi_0)) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} +\infty$  (prendendo  $s \in \mathbb{R}$ ), e per la precisione c'è un polo semplice in 1. Se per  $\chi \neq \chi_0$  si avesse  $L(1, \chi) \neq 0$ , allora otterremmo  $\log(L(s, \chi)) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} O(1)$ ; combinandolo con quello che sappiamo sul carattere principale, si avrebbe che il membro sinistro (e dunque anche il destro) di  $(\star)$  tenderebbe a  $+\infty$  per  $s \rightarrow 1^+$ . Avremmo dunque il seguente risultato.

**Teorema 3.1.7.** *(teorema di Dirichlet sui primi nelle progressioni aritmetiche)*  
Siano  $a, q$  interi con  $(a, q) = 1$ . Esistono infiniti primi  $p \equiv a \pmod{q}$ .

*Dimostrazione.* Per quanto appena detto, dobbiamo verificare che le serie associate ai caratteri non principali non si annullano in 1. Procediamo per assurdo.

Caso  $\chi$  complesso. Se  $L(1, \chi) = 0$ , anche  $L(1, \bar{\chi}) = 0$ . Prendendo  $a = 1$  in  $(\star)$ , per  $s \in \mathbb{R}, s > 1$  e sfruttando l'espressione vista nella prima riga dell'osservazione 3.1.6, avremmo

$$\sum_{\chi \bmod q} \log(L(s, \chi)) = \phi(q) \sum_{p^n \equiv 1 \pmod{q}} \frac{1}{np^{ns}} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \prod_{\chi \bmod q} |L(s, \chi)| \geq 1,$$

assurdo perché in 1 si avrebbero un polo semplice e due zeri.

Se  $\chi \neq \chi_0$  è reale e per assurdo  $L(s, \chi) = 0$ , sia

$$F(s) = \frac{L(s, \chi)L(s, \chi_0)}{L(2s, \chi_0)}.$$

$F$  sarebbe regolare per  $\sigma \geq 1/2$ , in quanto il polo semplice di  $L(s, \chi_0)$  in 1 sarebbe compensato dall'eventuale 0. Inoltre  $\lim_{s \rightarrow 1/2^+} F(s) = 0$ . Si ha

$$F(s) = \prod_p \frac{\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}} = \prod_{p \nmid q} \frac{\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}}.$$

Per i caratteri t.c.  $\chi(p) = -1$  il fattore si semplifica e diventa 1. Resta

$$\prod_{\chi(p)=1} \frac{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}} = \prod_{\chi(p)=1} \frac{p^s + 1}{p^s - 1} \stackrel{\sigma \geq 1}{\geq} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s},$$



dove  $a_1 = 1$  e  $a_n \geq 0$ . La serie di Taylor di  $F$  centrata in  $s = 2$  ha raggio almeno  $3/2$ . È  $F(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b_m}{m!} (s-2)^m$  dove  $b_m = (-1)^m \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n (\log n)^m}{n^2}$ , dunque

$$F(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n (\log n)^m}{n^2} (2-s)^m.$$

Per  $s$  reale minore di 2 è tutto positivo, dunque  $F(s) \geq a_1 = 1$  per  $\sigma \geq 1/2$ , assurdo.  $\square$

Sappiamo di più:

$$\sum_{\substack{p \equiv a \pmod{q}, \\ p \leq x}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\phi(q)} \log \log x + O_q(1).$$

Per mostrarlo, bisogna dire che  $\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$  converge per  $\chi \neq \chi_0$ . Mertens dimostrò

questa cosa passando per la convergenza di  $\sum_n \frac{\chi(n) \log n}{n}$  e usando che  $\Lambda \star 1 = L$ ,

dove  $L$  è la funzione aritmetica associata al logaritmo. Maggiori dettagli nel capitolo 7 di [D].

## 3.2 Caratteri primitivi e somme di Gauss

**Esempio 3.2.1.** Prendiamo  $q = 6$ , per cui  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^* = \{1, 5\}$ . C'è un solo carattere non principale, e sugli interi  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  assume i valori  $1, 0, 0, 0, -1, 0$ . Consideriamo adesso  $q_1 = 3$ .  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* = \{1, 2\}$ . Valutandolo sugli stessi interi, assume i valori  $1, -1, 0, 1, -1, 0$ . In qualche senso, il carattere modulo 6 si può ottenere annullando alcuni dei valori del carattere modulo 3.

**Definizione 3.2.2.**  $\chi$  modulo  $q$  si dice *non primitivo* se esiste  $q_1 \mid q$  e  $\chi_1$  modulo  $q_1$  t.c.

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi_1(n) & \text{se } (n, q) = 1 \\ 0 & \text{se } (n, q) > 1. \end{cases}$$

Si dice *primitivo* altrimenti.

Nel caso di un carattere non primitivo, se  $q_1$  è il minimo divisore di  $q$  t.c. esiste un carattere  $\chi_1$  modulo  $q_1$  che soddisfa la condizione della definizione,  $q_1$  si dice conduttore di  $\chi$  modulo  $q$  e diciamo che  $\chi_1$  induce  $\chi$ . Per trovare  $\chi_1$  partendo da  $\chi$ , se  $(n, q) > 1$  ma  $(n, q_1) = 1$ , prendiamo  $r$  t.c.  $(n + rq_1, q) = 1$

e poniamo  $\chi_1(n) = \chi(n + rq_1)$ . Si veda anche l'esempio. Maggiori dettagli aritmetici sul perché funziona nel capitolo 5 di [D].

**Osservazione 3.2.3.** Se  $\chi$  modulo  $q$  è indotto da  $\chi_1$  modulo  $q_1$  con  $q_1 \mid q$ , per  $\sigma > 1$  si ha

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} = \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) = L(s, \chi_1) \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right). \end{aligned}$$

L'ultimo prodotto ci dà, per ogni primo  $p \mid q$ , infiniti zeri disposti periodicamente lungo  $\sigma = 0$ , che non danno problemi. Possiamo notare che il legame tra un carattere non primitivo e il carattere primitivo che lo induce è analogo al legame tra la funzione  $L$  associata a un carattere principale e la  $\zeta$ .

**Definizione 3.2.4.** Sia  $\chi$  modulo  $q$  un carattere. Si definisce *somma di Gauss* relativa a  $\chi$  la quantità

$$\tau(\chi) = \sum_{n=1}^q \chi(n) e^{\frac{2\pi i n}{q}}.$$

**Osservazione 3.2.5.** Scriviamo  $\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{m=1}^q \chi(n)\bar{\chi}(m) e^{\frac{2\pi i m}{q}}$ . Supponendo  $(n, q) = 1$ , sia  $mn^{-1} = h$  in  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , ovvero  $m \equiv nh \pmod{q}$  da cui abbiamo  $\chi(n)\bar{\chi}(m) = \chi(n)\bar{\chi}(nh) = \chi(n)\bar{\chi}(n)\bar{\chi}(h) = \bar{\chi}(h)$ . Allora troviamo

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) \stackrel{(\star\star)}{=} \sum_{h=1}^q \bar{\chi}(h) e^{\frac{2\pi i n h}{q}}.$$

**Proposizione 3.2.6.** Se  $\chi$  modulo  $q$  è primitivo, si ha che vale  $(\star\star)$  anche se  $(n, q) > 1$ ; inoltre,  $\tau(\bar{\chi}) \neq 0$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo la seconda asserzione, dando per buona la prima.

Prendiamo il coniugio in  $(\star\star)$  e facciamo il prodotto con  $(\star\star)$  stessa per ottenere

$$|\chi(n)|^2 |\tau(\bar{\chi})|^2 = \sum_{h_1, h_2=1}^q \bar{\chi}(h_1) \chi(h_2) e^{\frac{2\pi i n (h_1 - h_2)}{q}}.$$

Sommando su  $n$  troviamo

$$\begin{aligned} |\tau(\bar{\chi})|^2 \phi(q) &= \sum_{n=1}^q |\chi(n)|^2 |\tau(\bar{\chi})|^2 = \sum_{n=1}^q \sum_{h_1, h_2=1}^q \bar{\chi}(h_1) \chi(h_2) e^{\frac{2\pi i n(h_1 - h_2)}{q}} = \\ &= \sum_{h_1, h_2=1}^q \sum_{n=1}^q \bar{\chi}(h_1) \chi(h_2) e^{\frac{2\pi i n(h_1 - h_2)}{q}} = \sum_{h=1}^q \sum_{n=1}^q |\chi(h)|^2 = q\phi(q), \end{aligned}$$

perciò  $|\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{q}$ . □

Si ottiene dunque  $\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) e^{\frac{2\pi i m n}{q}}$ .

**Osservazione 3.2.7.** Si può dimostrare che se  $\chi_1$  modulo  $q_1$  induce  $\chi$  modulo  $q$ , allora  $\tau(\chi) = \tau(\chi_1) \mu\left(\frac{q}{q_1}\right) \chi_1\left(\frac{q}{q_1}\right)$ .

Andiamo adesso a dimostrare una generalizzazione dell'equazione funzionale per la  $\vartheta$  di Jacobi.

**Proposizione 3.2.8.** Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  fissato, allora per  $\Re z > 0$  si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z - 2\pi i \alpha n} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi(n+\alpha)^2}{z}}. \quad (14)$$

*Dimostrazione.* Come per la funzione di Jacobi, basta mostrarlo nel caso reale. Sia  $f(\xi) = e^{-\pi \xi^2 - 2\pi i \alpha \xi / \sqrt{x}}$ . Allora

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 - 2\pi i \alpha t / \sqrt{x} - 2\pi i \xi t} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{f}'(\xi) &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} t e^{-\pi t^2 - 2\pi i \alpha t / \sqrt{x} - 2\pi i \xi t} dt = (\text{per parti}) \\ &= -2\pi \left( \xi + \frac{\alpha}{\sqrt{x}} \right) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 - 2\pi i \alpha t / \sqrt{x} - 2\pi i \xi t} dt = -2\pi \left( \xi + \frac{\alpha}{\sqrt{x}} \right) \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione differenziale, dev'essere  $\hat{f}(\xi) = C e^{-\pi(\xi + \frac{\alpha}{\sqrt{x}})^2}$ . Prendendo  $\xi = -\frac{\alpha}{\sqrt{x}}$  nel calcolo di  $\hat{f}$  come trasformata, otteniamo  $C = 1$ . Poniamo  $f_x(\xi) = f(\sqrt{x}\xi) = e^{-\pi \xi^2 x - 2\pi i \alpha \xi}$ . Cambiando di variabile  $y = \sqrt{x}t$ , si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}_x(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{x}t) e^{-2\pi i t \xi} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \frac{y}{\sqrt{x}} \xi} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow \hat{f}_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi(\xi + \alpha)^2 / x}. \end{aligned}$$

Per la formula di Poisson si ha la tesi. □

Derivando la formula (14) in  $\alpha$  (cambiando i segni convenientemente a sinistra, che tanto si può fare), otteniamo

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{-\pi n^2 z + 2\pi i \alpha n} &= -\frac{2\pi}{z\sqrt{z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n + \alpha) e^{-\pi(n+\alpha)^2/z}, \text{ da cui} \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{-\pi n^2 z + 2\pi i \alpha n} &= \frac{i}{z\sqrt{z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n + \alpha) e^{-\pi(n+\alpha)^2/z}. \end{aligned} \quad (15)$$

### 3.3 Equazione funzionale e stime sul numero di zeri per le funzioni $L$

**Proposizione 3.3.1.** *Sia  $\chi$  primitivo modulo  $q$  e sia*

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi),$$

con  $a = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{se } \chi(-1) = -1 \end{cases}$ . Allora

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i^a \sqrt{q}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi). \quad (16)$$

In particolare,  $\xi(s, \chi)$  è intera (di ordine 1).

*Dimostrazione.* Facciamo il caso  $\chi(-1) = 1$  ( $\Rightarrow \chi(-1) = \chi(1), \chi(-n) = \chi(n)$ ). Con un cambio di variabile  $u = \pi n^2 x/q$ , per  $\sigma > 1$  si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(s/2) &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{s/2} \frac{du}{u} = \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 x/q} x^{s/2} \left(\frac{q}{\pi}\right)^{-s/2} n^s \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \chi(n) e^{-\pi n^2 x/q} x^{s/2} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \vartheta(x, \chi) x^{s/2} \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

dove  $\vartheta(x, \chi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\pi n^2 x/q}$ . Abbiamo anche

$$\begin{aligned} \chi(n) &= \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) e^{2\pi i m n/q} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\pi n^2 x/q} &= \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x/q + 2\pi i m n/q} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vartheta(x, \chi) \tau(\bar{\chi}) &= \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x/q + 2\pi i m n/q}. \end{aligned}$$

Usando la (14) con  $z = x/q$  e  $\alpha = m/q$  troviamo

$$\begin{aligned}
\vartheta(x, \chi) \tau(\bar{\chi}) &= \sqrt{\frac{q}{x}} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n + \frac{m}{q})^2 q/x} = \\
&= \sqrt{\frac{q}{x}} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi(nq+m)^2}{qx}} = \sqrt{\frac{q}{x}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{\chi}(l) e^{-\frac{\pi l^2}{xq}} = \sqrt{\frac{q}{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \xi(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \vartheta(x, \chi) x^{s/2} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \vartheta\left(\frac{1}{x}, \chi\right) x^{-s/2} \frac{dx}{x} = \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \vartheta(x, \chi) x^{s/2} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\tau(\bar{\chi})} \int_1^{+\infty} \vartheta(x, \bar{\chi}) x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \vartheta(x, \bar{\chi}) x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)} \int_1^{+\infty} \vartheta(x, \chi) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} = \\
&= \frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che, in questo caso, si può mostrare che  $\tau(\bar{\chi}) = \overline{\tau(\chi)}$  (e ricordiamo  $|\tau(\chi)|^2 = q$ ). Si ottiene anche che  $L(s, \chi)$  ha zeri banali nei pari negativi e in 0 (nell'altro caso sono i dispari negativi).

Caso  $\chi(-1) = 1$ : diamo una breve traccia, i passaggi sono analoghi al caso precedente.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi) &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} n \chi(n) e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s+1}{2}} \frac{dx}{x} = \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \vartheta_1(x, \chi) x^{\frac{s+1}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \vartheta_1\left(\frac{1}{x}, \chi\right) x^{-\frac{s+1}{2}} \frac{dx}{x},
\end{aligned}$$

dove  $\vartheta_1(x, \chi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi(n) e^{-\pi n^2 x}$ . Usando (15) si trova  $\vartheta_1(x, \chi) \tau(\bar{\chi}) = \frac{i\sqrt{q}}{x^{3/2}} \vartheta_1\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right)$ ,

da cui si ottiene  $\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i\sqrt{q}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi)$ , usando che in questo caso vale  $\chi(-n) = -\chi(n)$  e  $\tau(\bar{\chi}) = -\overline{\tau(\chi)}$ .  $\square$

Vogliamo studiare l'ordine di  $\xi(s, \chi)$ .

Per  $\sigma \geq 1/2$ ,  $\Gamma(s+1/2) \ll e^{c_0|s| \log |s|} \ll_\varepsilon e^{|s|^{1+\varepsilon}}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Per  $\sigma > 1$ ,  $|L(s, \chi)| \ll \zeta(\sigma)$ . Possiamo dire di più: per  $\sigma \geq \varepsilon$ , per sommazione parziale

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} = \left( \sum_{n \leq x} \chi(n) \right) x^{-s} + s \int_1^x \left( \sum_{n \leq u} \chi(n) \right) u^{-(s+1)} du;$$

poiché le sommatorie sono  $O(q)$ , troviamo

$$L(s, \chi) = s \int_1^{+\infty} \left( \sum_{n \leq u} \chi(n) \right) u^{-(s+1)} du.$$

Per  $\sigma \geq 1/2$  questo ci dà  $L(s, \chi) \ll 2|s|q$ . Per le stime nell'altro semipiano basta, al solito, sfruttare l'equazione funzionale.

Esistono infiniti zeri  $\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi$  della funzione  $L(s, \chi)$  con  $0 \leq \beta_\chi \leq 1$ . Si ha  $\sum_{\rho_\chi} \frac{1}{|\rho_\chi|^{1+\varepsilon}} < +\infty$  per ogni  $\varepsilon > 0$  e  $\sum_{\rho_\chi} \frac{1}{|\rho_\chi|} = +\infty$ . Non ci sono le stesse

simmetrie della  $\zeta$ :  $L(\bar{s}, \chi) = \overline{L(s, \bar{\chi})} \neq \overline{L(s, \chi)}$ . Da questo otteniamo che, se  $\rho_\chi$  è uno zero di  $L(s, \chi)$ , allora  $\bar{\rho}_\chi = \rho'_\chi$  è uno zero di  $L(s, \bar{\chi})$ ; dall'equazione funzionale troviamo anche che  $1 - \rho'_\chi = \rho''_\chi$  è un altro zero di  $L(s, \chi)$ . Un altro problema, che vedremo in dettaglio tra poco, è che  $\gamma_\chi$  può essere molto piccolo: questo renderà le stime che andremo a fare, analoghe a quelle per la  $\zeta$ , dipendenti anche da  $q$ .

Non mostriamo invece la seguente proposizione, che dovrebbe ormai essere immediata.

**Proposizione 3.3.2.** *Si ha il seguente prodotto di Weierstrass:*

$$\xi(s, \chi) = e^{a+As} \prod_{\rho_\chi} \left(1 - \frac{s}{\rho_\chi}\right) e^{\frac{s}{\rho_\chi}}.$$

Si ha  $e^a = \xi(0, \chi)$ , che è collegato a  $L(0, \chi)$ , che è collegato a  $L(1, \chi) \ll \log q$ . Vedremo che  $\Re A = -\frac{1}{2} \sum_{\rho_\chi} \left(\frac{1}{\rho_\chi} + \frac{1}{\bar{\rho}_\chi}\right) = -\sum_{\rho_\chi} \Re \left(\frac{1}{\rho_\chi}\right)$ , che converge. Le stime per  $A$  non sono buonissime ( $\ll \sqrt{q}$ ).

**Corollario 3.3.3.** *Sia  $K$  un compatto contenuto in  $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{\rho_\chi}$ . Per  $s \in K$  si ha*

$$\begin{aligned} \frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) &= A + \sum_{\rho_\chi} \left(\frac{1}{s - \rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right), \text{ da cui} \\ \frac{L'}{L}(s, \chi) &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{q}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a}{2}\right) + A + \sum_{\rho_\chi} \left(\frac{1}{s - \rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right). \end{aligned}$$

**Proposizione 3.3.4.** *(formula di Riemann-Von Mangoldt) Sia  $\chi$  primitivo modulo  $q$  e  $T \geq 2$ . Posto  $N(T, \chi) = \frac{1}{2} \#\{\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi \mid 0 \leq \beta_\chi \leq 1, |\gamma_\chi| < T\}$ , si ha*

$$N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{qT}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log(qT)).$$

*Dimostrazione.* La strategia generale della dimostrazione è la stessa che per la  $\zeta$ . Dobbiamo fare alcuni accorgimenti: percorreremo in senso antiorario il rettangolo  $R$  di vertici  $\{5/2 - iT, 5/2 + iT, -3/2 + iT, -3/2 - iT\}$ ; questo perché non c'è simmetria tra sotto e sopra (da cui il  $\pm iT$ ), inoltre si becca uno zero

banale (0 o 1), che comunque si tratta di un  $\pm 1$  nella formula e quindi possiamo ignorarlo. Dall'equazione funzionale,

$$\arg \xi(\sigma + it, \chi) = c + \arg \xi(1 - \sigma - it, \bar{\chi}) = \arg \overline{\xi(1 - \sigma + it, \chi)} + c.$$

Allora la metà sinistra e quella destra di  $R$  danno contributi che variano solo per una costante, perciò ci basterà stimare  $2 \cdot \frac{1}{2\pi} \Delta_L$  dove  $L$  è la metà destra di  $R$ . Riprendendo la definizione di  $\xi$ , ripetendo le stime viste per la  $\zeta$  ma facendo attenzione che questa volta il percorso è doppio (sia sopra che sotto), troviamo

$$\Delta_L \arg \left( \frac{\pi}{q} \right)^{-\frac{s+a}{2}} = T \log(q/\pi), \quad \Delta_L \arg \Gamma \left( \frac{s+a}{2} \right) = T \log \frac{T}{2} - T + O \left( \frac{1}{T} \right).$$

Rimane da stimare il termine dovuto a  $L(s, \chi)$  e vedere che ci dà il resto voluto. Poiché è reale sui reali, dobbiamo stimare  $\frac{1}{2\pi} \arg L(1/2 \pm iT, \chi)$ . Dal corollario 3.3.3 si ha

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{1}{2} \log \left( \frac{q}{\pi} \right) + A_\chi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s+a}{2} \right) + \sum_{\rho_\chi} \left( \frac{1}{s - \rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi} \right)$$

e  $\frac{\xi'}{\xi}(0, \chi) = A_\chi$ . Dall'espressione con  $L'/L$  valutata in  $s = 0$  e coniugando opportunamente si trova  $A_{\bar{\chi}} = \bar{A}_\chi$ . Allora dall'equazione funzionale si ha

$$\begin{aligned} A_\chi &= \frac{\xi'}{\xi}(0, \chi) = -\frac{\xi'}{\xi}(1, \bar{\chi}) = -A_{\bar{\chi}} - \sum_{\rho_{\bar{\chi}}} \left( \frac{1}{1 - \rho_{\bar{\chi}}} + \frac{1}{\rho_{\bar{\chi}}} \right) = \\ &= -A_{\bar{\chi}} - \sum_{\rho_\chi} \left( \frac{1}{1 - \bar{\rho}_\chi} + \frac{1}{\bar{\rho}_\chi} \right) = -A_{\bar{\chi}} - \sum_{\rho_\chi} \left( \frac{1}{\rho_\chi} + \frac{1}{\bar{\rho}_\chi} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Re A_\chi = - \sum_{\rho_\chi} \Re \left( \frac{1}{\rho_\chi} \right). \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} -\Re \frac{L'}{L}(s, \chi) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{q}{\pi} \right) - \Re A_\chi + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s+a}{2} \right) - \sum_{\rho_\chi} \left( \Re \left( \frac{1}{s - \rho_\chi} \right) + \Re \left( \frac{1}{\rho_\chi} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{q}{\pi} \right) + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s+a}{2} \right) - \sum_{\rho_\chi} \Re \left( \frac{1}{s - \rho_\chi} \right). \end{aligned}$$

Prendendo  $s = \sigma + it$  e stimando  $\Gamma'/\Gamma$ , abbiamo

$$-\Re \frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi) \leq C \cdot \log(q(|t| + 2)) - \sum_{\rho_\chi} \frac{\sigma - \beta_\chi}{(\sigma - \beta_\chi)^2 + (t - \gamma_\chi)^2};$$

ragionando come abbiamo fatto a suo tempo per la  $\zeta$  troviamo

$$\sum_{|\gamma_\chi - t| < 1} 1, \quad \sum_{\gamma_\chi} \frac{1}{1 + (t - \gamma_\chi)^2} \ll \log(q(|t| + 2)), \quad \text{da cui}$$

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{|\gamma_\chi - t| < 1} \frac{1}{s - \rho_\chi} + O\left(\log(q(|t| + 2))\right).$$

Di nuovo con ragionamenti analoghi a quelli visti per la  $\zeta$ , osserviamo che ci interessano solo i tratti da  $1/2$  a  $1$ , ma per quanto ottenuto finora si ha

$$O(1) + \arg \frac{L'}{L}(1/2 \pm iT, \chi) = \int_{1/2}^1 \Im \frac{L'}{L}(\sigma \pm iT, \chi) d\sigma \ll \log(q(|T| + 2)),$$

da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione 3.3.5.** Se  $\chi$  non è primitivo modulo  $q$ , sia  $\chi_1$  modulo  $q_1$  che induce  $\chi$ , allora  $L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$  in  $\mathbb{C}$ , da cui per  $\sigma \geq 1/2$

$$\begin{aligned} \frac{L'}{L}(s, \chi) &= \frac{L'}{L}(s, \chi_1) + \sum_{p|q} \frac{p^{-s} \log p \cdot \chi_1(p)}{1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{L'}{L}(s, \chi) - \frac{L'}{L}(s, \chi_1) \right| &\leq \sum_{p|q} \frac{\log p}{p^\sigma - 1} \ll \sum_{p|q} \log p \leq \log q. \end{aligned}$$

Ci sono anche gli zeri  $0 + it$  t.c.  $p^{-it} = \pm 1$ , cioè  $t = \frac{\pi(2k+1)}{\log p}$ ; quelli fino a  $T$  si stimano con  $T \log p$  e quindi abbiamo  $\sum_{p|q} T \log p \leq T \log q$ . Dunque nel caso  $\chi$  non primitivo si ha  $N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log T + O(T \log q)$ .

### 3.4 Regioni libere da zeri per le funzioni $L$

Vediamo prima il caso  $\chi$  complesso.

**Proposizione 3.4.1.** *Se  $\chi$  modulo  $q$  è complesso, allora esiste una costante  $c_0 > 0$  t.c.*

$$\beta_\chi < 1 - \frac{c_0}{\log(q(|\gamma_\chi| + 2))} =: 1 - \frac{c_0}{\mathcal{L}}.$$

*Dimostrazione.* Per  $\sigma > 1$  abbiamo

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^{\sigma+it}} &= \frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi), \\ - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) \chi_0(n)}{n^\sigma} &= \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0), \\ - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) \chi^2(n)}{n^{\sigma+2it}} &= \frac{L'}{L}(\sigma + 2it, \chi^2). \end{aligned}$$



Poiché  $\chi$  è complesso,  $\chi^2$  non è il carattere principale (che aggiungerebbe un polo), quindi possiamo fare come si è fatto per la  $\zeta$  quando abbiamo usato la disuguaglianza  $3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) \geq 0$ . Troviamo così

$$\frac{4}{\sigma - \beta_\chi} < \frac{3}{\sigma - 1} + O\left(\log(q(|t| + 2))\right)$$

e per concludere basta prendere  $\sigma = 1 + \delta/\mathcal{L}$  con  $\delta > 0$  opportuno.  $\square$

Vediamo ora il caso  $\chi$  reale, perciò  $\frac{L'}{L}(s, \chi^2) = \frac{L'}{L}(s, \chi_0)$ . Si ha

$$\left| \frac{L'}{L}(s, \chi_0) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right| \leq \log q,$$

quindi a meno di un termine trascurabile passiamo da  $-\Re \frac{L'}{L}(\sigma + 2i\gamma, \chi_0)$  a  $-\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2i\gamma) \leq \Re \frac{1}{\sigma - 1 + 2i\gamma_\chi} + c\mathcal{L}$  (e questo perché abbiamo che vale la stima  $-\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \Re \frac{1}{s-1} + O(\log(|t| + 2))$ ). Si ha dunque

$$\frac{4}{\sigma - \beta_\chi} < \frac{3}{\sigma - 1} + \Re \left( \frac{1}{\sigma - 1 + 2i\gamma_\chi} \right) + c\mathcal{L}.$$

Supponiamo che  $|\gamma_\chi| \geq \frac{\delta}{\log q}$ ; allora prendendo  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\mathcal{L}}$  otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{4\mathcal{L}}{\delta + (1 - \beta_\chi)\mathcal{L}} &< \frac{3\mathcal{L}}{\delta} + \frac{\delta\mathcal{L}}{5\delta^2} + c\mathcal{L} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \beta_\chi &> \frac{4 - 5c\delta}{16 + 5c\delta} \cdot \frac{\delta}{\mathcal{L}} = \frac{c'}{\mathcal{L}}, \end{aligned}$$

dunque anche in questo caso  $\beta_\chi < 1 - \frac{c_0}{\mathcal{L}}$ . Ne segue la seguente proposizione.

**Proposizione 3.4.2.** *Se  $\chi$  è reale modulo  $q$  e  $|\gamma_\chi| \geq \frac{1}{\log q}$ , esiste  $c_0 > 0$  t.c.*

$$\beta_\chi < 1 - \frac{c_0}{\mathcal{L}}.$$

Mostriamo adesso la seguente.

**Proposizione 3.4.3.** *Se  $\chi$  è reale modulo  $q$  e  $\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi$  con  $\gamma_\chi \leq \frac{1}{\log q}$  e  $\beta_\chi > 1 - \frac{c}{\mathcal{L}}$ , allora  $\rho_\chi$  è reale e semplice. Inoltre,  $\rho_\chi$  è unico.*

*Dimostrazione.*

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi) < c \log q - \sum_{\rho_\chi} \Re \left( \frac{1}{\sigma - \rho_\chi} \right).$$

Se fosse  $L(\beta_0 \pm i\gamma_0, \chi) = 0$ , avremmo

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi) < c \log q - \frac{2(\sigma - \beta_0)}{(\sigma - \beta_0)^2 + \gamma_0^2};$$

si ha anche

$$\begin{aligned} -\frac{L'}{L}(\sigma, \chi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^\sigma} \geq -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} = \\ &= \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) > -\frac{1}{\sigma-1} + c_1. \end{aligned}$$

Concatenando le due disuguaglianze otteniamo

$$-\frac{1}{\sigma-1} < c \log q - \frac{2(\sigma - \beta_0)}{(\sigma - \beta_0)^2 + \gamma_0^2}.$$

Prendendo  $\sigma = 1 + \frac{2\delta}{\log q}$  otteniamo  $|\gamma_0| < \frac{\delta}{\log q} = (\sigma - 1)/2 \leq (\sigma - \beta_0)/2$ , da cui

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sigma-1} &< c \log q - \frac{8}{5(\sigma - \beta_0)} \\ \frac{8}{5(\sigma - \beta_0)} &< c \log q + \frac{1}{\sigma-1} = \left(c + \frac{1}{2\delta}\right) \log q \\ \frac{8}{10\delta + 5(1 - \beta_0) \log q} &< \frac{1 + 2\delta c}{2\delta} \\ 10\delta + 5(1 - \beta_0) \log q &> \frac{16\delta}{1 + 2\delta c} \\ 1 - \beta_0 &> \frac{6 - 20\delta c}{5 + 10\delta c} \cdot \frac{\delta}{\log q}, \end{aligned}$$

da cui con  $\delta$  piccolo si ha l'assurdo.

Il caso con  $\gamma_0 = 0$  è pure più facile. □

Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione.

**Proposizione 3.4.4.** *Esiste  $c_0 > 0$  t.c. se  $\chi$  è primitivo modulo  $q$  e  $\beta_\chi + i\gamma_\chi$  è uno zero di  $L(s, \chi)$ , allora*

$$\beta_\chi < \begin{cases} 1 - \frac{c_0}{\log(q|\gamma_\chi|)} & \text{se } |\gamma_\chi| \geq 1 \\ 1 - \frac{c_0}{\log q} & \text{se } |\gamma_\chi| \leq 1 \end{cases};$$

se inoltre  $\chi$  è reale, esiste al più un solo zero  $\beta_0$  reale semplice t.c.  $L(\beta_0, \chi) = 0$  e  $\beta_0$  non soddisfa la disuguaglianza. Questi sono detti zeri di Siegel.

Adesso un risultato che non dimostreremo.

**Proposizione 3.4.5.** (Landau) *Siano  $\chi_1$  modulo  $q_1$  e  $\chi_2$  modulo  $q_2$  reali primitivi con  $\chi_1 \neq \chi_2$ , e siano  $\beta_1, \beta_2$  t.c.  $L(\beta_1, \chi_1) = 0, L(\beta_2, \chi_2) = 0$ . Allora esiste  $c_1 > 0$  t.c.*

$$\min\{\beta_1, \beta_2\} < 1 - \frac{c_1}{\log(q_1 q_2)}.$$

**Corollario 3.4.6.** Se  $q_1 = q_2 = q$ , allora  $\min\{\beta_1, \beta_2\} < 1 - \frac{c_1}{2 \log q} = 1 - \frac{c_2}{\log q}$ .

**Corollario 3.4.7.** Siano  $q_1 < q_2 < \dots$  e siano  $\chi_j$  modulo  $q_j$  reali primitivi e  $L(\beta_j, \chi_j) = 0$  con  $\beta_j > 1 - \frac{c_3}{\log q_j}$ , dove  $c_3 = c_1/3$ . Allora  $q_{j+1} > q_j^2$ .

*Dimostrazione.* Per assurdo  $q_{j+1} \leq q_j^2$ . Allora

$$\min\{\beta_j, \beta_{j+1}\} < 1 - \frac{c_1}{\log(q_j q_{j+1})} \leq 1 - \frac{c_1}{3 \log q_j} < 1 - \frac{c_3}{\log q_{j+1}}.$$

□

**Corollario 3.4.8.** (lemma di Page) Esiste  $c_4 > 0$  t.c. esiste un unico  $q \leq z$  ed un unico  $\chi$  reale primitivo modulo  $q$  con  $L(\beta_\chi, \chi) = 0$  e  $\beta_\chi > 1 - \frac{c_4}{\log z}$ .

*Dimostrazione.* Per assurdo siano  $(\beta_1, \chi_1, q_1)$  e  $(\beta_2, \chi_2, q_2)$  con  $q_1, q_2 \leq z$  t.c.  $\beta_j > 1 - \frac{c_4}{\log z}$ . Poiché  $q_1 q_2 \leq z^2$ , prendendo  $c_4 = c_1/2$  dalla proposizione 3.4.5 otteniamo l'assurdo  $\min\{\beta_1, \beta_2\} < 1 - \frac{c_1}{2 \log z}$ . □

Un'altra proposizione che non dimostreremo.

**Proposizione 3.4.9.** Sia  $\chi$  reale primitivo modulo  $q$ . Vale la disuguaglianza

$$L(1, \chi) > \frac{c_0}{\sqrt{q}}.$$

**Osservazione 3.4.10.**  $L(\beta_0, \chi) = 0 \Rightarrow L(1, \chi) = L(1, \chi) - L(\beta_0, \chi) = L'(\sigma_0, \chi)(1 - \beta_0)$  con  $\beta_0 \leq \sigma_0 \leq 1$ . Scegliendo un'opportuna costante  $c$ , se  $\beta_0$  è uno zero di Siegel allora  $\sigma_0 \geq \beta_0 \geq 1 - c/\log q$ , e in realtà possiamo prendere  $c = 1$  perché le costanti in gioco sono sempre più piccole di 1. Allora per il lemma che vedremo tra poco  $L'(\sigma_0, \chi)(1 - \beta_0) \ll (1 - \beta_0) \log^2 q$  e mettendo tutto assieme troviamo  $1 - \beta_0 \geq \frac{c_1}{\sqrt{q} \log^2 q}$ .

**Lemma 3.4.11.** Sia  $1 - (\log q)^{-1} \leq \sigma \leq 1$ . Si ha  $L'(\sigma, \chi) \ll \log^2 q$ , dove  $\chi$  modulo  $q$  è un carattere qualunque.

*Dimostrazione.* Per  $\sigma > 1$  e sommando per parti,

$$L'(\sigma, \chi) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n) \log n}{n^\sigma} = \sigma \int_2^{+\infty} \left( \sum_{n \leq u} \chi(n) \right) \frac{1 + \sigma \log u}{u^{\sigma+1}} du,$$

che converge uniformemente per  $\sigma \geq \varepsilon$ . In realtà, per stimare tronchiamo la somma a  $q$  e stimiamo i due pezzi. Il primo pezzo si maggiora così:

$$\left| \sum_{n=1}^q \frac{\chi(n) \log n}{n^\sigma} \right| \leq e \sum_{n=1}^q \frac{\log n}{n} \ll \log^2 q,$$

dove la prima disuguaglianza segue da  $n^\sigma \geq \exp((1 - 1/\log q) \log n) \geq n/e$ . Per l'altro pezzo usiamo che  $(\log n)/n^\sigma$  decresce per  $n > q$ , dunque la maggiorazione è

$$\left| \sum_{n=1+\infty}^{\infty} \chi(n) (\log n) n^{-\sigma} \right| \leq (\log q) q^{-\sigma} \max_N \left| \sum_{n=q+1}^N \chi(n) \right| \leq \log q \cdot e q^{-1} q.$$

□

### 3.5 Formule esplicite (nel caso dei caratteri)

**Definizione 3.5.1.** Dato  $\chi$  un carattere modulo  $q$ , si pone  $\psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n)$ .

**Osservazione 3.5.2.** Se  $\chi = \chi_0$ , allora

$$\begin{aligned} \psi(x, \chi_0) &= \sum_{\substack{n \leq x, \\ (n, q)=1}} \Lambda(n) = \psi(x) - \sum_{\substack{n \leq x, \\ (n, q) > 1}} \Lambda(n) = \\ &= \psi(x) + O\left(\sum_{p|q} \sum_{a \leq \frac{\log x}{\log p}} \log p\right) = \psi(x) + O\left(\log x \sum_{p|q} 1\right) = \\ &= \psi(x) + O(\log x \log q) = \psi(x) + O(\log^2(qx)). \end{aligned}$$

Poniamo  $\psi_0(x, \chi) = \sum_{n < x} \chi(n) \Lambda(n) + \frac{1}{2} \chi(x) \Lambda(x)$ , dove al solito  $\Lambda(x) = 0$  se  $x \notin \mathbb{N}$ . Se  $\chi \neq \chi_0$ , prendendo di nuovo  $c = 1 + 1/\log x$  e ripetendo quanto già fatto per  $\psi_0(x)$  troviamo

$$\psi_0(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} + \log x \min\left\{1, \frac{x}{T \langle x \rangle}\right\}\right).$$

1. Se  $\chi(-1) = -1$  ( $a = 1$ ), i residui sono:

$$-\frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi}, \quad -\frac{L'}{L}(0, \chi), \quad \frac{x^{-2m+1}}{2m-1}.$$

2. Se  $\chi(-1) = 1$  ( $a = 0$ ), i residui sono:

$$-\frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi}, \quad -\log x - \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{L'}{L}(s, \chi) - \frac{1}{s} \right), \quad \frac{x^{-2m}}{2m}.$$

Consideriamo di nuovo il rettangolo con parte reale compresa tra  $-U$  e  $c$  e parte immaginaria tra  $-T$  e  $T$ . Ripetendo i passaggi già visti, troviamo  $\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{|\gamma_\chi - T| \leq 1} \frac{1}{s - \rho_\chi} + O(\log(qT))$ . Imponendo  $|\gamma_\chi \pm T| \gg 1/\log(qT)$  abbiamo  $\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll \log^2(qT)$ . Per gli altri pezzi, ripetendo le stime, si ha  $\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll \log(qT)$ . Otteniamo dunque

$$\psi_0(x, \chi) = - \sum_{|\gamma_\chi| < T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} - b_\chi - (1-a) \log x - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{-2m+a}}{a-2m} + O\left(\frac{x \log^2(qTx)}{T} + \log x \min\left\{1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right\}\right),$$

$$\text{dove } b_\chi = \begin{cases} \frac{L'}{L}(0, \chi) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{L'}{L}(s, \chi) - \frac{1}{s} \right) \end{cases}.$$

Per calcolare il limite, ricordiamo che

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{q}{\pi}\right) + A_\chi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a}{2}\right) + \sum_{\rho_\chi} \left( \frac{1}{s - \rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi} \right);$$

portando il pezzo con  $\Gamma$  a sinistra e sostituendo  $s = 0$ , troviamo che vale  $b_\chi = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{q}{\pi}\right) + A_\chi$ . Scegliendo  $s = 2$ , allora

$$\begin{aligned} \frac{L'}{L}(2, \chi) &= -\frac{1}{2} \log\left(\frac{q}{\pi}\right) + O(1) + \sum_{\rho_\chi} \left( \frac{1}{2 - \rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi} \right) + A_\chi \Rightarrow \\ &\Rightarrow b_\chi = - \sum_{\rho_\chi} \left( \frac{1}{2 - \rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi} \right) + O(1). \end{aligned}$$

Si ha

$$\left| \sum_{|\gamma_\chi| \geq 1} \left( \frac{1}{2 - \rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi} \right) \right| \leq \sum_{|\gamma_\chi| \geq 1} \frac{2}{|\rho_\chi||2 - \rho_\chi|} \ll \sum_{|\gamma_\chi| \geq 1} \frac{1}{1 + \gamma_\chi^2} \ll \log q$$

e

$$\left| \sum_{|\gamma_\chi| < 1} \frac{1}{2 - \rho_\chi} \right| \ll \sum_{|\gamma_\chi| < 1} 1 \ll \log q,$$

da cui  $b_\chi = - \sum_{|\gamma_\chi| < 1} \frac{1}{\rho_\chi} + O(\log q)$ . Indicando con  $\beta_1$  l'eventuale zero di Siegel

e scrivendo  $\sum'$  per indicare che sommiamo su tutti gli altri zeri, per  $x \in \mathbb{N}$  e

$T \leq x$  otteniamo

$$\psi(x, \chi) = - \sum'_{|\gamma_\chi| < T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} + \sum'_{|\gamma_\chi| < 1} \frac{1}{\rho_\chi} - \left( \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_1} \right) - \left( \frac{x^{1-\beta_1}}{1-\beta_1} - \frac{1}{1-\beta_1} \right) + O\left( \frac{x \log^2(qx)}{T} \right).$$

Abbiamo  $q \geq 3 \Rightarrow \log q > 1$ , inoltre esiste  $0 < c_0 < 1/4$  t.c.  $\beta_1 > 1 - c_0/\log q > 3/4$ , dunque  $1/\beta_1 = O(1)$ . Inoltre esiste  $0 \leq \sigma_0 \leq 1 - \beta_1 < 1/4$  t.c.

$$\frac{x^{1-\beta_1} - 1}{1 - \beta_1} = x^{\sigma_0} \log x \ll x^{1/4} \log x.$$

Inoltre, usando che per gli zeri non di Siegel  $\beta_\chi \geq c/\log q$  e che  $\sum_{|\gamma_\chi| < 1} 1 \ll \log q$ ,

otteniamo

$$\sum'_{|\gamma_\chi| < 1} \frac{1}{\rho_\chi} \ll \sum'_{|\gamma_\chi| < 1} \frac{1}{\beta_\chi} \ll \log^2 q,$$

per cui dato  $\chi$  un carattere primitivo modulo  $q$  la formula esplicita per  $\psi(x, \chi)$  è

$$\psi(x, \chi) = - \sum_{|\gamma_\chi| \leq T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} - \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O\left( \frac{x \log^2(qx)}{T} + x^{1/4} \log x \right). \quad (17)$$

**Osservazione 3.5.3.** Se  $\chi$  è non primitivo e  $\chi_1$  induce  $\chi$ , allora

$$\left| \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) - \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi_1(n) \right| \leq \sum_{\substack{n \leq x, \\ (n, q) > 1}} \Lambda(n) \ll \log^2(qx).$$

Allora l'equazione (17) vale per ogni  $\chi$  modulo  $q$  non principale.

**Corollario 3.5.4.** Se  $(a, q) = 1$ , allora

$$\begin{aligned} \psi(x; q, a) &:= \sum_{\substack{n \leq x, \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \text{ modulo } q} \bar{\chi}(a) \psi(x, \chi) = \\ &= \frac{x}{\phi(q)} + \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \psi(x, \chi) + O\left( \frac{x \exp(-c\sqrt{\log x})}{\phi(q)} \right). \end{aligned}$$

*In realtà, non ho controllato in dettaglio ma credo che questa stima valga sotto le ipotesi aggiuntive su  $q$  che introdurremo a breve.*

Vogliamo ora stimare la somma, che contiene  $\psi(x, \chi)$ , dunque la somma in (17). Abbiamo

$$\left| \sum'_{|\gamma_\chi| < T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} \right| \leq \sum_{1 \leq |\gamma_\chi| < T} \frac{x^{\beta_\chi}}{|\gamma_\chi|} + \sum_{|\gamma_\chi| < 1} \frac{x^{\beta_\chi}}{|\rho_\chi|} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Per  $\Sigma_1$ , usiamo  $x^{\beta_x} \leq x^{1-\frac{c}{\log(qT)}} = x \exp\left(-\frac{c \log x}{\log(qT)}\right)$ , mentre per la somma, sommando per parti e usando Riemann-Von Mangoldt, troviamo che è  $\ll \log^2(qT) \ll \log^2(qx)$ . Per  $\Sigma_2$  abbiamo la stessa stima per  $x^{\beta_x}$ , mentre la somma avevamo già visto essere  $\ll \log^2 q$ . Prendendo allora  $q \leq \exp(C(\log x)^{1/2}) = T$  con  $C$  un'opportuna costante, stimiamo tutto con  $x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})$ . In conclusione si ha

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})\right) - \frac{\chi(a)}{\phi(q)} \cdot \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1},$$

dove abbiamo tolto il coniugio all'unico carattere per cui eventualmente compare  $\beta_1$  perché sappiamo che deve essere reale. Ponendo  $z = \exp(C(\log x)^{1/2})$ , allora la stima è uniforme in  $q$  per  $q \leq z$  e contiene, appunto, al più un unico termine con  $\beta_1$  (e  $\beta_1 > 1 - c_0/\log q$ ). Usando che  $\beta_1 \leq 1 - \frac{c'}{\sqrt{q_1} \log^2 q_1}$  dove  $q_1$  è il modulo speciale per cui appare  $\beta_1$ , troviamo  $x^{\beta_1} \leq x \exp\left(-\frac{c' \log x}{\sqrt{q_1} \log^2 q_1}\right)$ . Imponendo  $q_1 \log^4 q_1 \leq \log x$  (con limiti molto costrittivi come ad esempio  $q_1 \leq (\log x)^{1-\delta}$ ), otteniamo

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})\right)$$

uniformemente per  $q \leq (\log x)^{1-\delta}$ . Questa è l'unica formula effettiva in tutte le variabili.

La GRH ( $\beta_\chi = 1/2$  per ogni  $\rho_\chi$  e per ogni  $\chi$  modulo  $q$ ) ci darebbe  $\psi(x, \chi) = O(x^{1/2} \log^2 x)$  prendendo  $q \leq \sqrt{x} = T$ ; allora avremmo  $\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O(x^{1/2} \log^2 x)$ .

**Proposizione 3.5.5.** (Bombieri) Posto  $E(x, q, a) = \psi(x; q, a) - \frac{x}{\phi(q)}$ , si ha che per ogni  $A > 0$  esiste  $B > 0$  t.c.

$$\sum_{q \leq \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^B}} \max_{(a,q)=1} \max_{y \leq x} |E(y, q, a)| \ll \frac{x}{(\log x)^A}.$$

**Osservazione 3.5.6.** Usando GRH, avremmo

$$\sum_{q \leq \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^B}} \max_{(a,q)=1} |E(x, q, a)| \ll \sqrt{x} \log^2 x \sum_{q \leq \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^B}} 1 \ll \frac{x}{(\log x)^{B-2}}.$$

Allora basterebbe  $B = A + 2$ ; nel risultato dovuto a Bombieri,  $B = A + 5$ .

**Proposizione 3.5.7.** Sia  $\chi$  un carattere reale primitivo e  $\varepsilon > 0$ . Esiste  $c(\varepsilon) > 0$  t.c.  $L(1, \chi) > c(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $F(s) = \zeta(s) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2) L(s, \chi_1 \chi_2)$  con  $\chi_1$  e  $\chi_2$  primitivi reali modulo  $q_1$  e  $q_2$ . Poniamo  $\text{Res}_{s=1} F(s) = \lambda = L(1, \chi_1) L(1, \chi_2) L(1, \chi_1 \chi_2)$ . Il grosso della dimostrazione sta nel seguente lemma.

**Lemma 3.5.8.**  $7/8 < s < 1 \Rightarrow F(s) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-s} (q_1 q_2)^{8(1-s)}.$

*Dimostrazione.*  $F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$  per  $\sigma > 1$ ;  $a_1 = 1$ , inoltre i fattori del prodotto di Eulero sono

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1 \cdot \chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log F(s) = \sum_p \sum_m \frac{1}{mp^{ms}} (1 + \chi_1(p^m))(1 + \chi_2(p^m)).$$

Poiché  $(1 + \chi_1(p^m))(1 + \chi_2(p^m)) \geq 0$ , abbiamo  $a_n \geq 0$ . Scriviamo  $F(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m (2-s)^m$ , dove

$$b_m = \frac{(-1)^m}{m!} \cdot F^{(m)}(2) = \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n (\log n)^m}{n^2} \geq 0$$

e in più  $b_1 \geq 1$ . Espandendo  $\frac{1}{s-1} = \frac{1}{1-(2-s)}$ , per  $|2-s| \leq 3/2$  abbiamo

$$F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (b_m - \lambda)(2-s)^m.$$

Siccome  $|L(s, \chi)| \ll q|s|$ , tra  $1/2$  e  $1$  si ha  $L(s, \chi_j) \ll q_j$  e  $L(s, \chi_1 \chi_2) \ll q_1 q_2$ . Restringendoci a  $7/8 \leq s \leq 1$ , per le disuguaglianze di Cauchy troviamo

$$|b_m - \lambda| \cdot |2-s|^m \leq cq_1^2 q_2^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m \left(\frac{9}{8}\right)^m = c(q_1 q_2)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{m=M}^{+\infty} |b_m - \lambda| \cdot |2-s|^m \leq c \left(\frac{3}{4}\right)^M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{M-1} + \sum_{m=M}^{+\infty} \geq 1 - \lambda \sum_{m=0}^{M-1} (2-s)^m - c(q_1 q_2)^2 e^{-M/4}.$$

Scegliamo  $M$  t.c.  $\frac{1}{2}e^{-1/4} < c(q_1 q_2)^2 e^{-M/4} < 1/2$ , da cui anche  $M < 8 \log(q_1 q_2) + c$ . Allora  $F(s) - \frac{\lambda}{s-1} > \frac{1}{2} - \lambda \frac{(2-s)^M - 1}{1-s}$  ma anche  $(2-s)^M = e^{M \log(1+1-s)} \leq e^{M(1-s)} \leq c_0(q_1 q_2)^{8(1-s)}$ . Mettendo assieme si ha la tesi.  $\square$

Fissiamo adesso  $\varepsilon > 0$ . Primo caso: esiste  $\chi_1$  modulo  $q_1$  con  $L(\beta_1, \chi_1) = 0$  e  $\beta_1 > 1 - \varepsilon/16$ . Allora  $F(\beta_1) = 0$ . Secondo caso: vicino a  $1$  (a sinistra) abbiamo  $L(\sigma, \chi) > 0, \zeta(\sigma) < 0$ , dunque  $F(\beta) < 0$ , dove possiamo scegliere  $\beta$ . In generale abbiamo che esiste  $1 - \varepsilon/16 < \beta < 1$  t.c.  $F(\beta) \leq 0$ , dunque per il lemma abbiamo  $\frac{c_0 \lambda}{1-s} (q_1 q_2)^{8(1-s)} > 1/2$ . Prendendo  $\chi_2$  modulo  $q_2$  con  $q_2 > q_1$ . Da vecchie stime possiamo anche dire  $\lambda \leq c_1 \log q_1 \log(q_1 q_2) L(1, \chi_2)$ . Allora

$$L(1, \chi_2) \geq \frac{1 - \beta_1}{2c} (q_1 q_2)^{-8(1-\beta_1)} (\log q_1 \log(q_1 q_2))^{-1} \geq C(\chi_1) q_2^{-\varepsilon/3}.$$

$\square$



**Corollario 3.5.9.** *A meno di cambiare costanti, si ha  $\beta_1 \leq 1 - c(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$ .*

*Dimostrazione.* Usare la stima vista per  $L'(1, \chi)$ . □

Conseguenza:  $x^{\beta_1} < x \exp\left(\frac{-c(\varepsilon)\log x}{q^\varepsilon}\right)$ . Scegliendo  $\varepsilon = \frac{1}{2N}$  e prendendo  $q \leq (\log x)^N$ , abbiamo  $q^\varepsilon \leq (\log x)^{1/2}$ . Ne segue l'ultimo risultato del corso, ovvero il teorema dei numeri primi nelle progressioni aritmetiche nella versione di Siegel-Walfisz.

**Proposizione 3.5.10.** *(Siegel-Walfisz) Per ogni  $N > 0$  esiste  $c(N)$  t.c.*

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(x \exp\left(-c(N)(\log x)^{1/2}\right)\right)$$

*uniformemente per  $q \leq (\log x)^N$  (ma  $c(N)$  e la costante nell'O-grande non sono calcolabili).*

## Riferimenti bibliografici

- [D] Davenport Multiplicative Number Theory (da riportare meglio)
- [T] Titchmarsh The Theory of the Riemann Zeta Function (da riportare meglio)
- [JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007
- [NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001

## Ringraziamenti

Da scrivere alla fine del corso.

JBG e NN sopra nella bibliografia sono degli esempi lasciati per ricordarsi qual è il modo giusto di scriverli, da togliere dopo aver inserito la bibliografia giusta per queste dispense.