

Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini Relatore: Prof. Marco Abate

Indice

Introduzione	3
1 Prerequisiti	4
1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré	4
1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali	9
2 Lemmi di Schwarz-Pick multi-punto	15
2.1 Teorema di Beardon-Minda e corollari	15
2.2 Applicazioni dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto	23
3 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz	28
3.1 Rigidità al bordo	28
3.2 Teorema di Burns-Krantz	29
Ringraziamenti	31

Introduzione

L'obiettivo di questo scritto è dimostrare un teorema del 1994, il teorema di Burns-Krantz (Theorem 2.1 di [BK]), attraverso risultati elementari. L'enunciato del teorema riguarda le funzioni olomorfe sul disco unitario con un certo andamento vicino al bordo, ed è un risultato di rigidità: se la funzione dista dall'identità al più per un $o((z - \sigma)^3)$, allora è proprio l'identità.

La dimostrazione originale del teorema non è lunga, ma un po' tecnica. In un recente articolo di Bracci, Kraus e Roth ([BKR]) si trova una dimostrazione alternativa del teorema di Burns-Krantz. Come spiegato nel Remark 2.2 dell'articolo, è possibile passare dalle ipotesi del teorema di Burns-Krantz a quelle del Theorem 2.1 di [BKR] (come dimostrato nella Proposition 8.1 dello stesso articolo), che è un risultato più forte dal quale poi è facile concludere. Il Theorem 2.1 è sostanzialmente una versione al bordo del caso di unicità del lemma di Schwarz-Pick, sempre visto come un risultato di rigidità.

Bracci, Kraus e Roth dimostrano il Theorem 2.1 usando risultati più generali visti nell'articolo, ma complicati. Tuttavia, nel Remark 5.6 danno una traccia per una dimostrazione più elementare. L'idea è sfruttare una disuguaglianza dovuta a Golusin e vengono indicati vari articoli in cui è stata ridimostrata.

In particolare, l'articolo di Beardon e Minda del 2004 ([BM]) contiene una serie di disuguaglianze di facile dimostrazione, delle quali il Corollary 3.7 ha a sua volta come corollario la disuguaglianza di Golusin. Queste disuguaglianze coinvolgono la distanza di Poincaré sul disco unitario e possono essere applicate per ottenere diversi altri risultati per funzioni olomorfe sul disco, come mostrato nell'articolo.

In questo scritto svilupperemo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR]. Dimostreremo le disuguaglianze in [BM] e vedremo alcune applicazioni, tra le quali anche la disuguaglianza di Golusin. Grazie ad essa, e alla Proposition 8.1 di [BKR], otterremo una dimostrazione elementare del Theorem 2.1 di Burns-Krantz e del risultato più generale dovuto a Bracci-Kraus-Roth.

1 Prerequisiti

1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in Ω se è derivabile in senso complesso per ogni $z \in \Omega$, e scriviamo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se $\text{Im}(f) \subset \Omega'$ scriviamo $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega')$.

Definizione 1.1.2. Se $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ è biettiva, allora si può dimostrare che anche f^{-1} è olomorfa. In tal caso f è detta *automorfismo* (in senso olomorfo) di Ω e scriviamo $f \in \text{Aut}(\Omega)$.

Com'è noto, la condizione di olomorfia per funzioni a valori complessi è molto più forte della derivabilità in senso reale (in particolare, è equivalente all'analiticità). Fra i vari risultati noti per le funzioni olomorfe, ci interessa studiare il lemma di Schwarz-Pick, fino a dimostrarne una versione al bordo.

Notazione: indichiamo il disco unitario con $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Riportiamo ora alcuni risultati noti di analisi complessa che verranno usati nelle dimostrazioni.

Teorema 1.1.3. (*formula integrale di Cauchy, [NN, Chapter 1.3, Theorems 9 and 10]*) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e D un disco chiuso di centro a contenuto in Ω . Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (1)$$

Proposizione 1.1.4. (*teorema di estensione di Riemann, [NN, Chapter 1.5, Theorem 2]*) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ con $z_0 \in \Omega$. Allora f si estende a una $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se è limitata in un intorno di z_0 . In tal caso, z_0 è detta *singolarità rimovibile*.

Proposizione 1.1.5. (*principio del massimo per funzioni olomorfe, [NN, Chapter 1.3, Corollary of Theorem 3 and Theorem 5]*) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sia inoltre U un aperto relativamente compatto in Ω , cioè $\overline{U} \subset \Omega$ e \overline{U} compatto. Allora per ogni $z \in U$ si ha

$$|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial U} |f(w)|$$

e vale l'uguale per qualche $z \in U$ solo se f è costante sulla componente connessa di U contenente z .

Vediamo adesso i lemmi di Schwarz e Schwarz-Pick.

Lemma 1.1.6. (*lemma di Schwarz*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per $z_0 \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta} z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poiché $f(0) = 0$, possiamo costruire $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ con $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ estendendola per continuità in 0 come $g(0) = f'(0)$. Fissiamo $0 < r < 1$. Per ogni $z \in \mathbb{D}$ tale che $|z| \leq r$, per il principio del massimo per funzioni olomorfe si ha

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Mandando r a 1 otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|g(z)| \leq 1$, da cui $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$.

Se vale una delle due ugaglianze, allora esiste $z_0 \in \mathbb{D}$ tale che $|g(z_0)| = 1$. Dunque, sempre per il principio del massimo g è costantemente uguale a un valore di modulo 1 in ogni disco di centro l'origine e raggio $|z_0| < r < 1$, quindi su \mathbb{D} . Perciò $g(z) = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$, da cui $f(z) = e^{i\theta}z$. \square

Corollario 1.1.7. *Se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f(0) = 0$, allora $f(z) = e^{i\theta}z$.*

Dimostrazione. Se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ anche $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$; inoltre $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$. Per il lemma di Schwarz, $|f'(0)| \leq 1$ e $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$; dunque $|f'(0)| = 1$, da cui la tesi sempre per il lemma di Schwarz. \square

Definizione 1.1.8. Diciamo che un gruppo G *agisce fedelmente* su uno spazio X se per ogni $g \in G$ è data una bigezione $\gamma_g : X \rightarrow X$ tale che $\gamma_e = \text{id}$ e $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$, inoltre $\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2}$ se e solo se $g_1 = g_2$.

Chiamiamo inoltre *gruppo di isotropia* di $x_0 \in X$ il sottogruppo di G dato da $G_{x_0} = \{g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0\}$.

Lemma 1.1.9. *Sia G un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio X e sia G_{x_0} il gruppo di isotropia di $x_0 \in X$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $g_x \in G$ tale che $\gamma_{g_x}(x) = x_0$ e sia $\Gamma = \{g_x \mid x \in X\}$. Allora G è generato da Γ e G_{x_0} , cioè ogni $g \in G$ è della forma $g = h g_x$ con $x \in X$ e $h \in G_{x_0}$.*

Dimostrazione. Sia $g \in G$ e $x = \gamma_{g^{-1}}(x_0)$. Allora $(\gamma_{g_x} \circ \gamma_{g^{-1}})(x_0) = x_0$ da cui $\gamma_{g_x} \circ \gamma_{g^{-1}} = \gamma_{g_x g^{-1}} = \gamma_h$ con $h \in G_{x_0}$, dunque $g_x g^{-1} = h$ e quindi $g = h^{-1} g_x$ con $h^{-1} \in G_{x_0}$. \square

Proposizione 1.1.10. *Si ha che $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ se e solo se esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$.*

Dimostrazione. (\Leftarrow) Sia f come nell'enunciato. Con semplici conti possiamo vedere che per $z, w \in \mathbb{C}$ con $\bar{w}z \neq 1$ si ha

$$1 - \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|^2 = \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{w}z|^2}, \quad (2)$$

da cui segue che se $a, z \in \mathbb{D}$ allora

$$1 - |f(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} > 0,$$

per cui $|f(z)| < 1$, cioè $f(z) \in \mathbb{D}$. L'inversa è $f^{-1}(z) = e^{-i\theta} \frac{z + ae^{i\theta}}{z + \bar{a}e^{-i\theta}}$, della stessa forma. Si noti che $f(a) = 0$.

(\Rightarrow) Scriviamo per semplicità $f_{a,\theta}(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$. Vediamo $\text{Aut}(\mathbb{D})$ come gruppo che agisce su \mathbb{D} . $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$ è, per il Corollario 1.1.7, $\{f_{0,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, mentre possiamo prendere $\Gamma = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D}\}$ poiché $f_{a,0}(a) = 0$. Per il Lemma 1.1.9, $\text{Aut}(\mathbb{D})$ è generato da $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$ e Γ , cioè ogni $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ è della forma $\gamma = f_{0,\theta} \circ f_{a,0} = f_{a,\theta}$. \square

Osservazione 1.1.11. Dalla dimostrazione abbiamo anche che $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$; inoltre, per $|z| > 1$ con $z \neq 1/\bar{a}$ si ha $|f(z)| > 1$.

Osservazione 1.1.12. $\text{Aut}(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su \mathbb{D} , cioè si ha che per ogni $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ esiste $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $\gamma(z_0) = z_1$. Infatti, basta prendere $\gamma = f_{z_1,0}^{-1} \circ f_{z_0,0}$.

Lemma 1.1.13. (*lemma di Schwarz-Pick*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Dimostrazione. Fissato $w \in \mathbb{D}$ siano $\gamma_1(z) = \frac{z + w}{1 + \bar{w}z}$ e $\gamma_2(z) = \frac{z - f(w)}{1 - \overline{f(w)}z}$.

Si ha $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Si ha anche che $\gamma_1(0) = w$ e $\gamma_2(f(w)) = 0$; inoltre $\gamma_1^{-1}(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$. Per il lemma di Schwarz applicato a $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$ abbiamo che per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$ si ha $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| \leq |\zeta|$; prendendo $\zeta = \gamma_1^{-1}(z)$ otteniamo che per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|(\gamma_2 \circ f)(z)| \leq |\gamma_1^{-1}(z)|$, che è la prima disuguaglianza. Abbiamo poi $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \leq 1$, da cui $|\gamma_2'(f(w))f'(w)\gamma_1'(0)| \leq 1$. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \gamma_1'(z) &= \frac{1 + \bar{w}z - \bar{w}(z + w)}{(1 + \bar{w}z)^2} \Rightarrow \gamma_1'(0) = 1 - |w|^2, \\ \gamma_2'(z) &= \frac{1 - \overline{f(w)}z + \overline{f(w)}(z - f(w))}{(1 - \overline{f(w)}z)^2} \Rightarrow \gamma_2'(f(w)) = \frac{1}{1 - |f(w)|^2}. \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene la seconda disuguaglianza con w al posto di z .

Per l'uguaglianza, nel primo caso avremmo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| = |\zeta|$, mentre nel secondo $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| = 1$. In entrambi i casi, per il lemma di Schwarz $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1 = g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, dunque $f = \gamma_2^{-1} \circ g \circ \gamma_1^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. \square

Definizione 1.1.14. Scriviamo $[z, w] := f_{w,0}(z)$ e $p(z, w) := |[z, w]|$.

Osservazione 1.1.15. Se f è un automorfismo del disco, esiste $\mu \in \partial\mathbb{D}$ tale che $[f(z), f(w)] = \mu[z, w]$. Infatti, la funzione $g(\zeta) = [\zeta, f(w)]$ sta in $\text{Aut}(\mathbb{D})$ e $[f(z), f(w)] = g(f(z))$ è ancora un automorfismo. Si ha inoltre $[f(w), f(w)] = 0$, dunque dev'essere proprio della forma $\mu[z, w]$ con $|\mu| = 1$.

Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che la quantità $p(z, w)$ è contratta da $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Vediamo adesso una distanza costruita a partire da questa quantità, con la quale dimostreremo una serie di disuguaglianze che ci permetteranno di dimostrare la disuguaglianza di Golusin, dalla quale seguirà la versione al bordo del lemma.

$$\text{Consideriamo } \omega(z, w) := \text{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

Proposizione 1.1.16. La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ è ben definita ed è effettivamente una distanza.

Dimostrazione. Notiamo che per $z, w \in \mathbb{D}$ l'equazione (2) ci dà immediatamente $p(z, w) < 1$, per cui ω è ben definita e resta solo da mostrare che è una distanza.

L'unica cosa non ovvia da dimostrare è la disuguaglianza triangolare. Applicando la tangente iperbolica a entrambi i membri della disuguaglianza triangolare per ω e sfruttando l'uguaglianza $\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$ si ha

$$\begin{aligned} \tanh(\omega(z_1, z_2)) &\leq \tanh(\omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2)) \\ &= \frac{\tanh(\omega(z_1, z_0)) + \tanh(\omega(z_0, z_2))}{1 + \tanh(\omega(z_1, z_0))\tanh(\omega(z_0, z_2))}; \end{aligned}$$

dalla definizione di ω troviamo

$$p(z_1, z_2) \leq \frac{p(z_1, z_0) + p(z_0, z_2)}{1 + p(z_1, z_0)p(z_0, z_2)}. \quad (3)$$

Notiamo che per il lemma di Schwarz-Pick abbiamo che p è invariante sotto l'azione di $\text{Aut}(\mathbb{D})$. Grazie all'Osservazione 1.1.12, possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che $z_0 = 0$. Dato che $|1 - \bar{z}_2 z_1| \leq 1 + |z_1||z_2|$ e $1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2 > 0$, ricordando l'equazione (2), per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ si ha che

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|^2 &= \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \\ &\geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_1||z_2|)^2} = 1 - \left(\frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|} \right)^2, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|},$$

che è quello che otteniamo inserendo $z_0 = 0$ nella disuguaglianza (3) e usando che $p(0, z) = |z|$. \square

Definizione 1.1.17. La funzione $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *distanza di Poincaré (o iperbolica)* del disco.

Definizione 1.1.18. Data $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2},$$

mentre il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w. \end{cases}$$

Notiamo che, poiché il limite di $f^*(z, w)$ per $z \rightarrow w$ è ben definito per ogni w , per la Proposizione 1.1.4 abbiamo che la funzione $f^*(z, w)$ è olomorfa in $z \in \mathbb{D}$ per ogni $w \in \mathbb{D}$ fissato.

Osservazione 1.1.19.

- (i) Le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick possono essere riscritte come $|f^*(z, w)| \leq 1$, con uguaglianza se e solo se $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$;
- (ii) un altro modo di scrivere le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick è $p(f(z), f(w)) \leq p(z, w)$, che è equivalente a $\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w)$ in quanto \arctanh è strettamente crescente;
- (iii) $p(z, 0) = |z|$, quindi $\omega(z, 0) = \omega(|z|, 0)$; analogamente, $\omega(0, z) = \omega(0, |z|)$;
- (iv) per definizione, $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$.

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

Per trattare i casi estremali delle disuguaglianze in [BM], ci servirà qualche risultato di tipo geometrico sul disco con la distanza iperbolica.

Definizione 1.1.20. Una *geodetica* per ω è una curva $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{D}$ tale che per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ si ha $\omega(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$.

Diciamo che tre punti z_1, z_2, z_3 appartengono *nell'ordine* alla stessa geodetica se $z_j = \sigma(t_j)$ con $t_1 \leq t_2 \leq t_3$.

Osservazione 1.1.21. Poiché ω è invariante sotto l'azione di $\text{Aut}(\mathbb{D})$, gli automorfismi mandano geodetiche in geodetiche; inoltre, conservano l'ordine di appartenenza dei punti.

Esempio 1.1.22. Dato $z_0 \in \mathbb{D}$, la curva $\sigma(t) = \tanh(t) \frac{z_0}{|z_0|}$ (il diametro passante per z_0) è una geodetica. Che sia il diametro indicato segue dal fatto che la funzione $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ è biettiva. Che sia una geodetica segue dalla definizione di ω , dalla formula già citata per $\tanh(a+b)$ e dal fatto che \tanh è dispari.

Osservazione 1.1.23. Dati due punti z_0 e z_1 , esiste sempre una geodetica passante per entrambi. Infatti, per l'Osservazione 1.1.21 e per transitività di $\text{Aut}(\mathbb{D})$ possiamo supporre $z_1 = 0$; basta dunque prendere il diametro visto nell'Esempio 1.1.22.

Lemma 1.1.24. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ appartengono nell'ordine alla stessa geodetica se e solo se $\omega(z_1, z_3) = \omega(z_1, z_2) + \omega(z_2, z_3)$.

Dimostrazione. Se appartengono nell'ordine alla stessa geodetica, l'uguaglianza segue dalla definizione.

Supponiamo ora che valga $\omega(z_1, z_3) = \omega(z_1, z_2) + \omega(z_2, z_3)$. Per transitività di $\text{Aut}(\mathbb{D})$ possiamo supporre $z_2 = 0$. Usando la definizione di ω , l'uguaglianza si riscrive come

$$\operatorname{arctanh} \left| \frac{z_1 - z_3}{1 - \bar{z}_3 z_1} \right| = \operatorname{arctanh} |z_1| + \operatorname{arctanh} |z_3|;$$

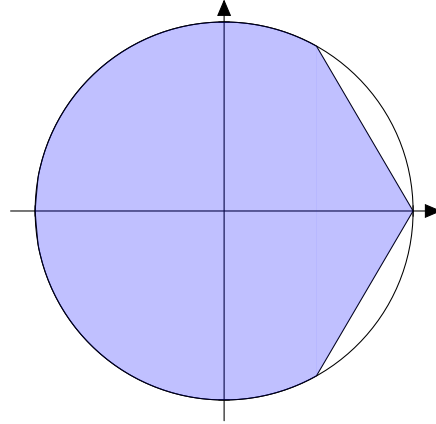
applicando la tangente iperbolica a entrambi i membri e usando ancora una volta la formula $\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$, otteniamo

$$\left| \frac{z_1 - z_3}{1 - \bar{z}_3 z_1} \right| = \frac{|z_1| + |z_3|}{1 + |z_1||z_3|}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 1.1.16 abbiamo visto una disuguaglianza che coinvolge le stesse quantità; ripercorrendo i passaggi, si trova che la condizione per l'uguaglianza è $|1 - \bar{z}_3 z_1| = 1 + |z_3||z_1|$. Ma questo dice proprio che z_1 e z_3 stanno sullo stesso diametro, da parti opposte rispetto a 0. \square

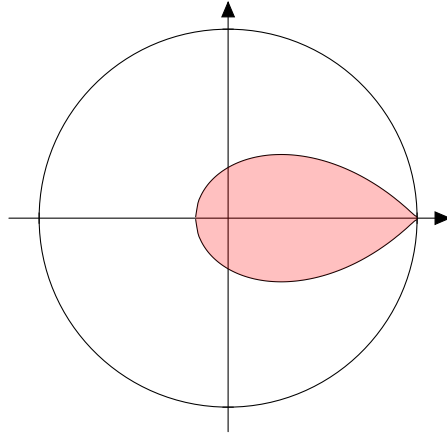
1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali

Definizione 1.2.1. Dati $\alpha \in (0, \pi/2)$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, chiamiamo *setto di vertice σ e angolo 2α* l'insieme $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$ tale che per ogni $z \in S(\sigma, \alpha)$ l'angolo compreso tra la retta congiungente σ e 0 e la retta congiungente σ e z ha modulo minore di α .



In blu, il settore $S(1, 2\pi/3)$

Definizione 1.2.2. Dati $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e $M > 1$, chiamiamo *regione di Stolz* $K(\sigma, M)$ l'insieme $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$.



In rosso, la regione di Stolz $K(1, 2)$

Proposizione 1.2.3. Dato $M > 1$, sia $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$. Per ogni $\alpha' < \alpha$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che, detto $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$, si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

Dimostrazione. Per definizione, $S(\sigma, \alpha)$ corrisponde all'insieme $S(1, \alpha)$ ruotato moltiplicando per σ . Lo stesso vale per $K(\sigma, M)$: infatti, $\frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} = \frac{|1 - \sigma^{-1}z|}{1 - |\sigma^{-1}z|}$.

Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. È utile osservare che in questo caso $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$.

Mostriamo la seconda inclusione. Poiché $z \in K(1, M)$ e $1 > |z| > \Re(z)$, abbiamo che

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)},$$

da cui

$$M^2 - 1 > \frac{|1 - z|^2}{(1 - \Re(z))^2} - 1 = \frac{1 - 2\Re(z) + |z|^2}{(1 - \Re(z))^2} - 1 = \frac{|\Im(z)|^2}{(1 - \Re(z))^2};$$

perciò

$$\frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{M^2 - 1} = \tan \alpha.$$

Mostriamo adesso la prima inclusione. Fissiamo $\alpha' < \alpha$. Supponiamo per assurdo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$ tale che $z \notin K(1, M)$.

Per tali z si ha allora $\frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq M$, da cui

$$\frac{1 - |z|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{M}; \quad (4)$$

inoltre, poiché $z \in S(1, \alpha')$ abbiamo

$$\frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \tan \alpha'.$$

Elevando al quadrato, sommando 1 e sfruttando l'uguaglianza vista sopra otteniamo

$$\frac{|1 - z|^2}{(1 - \Re(z))^2} = \frac{|\Im(z)|^2}{(1 - \Re(z))^2} + 1 < \tan^2 \alpha' + 1,$$

che ci dà

$$\frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} =: M', \quad (5)$$

dove $\alpha' < \alpha$, quindi $\tan \alpha' < \tan \alpha$ e dunque $M' < M$. Moltiplicando tra loro le disuguaglianze (4) e (5) troviamo $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$. Se mostriamo che

$\lim_{\substack{z \rightarrow 1, \\ z \in S(1, \alpha')}} \frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} = 1$ avremo trovato una contraddizione. Scriviamo dunque $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$, e supponiamo senza perdita di generalità $y > 0$, per cui la condizione $z \in S(1, \alpha')$ si scrive come $y/(1 - x) < \tan \alpha'$. Inoltre vale che

$$\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} = \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 - x} = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x}.$$

Vogliamo mostrare che la quantità $\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x}$ tende a 0 per $(x, y) \rightarrow (1, 0)$ all'interno del settore di angolo $2\alpha'$. Notiamo che è sempre maggiore di 0, dunque ci basta stimarne il lim sup. Usando che $y/(1 - x) < \tan \alpha'$ e moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2 + y^2} - x$ troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x} &< \tan \alpha' \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \\ &= \tan \alpha' \cdot \frac{y^2}{y(\sqrt{x^2 + y^2} + x)} = \tan \alpha' \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}; \end{aligned}$$

quest'ultima espressione tende a 0 per $x \rightarrow 1$ e $y \rightarrow 0$. \square

Definizione 1.2.4. Diciamo che una funzione $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ha *limite non tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni $M > 1$ si ha $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$.

Date altre due funzioni $g, h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ scriviamo che $f(z) = g(z) + o(h(z))$ per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente* se

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

La seguente proposizione asserisce che, per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente, un certo andamento di f può essere tradotto nell'andamento di $|f^h|$. È questo che ci permetterà di dimostrare il teorema 2.1 di [BK] passando per la versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Proposizione 1.2.5. Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (6)$$

per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente*. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2) \quad (7)$$

per $z \rightarrow \sigma$ *non tangenzialmente*.

Dimostrazione. A meno di considerare $g(z) = \sigma^{-1}f(\sigma z)$, possiamo supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Infatti, è facile verificare che nell'ipotesi (6) si ha $g(z) = 1 + (z - 1) + o((z - 1)^3)$. Usando che $g'(z) = f'(\sigma z)$ si ha che vale

$$|g^h(z)| = |g'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |g(z)|^2} = |f'(\sigma z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |\sigma^{-1}f(\sigma z)|^2};$$

ricordando che $|\sigma| = 1$ troviamo

$$|g^h(z)| = |f'(\sigma z)| \frac{1 - |\sigma z|^2}{1 - |f(\sigma z)|^2} = |f^h(\sigma z)|.$$

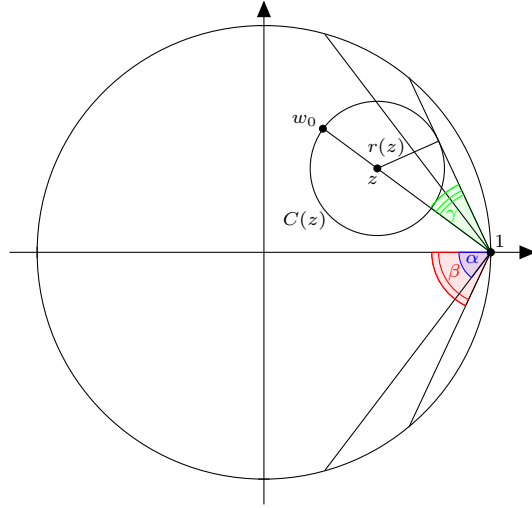
Se avessimo $|g^h(z)| = 1 + o((z-1)^2)$, mediante la sostituzione $\zeta = \sigma z$ si avrebbe

$$o((z-1)^2) = o(\sigma^{-2}(\zeta - \sigma)^2) = o((\zeta - \sigma)^2)$$

e $|f^h(\sigma z)| = |f^h(\zeta)|$; troviamo quindi l'equazione (7) con ζ al posto di z .

Sia $M > 1$ e consideriamo $z \in K(1, M)$. Allora per la Proposizione 1.2.3 si ha $z \in S(1, \alpha)$ dove $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1}$. Sia inoltre $\beta \in (0, \pi/2)$ con $\beta > \alpha$ e sia $C(z)$ il cerchio di centro z e raggio $r(z) = \text{dist}(z, \partial S(1, \beta))$, la distanza euclidea di z dal bordo di $S(1, \beta)$. Allora per la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione $f(z) - z$ si ha

$$f'(z) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw := I(z) \Rightarrow f'(z) = 1 + I(z).$$



Per la Proposizione 1.2.3 esiste $\delta > 0$ tale che, se $w \in S(1, \beta) \cap B(1, \delta)$, si ha $w \in K(1, M')$ con $M' > \sqrt{\tan^2 \beta + 1}$. Dato $\varepsilon > 0$ fissato e prendendo δ sufficientemente piccolo, per ipotesi abbiamo che $|f(w) - w| < \varepsilon|1 - w|^3$ per ogni $w \in K(1, M') \cap B(1, \delta)$ e di conseguenza per ogni $w \in S(1, \beta) \cap B(1, \delta)$. Poiché $S(1, \beta) \subset \mathbb{D}$, dev'essere $r(z) \leq \text{dist}(z, \mathbb{D}) = 1 - |z|$. Si ha anche $1 - |z| \leq |1 - z|$; quindi prendendo $z \in B(1, \delta/2)$ abbiamo $r(z) \leq |z - 1| < \delta/2$. Dunque per ogni $w \in C(z)$ troviamo che $|w - 1| \leq |w - z| + |z - 1| = r(z) + |z - 1| < \delta$. Per questi z , facendo la sostituzione $w = z + r(z)e^{i\theta}$, vale che

$$\begin{aligned} |I(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z + r(z)e^{i\theta}) - z|^2} r(z) d\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3 = \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3. \end{aligned}$$

Il massimo è raggiunto per l'intersezione più lontana da 1 tra la circonferenza $C(z)$ e la retta passante per 1 e z (il punto w_0 in figura); abbiamo che vale $|1 - w_0| = r(z) + |z - 1|$. Allora si ha

$$|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{r(z)} (r(z) + |z - 1|)^3 = \varepsilon r(z)^2 \left(1 + \frac{|z - 1|}{r(z)}\right)^3.$$

Detto γ l'angolo tra la retta congiungente 1 e z e il tratto affine di $\partial S(1, \beta)$ più vicino a z (che è effettivamente il tratto di bordo più vicino a z se lo si prende sufficientemente vicino a 1), si ha $\frac{|z - 1|}{r(z)} = \csc \gamma$. Poiché vale che $\gamma \geq \beta - \alpha$ e $r(z) \leq |z - 1|$, troviamo $r(z)^2 (1 + \csc \gamma)^3 \leq |z - 1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3$. Concatenando le disuguaglianze appena viste, risulta che

$$|I(z)| \leq \varepsilon |z - 1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3.$$

Otteniamo dunque $f'(z) = 1 + o((z - 1)^2)$ per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente.

Notiamo che all'interno della regione di Stolz $K(1, M)$ si ha $1 \leq \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \leq M$, il che ci permette di usare indipendentemente $z - 1$ o $1 - |z|$ negli o -piccoli per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Per ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z - 1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. Possiamo quindi concludere che

$$|f^h(z)| = |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente. □

2 Lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

2.1 Teorema di Beardon-Minda e corollari

Adesso possiamo procedere a dimostrare la serie di disuguaglianze di [BM], che coinvolgono la distanza di Poincaré ω e le funzioni olomorfe dal disco in sé che non sono automorfismi.

L'approccio generale è il seguente: stiamo studiando $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Le funzioni di questo insieme che sono anche automorfismi conservano la distanza iperbolica. Sembra dunque ragionevole vedere come si traduce il lemma di Schwarz-Pick in termini iperbolici (abbiamo già visto che contrae ω) e a quali conseguenze porta.

Definizione 2.1.1. La *rotazione iperbolica* di ordine due attorno a un punto $a \in \mathbb{D}$ è la funzione $r_a \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \setminus \{\text{id}\}$ tale che $r_a \circ r_a = \text{id}$ e $r_a(a) = a$. Chiamiamo a il *centro di rotazione* di r_a .

Osservazione 2.1.2. Le condizioni imposte sono sufficienti a determinare un unico automorfismo r_a . Infatti, a meno di coniugare possiamo supporre $a = 0$, per cui r_0 dev'essere una rotazione di ordine due, cioè di π . Inoltre, è facile vedere che r_a è caratterizzata dall'equazione $[r_a(z), a] = -[z, a]$; la si può dunque vedere come l'analogo della rotazione euclidea di angolo π .

Osservazione 2.1.3. z, a e $r_a(z)$ appartengono, nell'ordine, alla stessa geodetica. Infatti, a meno di comporre con un opportuno automorfismo possiamo supporre $a = 0$; ma poiché $r_0(z) = e^{i\pi}z$, l'affermazione risulta ovvia.

Definizione 2.1.4. Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado n la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con \mathcal{B}_n i prodotti di Blaschke di grado n .

Osservazione 2.1.5. I prodotti di Blaschke sono funzioni olomorfe sul disco unitario, con zeri assegnati. Quelli di grado 1 sono $\text{Aut}(\mathbb{D})$.

Lemma 2.1.6. Tra le funzioni f continue in $\bar{\mathbb{D}}$ e olomorfe in \mathbb{D} , i prodotti di Blaschke di grado n sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

- (i) se $|z| = 1$ allora $|f(z)| = 1$;
- (ii) f ha esattamente n zeri in \mathbb{D} contati con molteplicità.

Dimostrazione. Se f è un prodotto di Blaschke di grado n , che soddisfi (ii) è ovvio e che soddisfi (i) segue dall'Osservazione 1.1.11.

Fissiamo ora f che soddisfi (i) e (ii); consideriamo B il prodotto di Blaschke definito con $\theta = 0$ e a_n gli zeri in \mathbb{D} di f , contati con molteplicità. Allora f/B

e B/f sono due funzioni olomorfe su \mathbb{D} e continue in $\overline{\mathbb{D}}$, di modulo 1 sul bordo. Per il principio del massimo per funzioni olomorfe, deve essere $|f/B| \leq 1$ e $|B/f| \leq 1$ sul disco unitario, da cui $|f/B| = 1$ e f/B è costante in \mathbb{D} . \square

Proposizione 2.1.7. *Valgono le seguenti affermazioni:*

- (i) *date $F \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, si ha che $F \in \mathcal{B}_n$ se e solo se $S \circ F \in \mathcal{B}_n$;*
- (ii) *si ha che $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ se e solo se $f^*(z, w) \in \mathcal{B}_n$, con w un qualsiasi elemento di \mathbb{D} fissato.*

Dimostrazione. Per dimostrare (i), basta mostrare che S conserva le proprietà del Lemma 2.1.6. La prima segue dall'Osservazione 1.1.11. Per transitività di $\text{Aut}(\mathbb{D})$, la seconda corrisponde a dover dimostrare che, dato $c \in \mathbb{D}$, l'equazione $F(z) = c$ ha esattamente n zeri contati con molteplicità in \mathbb{D} , dove $F \in \mathcal{B}_n$.

Scriviamo $F(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$. Allora $F(z) = c$ si riscrive come

$$c \prod_{j=1}^n (1 - \bar{a}_j z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n (z - a_j). \quad (8)$$

Stiamo uguagliando due polinomi di grado n con coefficienti direttivi diversi: quello al membro sinistro è di modulo minore di 1, mentre quello al membro destro ha modulo esattamente 1. Dunque la nostra equazione ha esattamente n soluzioni, contate con molteplicità, in \mathbb{C} . Per l'Osservazione 1.1.11, se $z \notin \mathbb{D}$ e $z \neq 1/\bar{a}_j$ per $j = 1, \dots, n$, si ha $|F(z)| \geq 1$; se $z = 1/\bar{a}_j$ per qualche j , il membro sinistro di (8) è 0 ma il membro destro no, quindi non ci sono soluzioni in quel caso. Perciò, per $|c| < 1$, tutte le soluzioni trovate sono in \mathbb{D} come voluto.

Per definizione di quoziente iperbolico, $[f(z), f(w)] = [z, w]f^*(z, w)$. Il membro di sinistra è della forma $S(f(z))$, dove $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ è $S(z) = [z, f(w)]$; scriviamo anche $T(z) = [z, w]$. Se $f^*(z, w) \in \mathcal{B}_n$, allora $T(z)f^*(z, w) \in \mathcal{B}_{n+1}$; dunque $S \circ f \in \mathcal{B}_{n+1}$ e per il punto (i) abbiamo $f \in \mathcal{B}_{n+1}$. Viceversa, se $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ si ha $S \circ f \in \mathcal{B}_{n+1}$. Sappiamo anche che $S(f(w)) = 0$, dunque nel prodotto ci dev'essere il fattore $[z, w]$; segue dunque che $f^*(z, w) \in \mathcal{B}_n$. \square

Lemma 2.1.8. *Sia $f \in \mathcal{B}_2$, esistono $S, T \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tali che $S \circ f \circ T(z) = z^2$.*

Dimostrazione. Per transitività di $\text{Aut}(\mathbb{D})$ su \mathbb{D} , ci basta dimostrare che esiste un $c \in \mathbb{D}$ tale che $f(z) - c$ abbia un unico zero doppio z_0 nel disco, il punto critico di f . È sufficiente imporre $f'(z_0) = 0$, dato che sappiamo già che $f(z_0) \in \mathbb{D}$. Scriviamo $f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \cdot \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}$. Sempre per transitività, usando T possiamo supporre $a_1 = 0$ e poniamo $a_2 = a$. Si ha

$$f'(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} + z \cdot \frac{1 - |a|^2}{1 - \bar{a}z} \right).$$

Con qualche passaggio algebrico, l'equazione $f'(z) = 0$ diventa

$$\bar{a}z^2 - 2z + a = 0.$$

Le soluzioni sono $(1 \pm \sqrt{1 - |a|^2})/\bar{a}$; da $|a| < 1$, abbiamo che quella con il più sta fuori da \mathbb{D} mentre quella con il meno sta dentro, dunque è la soluzione cercata. \square

Notazione: sia $f \in \mathcal{B}_2$; indichiamo con R_f la rotazione iperbolica di ordine due attorno al punto z_0 , trovato nella dimostrazione del Lemma 2.1.8.

Corollario 2.1.9. *Sia $f \in \mathcal{B}_2$. Allora $f^*(R_f(w), w) = 0$.*

Dimostrazione. Siano $S, T \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ date dal Lemma 2.1.8 tali che $S \circ f \circ T = F$ con $F(z) = z^2$. Abbiamo $[R_F(z), 0] = -[z, 0]$, dunque per l'Osservazione 1.1.15 troviamo $\mu[T(R_F(z)), T(0)] = -\mu[T(z), T(0)]$. Per costruzione, $T(0)$ dev'essere il punto critico di f , quindi la rotazione R_f è caratterizzata dall'equazione $[R_f(z), T(0)] = -[z, T(0)]$. Ne segue che $T(R_F(z)) = R_f(T(z))$. Perciò abbiamo $f = S^{-1} \circ F \circ T^{-1}$ e $R_f = T \circ R_F \circ T^{-1}$, inoltre $F \circ R_F = F$. Ne deduciamo che

$$f \circ R_f = S^{-1} \circ F \circ R_F \circ T^{-1} = S^{-1} \circ F \circ T^{-1} = f,$$

che implica la tesi. \square

Il seguente risultato rende chiaro perché nelle varie disuguaglianze si richiede che f non sia un automorfismo.

Proposizione 2.1.10. *Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ e $v \in \mathbb{D}$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha che $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ e la funzione $z \mapsto f^*(z, v)$ è olomorfa.*

Dimostrazione. L'olomorfia l'abbiamo già vista quando abbiamo definito il rapporto iperbolico. Per il lemma di Schwarz-Pick, $|f^*(z, v)| \leq 1$; inoltre, vale l'uguaglianza in qualche punto solo se f è un automorfismo. Dunque le ipotesi su f assicurano che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. \square

L'idea dell'articolo di Beardon-Minda è di applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione $f^*(z, v)$, con v fissato. Per $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, avremmo una funzione costante di modulo uguale a 1, in particolare in $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \setminus \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$; non potremmo quindi fare quanto appena detto.

Teorema 2.1.11. *(Beardon-Minda, 2004) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (9)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$.

Dimostrazione. Poiché f non è un automorfismo, per la Proposizione 2.1.10 la funzione $z \mapsto f^*(z, v)$ è in $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$; perciò il membro sinistro della disuguaglianza (9) è ben definito e la tesi segue dal lemma di Schwarz-Pick e dall'osservazione 1.1.19, punto (ii).

Sempre dal lemma di Schwarz-Pick, si ha l'uguaglianza se e solo se abbiamo $f^*(z, v) \in \text{Aut}(\mathbb{D}) = \mathcal{B}_1$. Per il punto (ii) della Proposizione 2.1.7, questo è equivalente a $f \in \mathcal{B}_2$. \square

Vogliamo vedere che questa versione a tre punti è effettivamente un miglioramento rispetto al lemma di Schwarz-Pick.

Esempio 2.1.12. Consideriamo una funzione $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Il lemma di Schwarz-Pick diventa semplicemente il lemma di Schwarz e ci dice che $f(z)/z \in \mathbb{D}$. Prendendo invece $w = 0$ e $v = 0$ in (9), troviamo $\omega(f(z)/z, f'(0)) \leq \omega(z, 0)$. Dunque $f(z)/z$ appartiene al disco iperbolico di centro $f'(0)$ e raggio $\omega(z, 0)$, che è un sottoinsieme di \mathbb{D} .

Corollario 2.1.13. Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w). \quad (10)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v)$, w e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Dimostrazione. Applicando la disuguaglianza triangolare per ω e il Teorema 2.1.11, si ha

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w). \end{aligned}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se vale in entrambe le disuguaglianze appena viste. La seconda è esattamente il caso di uguaglianza del Teorema 2.1.11, che è equivalente a $f \in \mathcal{B}_2$. Sia $T_v(z) = f^*(z, v)$; per il Teorema 2.1.7, $f \in \mathcal{B}_2$ è equivalente a $T_v \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Ricordiamo che p , dunque anche ω , è invariante sotto l'azione di $\text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora il caso di uguaglianza nella prima delle due disuguaglianze si riscrive come $\omega(T_v^{-1}(0), z) = \omega(T_v^{-1}(0), w) + \omega(w, z)$; per il Lemma 1.1.24, quest'uguaglianza caratterizza l'appartenenza, nell'ordine, alla stessa geodetica. Per il Corollario 2.1.9 si ha $T_v^{-1}(0) = R_f(v)$. \square

Corollario 2.1.14. Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w, v, u \in \mathbb{D}$ vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (11)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e $R_f(v), R_f(u), w$ e z giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

Dimostrazione. Applicando il Corollario 2.1.13 si ha

$$\begin{aligned}\omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w) = \omega(0, |f^*(w, v)|) + \omega(z, w) \\ &= \omega(0, |f^*(v, w)|) + \omega(z, w) = \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(z, w).\end{aligned}$$

Sempre per il Corollario 2.1.13 abbiamo

$$\omega(0, f^*(v, w)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u).$$

Mettendo assieme le due disuguaglianze otteniamo la (11).

Se si ha l'uguaglianza, dobbiamo studiarla nelle due applicazioni del Corollario 2.1.13. In entrambi i casi ci dice che $f \in \mathcal{B}_2$. La prima ci dice anche che $R_f(v), w$ e z appartengono, nell'ordine, alla stessa geodetica. Dalla seconda deduciamo la stessa cosa per $R_f(w), u$ e v . Poiché R_f è un automorfismo, abbiamo che lascia invariate le geodetiche e l'ordine dei punti sulle stesse; allora anche $w, R_f(u)$ e $R_f(v)$ stanno, nell'ordine, sulla stessa geodetica. Segue il secondo enunciato della tesi. Viceversa, se valgono tutte queste condizioni è facile vedere che si ha l'uguaglianza. \square

Il risultato seguente non ci servirà nel seguito, ma viene riportato per completezza.

Corollario 2.1.15. *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e siano $z, w \in \mathbb{D}$. Sia σ una geodetica con $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$ e sia $w = \sigma(t)$ con $t_1 < t < t_2$. Allora*

$$2\omega(f(z), f(v)) \leq \log \left(\cosh(2\omega(z, v)) + |f^h(w)| \sinh(2\omega(z, v)) \right). \quad (12)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$, z e v giacciono sulla stessa geodetica passante per c , il punto critico di f , e $w = z$ e sta fra c e v oppure $w = v$ e sta fra c e z .

Dimostrazione. Ricordando le definizioni di ω e p , per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ abbiamo

$$\tanh(\omega(0, z)) = |z| \text{ e } \tanh(\omega(z, w)) = p(z, w) = \tanh(\omega(0, [z, w])).$$

Dalla definizioni di $f^*(z, w)$ e p e usando le uguaglianze appena citate, abbiamo

$$\begin{aligned}\tanh(\omega(f(z), f(v))) &= p(f(z), f(v)) = p(z, v) |f^*(z, v)| \\ &= p(z, v) \tanh(\omega(0, f^*(z, v))).\end{aligned}$$

Applicando il Corollario 2.1.14 con $u = w$ e usando il fatto che z, w e v stanno, nell'ordine, sulla stessa geodetica, troviamo

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^h(w)) + \omega(z, v);$$

ricordando che la tangente iperbolica è strettamente crescente e sfruttando la formula $\tanh(a + b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$ e le uguaglianze di prima, si ha

$$\tanh(\omega(0, f^*(z, w))) \leq \frac{|f^h(w)| + p(z, v)}{1 + |f^h(w)| p(z, v)}.$$

Mettendo assieme le varie disuguaglianze, risulta che

$$\tanh\left(\omega(f(z), f(v))\right) \leq p(z, v) \left(\frac{|f^h(w)| + p(z, v)}{1 + |f^h(w)|p(z, v)} \right);$$

prendendo $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \omega(f(z), f(v)) &\leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + p(z, v)|f^h(w)| + p(z, v)(|f^h(w)| + p(z, v))}{1 + p(z, v)|f^h(w)| - p(z, v)(|f^h(w)| + p(z, v))} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + p^2(z, v)}{1 - p^2(z, v)} + |f^h(w)| \frac{2p(z, v)}{1 - p^2(z, v)} \right). \end{aligned}$$

Usando le uguaglianze

$$\frac{1 + p^2}{1 - p^2} = \cosh(2\omega) \text{ e } \frac{2p}{1 - p^2} = \sinh(2\omega)$$

otteniamo la disuguaglianza della tesi.

Il caso di uguaglianza segue dall'uguaglianza nel Corollario 2.1.14: ricordando l'Osservazione 2.1.3, notiamo che se $w \neq z, v$ non possono essere soddisfatti tutti gli allineamenti richiesti nell'ordine giusto. \square

Osservazione 2.1.16. Poiché $|f^*| \leq 1$, anche $|f^h| \leq 1$; per stretta crescenza del logaritmo, otteniamo che la disuguaglianza (12) è un altro miglioramento rispetto al lemma di Schwarz-Pick.

Vorremmo ora dedurre dei risultati simili al lemma di Schwarz-Pick anche per la derivata iperbolica. In generale f^h non è olomorfa, dunque non è possibile applicare il lemma come si è fatto per $f^*(z, v)$. Tuttavia, quanto visto finora può essere usato per mostrare disuguaglianze che si avvicinano a qualcosa di tipo Schwarz-Pick, a costo di un fattore 2.

La prima richiede che uno dei due punti sia 0.

Corollario 2.1.17. *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora*

$$\omega(f^h(0), f^h(z)) \leq 2\omega(0, z). \quad (13)$$

Inoltre, 2 è la migliore costante possibile.

Dimostrazione. Da $f(0) = 0$ si ha $f^*(z, 0) = f^*(0, z)$. Dalla disuguaglianza triangolare per ω abbiamo che

$$\begin{aligned} \omega(f^h(0), f^h(z)) &= \omega(f^*(0, 0), f^*(z, z)) \\ &\leq \omega(f^*(0, 0), f^*(z, 0)) + \omega(f^*(0, z), f^*(z, z)), \end{aligned}$$

inoltre per il Teorema 2.1.11 si ha

$$\omega(f^*(0, 0), f^*(z, 0)) + \omega(f^*(0, z), f^*(z, z)) \leq 2\omega(0, z).$$

Mettendo assieme troviamo la disuguaglianza della tesi.

Per dire che 2 è la migliore costante possibile, basta prendere $f(z) = z^2$ e $z \in \mathbb{D}$ con $|z| = 1/3$ per ottenere l'uguaglianza. \square

Il prossimo risultato è quello che ci permetterà di dimostrare la disuguaglianza di Golusin. È valido per ogni coppia di punti nel disco, ma dobbiamo considerare il modulo della derivata iperbolica.

Corollario 2.1.18. *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (14)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se $f \in \mathcal{B}_2$ e z e w giacciono sulla stessa geodetica, passante per il punto critico di f .

Dimostrazione. Siano $z, w \in \mathbb{D}$; senza perdita di generalità possiamo supporre $|f^h(z)| \geq |f^h(w)|$. Allora dalla definizione di ω abbiamo

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(w)| - |f^h(z)|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(w)|}{1 + |f^h(w)|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \end{aligned}$$

Usando di nuovo la definizione di ω otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \omega(0, |f^h(z)|) - \omega(0, |f^h(w)|) \\ &= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w), \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal Corollario 2.1.14 prendendo $u = w$ e $v = z$. Il caso di uguaglianza segue facilmente. \square

Concludiamo la sezione con il lemma di Dieudonné [D, Chapitre III, paragraphe 8, équation (25)], per il quale l'approccio dell'articolo di Beardon e Minda semplifica le dimostrazioni.

Lemma 2.1.19. *(lemma di Dieudonné) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$ e sia $z_0 \in \mathbb{D}$. Allora*

$$|f'(z_0) - f(z_0)/z_0| \leq \frac{|z_0|^2 - |f(z_0)|^2}{|z_0|(1 - |z_0|^2)}. \quad (15)$$

In particolare,

$$|f'(z)| \leq \begin{cases} 1 & \text{se } |z| \leq \sqrt{2} - 1 \\ \frac{(1 + |z|^2)^2}{4|z|(1 - |z|^2)} & \text{se } |z| \geq \sqrt{2} - 1. \end{cases} \quad (16)$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.1.11 con $z = v = z_0$ e $w = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \omega(f^h(z_0), f^*(0, z_0)) &\leq \omega(0, z_0) \\ \iff p(f^h(z_0), f^*(0, z_0)) &\leq p(0, z_0) = |z_0|, \end{aligned}$$

dove l'equivalenza fra le due disuguaglianze segue dal fatto che $\operatorname{arctanh}$ è strettamente crescente. Per semplificare, scriviamo $f^h(z_0) = a$, $f^*(0, z_0) = b$ e $|z_0| = r$. Vogliamo portare la disuguaglianza in forma euclidea. Abbiamo

$$\left| \frac{a - b}{1 - \bar{b}a} \right| = p(a, b) \leq r,$$

che si riscrive come

$$\begin{aligned} (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) &\leq r^2(1 - \bar{b}a)(1 - b\bar{a}) \\ \iff |a|^2(1 - r^2|b|^2) - a\bar{b}(1 - r^2) - \bar{a}b(1 - r^2) &\leq r^2 - |b|^2 \\ \iff |a|^2 - a \cdot \frac{\bar{b}(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2} - \bar{a} \cdot \frac{b(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2} &\leq \frac{r^2 - |b|^2}{1 - r^2|b|^2}; \end{aligned}$$

ponendo $\alpha = \frac{b(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2}$ e $R^2 = \frac{r^2 - |b|^2}{1 - r^2|b|^2} + |\alpha|^2$, si ha

$$|a|^2 - a\bar{\alpha} - \bar{a}\alpha \leq R^2 - |\alpha|^2 \iff (a - \alpha)(\bar{a} - \bar{\alpha}) \leq R^2 \iff |a - \alpha| \leq R.$$

Ricordando che $r = |z_0|$ e osservando che $b = f^*(0, z_0) = \frac{[f(0), f(z_0)]}{[0, z_0]} = \frac{f(z_0)}{z_0}$, troviamo $\alpha = \frac{f(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0(1 - |f(z_0)|^2)}$ e $R = \frac{|z_0|^2 - |f(z_0)|^2}{|z_0|(1 - |f(z_0)|^2)}$. Riprendendo infine la definizione di a , cioè $a = f^h(z_0) = \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{1 - |f(z_0)|^2}$, otteniamo che

$$\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{1 - |f(z_0)|^2} - \frac{f(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0(1 - |f(z_0)|^2)} \right| \leq \frac{|z_0|^2 - |f(z_0)|^2}{|z_0|(1 - |f(z_0)|^2)},$$

che è equivalente alla (15) moltiplicando entrambi i membri per $\frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}$.

Mostriamo ora la (16). Dalla (15) con z al posto di z_0 si ha

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq |f'(z) - f(z)/z| + |f(z)/z| \\ &\leq \frac{|z|^2 - |f(z)|^2}{|z|(1 - |z|^2)} + \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{(|f(z)| + |z|^2)(1 - |f(z)|)}{|z|(1 - |z|^2)}. \end{aligned}$$

Adesso, per $|z|$ fissato un rapido conto mostra che il massimo si ottiene per $|f(z)| = \frac{1 - |z|^2}{2}$; poiché per il lemma di Schwarz dev'essere $|f(z)| \leq |z|$, questo caso può essere raggiunto solo se $|z| \geq \sqrt{2} - 1$ e sostituendo otteniamo la seconda espressione della (16). Nell'altro caso il massimo si ottiene per $|f(z)| = |z|$ e sostituendo si trova che è proprio 1. \square

2.2 Applicazioni dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Vediamo ora alcune applicazioni dei risultati visti nella sezione precedente.

Teorema 2.2.1. *Dato $b \in [0, 1)$, scriviamo $F_b(z) = \frac{z(z+b)}{1+bz}$. Consideriamo $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Se $|f'(0)| < 1$, allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha*

$$\left| \frac{f^h(0) - f^h(z)}{1 - \overline{f^h(0)}f^h(z)} \right| \leq \frac{2|z|}{1 + |z|^2} \quad (17)$$

e

$$F_{|f^h(0)|}^h(-|z|) \leq |f^h(z)| \leq F_{|f^h(0)|}^h(|z|). \quad (18)$$

Dimostrazione. Poiché $|f'(0)| < 1$, per il lemma di Schwarz si ha $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. Inoltre $f(0) = 0$, perciò possiamo applicare il Corollario 2.1.17; si ha dunque

$$\omega(f^h(0), f^h(z)) \leq 2\omega(0, z).$$

Applicando la tangente iperbolica, sfruttando l'uguaglianza $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$ e ricordando la definizione di ω si ha

$$p(f^h(0), f^h(z)) \leq \frac{2p(0, z)}{1 + p^2(0, z)},$$

da cui

$$\left| \frac{f^h(0) - f^h(z)}{1 - \overline{f^h(0)}f^h(z)} \right| \leq \frac{2|z|}{1 + |z|^2}.$$

Per dimostrare la seconda disuguaglianza, supponiamo dapprima che si abbia $f^h(0) = b \in [0, 1)$. Possiamo ripetere i passaggi svolti nella dimostrazione del lemma di Dieudonné ponendo $a = f^h(z)$ e $r = \frac{2|z|}{1+|z|^2}$. Otteniamo la disuguaglianza $|f^h(z) - \alpha| \leq R$, dove $\alpha = \frac{b(1-r^2)}{1-r^2b^2}$ e $R^2 = \frac{r^2-b^2}{1-r^2b^2} + b^2 \left(\frac{1-r^2}{1-r^2b^2} \right)^2$. Sostituendo troviamo

$$\alpha = \frac{b(1-|z|^2)^2}{(1+2b|z|+|z|^2)(1-2b|z|+|z|^2)},$$

$$R = \frac{2|z|(|z|^2+1)(1-b^2)}{(1+2b|z|+|z|^2)(1-2b|z|+|z|^2)}.$$

Consideriamo adesso $F_b^h(z) = \frac{bz^2+2z+b}{|z|^2+2b\Re z+1} \left(\frac{|1+bz|}{1+bz} \right)^2$. Si ha

$$F_b^h(|z|) = \frac{b|z|^2+2|z|+b}{|z|^2+2b|z|+1} \text{ e } F_b^h(-|z|) = \frac{b|z|^2-2|z|+b}{|z|^2-2b|z|+1}.$$

Notiamo che $\alpha = (F_b^h(|z|) + F_b^h(-|z|))/2$ e $R = (F_b^h(|z|) - F_b^h(-|z|))/2$, perciò la disuguaglianza $|f^h(z) - \alpha| \leq R$ ci dice che $f^h(z)$ appartiene al cerchio con diametro sull'asse reale passante per i punti $F_b^h(|z|)$ e $F_b^h(-|z|)$. Con semplici considerazioni geometriche otteniamo la seguente disuguaglianza:

$$F_b^h(-|z|) \leq \Re f^h(z) \leq |f^h(z)| \leq F_b^h(|z|),$$

la quale, ricordando che $b = f^h(0)$, ci dà

$$F_{f^h(0)}^h(-|z|) \leq |f^h(z)| \leq F_{f^h(0)}^h(|z|).$$

Per passare al caso generale consideriamo la funzione $g(z) = |f^h(0)|f(z)/f'(0)$. Osserviamo che $f(0) = 0$ ci dice che $f'(0) = f^h(0)$, dunque $|g(z)| = |f(z)|$ e $|g'(z)| = |f'(z)|$, pertanto $|g^h(z)| = |f^h(z)|$; inoltre si ha anche $g(0) = 0$, da cui $g^h(0) = g'(0) = |f^h(0)|$. Perciò applicando l'ultima disuguaglianza trovata alla funzione g otteniamo proprio la seconda disuguaglianza della tesi. \square

Corollario 2.2.2. *Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) \in [0, 1)$. Allora $\Re f'(z) > 0$ per $|z| < f^h(0)/(1 + \sqrt{1 - (f^h(0))^2})$.*

Dimostrazione. Per $0 \leq b < 1$ e $z \in \mathbb{D}$ si ha $|z|^2 - 2b|z| + 1 > |z|^2 - 2|z| + 1 > 0$, dunque abbiamo che il segno di $F_b^h(-|z|)$ coincide con quello di $b|z|^2 - 2|z| + b$. Quest'ultima quantità è minore di 0 per $|z| \in ((1 - \sqrt{1 - b^2})/b, (1 + \sqrt{1 - b^2})/b)$, zero agli estremi e maggiore di 0 altrove. Prendendo $b = f'(0) = f^h(0)$, nella dimostrazione del Teorema 2.2.1 abbiamo visto che $\Re f^h(z) \geq F_{f^h(0)}^h(-|z|)$; per gli z tali che $|z| < (1 - \sqrt{1 - (f^h(0))^2})/f^h(0) = f^h(0)/(1 + \sqrt{1 - (f^h(0))^2})$ si ha quindi $\Re f^h(z) > 0$. Ricordando che $f^h(z) = \frac{f'(z)(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}$ e $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, per tali z si ha anche $\Re f'(z) > 0$. \square

Del prossimo enunciato, dimostrato indipendentemente da Pick nel 1916 e Nevanlinna nel 1919, vedremo nel dettaglio solo un paio di casi particolari.

Teorema 2.2.3. *(Pick-Nevanlinna, [JBG, Chapter 1, Theorem 2.2]) Siano dati n punti distinti $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ e altri n punti distinti (non necessariamente diversi dai primi) $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$. Per $k = 1, \dots, n$, sia A_k la matrice $k \times k$ data da $A_k(i, j) = \frac{1 - w_i \bar{w}_j}{1 - z_i \bar{z}_j}$. Allora esiste una funzione $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(z_i) = w_i$ per $j = 1, \dots, n$ se e solo se $\det A_k \geq 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$.*

Vediamo il caso $n = 2$.

Dimostrazione. La condizione è sempre verificata per $k = 1$, mentre per $k = 2$ si riscrive come

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} \cdot \frac{1 - |w_2|^2}{1 - |z_2|^2} - \frac{1 - w_1 \bar{w}_2}{1 - z_1 \bar{z}_2} \cdot \frac{1 - \bar{w}_1 w_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \geq 0 \\
& \frac{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2} \\
& \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)} \\
& \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_2|^2} \geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{1 - |w_1|^2 - |w_2|^2 + |w_1|^2 |w_2|^2} \\
& \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{|1 - \bar{z}_2 z_1|^2 - |z_1 - z_2|^2} \geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - \bar{w}_2 w_1|^2 - |w_1 - w_2|^2} \\
& \frac{1}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|^2} \geq \frac{1}{1 - \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_2 w_1} \right|^2} \\
& \frac{1}{1 - p^2(w_1, w_2)} \leq \frac{1}{1 - p^2(z_1, z_2)} \\
& p(w_1, w_2) \leq p(z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Ricordiamo adesso che p è invariante per azione di $\text{Aut}(\mathbb{D})$; quindi, a meno di comporre a sinistra e a destra con opportuni automorfismi olomorfi di \mathbb{D} , possiamo supporre senza perdita di generalità $z_1 = w_1 = 0$. La condizione diventa dunque $p(0, w_2) \leq p(0, z_2)$, da cui $|w_2| \leq |z_2|$; perciò basta prendere la funzione $f(z) = w_2 z / z_2$. \square

Andiamo adesso a dimostrare il Teorema di Pick-Nevanlinna nel caso $n = 3$, con una formulazione differente.

Teorema 2.2.4. *Siano z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 due triple di punti distinti in \mathbb{D} . Allora esiste $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ tale che $f(z_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

- (i) $\omega(w_i, w_j) < \omega(z_i, z_j)$ per $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$;
- (ii) $\omega\left(\frac{[w_2, w_1]}{[z_2, z_1]}, \frac{[w_3, w_1]}{[z_3, z_1]}\right) \leq \omega(z_2, z_3)$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista siffatta f . Allora la condizione (i) segue dal lemma di Schwarz-Pick. La condizione (ii) invece si riscrive come $\omega(f^*(z_2, z_1), f^*(z_3, z_1)) \leq \omega(z_2, z_3)$, che è l'enunciato del Teorema 2.1.11.

Adesso dimostriamo l'altra freccia. Vediamola prima nel caso $z_1 = w_1 = 0$. Allora per la condizione (i) abbiamo $\omega(0, w_i) < \omega(0, z_i)$, quindi $|w_i/z_i| < 1$ per $i = 2, 3$. La condizione (ii) si riscrive invece come $\omega(w_2/z_2, w_3/z_3) \leq \omega(z_2, z_3)$, cioè $p(w_2/z_2, w_3/z_3) \leq p(z_2, z_3)$. Dunque, per il caso $n = 2$ del Teorema di Pick-Nevanlinna, esiste $g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $g(z_2) = w_2/z_2$ e $g(z_3) = w_3/z_3$. Allora basta prendere $f(z) = zg(z)$.

Mostriamo che ci si può ridurre a questo caso. Consideriamo $h, g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ date da

$$g(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \text{ e } h(z) = \frac{z - w_1}{1 - \bar{w}_1 z}.$$

Allora esiste f come quella richiesta dal Teorema se e solo se esiste $F \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, con $F = h \circ f \circ g^{-1}$, tale che $F(0) = 0$, $F(g(z_2)) = h(w_2)$ e $F(g(z_3)) = h(w_3)$. Questo corrisponde proprio al caso precedente, quindi tale F esiste se e solo se

$$\omega(h(w_i), h(w_j)) \leq \omega(g(z_i), g(z_j))$$

per $i, j = 1, 2, 3$ con $i \neq j$ e

$$\omega\left(\frac{h(w_2)}{g(z_2)}, \frac{h(w_3)}{g(z_3)}\right) \leq \omega(g(z_2), g(z_3)).$$

Poiché p , e di conseguenza ω , è invariante per azione di $\text{Aut}(\mathbb{D})$, la prima disuguaglianza è equivalente alla condizione (i). Sempre per questo motivo, sostituendo $h(z) = [z, w_1]$ e $g(z) = [z, z_1]$ otteniamo che la seconda è equivalente alla condizione (ii). \square

Concludiamo la sezione con il risultato che, come già anticipato, ci permetterà di dimostrare i teoremi successivi. L'enunciato originale si trova in [GMG], ma vedremo una formulazione che ci tornerà più utile, in particolare perché coinvolge la funzione f^h .

Teorema 2.2.5. (*disuguaglianza di Golusin, 1945*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (19)$$

Dimostrazione. Con passaggi analoghi a quelli della dimostrazione del Corollario 2.1.18 abbiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(0)|) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \\ \omega(z, 0) &= \omega(|z|, 0) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right). \end{aligned}$$

Prendendo $w = 0$ nella disuguaglianza (14) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) &\leq \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) \\ \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} &\leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Adesso, dalla Proposizione 2.1.10 sappiamo che $f^h(z), f^h(0) \in \mathbb{D}$, in particolare $|f^h(z)|, |f^h(0)| < 1$, perciò è giustificato il seguente passaggio:

$$\begin{aligned}
|f^h(z)| &\leq \frac{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2 - 1}{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2 + 1} \\
&= \frac{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) - (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)}{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) + (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)} \\
&= \frac{2|f^h(0)| + 2|f^h(0)||z|^2 + 4|z|}{2 + 2|z|^2 + 4|f^h(0)||z|} = \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}.
\end{aligned}$$

□

3 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

3.1 Rigidità al bordo

Dalla parte di unicità del lemma di Schwarz-Pick possiamo dedurre il seguente risultato di rigidità: sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$f(z) = z + o(z - z_0) \text{ per } z \rightarrow z_0 \in \mathbb{D};$$

allora f è l'identità. Lo si può dimostrare osservando che $f'(z_0) = 1$ e usando quest'altro risultato più forte, che è una diretta conseguenza del lemma di Schwarz-Pick: se $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ è tale che

$$|f^h(z)| = 1 + o(1) \text{ per } z \rightarrow z_0 \in \mathbb{D},$$

allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. A questo punto, per dimostrare il primo enunciato basta supporre $z_0 = 0$, a meno di comporre con opportuni automorfismi.

Questi sono risultati di rigidità piuttosto forti. Ad esempio, il primo può essere riassunto così: se una funzione olomorfa dal disco in sé dista dall'identità per termini di grado minore al primo (e ovviamente non potremmo chiedere di meglio), allora è forzata a essere l'identità. Il secondo è simile: se la derivata iperbolica di una funzione si comporta come quella di un automorfismo (cioè la funzione e la sua derivata si comportano come quelle di un automorfismo), allora la funzione è necessariamente un automorfismo.

Questi sono risultati che valgono per punti interni al disco; quello che andremo a fare in questa sezione e nella successiva è dimostrare i loro analoghi per punti sul bordo, andando a perdere due gradi nel resto delle ipotesi. Useremo la disuguaglianza di Golusin, seguendo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR].

Teorema 3.1.1. (*Bracci-Kraus-Roth, 2020*) Sia $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \tag{21}$$

per qualche successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ con $|z_n| \rightarrow 1$. Allora $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$. Possiamo applicare la disuguaglianza di Golusin 2.2.5 nella forma (20), che riscriviamo come

$$\frac{1 + |f^h(0)|}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}.$$

Per ipotesi vale (21), dunque

$$\frac{1 + |f^h(0)|}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} o((|z_n| - 1)^2) \geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}$$

da cui

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} o(1) \geq 1.$$

devo approfondire con i dettagli o va bene questa spiegazione?

Se $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$, per il lemma di Schwarz-Pick si ha necessariamente $|f^h(0)| < 1$, dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty$ e otteniamo una contraddizione. \square

Siamo ora pronti a dimostrare il Theorem 2.1 di [BK].

3.2 Teorema di Burns-Krantz

Teorema 3.2.1. (*Burns-Krantz, 1994*) Siano $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ e $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (22)$$

per $z \rightarrow \sigma$ non tangenzialmente. Allora f è l'identità del disco.

Dimostrazione. Come già visto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.5, a meno di considerare $\sigma^{-1}f(\sigma z)$ possiamo supporre senza perdita di generalità $\sigma = 1$. Dalla Proposizione 1.2.5 segue anche che vale

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - 1)^2)$$

per $z \rightarrow 1$ non tangenzialmente, quindi esiste una successione z_n che soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1.1 (usiamo di nuovo che, non tangenzialmente, $|z - 1|$ e $1 - |z|$ possono essere scambiati negli o -piccoli); dunque f è un automorfismo. Per la Proposizione 1.1.10 esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$ tali che $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$.

Poiché vale (22), dev'essere $f''(1) = 0$. Si ha $f''(z) = \frac{e^{i\theta} \bar{a}(1 - |a|^2)}{(1 - \bar{a}z)^3}$; siccome $e^{i\theta} \neq 0$ e $|a| < 1$, deve necessariamente essere $\bar{a} = 0$, perciò $f(z) = e^{i\theta} z$. Il fatto che $f(z) = z$ segue da $f(1) = 1$ sempre per (22). \square

Esempio 3.2.2. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $f(z) = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2}$. Verifichiamo che $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Se $z \in \mathbb{D}$ allora $|z| < 1$ da cui $1 - |z|^4 > 0$. Dunque abbiamo $1 - |z|^4 < 9(1 - |z|^4)$ che riscriviamo come $1 + 9|z|^4 < 9 + |z|^4$, perciò

$$\begin{aligned} (1 + 3z^2)(1 + 3\bar{z}^2) &= 1 + 3z^2 + 3\bar{z}^2 + 9|z|^4 \\ &< 9 + 3z^2 + 3\bar{z}^2 + |z|^4 = (3 + z^2)(3 + \bar{z}^2), \end{aligned}$$

quindi

$$|f(z)|^2 = \frac{(1 + 3z^2)(1 + 3\bar{z}^2)}{(3 + z^2)(3 + \bar{z}^2)} < 1$$

e l'ultima disuguaglianza ci dice che $|f(z)| < 1$, cioè $f(z) \in \mathbb{D}$.

Ovviamente f non può essere iniettiva su \mathbb{D} perché $f(z) = f(-z)$; dunque non è un automorfismo. Adesso mostriamo che $f(z) - 1 - (z - 1)$ è $O((z - 1)^3)$ ma non $o((z - 1)^3)$ per $z \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - z = \frac{1 + 3z^2}{3 + z^2} - z \\ &= \frac{1 + 3z^2 - 3z - z^3}{3 + z^2} = \frac{(1 - z)^3}{3 + z^2}. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow 1} g(z)/(z - 1)^3 = -1/4$ si ha che $g(z)$ è $O((z - 1)^3)$ ma non $o((z - 1)^3)$ per $z \rightarrow 1$. Allora il termine $o((z - \sigma)^3)$ nel Teorema 3.2.1 non è migliorabile.

Osservazione 3.2.3. Lo stesso esempio mostra che anche nel Teorema 3.1.1 il termine $o((|z_n| - 1)^2)$ non può essere migliorato. Si ha infatti

$$|f^h(z)| = \frac{|f'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2} = \frac{2|z|}{1 + |z|^2},$$

da cui $\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{|f^h(z)| - 1}{(|z| - 1)^2} = -\frac{1}{2}$; allora la quantità $|f^h(z)| - 1$ è $O((|z| - 1)^2)$ ma non $o((|z| - 1)^2)$ per qualunque successione che si avvicina al bordo, e abbiamo già visto che f non è un automorfismo.

Riferimenti bibliografici

- [BK] D. M. Burns, S. G. Krantz: Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary. *Journal of the American Mathematical Society*, **7** (1994), no. 3, 661–676
- [BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth: A new Schwarz-Pick Lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps. Preprint, ArXiv:2003.02019v1 (2020)
- [BM] A. F. Beardon, D. Minda: A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse Mathématique*, **92** (2004), 81–104
- [D] J. Dieudonné: Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **48** (1931), 247–358
- [GMG] G. M. Golusin: Some estimations of derivatives of bounded functions. *Recueil Mathématique [Matematicheskii Sbornik]*, **16(58)** (1945), no. 3, 295–306
- [JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007
- [NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001

Ringraziamenti

Da scrivere.