Un'interpolazione dei teoremi di distorsione e crescita di Koebe

Indice

Introduzione

Siano

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \mid f(0) = 0, f'(0) = 1, f \text{ iniettiva}\},$$

$$\Sigma = \left\{ F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \mid F \text{ iniettiva}, F(z) = z + \sum_{n \geq 1} b_n z^{-n} \right\}$$

(la condizione di iniettività verrà a volte indicata dicendo che la funzione è *univalente*). Saremo soliti scrivere $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ per $f \in \mathcal{S}$. È facile vedere che se $f \in S$ allora $1/f(1/z) + a_2 \in \Sigma$. Vale una sorta di viceversa, anche se non c'è esattamente corrispondenza biunivoca. Un risultato noto della teoria delle funzioni in $\mathcal{S}$ è una coppia di catene di disuguaglianze, note come i teoremi di distorsione e crescita di Koebe.

Teorema 0.0.1. *(Koebe, inserire citazione) Siano $f \in \mathcal{S}$ e $x \in \mathbb{D}$, allora*

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3} \tag{1}$$

e

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}. \tag{2}$$

Se definiamo $f^*(z, w) = \dfrac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \cdot \frac{1 - \bar{w} z}{z - w}$ (il *rapporto iperbolico*), con la convenzione che $f^*(z, z) = \dfrac{f'(z)(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}$ (la *derivata iperbolica*), allora le disuguaglianze (1) e (2) si riscrivono come

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f^*(z, z)| \frac{\left(1 - |f(z)|^2\right)}{(1 - |z|^2)} \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3},$$
$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f^*(z, 0)||z| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}.$$

Semplificando un po', troviamo

$$\frac{1}{(1 + |z|)^4} \leq |f^*(z, z)| \frac{\left(1 - |f(z)|^2\right)}{(1 - |z|^2)^2} \leq \frac{1}{(1 - |z|)^4},$$
$$\frac{1}{(1 + |z|)^2} \leq |f^*(z, 0)| \leq \frac{1}{(1 - |z|)^2}.$$

Guardando queste equazioni, si potrebbe pensare di provare a interpolarle, ottenendo così

$$\frac{1}{(1 + |z|)^2 (1 + |w|)^2} \leq |f^*(z, w)| \left| \frac{1 - \overline{f(w)} f(z)}{(1 - \bar{w} z)^2} \right| \leq \frac{1}{(1 - |z|)^2 (1 - |w|)^2};$$

adesso possiamo “nascondere il rapporto iperbolico sotto il tappeto” esplicitandolo, arrivando così a una prima congettura su come possiamo stimare il rapporto incrementale per f:

$$\frac{|1-\bar{w}z|}{(1+|z|)^2(1+|w|)^2} \leq \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leq \frac{|1-\bar{w}z|}{(1-|z|)^2(1-|w|)^2}.$$

Tuttavia, non è questa la catena di disuguaglianze che ci interesserà studiare, per due motivi: il primo è che la minorazione è falsa, ed è facile costruire controesempi usando le funzioni di Koebe $f_\theta(z) = \dfrac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$, $\theta \in \mathbb{R}$; il secondo è che la maggiorazione vale con un numeratore migliore, che sostituito nella minorazione ci dà una disuguaglianza che sembra essere vera (e lo è in molti casi), ma la cui dimostrazione in generale rimane sfuggente. Formuliamo dunque la nostra congettura:

$$\frac{1-|wz|}{(1+|z|)^2(1+|w|)^2} \leq \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leq \frac{1-|wz|}{(1-|z|)^2(1-|w|)^2}. \tag{3}$$

Nella prima sezione dimostreremo, in due modi diversi, la maggiorazione. Nella seconda vedremo alcuni risultati parziali che pensiamo di aver trovato per la minorazione. Nella terza vedremo un risultato che ci permetterà di dedurre che, a quanto pare, non è possibile approcciare il problema attraverso l’insieme Σ.

1 Maggiorazione

Teorema 1.0.1. *Siano $f \in \mathcal{S}$ e $z, w \in \mathbb{D}$. Allora*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \leq \frac{1 - |wz|}{(1 - |z|)^2 (1 - |w|)^2}. \tag{4}$$

Dimostrazione. Useremo la maggiorazione del teorema di distorsione (1). Sia $\gamma(t) = w + t(z - w)$ il segmento che congiunge w a z, allora

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| = \left| \int_\gamma f'(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta \right| &\leq \int_\gamma |f'(\zeta)| \, |\mathrm{d}\zeta| \leq \\ &\leq \int_\gamma \frac{1 + |\zeta|}{(1 - |\zeta|)^3} |\mathrm{d}\zeta| = \\ &= \int_0^1 \frac{1 + |w + t(z - w)|}{\big(1 - |w + t(z - w)|\big)^2} |z - w| \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Adesso, osserviamo che $|w + t(z - w)| \leq |w| + t(|z| - |w|)$ e che la funzione $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ è crescente per $0 \leq x \leq 1$, dunque

$$\int_0^1 \frac{1 + |w + t(z - w)|}{\big(1 - |w + t(z - w)|\big)^2} |z - w| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1 + |w| + t(|z| - |w|)}{\Big(1 - \big(|w| + t(|z| - |w|)\big)\Big)^2} |z - w| \, \mathrm{d}t,$$

ed effettuando il cambio di variabile $s = |w| + t(|z| - |w|)$ troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 + |w| + t(|z| - |w|)}{\Big(1 - \big(|w| + t(|z| - |w|)\big)\Big)^2} |z - w| \, \mathrm{d}t &= \int_{|w|}^{|z|} \frac{1 + s}{(1 - s)^3} \frac{|z - w|}{|z| - |w|} \, \mathrm{d}s = \\ &= \frac{|z - w|(1 - |zw|)}{(1 - |z|)^2 (1 - |w|)^2}. \end{aligned}$$

Dobbiamo prestare attenzione, perché questo dimostra la tesi per $|z| > |w|$, e per simmetria per $|z| \neq |w|$, ma a questo punto mandando al limite $|z| \longrightarrow |w|$ la otteniamo anche per $|z| = |w|$. □

Una cosa che lascia leggermente insoddisfatti di questa dimostrazione è che noi volevamo generalizzare le disuguaglianze di Koebe, ma ci siamo comunque dovuti appoggiare ad una di esse. Questa non è necessariamente una cosa negativa e rimane comunque un approccio valido, ma proporremo adesso un'altra dimostrazione che si basa sulla stima dei coefficienti a_n di f, approccio che vedremo porterà a qualche risultato sulla minorazione passando da Σ.

Per le funzioni in $\mathcal{S}$ è stato congetturato da Bieberbach (inserire citazione) e poi dimostrato da De Brange (inserire citazione) che vale $|a_n| \leq n$. Vediamo come questo ci dà immediatamente la maggiorazione:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| &= \left|\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n-w^n)}{z-w}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_n z^j w^{n-1-j}\right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n-1} |a_n||z|^j|w|^{n-1-j} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n-1} n|z|^j|w|^{n-1-j} = \\ &= \frac{1-|zw|}{(1-|z|)^2(1-|w|)^2}.\end{aligned}$$

2 Risultati parziali sulla minorazione

Come già anticipato, passeremo da Σ; per fissare la notazione, data $f \in \mathcal{S}$, indichiamo con F la funzione in Σ data da $F(z) = 1/f(1/z) + a_2$. Vediamo subito un risultato parziale che sarà un po' il fulcro di tutti i nostri tentativi di dimostrare qualcosa passando per Σ.

Proposizione 2.0.1. *Sia $f \in \mathcal{S}$ tale che per la $F \in \Sigma$ corrispondente e per ogni $\zeta, \eta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ si ha*

$$\left| \frac{F(\zeta) - F(\eta)}{\zeta - \eta} \right| \geq 1 - \frac{1}{|\zeta\eta|};$$

allora vale la minorazione per f.

Dimostrazione. Dati $z, w \in \mathbb{D}$, poniamo $\zeta = 1/z, \eta = 1/w$. Ricordando la definizione di F abbiamo dunque che

$$\left| \frac{1/f(z) - 1/f(w)}{1/z - 1/w} \right| \geq 1 - |zw|$$
$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \geq \left| \frac{f(w)f(z)}{zw} \right| (1 - |zw|),$$

e a questo punto la tesi segue applicando la minorazione in (2). $\square$

Quello che otterremo in questa sezione saranno delle stime dal basso per $\left| \frac{F(\zeta) - F(\eta)}{\zeta - \eta} \right|$ che, ripetendo il ragionamento appena fatto, ci daranno dei risultati parziali per la minorazione in (3). Vedremo che, sotto alcune ipotesi aggiuntive, riusciremo a dimostrare la disuguaglianza voluta.

Partiamo definendo dei coefficienti che chiameremo impropriamente coefficienti di Grunsky: data $F \in \Sigma$, scriviamo

$$\log \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = -\sum_{n,k=1}^{+\infty} \gamma_{nk} z^{-n} w^{-k}$$

(i veri coefficienti di Grunsky sarebbero $\beta_{nk} = n\gamma_{nk}$).

Per cominciare, enunciamo delle disuguaglianze molto utili sui coefficienti di Grunsky.

Teorema 2.0.2. *(Grunsky, inserire citazione) Per ogni scelta di $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{C}$ vale*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma_{nk} \lambda_n \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n} \tag{5}$$

e

$$\left|\sum_{n,k=1}^{N}\gamma_{nk}\lambda_n\mu_k\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{|\lambda_n|^2}{n}\sum_{n=1}^{N}\frac{|\mu_n|^2}{n}. \tag{6}$$

Vediamo come una diretta applicazione di (6) con $\lambda_n = z^{-n}, \mu_k = w^{-k}$ ci permette già di dire qualcosa (mandando $N \longrightarrow +\infty$):

$$\left|\log\frac{F(z)-F(w)}{z-w}\right|^2 \leq \left(\sum_{n,k=1}^{+\infty}|\gamma_{nk}||z|^{-n}|w|^{-k}\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n|z|^{2n}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n|w|^{2n}} = \log\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)\log\left(1-\frac{1}{|w|^2}\right).$$

Si ha allora

$$-\log\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w}\right| \leq \left|\log\frac{F(z)-F(w)}{z-w}\right| \leq \sqrt{\log\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)\log\left(1-\frac{1}{|w|^2}\right)},$$

da cui

$$\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w}\right| \geq \exp\left(-\sqrt{\log\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)\log\left(1-\frac{1}{|w|^2}\right)}\right).$$

Questo ci dà un'espressione per $N(z,w)$ non proprio bella da vedere, ma che per adesso è il miglior risultato generale ottenuto:

$$N(z,w) = \exp\left(-\sqrt{\log\left(1-|z|^2\right)\log\left(1-|w|^2\right)}\right). \tag{7}$$

Volendo la si può sostituire con un'espressione più semplice da maneggiare: $\sqrt{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$; tuttavia, è una stima peggiore e il caso $w = 0$ non interpola bene. Il problema principale di queste due espressioni per $N(z,w)$ è che, fissato w, tendono a 0 per $|z| \longrightarrow 1$, cosa che non accade con $1-|zw|$. Entrambe ci permettono comunque di dedurre che la minorazione in (3) è vera per $|z| = |w|$.

Una generalizzazione in più variabili per l'espressione (7), o meglio per la stima del modulo del logaritmo, può essere trovata in (citare bene il teorema 3 di IV.2 in Golusin).

Un altro caso particolare è quello in cui $\arg z = \arg w$. Infatti, nell'articolo in cui Golusin applica metodi variazionali per ottenere questo tipo di stime ottiene il risultato (inserire citazione); questo ci permette di dire che la minorazione congetturata è vera in questo caso.

Continuando ad indagare questi risultati parziali, possiamo dimostrare la minorazione anche per $F \in \Sigma$ con coefficienti non negativi. Questo grazie a un risultato dovuto a Gronwall, direttamente dall'articolo in cui dimostra il suo famoso teorema dell'area.

Proposizione 2.0.3. *(inserire citazione) Sia $F \in \Sigma$ e per $|z| > 1$ scriviamo $F(z) = z + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{-n}$. Se $a_n \geq 0$ per ogni n, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq 1$.* Vediamo come questo ci dà la minorazione:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w}\right| &= \left|\frac{z-w+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^{-n}-w^{-n})}{z-w}\right| = \\
&= \left|1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{z^n w^n}\sum_{h+j=n-1} z^h w^j\right| \geq \\
&\geq 1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{|zw|}\sum_{h+j=n-1}|z|^{h-n+1}|w|^{j-n+1} \geq \\
&\geq 1-\frac{1}{|zw|}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n \geq 1-\frac{1}{|zw|}.
\end{aligned}$$

Come ultimo risultato parziale, vediamo una dimostrazione per le funzioni in $\mathcal{S}$ convesse (cioè con immagine convessa), che è indipendente dalla stima per le funzioni in Σ.

Proposizione 2.0.4. *Sia $f \in \mathcal{S}$ tale che $\operatorname{Im} f$ è convessa. Allora vale la minorazione in* (3).

Dimostrazione. Supponiamo $|w| < |z|$ e sia $\Gamma(t) = f(w)+t\big(f(z)-f(w)\big) \subset \operatorname{Im} f$ il segmente che collega le immagini dei due punti, per ipotesi tutto contenuto nell'immagine. Cambiando di variabile e applicando la minorazione in (1) troviamo

$$\begin{aligned}
|f(z)-f(w)| &= \int_\Gamma |\,\mathrm{d}\eta| = \int_{f^{-1}(\Gamma)} |f'(\zeta)||\,\mathrm{d}\zeta| \geq \\
&\geq \int_{f^{-1}(\Gamma)} \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3}|\,\mathrm{d}\zeta| \geq \\
&\geq \int_\gamma \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3}|\,\mathrm{d}\zeta|,
\end{aligned}$$

dove $\gamma(t) = w + t(z-w)$ (è di questo passaggio che non sono tanto sicuro, perché non ho ben capito come fa Lowner a passare dall'uguaglianza alla disuguaglianza e se mi sono sbagliato potrebbe essere che quello che fa lui non va bene per il cambio di variabile che ci serve). Osserviamo che $(1-x)/(1+x)^3$ è decrescente, quindi possiamo concludere in maniera analoga a quanto già fatto per la maggiorazione per ottenere la tesi. □

3 Controesempio per le funzioni in Σ

Purtroppo, non ci sono molte speranze di dimostrare la congettura passando da Σ. Il motivo è che la disuguaglianza nelle ipotesi della proposizione 2.0.1 non è vera in generale. L'esistenza implicita di un controesempio ci è data dal seguente risultato.

Teorema 3.0.1. *(inserire citazione) Siano $\zeta, \eta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ e sia $F \in \Sigma$ che massimizza la quantità*

$$I_F = \mathfrak{Re}\left(-\log \frac{f(\zeta) - f(\eta)}{\zeta - \eta}\right) = \log \left|\frac{f(\zeta) - f(\eta)}{\zeta - \eta}\right|^{-1};$$

allora l'immagine di F è tutto il piano meno un tratto di iperbole.

È chiaro che massimizzare I_F ci dà la stima cercata in Σ. Supponiamo per assurdo che tale massimo sia $\log\left(1 - \frac{1}{|\zeta\eta|}\right)^{-1}$ come voluto; è facile vedere che, fissati ζ e η, esiste $\rho \in \partial\mathbb{D}$ tale che, detta $F(\zeta) = \zeta + \rho^2/\zeta$, allora I_F assume tale valore. Ma questa F è ottenuta da un'opportuna funzione di Koebe, dunque la sua immagine è tutto il piano meno un segmento, contraddizione.

Questo non esclude che la disuguaglianza sia vera in $\mathcal{S}$, ma se fosse vera ciò evidenzierebbe una certa asimmetria tra $\mathcal{S}$ e Σ per queste disuguaglianze a due punti. Ciò non deve stupire in quanto, per passare queste disuguaglianze da un insieme all'altro, compaiono dei termini che inevitabilmente rendono la disuguaglianza in arrivo leggermente più debole, cioè non c'è equivalenza. Questo si può vedere ad esempio con la maggiorazione: se fosse vera la controparte in Σ che implica la disuguaglianza in $\mathcal{S}$, avremmo $\left|\frac{F(\zeta)-F(\eta)}{\zeta-\eta}\right| \leq 1 - \frac{1}{|\zeta\eta|}$, ma è facile vedere (con lo stesso esempio di prima, derivato dalle Koebe) che questa disuguaglianza non può essere vera.

Riferimenti bibliografici

Da scrivere.