

Un'interpolazione dei teoremi di distorsione e
crescita di Koebe

Indice

Introduzione	3
1 Maggiorazione	5
2 Risultati parziali sulla minorazione	7
3 Controesempio per le funzioni in Σ	10
Riferimenti bibliografici	11

Introduzione

Siano

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \mid f(0) = 0, f'(0) = 1, f \text{ iniettiva}\},$$

$$\Sigma = \left\{ F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \mid F \text{ iniettiva}, F(z) = z + \sum_{n \geq 1} b_n z^{-n} \right\}$$

(la condizione di iniettività verrà a volte indicata dicendo che la funzione è *univalente*). Saremo soliti scrivere $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ per $f \in \mathcal{S}$. È facile vedere che se $f \in \mathcal{S}$ allora $1/f(1/z) + a_2 \in \Sigma$. Vale una sorta di viceversa, anche se non c'è esattamente corrispondenza biunivoca. Ricordiamo un esempio fondamentale di funzioni in \mathcal{S} : le funzioni di Koebe $f(z) = \frac{z}{(1 - \sigma z)^2}$ al variare di $\sigma \in \partial\mathbb{D}$.

Un risultato noto della teoria delle funzioni in \mathcal{S} è una coppia di catene di disuguaglianze, note come i teoremi di distorsione e crescita di Koebe.

Teorema 0.0.1. (*teoremi di distorsione e crescita, [D, Chapter 2.3, Theorems 2.5 and 2.6]*) Siano $f \in \mathcal{S}$ e $z \in \mathbb{D}$, allora

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3} \quad (1)$$

e

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}. \quad (2)$$

Se definiamo $f^*(z, w) = \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \cdot \frac{1 - \bar{w}z}{z - w}$ (il *rapporto iperbolico*), con la

convenzione che $f^*(z, z) = \frac{f'(z)(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}$ (la *derivata iperbolica*), allora le disuguaglianze (1) e (2) si riscrivono come

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f^*(z, z)| \frac{(1 - |f(z)|^2)}{(1 - |z|^2)^2} \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3},$$

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f^*(z, 0)| |z| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}.$$

Semplificando troviamo

$$\frac{1}{(1 + |z|)^4} \leq |f^*(z, z)| \frac{(1 - |f(z)|^2)}{(1 - |z|^2)^2} \leq \frac{1}{(1 - |z|)^4},$$

$$\frac{1}{(1 + |z|)^2} \leq |f^*(z, 0)| \leq \frac{1}{(1 - |z|)^2}.$$

Guardando queste equazioni, si potrebbe pensare di provare a interpolarle, ottenendo così

$$\frac{1}{(1+|z|)^2(1+|w|)^2} \leq |f^*(z, w)| \left| \frac{1 - \overline{f(w)}f(z)}{(1 - \bar{w}z)^2} \right| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2(1-|w|)^2};$$

adesso esplicitiamo il rapporto iperbolico, arrivando così a una prima congettura su come possiamo stimare il rapporto incrementale per f :

$$\frac{|1 - \bar{w}z|}{(1+|z|)^2(1+|w|)^2} \leq \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \leq \frac{|1 - \bar{w}z|}{(1-|z|)^2(1-|w|)^2}.$$

Tuttavia, non è questa la catena di disuguaglianze che ci interesserà studiare, per due motivi: il primo è che la minorazione è falsa, ed è facile costruire controesempi usando le funzioni di Koebe; il secondo è che la maggiorazione vale con un numeratore migliore, che sostituito nella minorazione ci dà una disuguaglianza che sembra essere vera (e lo è in molti casi), ma la cui dimostrazione in generale rimane sfuggente. Formuliamo dunque la nostra congettura:

$$\frac{1 - |wz|}{(1+|z|)^2(1+|w|)^2} \leq \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \leq \frac{1 - |wz|}{(1-|z|)^2(1-|w|)^2}. \quad (3)$$

Nella prima sezione dimostreremo, in due modi diversi, la maggiorazione. Nella seconda vedremo alcuni risultati parziali che pensiamo di aver trovato per la minorazione. Nella terza vedremo un risultato che ci permetterà di dedurre che, a quanto pare, non è possibile sperare di risolvere completamente il problema passando per le funzioni in Σ .

1 Maggiorazione

Teorema 1.0.1. *Siano $f \in \mathcal{S}$ e $z, w \in \mathbb{D}$. Allora*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \leq \frac{1 - |wz|}{(1 - |z|)^2(1 - |w|)^2}. \quad (4)$$

Dimostrazione. Useremo la maggiorazione del teorema di distorsione (1). Sia $\gamma(t) = w + t(z - w)$ il segmento che congiunge w a z , allora

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \left| \int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{\gamma} |f'(\zeta)| |d\zeta| \\ &\leq \int_{\gamma} \frac{1 + |\zeta|}{(1 - |\zeta|)^3} |d\zeta| \\ &= \int_0^1 \frac{1 + |w + t(z - w)|}{(1 - |w + t(z - w)|)^3} |z - w| dt. \end{aligned}$$

Adesso, osserviamo che $|w + t(z - w)| \leq |w| + t(|z| - |w|)$ e che la funzione $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ è crescente per $0 \leq x \leq 1$, dunque

$$\int_0^1 \frac{1 + |w + t(z - w)|}{(1 - |w + t(z - w)|)^2} |z - w| dt \leq \int_0^1 \frac{1 + |w| + t(|z| - |w|)}{(1 - (|w| + t(|z| - |w|)))^3} |z - w| dt,$$

ed effettuando il cambio di variabile $s = |w| + t(|z| - |w|)$ troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 + |w| + t(|z| - |w|)}{(1 - (|w| + t(|z| - |w|)))^2} |z - w| dt &= \int_{|w|}^{|z|} \frac{1 + s}{(1 - s)^3} \frac{|z - w|}{|z| - |w|} ds \\ &= \frac{|z - w|(1 - |zw|)}{(1 - |z|)^2(1 - |w|)^2}. \end{aligned}$$

Questo dimostra la tesi per $|z| > |w|$, e per simmetria per $|z| \neq |w|$, ma a questo punto mandando al limite $|z| \rightarrow |w|$ la otteniamo anche per $|z| = |w|$. \square

Notiamo che noi volevamo generalizzare le disuguaglianze di Koebe, ma ci siamo comunque dovuti appoggiare ad una di esse. Questa non è necessariamente una cosa negativa e rimane comunque un approccio valido, ma proporremo adesso un'altra dimostrazione che si basa sulla stima dei coefficienti a_n di f ; vedremo nella prossima sezione che l'idea di stimare i coefficienti porterà a risultati parziali sulla minorazione passando da Σ .

Per le funzioni in \mathcal{S} è stato congetturato da Bieberbach [B] e poi dimostrato da de Branges [dB] che vale $|a_n| \leq n$. Vediamo come questo ci dà

immediatamente la maggiorazione:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| &= \left| \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n - w^n)}{z - w} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_n z^j w^{n-1-j} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} |a_n| |z|^j |w|^{n-1-j} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} n |z|^j |w|^{n-1-j} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{|z|^n - |w|^n}{|z| - |w|} = \frac{1}{|z| - |w|} \left(\frac{|z|}{(1 - |z|)^2} - \frac{|w|}{(1 - |w|)^2} \right) \\
&= \frac{1 - |zw|}{(1 - |z|)^2 (1 - |w|)^2}.
\end{aligned}$$

2 Risultati parziali sulla minorazione

Come già anticipato, per la maggior parte dei risultati in questa sezione passeremo dalle funzioni in Σ ; per fissare la notazione, data $f \in \mathcal{S}$, indichiamo con F la funzione in Σ data da $F(z) = 1/f(1/z) + a_2$. Vediamo subito un risultato parziale che sarà un po' il fulcro di tutti i nostri tentativi di dimostrare qualcosa passando per Σ .

Proposizione 2.0.1. *Sia $f \in \mathcal{S}$ tale che per la $F \in \Sigma$ corrispondente e per ogni $\zeta, \eta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ si ha*

$$\left| \frac{F(\zeta) - F(\eta)}{\zeta - \eta} \right| \geq 1 - \frac{1}{|\zeta\eta|};$$

allora vale la minorazione per f .

Dimostrazione. Dati $z, w \in \mathbb{D}$, poniamo $\zeta = 1/z, \eta = 1/w$. Ricordando la definizione di F abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} \left| \frac{1/f(z) - 1/f(w)}{1/z - 1/w} \right| &\geq 1 - |zw| \\ \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| &\geq \left| \frac{f(w)f(z)}{zw} \right| (1 - |zw|), \end{aligned}$$

e a questo punto la tesi segue applicando la minorazione in (2). \square

Quello che otterremo in questa sezione saranno delle stime dal basso per $\left| \frac{F(\zeta) - F(\eta)}{\zeta - \eta} \right|$ che, ripetendo il ragionamento appena fatto, ci daranno dei risultati parziali per la minorazione in (3). In generale, se $N : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow [0, +\infty)$ è tale che $\left| \frac{F(\zeta) - F(\eta)}{\zeta - \eta} \right| \geq N(1/\zeta, 1/\eta)$, allora vale la minorazione con $N(z, w)$ al posto di $1 - |zw|$. Vedremo che, sotto alcune ipotesi aggiuntive, riusciremo a dimostrare la disuguaglianza voluta.

Definiamo adesso dei coefficienti che chiameremo impropriamente coefficienti di Grunsky: data $F \in \Sigma$, scriviamo

$$\log \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = - \sum_{n,k=1}^{+\infty} \gamma_{nk} z^{-n} w^{-k}$$

(i veri coefficienti di Grunsky sarebbero $\beta_{nk} = n\gamma_{nk}$).

Enunciamo delle disuguaglianze molto utili sui coefficienti di Grunsky.

Teorema 2.0.2. *(disuguaglianze di Grunsky, [D, Chapter 4.3, Inequalities (10) and (12)]) Per ogni scelta di $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{C}$ vale*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left| \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} \lambda_n \right|^2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{|\lambda_n|^2}{n} \quad (5)$$

e

$$\left| \sum_{n,k=1}^N \gamma_{nk} \lambda_n \mu_k \right|^2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{|\lambda_n|^2}{n} \sum_{n=1}^N \frac{|\mu_n|^2}{n}. \quad (6)$$

Vediamo come una diretta applicazione di (6) con $\lambda_n = z^{-n}, \mu_k = w^{-k}$ ci permette già di dire qualcosa (mandando $N \rightarrow +\infty$):

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{F(z) - F(w)}{z - w} \right|^2 &= \left| - \sum_{n,k=1}^{+\infty} \gamma_{nk} z^{-n} w^{-k} \right|^2 \leq \left(\sum_{n,k=1}^{+\infty} |\gamma_{nk}| |z|^{-n} |w|^{-k} \right)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n |z|^{2n}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n |w|^{2n}} = \log \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right) \log \left(1 - \frac{1}{|w|^2} \right). \end{aligned}$$

Si ha allora

$$-\log \left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} \right| \leq \left| \log \frac{F(z) - F(w)}{z - w} \right| \leq \sqrt{\log \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right) \log \left(1 - \frac{1}{|w|^2} \right)},$$

da cui

$$\left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} \right| \geq \exp \left(- \sqrt{\log \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right) \log \left(1 - \frac{1}{|w|^2} \right)} \right).$$

Questo ci dà un'espressione per $N(z, w)$ non proprio bella da vedere, ma che per adesso è il miglior risultato generale ottenuto:

$$N(z, w) = \exp \left(- \sqrt{\log (1 - |z|^2) \log (1 - |w|^2)} \right). \quad (7)$$

Volendo la si può sostituire con un'espressione più semplice da maneggiare: $\sqrt{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$; tuttavia, è una stima peggiore e il caso $w = 0$ non interpola bene. Il problema principale di queste due espressioni per $N(z, w)$ è che, fissato w , tendono a 0 per $|z| \rightarrow 1$, cosa che non accade con $1 - |zw|$ e che comunque non vale per il rapporto incrementale, quindi in quel caso non sarebbe una buona stima. Entrambe ci permettono comunque di dedurre che la minorazione in (3) è vera per $|z| = |w|$.

Una generalizzazione in più variabili per l'espressione (7), o meglio per la stima del modulo del logaritmo, può essere trovata in [Gol, Chapter IV.2, Theorem 3].

Un altro caso particolare è quello in cui $\arg z = \arg w$. Infatti, nell'articolo in cui Golusin applica metodi variazionali per ottenere questo tipo di stime ottiene il risultato (inserire citazione); questo ci permette di dire che la minorazione congetturata è vera in questo caso.

Continuando ad indagare questi risultati parziali, possiamo dimostrare la minorazione anche per $F \in \Sigma$ con coefficienti non negativi. Questo grazie a un

risultato dovuto a Gronwall, direttamente dall'articolo in cui dimostra il suo famoso teorema dell'area.

Proposizione 2.0.3. *(inserire citazione) Sia $F \in \Sigma$ e per $|z| > 1$ scriviamo $F(z) = z + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{-n}$. Se $a_n \geq 0$ per ogni n , allora $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq 1$. Vediamo*

come questo ci dà la minorazione:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} \right| &= \left| \frac{z - w + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^{-n} - w^{-n})}{z - w} \right| = \\ &= \left| 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n w^n} \sum_{h+j=n-1} z^h w^j \right| \geq \\ &\geq 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{|z w|} \sum_{h+j=n-1} |z|^{h-n+1} |w|^{j-n+1} \geq \\ &\geq 1 - \frac{1}{|z w|} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n \geq 1 - \frac{1}{|z w|}. \end{aligned}$$

Come ultimo risultato parziale, vediamo una dimostrazione per le funzioni in \mathcal{S} convesse (cioè con immagine convessa), che è indipendente dalla stima per le funzioni in Σ .

Proposizione 2.0.4. *Sia $f \in \mathcal{S}$ tale che $\text{Im } f$ è convessa. Allora vale la minorazione in (3).*

Dimostrazione. Supponiamo $|w| < |z|$ e sia $\Gamma(t) = f(w) + t(f(z) - f(w)) \subset \text{Im } f$ il segmento che collega le immagini dei due punti, per ipotesi tutto contenuto nell'immagine. Cambiando di variabile e applicando la minorazione in (1) troviamo

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \int_{\Gamma} |d\eta| = \int_{f^{-1}(\Gamma)} |f'(\zeta)| |d\zeta| \geq \\ &\geq \int_{f^{-1}(\Gamma)} \frac{1 - |\zeta|}{(1 + |\zeta|)^3} |d\zeta| \geq \\ &\geq \int_{\gamma} \frac{1 - |\zeta|}{(1 + |\zeta|)^3} |d\zeta|, \end{aligned}$$

dove $\gamma(t) = w + t(z - w)$ (è di questo passaggio che non sono tanto sicuro, perché non ho ben capito come fa Lowner a passare dall'uguaglianza alla disuguaglianza e se mi sono sbagliato potrebbe essere che quello che fa lui non va bene per il cambio di variabile che ci serve). Osserviamo che $(1 - x)/(1 + x)^3$ è decrescente, quindi possiamo concludere in maniera analoga a quanto già fatto per la maggiorazione per ottenere la tesi. \square

3 Controesempio per le funzioni in Σ

Purtroppo, non ci sono molte speranze di dimostrare la congettura passando da Σ . Il motivo è che la disuguaglianza nelle ipotesi della proposizione 2.0.1 non è vera in generale. L'esistenza implicita di un controesempio ci è data dal seguente risultato.

Teorema 3.0.1. *(inserire citazione) Siano $\zeta, \eta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ e sia $F \in \Sigma$ che massimizza la quantità*

$$I_F = \Re \left(-\log \frac{f(\zeta) - f(\eta)}{\zeta - \eta} \right) = \log \left| \frac{f(\zeta) - f(\eta)}{\zeta - \eta} \right|^{-1};$$

allora l'immagine di F è tutto il piano meno un tratto di iperbole.

È chiaro che massimizzare I_F ci dà la stima cercata in Σ . Supponiamo per assurdo che tale massimo sia $\log \left(1 - \frac{1}{|\zeta\eta|} \right)^{-1}$ come voluto; è facile vedere che, fissati ζ e η , esiste $\rho \in \partial\mathbb{D}$ tale che, detta $F(\zeta) = \zeta + \rho^2/\zeta$, allora I_F assume tale valore. Ma questa F è ottenuta da un'opportuna funzione di Koebe, dunque la sua immagine è tutto il piano meno un segmento, contraddizione.

Questo non esclude che la disuguaglianza sia vera in \mathcal{S} , ma se fosse vera ciò evidenzerebbe una certa asimmetria tra \mathcal{S} e Σ per queste disuguaglianze a due punti. Ciò non deve stupire in quanto, per passare queste disuguaglianze da un insieme all'altro, compaiono dei termini che inevitabilmente rendono la disuguaglianza in arrivo leggermente più debole, cioè non c'è equivalenza. Questo si può vedere ad esempio con la maggiorazione: se fosse vera la controparte in Σ che implica la disuguaglianza in \mathcal{S} , avremmo $\left| \frac{F(\zeta) - F(\eta)}{\zeta - \eta} \right| \leq 1 - \frac{1}{|\zeta\eta|}$, ma è facile vedere (con lo stesso esempio di prima, derivato dalle Koebe) che questa disuguaglianza non può essere vera.

Riferimenti bibliografici

- [B] L. Bieberbach: Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, **1** (1916), no. 3, 940–955
- [D] P. L. Duren: **Univalent Functions**. Springer-Verlag, New York, 1983
- [dB] L. de Branges: A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Mathematica*, **154** (1985) no. 1-2, 137–152
- [Gol] G. M. Goluzin: **Geometric theory of functions of a complex variable**. American Mathematical Society, Providence, 1969
- [Gr] T. H. Gronwall: Some remarks on conformal representation. *Annals of Mathematics. Second Series*, **16** (1914), no. 1-4, 72–76