Appunti di Teoria Analitica dei Numeri A

Marco Vergamini

Indice

Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso Teoria Analitica dei Numeri A tenuto dal professor Giuseppe Puglisi nel secondo semestre dell'anno accademico 2020/2021. Sono dati per buoni (si vedano i prerequisiti del corso) i corsi di Aritmetica, Analisi 1 e 2 e Teoria dei Numeri Elementare, più le base dell'analisi complessa in una variabile. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc. . . . Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia. . .), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali. . . insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Spero di essere riuscito in questo intento.

Ho inoltre deciso di omettere gli appunti delle prime due/tre ore di lezione, nelle quali sono stati esposti a grandi linee gli argomenti e i principali risultati trattati nel corso, poiché sono stati descritti in modo discorsivo e impreciso, e comunque verranno ovviamente trattati dettagliatamente nel seguito.

1 Funzioni intere e funzione Γ

1.1 Strumenti di analisi complessa

Lemma 1.1.1. *(Mittag-Leffler) Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi t.c. $|z_n| \longrightarrow \infty$ per $n \longrightarrow \infty$ e $0 < |z_n| \leq |z_{n+1}|$ per ogni n. Sia inoltre $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un'altra successione con $m_n \in \mathbb{C}^*$ per ogni n. Allora esistono $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ t.c.*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$

converge in $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ compatto. Inoltre, se $|z| < |z_1|$, si ha

$$f(z) = -\sum_{k=1} +\infty \left(\sum_{n:p_n<k} m_n z_n^{-k}\right) z^{k-1}.$$

Dimostrazione. Prendiamo r_n reali positivi con $r_n \leq r_{n+1}$ e $r_n \longrightarrow +\infty$ per $n \longrightarrow +\infty$, e t.c. $r_n < |z_n|$. Per $|z| \leq r_n$ si ha

$$\left|\frac{m_n}{z - z_n}\right| \leq \frac{m_n}{|z_n| - r_n}, \quad \left|\frac{z}{z_n}\right| < \frac{|z|}{r_n} \leq 1 \Rightarrow$$

perciò si ha che esistono $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ t.c. $\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n} < \varepsilon_n \frac{|z_n| - r_n}{|m_n|}$, con $\varepsilon_n > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty$. Abbiamo dunque $\left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n} < \varepsilon_n$. Fissiamo ora il compatto K e consideriamo N t.c. $|z| \leq r_N$ per ogni $z \in K$. Poniamo $M_n = \max_{z\in K} \left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}\right|$, per $n \leq N - 1$. Per ogni $z \in K$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}\right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} M_n + \sum_{n=N}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty.$$

Se $|z| < |z_1|$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n z^{p_n}}{z_n^{p_n+1}} \frac{1}{1 - z/z_n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} m_n \sum_{k=p_n+1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{z_n^k}. \end{aligned}$$

Poiché nella prima parte della dimostrazione abbiamo visto che c'è convergenza totale, possiamo scambiare le due sommatorie ottenendo così la seconda parte della tesi. $\square$

Osservazione 1.1.2. Per $|z| \leq r_n$ si ha

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| = \frac{2|z|}{|z_n| + |z_n|} < \frac{2|z|}{|z_n| + r_n} \leq \frac{2|z|}{|z - z_n|}$$

$$|m_m| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} \leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n} |m_n| = 2|z| \left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} \leq 2|z| \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}\right| < +\infty.$$

Esempio 1.1.3. Se $z_n = n$ e $m_n = 1$ per ogni n, basta prendere $p_n = 1$.

Sia invece $|z_0| > \max\limits_K |z|$ e consideriamo $|z_n| > |z_0| + 1$. Si ha che

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}\right| &\leq \left|\frac{z_0}{z_n}\right|^{p_n+1} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z_0|} \frac{|z_n|}{|z_0|} \\ &\leq \left|\frac{z_0}{z_n}\right|^{p_n+1} \frac{|z_0| + 1}{|z_0| + 1 - |z_0|} \frac{|m_n|}{|z_0|} = |m_n| \left|\frac{z_0}{z_n}\right|^{p_n+1} \left(1 + \frac{1}{|z_0|}\right),\end{aligned}$$

dove la seconda disugaglianza segue dal fatto che la funzione $\frac{t}{t - |z_0|}$ è decrescente. In questo caso, vale la maggiorazione opposta a quella dell'osservazione 1.1.2.

Lemma 1.1.4. *Sia f meromorfa con poli semplici nei punti $z_n \neq 0$, con residui $m_n \in \mathbb{Z}$, e t.c. $|z_n| \longrightarrow +\infty$ per $n \longrightarrow +\infty$. Sia $\gamma(0, z)$ un cammino da 0 a z non passante per i punti z_n. Allora la funzione*

$$\varphi(z) = \exp\left(\int_{\gamma(0,z)} f(w)\,\mathrm{d}w\right)$$

è meromorfa, con zeri z_n con molteplicità m_n se $m_n > 0$ e poli z_n con molteplicità $-m_n$ se $m_n < 0$.

Osservazione 1.1.5. Sia γ il cammino dell'integrale del lemma 1.1.4 e γ' un altro cammino, t.c. $\gamma' \cup -\gamma$ sia una curva di Jordan (piana, semplice, chiusa) contenuta in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma'} f(w)\,\mathrm{d}w + 2\pi i R,$$

con $R = \sum\limits_{\substack{n: z_n \in A, \\ \partial A = \gamma' \cup -\gamma}} m_n$. Dunque $\varphi(z) = \exp\left(\int_{\gamma'} f(w)\,\mathrm{d}w\right) e^{2\pi i R}$.

Dimostrazione. Poiché $m_n \in \mathbb{Z}$, per l'osservazione 1.1.5 φ non dipende dal cammino scelto. Consideriamo $f_1(z) = f(z) - \dfrac{m_1}{z - z_1}$. f_1 è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$, quindi $\exp\left(\int_0^z f_1(w)\,\mathrm{d}w\right)$ è olomorfa e mai nulla in $\mathbb{C}\setminus\{z_2, z_3, \dots\}$.

$$\varphi(z) = \exp\left(\int_0^z f_1(w)\,\mathrm{d}w + m_1 \int_0^z \frac{\mathrm{d}w}{w - z_1}\right), \int_0^z \frac{\mathrm{d}w}{w - z_1} = \log\left(\frac{z - z_1}{-z_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \exp\left(\int_0^z f_1(w)\,\mathrm{d}w\right) \cdot \exp\left(m_1 \log\left(\frac{z - z_1}{-z_1}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\int_0^z f_1(w)\,\mathrm{d}w\right) \cdot (-z_1)^{-m_1} \cdot (z - z_1)^{m_1} = \varphi_1(z)(z - z_1)^{m_1},$$

dove φ_1 è una funzione olomorfa e mai nulla in $\mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, \dots\}$. Allora φ ha uno zero o un polo dell'ordine voluto in z_1. Ripetendo per ogni n si ha la tesi. □

Con i due lemmi appena mostrati si può costruire una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con zeri e poli di molteplicità assegnata, assumendo che la successione degli stessi non abbia alcun limite finito.

Teorema 1.1.6. *(prodotto di Weierstrass) Sia F meromorfa in $\mathbb{C}$ e siano $z_n \neq 0$ gli zeri e i poli di molteplicità $|m_n|$. Esistono una successione $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e una funzione intera $G(z)$ t.c.*

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n} \exp\left(m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right), \tag{1}$$

dove il prodotto infinito converge uniformemente in ogni $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ compatto. Inoltre $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} < +\infty$ per ogni $z \in K$.

Dimostrazione. Costruiamo $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$ come nel lemma 1.1.1 e $\varphi = \exp\left(\displaystyle\int_0^z f(w)\,\mathrm{d}w\right) = \exp\left(\displaystyle\int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{w - z_n}\,\mathrm{d}w\right)$ come nel lemma 1.1.4. Osserviamo che

$$\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n} \frac{1}{w - z_n} = \frac{1}{w - z_n} + \frac{1}{z_n} \sum_{k=0}^{p_n - 1} \left(\frac{w}{z_n}\right)^n,$$

quindi

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp\left[\int_0^z \left(\frac{m_n}{w-z_n} + \frac{m_n}{z_n}\sum_{k=0}^{p_n-1}\left(\frac{w}{z_n}\right)^k\right) \mathrm{d}w\right] = \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp\left(m_n \log\left(\frac{z-z_n}{-z_n}\right) + m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right) = \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{m_n} \exp\left(m_n \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right).\end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\frac{F(z)}{\varphi(z)}$ è intera e mai nulla in $\mathbb{C}$, dunque esiste $G(z)$ intera t.c. $\frac{F(z)}{\varphi(z)} = e^{G(z)} \Rightarrow F(z) = e^{G(z)}\varphi(z)$, da cui la tesi. □

Osservazione 1.1.7. Se $F(z)$ ha uno zero o un polo di molteplicità $|m|$ in 0, basta applicare il teorema 1.1.6 alla funzione $\tilde{F}(z) = F(z)/z^m$.

Corollario 1.1.8. *Sia F come nel teorema 1.1.6, indichiamo con D^k la derivata k-esima. Si ha*

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k!}D^{k-1}\left(\frac{F'}{F}(z)\right)_{z=0} + \frac{1}{k}\sum_{n:p_n<k} m_n z_n^{-k}\right) z^k.$$

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del teorema 1.1.6 e prendendo il logaritmo otteniamo

$$G(z) + \int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{w-z_n}\,\mathrm{d}w = \log F(z).$$

Ovviamente $\log F(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{D^{k-1}\left(\frac{F'}{F}(z)\right)_{z=0}}{k!} z^k$. Inoltre

$$\begin{aligned}-\int_0^z \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{w-z_n}\,\mathrm{d}w &= \int_0^z \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n:p_n<k}(m_n z_n^{-k})w^{k-1}\,\mathrm{d}w = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n:p_n<k} m_m z_n^{-k}\right) z^k.\end{aligned}$$

□

Avviciniamoci alla notazione canonica del prodotto di Weierstrass per una funzione intera: $F(z) = e^{G(z)}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$, dove gli zeri vengono contati con molteplicità (e d'ora in avanti si sottindenderà sempre così).

1.2 Funzioni intere di ordine finito

Introduciamo ora un argomento importante: le funzioni intere di ordine finito.

Notazione: scriviamo che $f(z) \ll g(z)$ $(z \longrightarrow +\infty)$ $\iff$ $f(z) = O\big(g(z)\big)$. Inoltre, scriveremo $\ll_\varepsilon$ per indicare che la costante dell'O-grande dipende da un parametro ε.

Definizione 1.2.1. Data F intera, si dice che ha *ordine* $\alpha \geq 0$ se

$$F(z) \ll_\varepsilon e^{|z|^{\alpha+\varepsilon}} \ (z \longrightarrow +\infty)$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e α è il minimo valore positivo per cui vale questa cosa. Equivalentemente, $\alpha = \inf\{A \geq 0 \mid F(z) \ll_A e^{|z|^A}\}$. Scriviamo $ord(F) = \alpha$.

Se non vale $F(z) \ll_A e^{|z|^A}$ per nessun A diciamo che F ha ordine infinito.

Esempio 1.2.2.

1. Sia p un polinomio di grado k, allora $|p(z)| \leq |a_k||z|^k\big(1 + o(1)\big) \ll_\varepsilon e^{|z|^\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$, dunque p ha ordine 0.
2. $|e^{az+b}| = e^{\mathfrak{Re}(az+b)} \ll_\varepsilon e^{|z|^{1+\varepsilon}}$ per ogni $\varepsilon > 0$.
3. Più in generale, dato p_k un generico polinomio di grado k abbiamo che $|e^{p_k(z)}| = e^{\mathfrak{Re}\left(p_k(z)\right)} \leq e^{|p_k(z)|} \leq e^{|a_k||z|^k\left(1+o(1)\right)} \ll_\varepsilon e^{|z|^{k+\varepsilon}}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Inoltre, prendendo z sulla retta $arg(z) = -arg(a_k)/k$, abbiamo che vale $|e^{p_k(z)}| = e^{\mathfrak{Re}\left(p_k(z)\right)} = e^{a_k z^k\left(1+o(1)\right)} = e^{|a_k||z|^k\left(1+o(1)\right)} \gg_\varepsilon e^{|a_k||z|^k}$. Dunque l'ordine è k e l'inf nella definizione non viene raggiunto.

Osservazione 1.2.3. Se F_1 e F_2 hanno ordine α_1 e α_2, allora $F_1 + F_2$ e $F_1 \cdot F_2$ hanno ordine minore o uguale di $\max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. La dimostrazione è lasciata come esercizio per il lettore.

Lemma 1.2.4. *Sia f olomorfa in $|z - z_0| \leq R$ non costantemente nulla e sia $0 < r < R$. Sia inoltre $N = \sharp\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r, f(z) = 0\}$ (ricordiamo che sono contati con molteplicità). Allora*

$$|f(z_0)| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^N \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|.$$

Dimostrazione. Consideriamo senza perdita di generalità, a meno di una traslazione e di un'omotetia, $R = 1, z_0 = 0$. Siano z_n gli zeri di f in $|z| \leq r$ contati con molteplicità e sia $g(z) = f(z) \prod_{n=1}^{N} \frac{1 - \bar{z}_n z}{z - z_n}$. Per $|z| = 1$ scriviamo $z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$. Allora $\left|\frac{1 - \bar{z}_n e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_n}\right| = |e^{i\theta}| \left|\frac{\bar{z}_n - e^{-i\theta}}{z_n - e^{i\theta}}\right| = 1$, quindi, per il principio del massimo modulo per funzioni olomorfe (che d'ora in avanti useremo senza menzionarlo esplicitamente), $|g(z)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)|$ per $|z| \leq 1$. Si ha dunque

$$|f(w)| = |g(w)| \prod_{n=1}^{N} \left| \frac{w - z_n}{1 - \bar{z}_n w} \right| \leq \max_{|z|=1} |f(z)| \prod_{n=1}^{N} \left| \frac{w - z_n}{1 - \bar{z}_n w} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(0)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)| \prod_{n=1}^{N} |z_n| \leq r^N \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

□

Corollario 1.2.5. *Siano f, r, R, N come nel lemma 1.2.4. Se $f(z_0) \neq 0$ allora*

$$N \leq \frac{1}{\log(R/r)} \log \left(\frac{\max_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{|f(z_0)|} \right).$$

Dimostrazione. Basta prendere la disugaglianza data dal lemma 1.2.4, portarla nella forma $\left(\frac{R}{r}\right)^N \leq (\dots)$, prendere il logaritmo e dividere per $\log(R/r)$. □

Teorema 1.2.6. *Sia F una funzione intera di ordine $\alpha < +\infty$ e consideriamo $N(r) = \sharp\{z \in \mathbb{C} \mid F(z) = 0, |z| \leq r\}$. Allora $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$.*

Dimostrazione. Prendiamo $R = 2r$, allora $\max_{|z|=R} |F(z)| \ll_\varepsilon e^{(2r)^{\alpha+\varepsilon}}$ per ogni $\varepsilon > 0 \Rightarrow \log \left(\max_{|z|=R} |F(z)| \right) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Se $F(0) \neq 0$, per il corollario 1.2.5 abbiamo $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Se $F(0) = 0$, consideriamo $\tilde{F}(z) = F(z)/z^m$ dove m è la molteplicità di 0 come zero. Per $|z| \leq 1$, $\tilde{F} \ll 1$ per continuità. Per $|z| > 1$, $\tilde{F}(z) = F(z)\frac{1}{z^n} \Rightarrow ord(\tilde{F}) \leq \max\{\alpha, 0\} = \alpha$. Allora si ripete la dimostrazione per $\tilde{F}$, poi si osserva che il numero di zeri di F varia solo per la costante additiva m. □

Definizione 1.2.7. Sia $z_n \neq 0$ una successione senza limiti finiti. Si dice *esponente di convergenza* di z_n, se esiste, il numero

$$\beta = \inf\{B > 0 \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^B} < +\infty\},$$

ovvero $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} < +\infty$ per ogni $\varepsilon > 0$ e β è il minimo valore per cui è vero.

Esempio 1.2.8. $z_n = \log n$ non ha esponente di convergenza finito.

Teorema 1.2.9. *Sia F una funzione intera di ordine $\alpha > 0$, $F(0) \neq 0$ t.c. la successione dei suoi zeri z_n ha esponente di convergenza β. Allora $\beta \leq \alpha$.*

Dimostrazione. Se $ord(F) = \alpha < +\infty$, per il teorema 1.2.6 si ha $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Prendendo $r_n = |z_n|$, ricordando che z_n sono gli zeri di F otteniamo $n \leq N(r_n) \ll_\varepsilon r_n^{\alpha+\varepsilon} = |z_n|^{\alpha+\varepsilon} = |z_n|^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$ (non è $n = N(r_n)$ perché potrebbe esserci più di uno zero sul cerchio $|z| = r_n$). Allora $|z_n| \gg_\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}$ e dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(\alpha+2\varepsilon)} \ll_\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{\alpha+2\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}} < +\infty.$$

Perciò $\beta \leq \inf\{\alpha + 2\varepsilon \mid \varepsilon > 0\} = \alpha$. □

Teorema 1.2.10. *Sia F intera di ordine finito, $F(0) \neq 0$. Allora la fattorizzazione di Weierstrass si scrive come*

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right), \tag{2}$$

dove $p \geq 0$ è indipendente da n e t.c. $\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$. Talvolta si trova scritta con la notazione $E(z,p) = (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} z^k\right)$ o simili.

Dimostrazione. Diamo solamente una traccia. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p+1} < +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Scegliendo $p + 1 = \alpha + \varepsilon$, per il teorema 1.2.9 si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$. □

Osservazione 1.2.11. Sia β l'esponente di convergenza di z_n, zeri di una funzione F di ordine α ($\beta \leq \alpha$). Il p migliore è:

1. se β non è intero, $p = \lfloor \beta \rfloor$;
2. se β è intero e nella definizione con l'inf è in realtà un minimo, allora $p = \beta - 1$;
3. se β è intero ma nella definizione con l'inf questo non viene raggiunto, cioè β non è un minimo, allora $p = \beta$.

Abbiamo dunque $\beta - 1 \leq p \leq \beta \leq \alpha$. Scrivendo la fattorizzazione di Weierstrass come in (2) usando il miglior p possibile si ha la forma canonica.

Teorema 1.2.12. *(Borel-Carathéodory) Siano $0 < r < R$ e sia f olomorfa in $|z - z_0| \leq R$. Allora*

$$\max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z-z_0|=R} \mathfrak{Re}\big(f(z)\big) + \frac{R+r}{R-r} |f(z_0)|.$$

Se inoltre $\max\limits_{|z-z_0|=R} \mathfrak{Re}\big(f(z)\big) \geq 0$, *allora*

$$\max_{|z-z_0|=r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! 2^{n+2} R}{(R-r)^{n+1}} \Big(\max_{|z-z_0|=R} \mathfrak{Re}\big(f(z)\big) + |f(z_0)| \Big).$$

Dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità $z_0 = 0$. Se f è costante la tesi è banale, consideriamo dunque f non costante. Facciamo il caso $f(0) = 0$. Sia $A = \max\limits_{|z|=R} \mathfrak{Re}\big(f(z)\big)$. $A > 0$, infatti basta osservare che $|e^{f(z)}| = e^{\mathfrak{Re}(f(z))}$ e applicare il principio del massimo modulo a $e^{f(z)}$ (se il massimo non fosse maggiore di 1, sarebbe proprio 1 perché $f(0) = 0$ e per lo stesso motivo sarebbe costante). Sia $\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)}$. Osserviamo che $\mathfrak{Re}\big(2A - f(z)\big) = 2A - \mathfrak{Re}\big(f(z)\big) \geq A > 0 \Rightarrow 2A - f(z) \neq 0$, quindi φ è olomorfa in $|z| \leq R$. Posto $f(z) = u + iv$, allora $|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2+v^2}{(2A-u)^2+v^2} \leq 1$. Infatti, $u \leq A \Rightarrow u \leq 2A - u$ e ovviamente $-2A + u \leq u$, dunque $u^2 \leq (2A-u)^2$. Poiché $\varphi(0) = 0$, $\varphi(z)/z$ è olomorfa in $|z| \leq R$ e

$$\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leq \max_{|z|=R} \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{R} \Rightarrow \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \leq \frac{r}{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{2A|\varphi(z)|}{|1+\varphi(z)|} \leq \frac{2Ar/R}{1-|\varphi(z)|} \leq \frac{2Ar}{R-r} \text{ per } |z| = r.$$

Se $f(0) \neq 0$, ripetiamo il ragionamento con $f(z) - f(0)$ ottenendo

$$-|f(0)| + \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |f(z) - f(0)| \leq$$
$$\leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \mathfrak{Re}\big(f(z) - f(0)\big) \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \mathfrak{Re}\big(f(z)\big) + \frac{2r}{R-r}|f(0)|.$$

Sommando $|f(0)|$ agli estremi di questa catena di disugaglianze otteniamo la prima parte della tesi.

Osserviamo che se $A \geq 0$ si ha

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} \Big(\max_{|z|=R} \mathfrak{Re}\big(f(z)\big) + |f(z_0)| \Big).$$

Prendiamo $|z| \leq r$ e scriviamo

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\frac{R-r}{2}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w.$$

Dev'essere $|w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z| \leq \frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2} < R$. Allora

$$|f(w)| \leq \max_{|w|=\frac{R+r}{2}} |f(w)| \leq \frac{R + \frac{R+r}{2}}{R - \frac{R+r}{2}} \Big(\max_{|w|=R} \mathfrak{Re}\big(f(w)\big) + |f(0)| \Big) \leq$$

$$\leq \frac{4R}{R-r} \Big(\max_{|w|=R} \mathfrak{Re}\big(f(w)\big) + |f(0)| \Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{4R}{R-r} \cdot \frac{2\pi}{\big(\frac{R-r}{2}\big)^n} \Big(\max_{|w|=R} \mathfrak{Re}\big(f(w)\big) + |f(0)| \Big).$$

□

Teorema 1.2.13. *(Hadamard) Se F è intera di ordine α finito e $F(0) \neq 0$, allora la funzione intera G del prodotto di Weierstrass* (1) *è un polinomio di grado minore o uguale a α.*

Dimostrazione. Sia $\nu = \lfloor \alpha \rfloor$, vogliamo $G^{(\nu+1)} \equiv 0$. Ricordiamo che

$$\log F(z) = G(z) + \sum_n \log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k.$$

Derivando troviamo

$$\frac{F'}{F}(z) = G'(z) - \sum_n \frac{1}{z_n - z} + D\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

$$D^\nu\left(\frac{F'}{F}(z)\right) = G^{(\nu+1)}(z) - \nu! \sum_n \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}} + 0.$$

dove lo 0 in fondo è perché $p \leq \alpha$. Fissiamo $R > 0$ e definiamo la funzione $\varphi_R(z) = \frac{F(z)}{F(0)} \prod_{|z_n| \leq R} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{-1}$. Per $|z_n| \leq R$ e $|z| = 2R$ si ha

$$\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \geq \left|\frac{z}{z_n}\right| - 1 \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi_R(z)| \leq \frac{|F(z)|}{|F(0)|} \ll_\varepsilon e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0.$$

Per il principio del massimo, è vero per ogni $|z| \leq 2R$ e di conseguenza abbiamo che $\log|\varphi_R(z)| \leq C(\varepsilon) R^{\alpha+\varepsilon}$. Sia $\psi_R(z) = \log \varphi_R(z)$; è olomorfa in $|z| \leq R$ e $\psi_R(0) = 0$. Si ha $\mathfrak{Re}\psi_R(z) = \log|\varphi_R(z)|$, dunque per il teorema di Borel-Carathéodory

$$\max_{|z|=R/2} |\psi_R^{(\nu+1)}(z)| \ll_{\varepsilon,\nu} \frac{R}{R^{\nu+2}} R^{\alpha+\varepsilon} = R^{\alpha-\nu-1+\varepsilon}.$$

Sia $\varepsilon > 0$ t.c. $\alpha - \nu - 1 + \varepsilon < 0$. Allora

$$\psi_R'(z) = \frac{\varphi_R'(z)}{\varphi_R(z)} + \sum_{|z_n| \le R} \frac{1}{z_n - z}$$

$$\psi_R^{(\nu+1)}(z) = D^\nu \left(\frac{F'}{F}(z) \right) + \sum_{|z_n| \le R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}} = G^{(\nu+1)}(z) - \sum_{|z_n| > R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}}.$$

Supponiamo $|z| = R/2$, si ha

$$\left| \sum_{|z_n| > R} \frac{\nu!}{(z_n - z)^{\nu+1}} \right| \le C_1(\nu) \sum_{|z_n| > R} \frac{1}{|z_n|^{\nu+1}} = o(1) \text{ per } R \longrightarrow +\infty.$$

Si ha allora $|G^{(\nu+1)}(z)| \le C(\nu, \varepsilon) R^{-\delta} + o(1)$ per $|z| = R/2$ e dunque anche per $|z| \le R/2$. Basta fissare z e mandare $R \longrightarrow +\infty$. $\square$

Corollario 1.2.14. *Sia G come nel teorema di Hadamard. Se $q \le p$ si ha*

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{q} D^{k-1} \left(\frac{F'}{F}(0) \right)_{z=0} \frac{z^k}{k!};$$

se invece $p < q$ si ha

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{q} D^{k-1} \left(\frac{F'}{F}(0) \right)_{z=0} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{q} \left(\sum_n z_n^{-k} \right) \frac{z^k}{k}.$$

Inoltre, per $k > \max\{p, q\}$ si ha

$$\sum_n z_n^{-k} = -\frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} \left(\frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0}.$$

Dimostrazione. Per il corollario 1.1.8 si ha

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} D^{k-1} \left(\frac{F'}{F}(z) \right)_{z=0} + \frac{1}{k} \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^k,$$

con $p_n = p$ per ogni n. Abbiamo che G è un polinomio di grado q. Se $q \le p$, si ha $k \le q \le p$, quindi non c'è il termine $\frac{1}{k} \sum_{n: p_n < k} m_n z_n^{-k}$, come voluto.

Se $q > p$, abbiamo il termine $\frac{1}{k} \sum_n m_n z_n^{-k}$ per $p < k \le q$, cioè il termine $\sum_{k=p+1}^{q} \left(\sum_n z_n^{-k} \right) z^k$.

Se $k > \max\{p, q\}$, non c'è il termine z^k (nel quale la somma, poiché vale $k > p = p_n$, è fatta su tutti gli n). Allora si ha

$$\frac{1}{k!}D^{k-1}\left(\frac{F'}{F}(z)\right)_{z=0} + \frac{1}{k}\sum_n z_n^{-k}$$

che è ovviamente equivalente alla tesi. $\square$

Teorema 1.2.15. *Sia* $z_n \neq 0$ *una successione con esponente di convergenza* β *finito e* p *il minimo intero t.c.* $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$. *Sappiamo già che il prodotto di Weierstrass in forma canonica,*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right),$$

è uniformemente convergente, in particolare è una funzione intera. L'ordine di tale funzione, finito, è proprio β.

Dimostrazione. Sia $F(z) = \prod_n E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$, Vogliamo mostrare che

$$\log\left|\prod_n E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = \sum_n \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon} \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

Distinguiamo due casi.

Caso $|z/z_n| \leq 1/2$. Allora

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq \left|\log E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| =$$
$$= \left|\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=p+1}^{+\infty}\left|\frac{z}{z_n}\right|^k \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p+1}(1 + 1/2 + 1/4 + \dots) = 2\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{|z_n|\geq 2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq 2|z|^{p+1}\sum_{|z_n|\geq 2|z|}\frac{1}{|z_n|^{p+1}}.$$

Adesso, se $\beta = p+1$ l'ultima quantità è uguale a $2|z|^\beta \sum_{|z_n|\geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} \leq C|z|^\beta$.
Se invece $\beta < p+1$ prendiamo $\varepsilon < p+1-\beta$ per ottenere

$$2|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n|\geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} |z|^{p+1-\beta-\varepsilon} \leq$$
$$\leq \frac{|z|^{\beta+\varepsilon}}{2^{p-\beta-\varepsilon}} \sum_{|z_n|\geq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}.$$

Caso $|z/z_n| > 1/2$. Allora

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| + \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right) \leq$$
$$\leq \log\left(1 + \left|\frac{z}{z_n}\right|\right) + \sum_{k=1}^{p}\left|\frac{z}{z_n}\right|^k.$$

Adesso, se $p=0$ l'ultima quantità è $\leq C(\varepsilon)\left|\frac{z}{z_n}\right|^\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, dunque

$$\sum_{|z_n|<2|z|} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq C(\varepsilon)|z|^\varepsilon \sum_{|z_n|<2|z|} |z_n|^{-\varepsilon} =$$
$$= C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n|<2|z|} |z_n|^{-\varepsilon}|z|^{-\beta} \leq$$
$$C(\varepsilon)2^\beta|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n|<2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq \tilde{C}(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}.$$

Se invece $p \geq 1$, la quantità di prima è $\leq C\left|\frac{z}{z_n}\right|^p$, dunque

$$\sum_{|z_n|<2|z|} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq C|z|^p \sum_{|z_n|<2|z|} |z_n|^{-p} =$$
$$= C|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n|<2|z|} |z_n|^{-p}|z|^{p-\beta-\varepsilon} \leq$$
$$\leq C2^{\beta+\varepsilon-p}|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n|<2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} \leq C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}.$$

È lasciato al lettore il divertentissimo esercizio di verificare che le varie costanti moltiplicative (i cui nomi non sono stati scelti con troppa cura dall'autore) non creano davvero problemi, cioè che sono tutte maggiorate da una costante che dipende solo da ε e non da $|z|$. Abbiamo adesso $\alpha \leq \beta$ e l'altra disugaglianza già la sapevamo. $\square$

Corollario 1.2.16. *Se la funzione*

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

ha ordine α, la successione $z_n \neq 0$ ha esponente di convergenza β e G è un polinomio di grado q, allora $\alpha = \max\{q, \beta\}$.

Dimostrazione. $e^{G(z)}$ ha ordine q e il prodotto, per il teorema 1.2.15, ha ordine β. Poiché l'ordine del prodotto di due funzioni è minore o uguale del massimo fra i due ordini, allora $\alpha \leq \max\{q, \beta\}$. Ma abbiamo già visto che $\alpha \geq \beta$ e per il teorema di Hadamard 1.2.13 si ha anche $\alpha \geq q$. □

1.3 Numeri e polinomi di Bernoulli e $\zeta(2k)$

In questa sezione sfrutteremo i risultati visti finora per calcolare i valori della ζ di Riemann sui pari.

Definizione 1.3.1. Data F intera, il *genere* è $g = \max\{p, q\}$.

Osservazione 1.3.2. $\alpha - 1 \leq g \leq \alpha$. La seconda è ovvia. Se fosse $g < \alpha - 1$, avremmo $p < \alpha - 1 \Rightarrow \beta \leq p + 1 < \alpha$, ma anche $q < \alpha - 1$; dato che abbiamo $\alpha = \max\{\beta, q\}$, si ha un assurdo.

Esempio 1.3.3. Sia $F(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{\pi z}$. Si ha

$$\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \ll_\varepsilon e^{|z|^{1+\varepsilon}} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0,$$

dunque F ha ordine $\alpha \leq 1$. Gli zeri sono $z_n = \pm n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{1+\varepsilon}} < +\infty$ per ogni $\varepsilon > 0$ ma chiaramente non per $\varepsilon = 0$, da cui $\beta = 1$; $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha = 1$. Inoltre $p = 1$. Studiamo questa funzione.

I termini del prodotto di Weierstrass sono $E\left(\frac{z}{n}, 1\right) = \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right)$. $E\left(\frac{z}{n}, 1\right) \cdot E\left(\frac{z}{-n}, 1\right) = \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$. Abbiamo quindi il prodotto $\displaystyle\prod_n \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$. Per il teorema di Hadamard, il grado del polinomio G è $q \leq \alpha = 1 = p$. Per il corollario 1.2.14, $G(z) = \log F(0) + \frac{F'}{F}(0) z = \log 1 + 0 = 0$. Abbiamo allora $\displaystyle\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$.

Consideriamo

$$\log\big(F(z)\big) = \log\left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right) = \log\big(\sin(\pi z)\big) \log(\pi z);$$

derivando troviamo

$$\frac{F'}{F}(z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} - \frac{1}{z} = \pi\cot(\pi z) - \frac{1}{z}.$$

Per $k \geq 2$, dal corollario 1.2.14 si ha cot

$$\sum_n \frac{1}{n^k} + \sum_n \frac{1}{(-n)^k} = -\frac{D^{k-1}\big(\pi\cot(\pi z) - 1/z\big)_{z=0}}{(k-1)!}.$$

Passando ai pari, per $k \geq 1$ si ha

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{D^{2k-1}\big(\frac{\pi}{2}\cot(\pi z) - \frac{1}{2z}\big)_{z=0}}{(2k-1)!} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2}\cot(\pi z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k) z^{2k-1} \text{ per } |z| < 1.$$

È un esercizio verificare che $\zeta(2k) = 1 + O(1/2^{2k}) \sim 1$ per $k \longrightarrow +\infty$. Segue che $\sqrt[k]{\zeta(2k)} \longrightarrow 1$ per $k \longrightarrow +\infty$, ma anche, in particolare, $\sqrt[2k-1]{\zeta(2k)} \longrightarrow 1$ per $k \longrightarrow +\infty$, dunque il raggio di convergenza della funzione $\dfrac{1}{2z} - \dfrac{\pi}{2}\cot(\pi z)$ è proprio 1.

Definizione 1.3.4. Si dicono *numeri di Bernoulli* quelli definiti nel modo seguente:

$$B_n = D^n\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)_{z=0}.$$

Osservazione 1.3.5. Poiché la funzione $\frac{z}{e^z-1}$ ha raggio di convergenza 2π, dev'essere $\limsup \sqrt{\dfrac{B_n}{n!}} = \dfrac{1}{2\pi}$.

Osservazione 1.3.6.

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z + ze^z}{2(e^z - 1)} = \frac{z(1 + e^z)}{2(e^z - 1)}$$
$$f(-z) = \frac{-ze^z}{1 - e^z} - \frac{z}{2} = \frac{-ze^z - z}{2(1 - e^z)} = \frac{z(1 + e^z)}{2(e^z - 1)}$$

Quindi f è pari. Allora

$$D^{2k-1}\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)_{z=0} = -D^{2k-1}\left(\frac{z}{2}\right)_{z=0} = \begin{cases} -1/2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases},$$

dunque $B_1 = -1/2$ e $B_{2n-1} = 0$ per ogni $n > 1$.

Osservazione 1.3.7.

$$1=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\right)\frac{e^z-1}{z}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{z^{m-1}}{m!}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}\right)\frac{z^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{z^{n-1}}{n!}$$

Perciò $B_0=1$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0$ per ogni $n\geq 2$, che ci dà $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k=B_n$ e

$$B_{n-1}=-\frac{1+\binom{n}{1}B_1+\cdots+\binom{n}{n-2}B_{n-2}}{\binom{n}{n-1}}\Rightarrow B_n\in\mathbb{Q}.$$

Osservazione 1.3.8.

$$\cot(z)=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}=i\left(1+\frac{2z}{z(e^{2iz}-1)}\right)=$$
$$=i+\frac{1}{z}\cdot\frac{2iz}{e^{2iz}-1}=i+\frac{1}{z}\left(1-iz+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^kB_{2k}(2z)^{2k}}{(2k)!}\right)=$$
$$=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^kB_{2k}}{(2k)!}(2z)^{2k-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)z^{2k-1}=\frac{1}{2z}-\frac{\pi}{2}\cot(\pi z)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}B_{2k}z^{2k-1}}{(2k)!}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+O(1/4^k)=\zeta(2k)=\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(-1)^{k-1}B_{2k}=\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k).$$

Osservazione 1.3.9. $B_{2k}(-1)^{k-1}>0$. Inoltre,

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\leq|B_{2k}|\leq\frac{2(2k)!\pi^2}{6(2\pi)^{2k}}\text{ per ogni }k\geq 1.$$

Vogliamo vedere quando si ha

$$|B_{2(k+1)}|\geq\frac{2\big(2(k+1)\big)!}{(2\pi)^{2(k+1)}}\overset{?}{\geq}\frac{2(2k)!\pi^2}{6(2\pi)^{2k}}\geq|B_{2k}|$$
$$\frac{2(k+1)(2k+1)}{4\pi^2}\overset{?}{\geq}\frac{\pi^2}{6}$$
$$\pi^4\overset{?}{\leq}3(k+1)(2k+1),$$

che è vero per $k \geq 4$. Da lì in poi, i numeri di Bernoulli di indice pari hanno moduli crescenti.

Definizione 1.3.10. Si dice *polinomio di Bernoulli* n*-esimo* il seguente:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

Fatto 1.3.11.

– $B_n(0) = B_n$

– $B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = (-1)^n B_n$

Osservazione 1.3.12.

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m z^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right) z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k} x^{n-k}\right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$

Adesso un po' di fatti che chi vuole può divertirsi a dimostrare per esercizio.

Fatto 1.3.13.

1. $B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$. Per $y = 1$ si ha $B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x)$;
2. $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$;
3. $\sum_{k=m}^{n-1} k^r = \frac{B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m)}{r+1}$;
4. $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$.

1.4 La funzione Γ di Eulero

Adesso, un caso particolare di un teorema che non dimostreremo; lo utilizzeremo per dimostrare una proposizione che potrebbe essere dimostrata anche con il lemma di sommazione di Abel.

Teorema 1.4.1. *(formula di sommazione di Eulero-Maclaurin) Consideriamo* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *di classe* C^1*. Allora*

$$\sum_{a<k\leq b} f(k) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \Big[B_1(\{x\})f(x)\Big]_a^b + \int_a^b B_1(\{x\})f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se $a = m, b = n$,

$$\sum_{m<k\le n} f(k) = \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x - B_1 \cdot \big(f(n) - f(m)\big) + \int_m^n B_1(\{x\})f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Corollario 1.4.2.

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n B_1(\{x\})f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

dove ricordiamo che $B_1(\{x\}) = \{x\} - 1/2$.

Per completezza, riportiamo anche il lemma di Abel.

Lemma 1.4.3. *(formula di sommazione di Abel)*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k f(k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) f(n) - \int_m^n \left(\sum_{m\le k\le \lfloor x\rfloor} a_k\right) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposizione 1.4.4. *Esiste*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \gamma,$$

con $0 < \gamma < 1$.

Dimostrazione. Applichiamo il corollario 1.4.2 con $m = 1$ e $f(x) = 1/x$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{\{x\}-1/2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}-1/2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_n^{+\infty} \frac{\{x\}-1/2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} + O\left(\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) = \\ &= \log n + 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2}\,\mathrm{d}x + O(1/n) =: \log n + \gamma + O(1/n).\end{aligned}$$

Poiché $0 < \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2}\,\mathrm{d}x < 1$, si ha $0 < \gamma < 1$ con $\gamma = \displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. $\square$

Osservazione 1.4.5. Se $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1, infinitesima e non crescente, allora esiste $C > 0$ t.c. $\displaystyle\sum_{1 \le k \le x} f(k) = \int_1^x f(y)\,\mathrm{d}y + C + O\big(f(x)\big)$. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Osservazione 1.4.6. Si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^{q} \frac{B_{2r}}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}} + O\left(\frac{1}{n^{2q+2}}\right).$$

Definizione 1.4.7. Sia $\dfrac{1}{z\Gamma(z)}$ la funzione intera F di ordine 1 con zeri tutti semplici nei punti $-1, -2, -3, dots$ e t.c. $F(0) = 1$ e $F'(0) = \gamma$.

Deve essere $q = \deg G \le 1$, $\beta = 1$ e $\alpha = 1$. $G(z) = \log\big(F(0)\big) + \frac{F'}{F}(0) = \gamma z$, quindi $q = 1$. Vale anche $p = 1$ e $g = 1$. Si ha dunque

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Proposizione 1.4.8. *(formula di Gauss) Per $z \ne -m$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si ha*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{3}$$

Dimostrazione.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} =$$

$$= z \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/k} = z \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) n^{-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma(z) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^z \prod_{k=1}^{n} k}{z \prod_{k=1}^{n} (k+z)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

□

Proposizione 1.4.9. *Per $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si ha* $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=-k} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$.

Dimostrazione. Fissato k, consideriamo il limite a partire da $n \geq k$. Vogliamo calcolare $\big(\Gamma(z)(z+k)\big)_{z=-k}$. Si ha

$$\left(\frac{n^z n!(z+k)}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right)_{z=-k} = \frac{n^{-k}n!}{-k(-k+1)\cdots(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k)} =$$
$$= \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{n!}{(n-k)!}n^k\right) \longrightarrow \frac{(-1)^k}{k!} \text{ per } n \longrightarrow +\infty.$$

□

Proposizione 1.4.10. *(Eulero) Per $z \neq -m$ con $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ si ha la seguente formula:*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Dimostrazione. Dalla dimostrazione della formula di Gauss abbiamo trovato $\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{n\longrightarrow+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)n^{-z}$. Da $n = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k}$ otteniamo $n^{-z} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}$. Si ha dunque

$$z\lim_{n\longrightarrow+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)n^{-z} = z\lim_{n\longrightarrow+\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) =$$
$$= z\lim_{n\longrightarrow+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}\left(1+\frac{z}{k}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z} = z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\left(1+\frac{z}{n}\right).$$

Perciò

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}.$$

□

Proposizione 1.4.11. *Si ha $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ per $z \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 1.4.10 abbiamo

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^z \left(1+\frac{1}{n}\right) \left(1+\frac{z+1}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^z \left(\frac{n+1+z}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^z \left(1+\frac{z}{n+1}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z \frac{1}{z+1} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k+1}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z \frac{1}{z+1} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^{n+1} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} \frac{n+1}{n+1+z} =$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^z \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} = z\Gamma(z).$$

□

Osservazione 1.4.12. Abbiamo

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 2 \cdot \Gamma(1) = n!.$$

Proposizione 1.4.13. *Per $z \in \mathbb{C}$ si ha la relazione*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{5}$$

Dimostrazione. Per le proposizioni 1.4.11 e 1.4.10 si ha

$$z\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1+z)\Gamma(1-z) =$$

$$= \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-z}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1-z}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{z^2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n+1)^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}.$$

□

Per $n \geq 1$, vale la seguente formula di moltiplicazione dovuta a Gauss:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz).$$

Per i nostri scopi ci servirà solo un caso particolare, che è quello che dimostreremo.

Proposizione 1.4.14. *(formula di duplicazione di Legendre)*

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z). \tag{6}$$

Dimostrazione. Dalla formula di Gauss abbiamo

$$\Gamma(z) = \lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{m^z m!}{z(z+1)\cdots(z+m)} =$$

$$= \lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{m^z(m-1)!}{z(z+1)\dots(z+m-1)}\cdot\frac{m}{z+m} = \lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{m^z(m-1)!}{z(z+1)\dots(z+m-1)}.$$

Dunque

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} =$$

$$= \lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{2^{2z-1}}{\frac{(2m)^{2z}(2m-1)!}{2z(2z+1)\cdots(2z+2m-1)}}\cdot\frac{m^z(m-1)!}{z(z+1)\cdots(z+m-1)}\cdot\frac{m^{z+1/2}(m-1)!}{(z+1/2)(z+3/2)\cdots(z+m-1/2)} =$$

$$= \lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{2^{2z-1}m^{2z+1/2}\big((m-1)!\big)^2 2^m(2z)(2z+1)\cdots(2z+2m-1)}{(2m)^{2z}(2m-1)!z(z+1)\cdots(z+m-1)(2z+1)(2z+3)\cdots(2z+2m-1)} =$$

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{2^{2m-1}m^{1/2}\big((m-1)!\big)^2}{(2m-1)!}.$$

Questa quantità non dipende da z, perciò è costante. Per la proposizione 1.4.13 si ha $\Gamma^2(1/2) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; allora la costante è proprio $\sqrt{\pi}$, come voluto. $\square$

Osservazione 1.4.15. $\Gamma(1/2)\Gamma(1) = \sqrt{\pi}\Gamma(2) \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2 < 1$.

Osservazione 1.4.16.

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right)} =$$
$$= \frac{\sin(\pi z/2)}{\pi}\sqrt{\pi}2^{1-(1-z)}\Gamma(1-z) = \frac{\sin(\pi z/2)}{\sqrt{\pi}}2^z\Gamma(1-z).$$

Proposizione 1.4.17. *Fuori dai poli di* Γ *si ha* $\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(n+z)}$.

Dimostrazione.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$$
$$\log\big(\Gamma(z)\big) = -\log z - \gamma z + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right)$$
$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z}{n(n+z)}.$$

$\square$

Osservazione 1.4.18. Dalla proposizione 1.4.17 si ha

$$\Gamma'(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = -\gamma.$$

L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x$ converge per $\mathfrak{Re}z > 0$ e definisce una funzione olomorfa in z. Vale il seguente risultato.

Teorema 1.4.19. *Per* $\mathfrak{Re}z > 0$ *si ha*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare due cose:

1. $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x$;
2. $\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\,\mathrm{d}x = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

La tesi seguirà dalla formula di Gauss.

1. Il primo passo è mostrare la seguente catena di disuguaglianze:

$$0 \le e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le \frac{x^2}{n}e^{-x}. \qquad (\star)$$

   Notiamo che si ha

$$1+\frac{x}{n} \le 1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2!n^2}+\frac{x^3}{3!n^3}+\cdots \le 1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\cdots \iff$$
$$\iff 1+\frac{x}{n} \le e^{x/n} \le \frac{1}{1-x/n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le e^x \text{ e } \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le e^{-x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}\left(1-e^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) \le e^{-x}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right).$$

   Ricordiamo la disuguaglianza di Bernoulli: per $\alpha \ge 0$ e $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ abbiamo che $(1-\alpha)^n \ge 1-n\alpha$. Allora

$$e^{-x}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \le e^{-x}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right) = \frac{x^2}{n}e^{-x}.$$

   Ne deduciamo che

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^n e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^n e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x - \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\,\mathrm{d}x\right) \text{ e}$$
$$\left|\int_0^n \left(e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)x^{z-1}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^n x^{\mathfrak{Re}z-1}\left(e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}x \le$$
$$\le \frac{1}{n}\int_0^n x^{\mathfrak{Re}z-1+2}e^{-x}\,\mathrm{d}x \ll \frac{1}{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x.$$

2. Effettuando il cambio di variabile $y = x/n$ troviamo

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\,\mathrm{d}x = n^z\int_0^1 (1-y)^n y^{z-1}\,\mathrm{d}y;$$

integrando per parti più volte si ottiene che

$$\int_0^1 (1-y)^n y^{z-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{z}\int_0^1 (1-y)^{n-1} y^z\,\mathrm{d}y = \cdots =$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1 y^{z+n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

□

Teorema 1.4.20. *(Stirling) Sia $\varepsilon > 0$. Si ha la seguente formula asintotica:*

$$\log\big(\Gamma(z)\big) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right) \tag{8}$$

uniformemente per $|z| \geq \varepsilon$ e $|\arg z| \leq \pi-\varepsilon$. In particolare,

$$\log n! = (n+1/2)\left(\log n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n - 1 + \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|n+1|}\right) =$$
$$= (n+1/2)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dimostrazione. Abbiamo $\log\big(\Gamma(z)\big) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right)$. Notiamo che

$$\log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right) = z\log n - \log(z+n) - \sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{z-1}{k}\right).$$

Applicando la formula di Eulero-Maclaurin alla funzione $f_z(x) = \log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)$ troviamo

$$\sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{z-1}{k}\right) = \int_1^n \log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{2}\big(\log z + \log(z+n-1) - \log n\big) + \int_1^n B_1(\{x\})\left(\frac{1}{z+x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right) = \cdots = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z-1}{n}\right) +$$
$$+\log\left(1-\frac{1}{z+n}\right) - \int_1^n B_1(\{x\})\left(\frac{1}{z+x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x;$$

poiché $\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z-1}{n}\right)\sim\frac{z-1}{n}\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z-1$ con un resto di $O_\varepsilon(1/n)$, si ha

$$\log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+1+O_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)+$$
$$-\int_1^{+\infty}B_1(\{x\})\left(\frac{1}{z+x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_n^{+\infty}B_1(\{x\})\left(\frac{1}{z+x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+C+O_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)+R_z(n).$$

Ricordiamo che $DB_k(x)=kB_{k-1}(x)$ e che $\{x\}-1/2=x-\lfloor x\rfloor-1/2$, dunque una primitiva di $B_1(\{x\})$ è $\frac{(x-\lfloor x\rfloor)^2}{2}-\frac{x-\lfloor x\rfloor}{2}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}B_2(\{x\})$; allora integrando per parti si ha

$$\int_1^{+\infty}\frac{B_1(\{x\})}{z+x-1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)^2}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\frac{1}{12z}+\int_1^{+\infty}\frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poniamo anche $C=1+\int_1^{+\infty}\frac{B_1(\{x\})}{x}\,\mathrm{d}x$. Vogliamo vedere se

$$-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{B_2(\{x\})}{(z+x-1)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{B_2(\{x\})}{(z+x)^2}\,\mathrm{d}x\overset{?}{\ll_\varepsilon}\frac{1}{|z|}.$$

Si ha

$$\left|-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{B_2(\{x\})}{(z+x)^2}\,\mathrm{d}x\right|\le\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|z+x|^2}.$$

Da $|\arg z|\le\pi-\varepsilon$, abbiamo $|z+x|^2=|z|^2+x^2+2\langle z,x\rangle\ge|z|^2+x^2-2|z|x\cos\varepsilon$; scrivendo $y=x-|z|\cos\varepsilon$ e cambiando di variabile nei passaggi giusti troviamo

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|z+x|^2}\le\int_{-|z|\cos\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{|z|^2\sin^2\varepsilon+y^2}\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{|z|^2\sin^2\varepsilon+y^2}=$$
$$=\frac{1}{|z|\sin\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}\ll_\varepsilon\frac{1}{|z|}.$$

Ricordiamo adesso che

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=\sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\log\big(\Gamma(z)\big)+\log\big(\Gamma(z+1/2)\big)=\frac{1}{2}\log\pi+(1-2z)\log 2+\log\big(\Gamma(2z)\big);$$

si ha anche $\log\big(\Gamma(z)\big)=(z-1/2)\log z-z+C+O_\varepsilon(1/|z|)$, da cui con un po' di conti si trova che $C-\frac{1}{2}\log(2\pi)\ll_\varepsilon\frac{1}{|z|}\Rightarrow C=\frac{1}{2}\log(2\pi)$. $\square$

Corollario 1.4.21. *Se* $|z| \geq \varepsilon$ *e* $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ *si ha*

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Dimostrazione. Sia $f(z) = \log\big(\Gamma(z)\big) - (z - 1/2)\log z + z - \frac{1}{2}\log(2\pi)$. Preso z_0 che soddisfi le ipotesi e z t.c. $|z - z_0| = \varepsilon/2$, abbiamo $f(z) \ll_\varepsilon \frac{1}{|z|} \ll \frac{1}{|z_0|}$. Per la formula integrale di Cauchy troviamo

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,\mathrm{d}z \ll_\varepsilon \frac{1}{|z_0|},$$

dove γ è il cerchio di centro z_0 e raggio $\varepsilon/2$. La tesi segue notando che vale $f'(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) - \log z + \frac{1}{2z}$. □

Corollario 1.4.22. *Per* $|z| \geq \varepsilon$ *e* $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ *si ha*

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right)\right).$$

In particolare $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Dimostrazione. Per esercizio. □

Corollario 1.4.23. *Se* $k \geq 1$, *allora* $(-1)^k B_{2k} = 4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{e\pi}\right)^{2k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

Dimostrazione. Si ha infatti $(-1)^k B_{2k} = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)$, ma

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} \leq 1 + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2k}}1 + \frac{1}{2k-1} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

□

Osservazione 1.4.24. Si ritrova il raggio di convergenza di $\frac{z}{e^z - 1}$.

Corollario 1.4.25. *Sia* $z = x + iy$ *con* $x_1 \leq x \leq x_2$. *Allora*

$$|\Gamma(x + iy)| = \sqrt{2\pi}|y|^{x-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|y|}\left(1 + O\left(\frac{1}{|y|}\right)\right).$$

Dimostrazione.

$$\log\left(\Gamma(x+iy)\right) = \left(x - \frac{1}{2} + iy\right)\log(x+iy) - x - iy + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right)$$

$$\mathfrak{Re}\Big(\log\left(\Gamma(x+iy)\right)\Big) = \mathfrak{Re}\Big((x-1/2+iy)\big(\log(iy) + \log(1 - i\cdot x/y)\big)\Big) - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) =$$

$$= (x-1/2)\log|y| + iy\left(\frac{\pi}{2}\cdot i\cdot \operatorname{sgn}(y)\right) + iy\left(-\frac{ix}{y}\right) - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) =$$

$$= (x-1/2)\log|y| - |y|\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|y|}\right)$$

□

2 Titolo da decidere

2.1 Lo spazio di Schwarz

Definizione 2.1.1. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$; si dice che f *tende rapidamente* a 0 per $|x| \longrightarrow +\infty$ se $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} |x|^n f(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Osservazione 2.1.2. f tende rapidamente a 0 se e solo se $f(x)|x|^n$ è limitata per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definizione 2.1.3. Si dice *spazio di Schwarz* $\mathcal{S}$ lo spazio su $\mathbb{C}$ delle funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (a valori complessi) tendenti rapidamente a 0 insieme a tutte le loro derivate.

Osservazione 2.1.4. L'operatore D^k manda $\mathcal{S}$ in sé per ogni $k \geq 0$.

Notazione: indichiamo con M^k l'operatore $(M^k f)(x) = x^k f(x)$; abbiamo che anche M^k manda $\mathcal{S}$ in sé.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier in $\mathcal{S}$ definita come

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Si ha che è ben definita.

Osservazione 2.1.5. $|\hat{f}(\xi)| \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, quindi $\hat{f}$ è limitata se $f \in \mathcal{S}$.

Lemma 2.1.6. *L'operatore $\hat{}$ manda $\mathcal{S}$ in sé.*

Dimostrazione. Derivando sotto il segno di integrale abbiamo

$$\hat{f}'(\xi) = -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \widehat{Mf}(\xi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D\hat{f} = (-2\pi i)\widehat{Mf} \Rightarrow D^k \hat{f} = (-2\pi i)^k \widehat{M^k f} \Rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Integrando per parti si ha

$$\xi \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \xi e^{-2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[-\frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi i \xi x} f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi i}\widehat{Df}(\xi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M^k \hat{f} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \widehat{D^k f}.$$

Vogliamo concludere applicando l'osservazione 2.1.2 alle funzioni $D^k \hat{f}$. Notiamo che

$$M^h D^k \hat{f} = M^h (-2\pi i)^k \widehat{M^k f} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^h (-2\pi i)^k \widehat{D^h M^k f};$$

ci basta dunque mostrare che $\widehat{D^h M^k f}$ è limitata, ma questo segue dall'osservazione 2.1.5 e dal fatto che gli operatori D e M mandano $\mathcal{S}$ in sé. $\square$

Lemma 2.1.7. *(formula di Poisson) Se $f \in \mathcal{S}$ allora*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Dimostrazione. Sia $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$. g ha periodo 1. Poiché $f \in \mathcal{S}$, abbiamo che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} D^k f(x+n)$ converge uniformemente per ogni $k \geq 0$, dunque è uguale a $D^k g$, quindi $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Scriviamo g in serie di Fourier: $g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{2\pi i m x}$. Si ha

$$c_m = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i m x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2\pi i m x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x}\,\mathrm{d}x \overset{y=x+n}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m (y-n)}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i m x}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(m).$$

Basta allora guardare $g(0)$. $\square$

Lemma 2.1.8. *Sia $f(x) = e^{-\pi x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora $f \in \mathcal{S}$ e inoltre $\hat{f} = f$.*

Dimostrazione. Che $f \in \mathcal{S}$ è facile da dimostrare.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\hat{f}(\xi) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{per parti}}{=}$$

$$= \left[i e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i(2\pi i \xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}x = -2\pi \xi \hat{f}(\xi).$$

Abbiamo

$$
\begin{gathered}
u'(\xi) = -2\pi\xi u(\xi) \Rightarrow \frac{u'}{u}(\xi) = -2\pi\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow \log\big(u(\xi)\big) = -\pi\xi^2 + c \Rightarrow u(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{f}(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2}.
\end{gathered}
$$

Si ha anche $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow C = 1.$ □

Osservazione 2.1.9. La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}$ converge totalmente per $\mathfrak{Re}\, z \geq \varepsilon > 0$.

Definizione 2.1.10. Sia $z = x + iy$ con $x > 0$. Si dice *funzione ϑ di Jacobi* la seguente serie totalmente convergente:

$$\vartheta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}.$$

Lemma 2.1.11. *Per $x = \mathfrak{Re}\, z > 0$ si ha*

$$\vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\vartheta\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dimostrazione. Possiamo dimostrare la formula per $z = x > 0$, che valga in tutto il semipiano $\mathfrak{Re}\, z > 0$ segue per prolungamento analitico. Sia $f(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ e sia $f_x(\xi) = f(\sqrt{x}\xi) = e^{-\pi x\xi^2}$. Allora

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_x(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{x}t)e^{-2\pi i\xi t}\,\mathrm{d}t \overset{s=t\sqrt{x}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-2\pi i\frac{\xi}{\sqrt{x}}s}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} f\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_{\frac{1}{x}}(\xi).
\end{aligned}
$$

Applicando la formula di Poisson abbiamo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_x(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_x(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{x}} f_{\frac{1}{x}}(n),$$

quindi

$$\vartheta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{x}n^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

□

Riferimenti bibliografici

[D] Davenport Multiplicative Number Theory (da riportare meglio)

[JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007

[NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001

Ringraziamenti

Da scrivere alla fine del corso.
JBG e NN sopra nella bibliografia sono degli esempi lasciati per ricordarsi qual è il modo giusto di scriverli, da togliere dopo aver inserito la bibliografia giusta per queste dispense.