

# Teoremi di rigidità per funzioni olomorfe nel disco

Candidato: Marco Vergamini      Relatore: Prof. Marco Abate

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Prerequisiti</b>	<b>4</b>
1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré . . . . .	4
1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali . . . . .	9
<b>2 Lemmi di Schwarz-Pick multi-punto</b>	<b>15</b>
2.1 Teorema di Beardon-Minda e corollari . . . . .	15
2.2 Applicazioni dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto . . . . .	23
<b>3 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz</b>	<b>28</b>
3.1 Rigidità al bordo . . . . .	28
3.2 Teorema di Burns-Krantz . . . . .	28
<b>Ringraziamenti</b>	<b>30</b>

## Introduzione

L'obiettivo di questo scritto è dimostrare un teorema del 1994, il teorema di Burns-Krantz (Theorem 2.1 di [BK]), attraverso risultati elementari. L'enunciato del teorema riguarda le funzioni olomorfe sul disco unitario con un certo andamento vicino al bordo: se la funzione dista dall'identità al più per un  $o((z - \sigma)^3)$ , allora è proprio l'identità.

La dimostrazione originale del teorema non è lunga, ma un po' tecnica. In un recente articolo di Bracci, Kraus e Roth ([BKR]) si trova una dimostrazione alternativa del teorema di Burns-Krantz. Come spiegato nel Remark 2.2 dell'articolo, è possibile passare dalle ipotesi del teorema di Burns-Krantz a quelle del Theorem 2.1 di [BKR] (come dimostrato nella Proposition 8.1 dello stesso articolo), dal quale poi è facile concludere. Il Theorem 2.1 è sostanzialmente una versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

Bracci, Kraus e Roth dimostrano il Theorem 2.1 usando risultati più generali visti nell'articolo, ma complicati. Tuttavia, nel Remark 5.6 danno una traccia per una dimostrazione più elementare. L'idea è sfruttare una disuguaglianza dovuta a Golusin e vengono indicati vari articoli in cui è stata ridimostrata.

In particolare, l'articolo di Beardon e Minda del 2004 ([BM]) contiene una serie di disuguaglianze di facile dimostrazione, delle quali il Corollary 3.7 ha a sua volta come corollario la disuguaglianza di Golusin. Queste disuguaglianze coinvolgono la distanza di Poincaré sul disco unitario e possono essere applicate per ottenere diversi altri risultati per funzioni olomorfe sul disco, come mostrato nell'articolo.

In questo scritto sviluppiamo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR]. Dimostreremo le disuguaglianze in [BM] e vedremo alcune applicazioni, concludendo con la disuguaglianza di Golusin. Grazie ad essa, e alla Proposition 8.1 di [BKR], otterremo una dimostrazione elementare del Theorem 2.1 di Burns-Krantz e di un risultato più generale dovuto a Bracci-Kraus-Roth.

# 1 Prerequisiti

## 1.1 Lemma di Schwarz-Pick e distanza di Poincaré

**Definizione 1.1.1.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto. Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *olomorfa* in  $\Omega$  se è derivabile in senso complesso per ogni  $z \in \Omega$ , e scriviamo  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Se  $\text{Im}(f) \subset \Omega'$  scriviamo  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega')$ .

**Definizione 1.1.2.** Se  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$  è biettiva, allora si può dimostrare che anche  $f^{-1}$  è olomorfa. In tal caso  $f$  è detta *automorfismo* (in senso olomorfo) di  $\Omega$  e scriviamo  $f \in \text{Aut}(\Omega)$ .

Com'è noto, la condizione di olomorfia per funzioni a valori complessi è molto più forte della derivabilità in senso reale (in particolare, è equivalente all'analiticità). Fra i vari risultati noti per le funzioni olomorfe, ci interessa studiare il lemma di Schwarz-Pick, fino a dimostrarne una versione al bordo.

Notazione: indichiamo il disco unitario con  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Riportiamo ora alcuni risultati noti di analisi complessa che verranno usati nelle dimostrazioni.

**Teorema 1.1.3.** (*formula integrale di Cauchy, [NN, Chapter 1.3, Theorems 9 and 10]*) Sia  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  e  $D$  un disco chiuso di centro  $a$  contenuto in  $\Omega$ . Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (1)$$

**Proposizione 1.1.4.** (*teorema di estensione di Riemann, [NN, Chapter 1.5, Theorem 2]*) Sia  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$  con  $z_0 \in \Omega$ . Allora  $f$  si estende a una  $g \in \mathcal{O}(\Omega)$  se e solo se è limitata in un intorno di  $z_0$ . In tal caso,  $z_0$  è detta *singolarità rimovibile*.

**Proposizione 1.1.5.** (*principio del massimo per funzioni olomorfe, [NN, Chapter 1.3, Corollary of Theorem 3 and Theorem 5]*) Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto e sia  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Sia inoltre  $U$  un aperto relativamente compatto in  $\Omega$ , cioè  $\overline{U} \subset \Omega$  e  $\overline{U}$  compatto. Allora per ogni  $z \in U$  si ha

$$|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial U} |f(w)|$$

e vale l'uguale per qualche  $z \in U$  solo se  $f$  è costante sulla componente connessa di  $U$  contenente  $z$ .

Vediamo adesso i lemmi di Schwarz e Schwarz-Pick.

**Lemma 1.1.6.** (*lemma di Schwarz*) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| \leq 1$ ; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0 \neq 0$  oppure nella seconda allora  $f(z) = e^{i\theta} z$  per qualche  $\theta \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $f(0) = 0$ , possiamo costruire  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$  con  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  estendendola per continuità in 0 come  $g(0) = f'(0)$ . Fissiamo  $0 < r < 1$ . Per ogni  $z \in \mathbb{D}$  tale che  $|z| \leq r$ , per il principio del massimo per funzioni olomorfe si ha

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Mandando  $r$  a 1 otteniamo che per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|g(z)| \leq 1$ , da cui  $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| \leq 1$ .

Se vale una delle due ugaglianze, allora esiste  $z_0 \in \mathbb{D}$  tale che  $|g(z_0)| = 1$ . Dunque, sempre per il principio del massimo  $g$  è costantemente uguale a un valore di modulo 1 in ogni disco di centro l'origine e raggio  $|z_0| < r < 1$ , quindi su  $\mathbb{D}$ . Perciò  $g(z) = e^{i\theta}$  con  $\theta \in \mathbb{R}$ , da cui  $f(z) = e^{i\theta}z$ .  $\square$

**Corollario 1.1.7.** *Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  è tale che  $f(0) = 0$ , allora  $f(z) = e^{i\theta}z$ .*

*Dimostrazione.* Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  anche  $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ; inoltre  $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$ . Per il lemma di Schwarz,  $|f'(0)| \leq 1$  e  $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$ ; dunque  $|f'(0)| = 1$ , da cui la tesi sempre per il lemma di Schwarz.  $\square$

**Definizione 1.1.8.** Diciamo che un gruppo  $G$  *agisce fedelmente* su uno spazio  $X$  se per ogni  $g \in G$  è data una bigezione  $\gamma_g : X \rightarrow X$  tale che  $\gamma_e = \text{id}$  e  $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$ , inoltre  $\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2}$  se e solo se  $g_1 = g_2$ .

Chiamiamo inoltre *gruppo di isotropia* di  $x_0 \in X$  il sottogruppo di  $G$  dato da  $G_{x_0} = \{g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0\}$ .

**Lemma 1.1.9.** *Sia  $G$  un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio  $X$  e sia  $G_{x_0}$  il gruppo di isotropia di  $x_0 \in X$ . Supponiamo che per ogni  $x \in X$  esista  $g_x \in G$  tale che  $\gamma_{g_x}(x) = x_0$  e sia  $\Gamma = \{g_x \mid x \in X\}$ . Allora  $G$  è generato da  $\Gamma$  e  $G_{x_0}$ , cioè ogni  $g \in G$  è della forma  $g = h g_x$  con  $x \in X$  e  $h \in G_{x_0}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $g \in G$  e  $x = \gamma_{g^{-1}}(x_0)$ . Allora  $(\gamma_{g_x} \circ \gamma_{g^{-1}})(x_0) = x_0$  da cui  $\gamma_{g_x} \circ \gamma_{g^{-1}} = \gamma_{g_x g^{-1}} = \gamma_h$  con  $h \in G_{x_0}$ , dunque  $g_x g^{-1} = h$  e quindi  $g = h^{-1} g_x$  con  $h^{-1} \in G_{x_0}$ .  $\square$

**Proposizione 1.1.10.** *Si ha che  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  se e solo se esistono  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{D}$  tali che  $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ .*

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Sia  $f$  come nell'enunciato. Con semplici conti possiamo vedere che per  $z, w \in \mathbb{C}$  con  $\bar{w}z \neq 1$  si ha

$$1 - \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|^2 = \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{w}z|^2}, \quad (2)$$

da cui segue che se  $a, z \in \mathbb{D}$  allora

$$1 - |f(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} > 0,$$

per cui  $|f(z)| < 1$ , cioè  $f(z) \in \mathbb{D}$ . L'inversa è  $f^{-1}(z) = e^{-i\theta} \frac{z + ae^{i\theta}}{z + \bar{a}e^{-i\theta}}$ , della stessa forma. Si noti che  $f(a) = 0$ .

( $\Rightarrow$ ) Scriviamo per semplicità  $f_{a,\theta}(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ . Vediamo  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  come gruppo che agisce su  $\mathbb{D}$ .  $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$  è, per il Corollario 1.1.7,  $\{f_{0,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ , mentre possiamo prendere  $\Gamma = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D}\}$  poiché  $f_{a,0}(a) = 0$ . Per il Lemma 1.1.9,  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  è generato da  $\text{Aut}(\mathbb{D})_0$  e  $\Gamma$ , cioè ogni  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  è della forma  $\gamma = f_{0,\theta} \circ f_{a,0} = f_{a,\theta}$ .  $\square$

**Osservazione 1.1.11.** Dalla dimostrazione abbiamo anche che  $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ ; inoltre, per  $|z| > 1$  con  $z \neq 1/\bar{a}$  si ha  $|f(z)| > 1$ .

**Osservazione 1.1.12.**  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  agisce in modo transitivo su  $\mathbb{D}$ , cioè si ha che per ogni  $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$  esiste  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  tale che  $\gamma(z_0) = z_1$ . Infatti, basta prendere  $\gamma = f_{z_1,0}^{-1} \circ f_{z_0,0}$ .

**Lemma 1.1.13.** (*lemma di Schwarz-Pick*) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.

*Dimostrazione.* Fissato  $w \in \mathbb{D}$  siano  $\gamma_1(z) = \frac{z + w}{1 + \bar{w}z}$  e  $\gamma_2(z) = \frac{z - f(w)}{1 - \overline{f(w)}z}$ .

Si ha  $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Si ha anche che  $\gamma_1(0) = w$  e  $\gamma_2(f(w)) = 0$ ; inoltre  $\gamma_1^{-1}(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ . Per il lemma di Schwarz applicato a  $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$  abbiamo che per ogni  $\zeta \in \mathbb{D}$  si ha  $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| \leq |\zeta|$ ; prendendo  $\zeta = \gamma_1^{-1}(z)$  otteniamo che per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|(\gamma_2 \circ f)(z)| \leq |\gamma_1^{-1}(z)|$ , che è la prima disuguaglianza. Abbiamo poi  $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \leq 1$ , da cui  $|\gamma_2'(f(w))f'(w)\gamma_1'(0)| \leq 1$ . Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \gamma_1'(z) &= \frac{1 + \bar{w}z - \bar{w}(z + w)}{(1 + \bar{w}z)^2} \Rightarrow \gamma_1'(0) = 1 - |w|^2, \\ \gamma_2'(z) &= \frac{1 - \overline{f(w)}z + \overline{f(w)}(z - f(w))}{(1 - \overline{f(w)}z)^2} \Rightarrow \gamma_2'(f(w)) = \frac{1}{1 - |f(w)|^2}. \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene la seconda disuguaglianza con  $w$  al posto di  $z$ .

Per l'uguaglianza, nel primo caso avremmo  $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)(\zeta)| = |\zeta|$ , mentre nel secondo  $|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| = 1$ . In entrambi i casi, per il lemma di Schwarz  $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1 = g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , dunque  $f = \gamma_2^{-1} \circ g \circ \gamma_1^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .  $\square$

**Definizione 1.1.14.** Scriviamo  $[z, w] := f_{w,0}(z)$  e  $p(z, w) := |[z, w]|$ .

**Osservazione 1.1.15.** Se  $f$  è un automorfismo del disco, esiste  $\mu \in \partial\mathbb{D}$  tale che  $[f(z), f(w)] = \mu[z, w]$ . Infatti, la funzione  $g(\zeta) = [\zeta, f(w)]$  sta in  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  e  $[f(z), f(w)] = g(f(z))$  è ancora un automorfismo. Si ha inoltre  $[f(w), f(w)] = 0$ , dunque dev'essere proprio della forma  $\mu[z, w]$  con  $|\mu| = 1$ .

Dal lemma di Schwarz-Pick abbiamo che la quantità  $p(z, w)$  è contratta da  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Vediamo adesso una distanza costruita a partire da questa quantità, con la quale dimostreremo una serie di disuguaglianze che ci permetteranno di dimostrare la disuguaglianza di Golusin, dalla quale seguirà la versione al bordo del lemma.

$$\text{Consideriamo } \omega(z, w) := \text{arctanh}(p(z, w)) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

**Proposizione 1.1.16.** La funzione  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$  è ben definita ed è effettivamente una distanza.

*Dimostrazione.* Notiamo che per  $z, w \in \mathbb{D}$  l'equazione (2) ci dà immediatamente  $p(z, w) < 1$ , per cui  $\omega$  è ben definita e resta solo da mostrare che è una distanza.

L'unica cosa non ovvia da dimostrare è la disuguaglianza triangolare. Applicando la tangente iperbolica a entrambi i membri della disuguaglianza triangolare per  $\omega$  e sfruttando l'uguaglianza  $\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$  si ha

$$\begin{aligned} \tanh(\omega(z_1, z_2)) &\leq \tanh(\omega(z_1, z_0) + \omega(z_0, z_2)) \\ &= \frac{\tanh(\omega(z_1, z_0)) + \tanh(\omega(z_0, z_2))}{1 + \tanh(\omega(z_1, z_0))\tanh(\omega(z_0, z_2))}; \end{aligned}$$

dalla definizione di  $\omega$  troviamo

$$p(z_1, z_2) \leq \frac{p(z_1, z_0) + p(z_0, z_2)}{1 + p(z_1, z_0)p(z_0, z_2)}. \quad (3)$$

Notiamo che per il lemma di Schwarz-Pick abbiamo che  $p$  è invariante sotto l'azione di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ . Grazie all'Osservazione 1.1.12, possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che  $z_0 = 0$ . Dato che  $|1 - \bar{z}_2 z_1| \leq 1 + |z_1||z_2|$  e  $1 - |z_1|^2, 1 - |z_2|^2 > 0$ , ricordando l'equazione (2), per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  si ha che

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|^2 &= \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \\ &\geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_1||z_2|)^2} = 1 - \left( \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|} \right)^2, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|},$$

che è quello che otteniamo inserendo  $z_0 = 0$  nella disuguaglianza (3) e usando che  $p(0, z) = |z|$ .  $\square$

**Definizione 1.1.17.** La funzione  $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty)$  è detta *distanza di Poincaré (o iperbolica)* del disco.

**Definizione 1.1.18.** Data  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , la *derivata iperbolica* è definita come

$$f^h(w) := \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2},$$

mentre il *rapporto iperbolico* è definito come

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{per } z \neq w \\ f^h(w) & \text{per } z = w. \end{cases}$$

Notiamo che, poiché il limite di  $f^*(z, w)$  per  $z \rightarrow w$  è ben definito per ogni  $w$ , per la Proposizione 1.1.4 abbiamo che la funzione  $f^*(z, w)$  è olomorfa in  $z \in \mathbb{D}$  per ogni  $w \in \mathbb{D}$  fissato.

**Osservazione 1.1.19.**

- (i) Le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick possono essere riscritte come  $|f^*(z, w)| \leq 1$ , con uguaglianza se e solo se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ;
- (ii) un altro modo di scrivere le disuguaglianze del lemma di Schwarz-Pick è  $p(f(z), f(w)) \leq p(z, w)$ , che è equivalente a  $\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w)$  in quanto  $\arctanh$  è strettamente crescente;
- (iii)  $p(z, 0) = |z|$ , quindi  $\omega(z, 0) = \omega(|z|, 0)$ ; analogamente,  $\omega(0, z) = \omega(0, |z|)$ ;
- (iv) per definizione,  $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$ .

Questi risultati verranno usati nelle varie dimostrazioni e verranno esplicitati solo quando ciò che ne segue non è immediato.

Per trattare i casi estremali delle disuguaglianze in [BM], ci servirà qualche risultato di tipo geometrico sul disco con la distanza iperbolica.

**Definizione 1.1.20.** Una *geodetica* per  $\omega$  è una curva  $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{D}$  tale che per ogni  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  si ha  $\omega(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$ .

Diciamo che tre punti  $z_1, z_2, z_3$  appartengono *nell'ordine* alla stessa geodetica se  $z_j = \sigma(t_j)$  con  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ .

**Osservazione 1.1.21.** Poiché  $\omega$  è invariante sotto l'azione di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ , gli automorfismi mandano geodetiche in geodetiche; inoltre, conservano l'ordine di appartenenza dei punti.



**Esempio 1.1.22.** Dato  $z_0 \in \mathbb{D}$ , la curva  $\sigma(t) = \tanh(t) \frac{z_0}{|z_0|}$  (il diametro passante per  $z_0$ ) è una geodetica. Che sia il diametro indicato segue dal fatto che la funzione  $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  è biettiva. Che sia una geodetica segue dalla definizione di  $\omega$ , dalla formula già citata per  $\tanh(a+b)$  e dal fatto che  $\tanh$  è dispari.

**Osservazione 1.1.23.** Dati due punti  $z_0$  e  $z_1$ , esiste sempre una geodetica passante per entrambi. Infatti, per l'Osservazione 1.1.21 e per transitività di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  possiamo supporre  $z_1 = 0$ ; basta dunque prendere il diametro visto nell'Esempio 1.1.22.

**Lemma 1.1.24.**  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$  appartengono nell'ordine alla stessa geodetica se e solo se  $\omega(z_1, z_3) = \omega(z_1, z_2) + \omega(z_2, z_3)$ .

*Dimostrazione.* Se appartengono nell'ordine alla stessa geodetica, l'uguaglianza segue dalla definizione.

Supponiamo ora che valga  $\omega(z_1, z_3) = \omega(z_1, z_2) + \omega(z_2, z_3)$ . Per transitività di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  possiamo supporre  $z_2 = 0$ . Usando la definizione di  $\omega$ , l'uguaglianza si riscrive come

$$\operatorname{arctanh} \left| \frac{z_1 - z_3}{1 - \bar{z}_3 z_1} \right| = \operatorname{arctanh} |z_1| + \operatorname{arctanh} |z_3|;$$

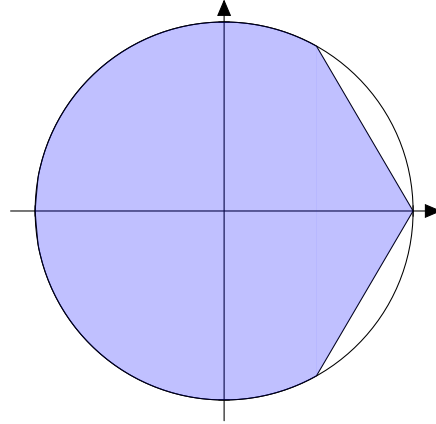
applicando la tangente iperbolica a entrambi i membri e usando ancora una volta la formula  $\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$ , otteniamo

$$\left| \frac{z_1 - z_3}{1 - \bar{z}_3 z_1} \right| = \frac{|z_1| + |z_3|}{1 + |z_1||z_3|}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 1.1.16 abbiamo visto una disuguaglianza che coinvolge le stesse quantità; ripercorrendo i passaggi, si trova che la condizione per l'uguaglianza è  $|1 - \bar{z}_3 z_1| = 1 + |z_3||z_1|$ . Ma questo dice proprio che  $z_1$  e  $z_3$  stanno sullo stesso diametro, da parti opposte rispetto a 0.  $\square$

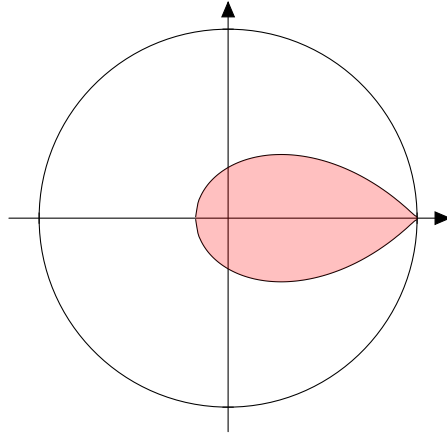
## 1.2 Regioni di Stolz e limiti non tangenziali

**Definizione 1.2.1.** Dati  $\alpha \in (0, \pi/2)$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ , chiamiamo *setto di vertice  $\sigma$  e angolo  $2\alpha$*  l'insieme  $S(\sigma, \alpha) \subset \mathbb{D}$  tale che per ogni  $z \in S(\sigma, \alpha)$  l'angolo compreso tra la retta congiungente  $\sigma$  e 0 e la retta congiungente  $\sigma$  e  $z$  ha modulo minore di  $\alpha$ .



In blu, il settore  $S(1, 2\pi/3)$

**Definizione 1.2.2.** Dati  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e  $M > 1$ , chiamiamo *regione di Stolz*  $K(\sigma, M)$  l'insieme  $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} < M \right\}$ .



In rosso, la regione di Stolz  $K(1, 2)$

**Proposizione 1.2.3.** Dato  $M > 1$ , sia  $\alpha = \arctan\sqrt{M^2 - 1} \in (0, \pi/2)$ . Per ogni  $\alpha' < \alpha$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che, detto  $B(\sigma, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sigma - z| < \varepsilon\}$ , si ha

$$S(\sigma, \alpha') \cap B(\sigma, \varepsilon) \subset K(\sigma, M) \subset S(\sigma, \alpha).$$

*Dimostrazione.* Per definizione,  $S(\sigma, \alpha)$  corrisponde all'insieme  $S(1, \alpha)$  ruotato moltiplicando per  $\sigma$ . Lo stesso vale per  $K(\sigma, M)$ : infatti,  $\frac{|\sigma - z|}{1 - |z|} = \frac{|1 - \sigma^{-1}z|}{1 - |\sigma^{-1}z|}$ .

Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ . È utile osservare che in questo caso  $S(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{D} \mid |\Im(z)| < (\tan \alpha)(1 - \Re(z))\}$ .

Mostriamo la seconda inclusione. Poiché  $z \in K(1, M)$  e  $1 > |z| > \Re(z)$ , abbiamo che

$$M > \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq \frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)},$$

da cui

$$M^2 - 1 > \frac{|1 - z|^2}{(1 - \Re(z))^2} - 1 = \frac{1 - 2\Re(z) + |z|^2}{(1 - \Re(z))^2} - 1 = \frac{|\Im(z)|^2}{(1 - \Re(z))^2};$$

perciò

$$\frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{M^2 - 1} = \tan \alpha.$$

Mostriamo adesso la prima inclusione. Fissiamo  $\alpha' < \alpha$ . Supponiamo per assurdo che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esista  $z \in S(1, \alpha') \cap B(1, \varepsilon)$  tale che  $z \notin K(1, M)$ .

Per tali  $z$  si ha allora  $\frac{|1 - z|}{1 - |z|} \geq M$ , da cui

$$\frac{1 - |z|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{M}; \quad (4)$$

inoltre, poiché  $z \in S(1, \alpha')$  abbiamo

$$\frac{|\Im(z)|}{1 - \Re(z)} < \tan \alpha'.$$

Elevando al quadrato, sommando 1 e sfruttando l'uguaglianza vista sopra otteniamo

$$\frac{|1 - z|^2}{(1 - \Re(z))^2} = \frac{|\Im(z)|^2}{(1 - \Re(z))^2} + 1 < \tan^2 \alpha' + 1,$$

che ci dà

$$\frac{|1 - z|}{1 - \Re(z)} < \sqrt{\tan^2 \alpha' + 1} =: M', \quad (5)$$

dove  $\alpha' < \alpha$ , quindi  $\tan \alpha' < \tan \alpha$  e dunque  $M' < M$ . Moltiplicando tra loro le disuguaglianze (4) e (5) troviamo  $\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} < \frac{M'}{M} < 1$ . Se mostriamo che

$\lim_{\substack{z \rightarrow 1, \\ z \in S(1, \alpha')}} \frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} = 1$  avremo trovato una contraddizione. Scriviamo dunque  $x = \Re(z)$  e  $y = \Im(z)$ , e supponiamo senza perdita di generalità  $y > 0$ , per cui la condizione  $z \in S(1, \alpha')$  si scrive come  $y/(1 - x) < \tan \alpha'$ . Inoltre vale che

$$\frac{1 - |z|}{1 - \Re(z)} = \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 - x} = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x}.$$

Vogliamo mostrare che la quantità  $\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x}$  tende a 0 per  $(x, y) \rightarrow (1, 0)$  all'interno del settore di angolo  $2\alpha'$ . Notiamo che è sempre maggiore di 0, dunque ci basta stimarne il lim sup. Usando che  $y/(1 - x) < \tan \alpha'$  e moltiplicando numeratore e denominatore per  $\sqrt{x^2 + y^2} - x$  troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1 - x} &< \tan \alpha' \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \\ &= \tan \alpha' \cdot \frac{y^2}{y(\sqrt{x^2 + y^2} + x)} = \tan \alpha' \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}; \end{aligned}$$

quest'ultima espressione tende a 0 per  $x \rightarrow 1$  e  $y \rightarrow 0$ .  $\square$

**Definizione 1.2.4.** Diciamo che una funzione  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ha *limite non tangenziale*  $L \in \mathbb{C}$  in  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} f(z) = L$$

se per ogni  $M > 1$  si ha  $\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma, \\ z \in K(\sigma, M)}} f(z) = L$ .

Date altre due funzioni  $g, h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  scriviamo che  $f(z) = g(z) + o(h(z))$  per  $z \rightarrow \sigma$  *non tangenzialmente* se

$$\lim_{z \rightarrow \sigma}^{\text{nt}} \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} = 0.$$

La seguente proposizione asserisce che, per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente, un certo andamento di  $f$  può essere tradotto nell'andamento di  $|f^h|$ . È questo che ci permetterà di dimostrare il teorema 2.1 di [BK] passando per la versione al bordo del lemma di Schwarz-Pick.

**Proposizione 1.2.5.** Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (6)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  *non tangenzialmente*. Allora

$$|f^h(z)| = 1 + o((z - \sigma)^2) \quad (7)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  *non tangenzialmente*.

*Dimostrazione.* A meno di considerare  $g(z) = \sigma^{-1}f(\sigma z)$ , possiamo supporre senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ . Infatti, è facile verificare che nell'ipotesi (6) si ha  $g(z) = 1 + (z - 1) + o((z - 1)^3)$ . Usando che  $g'(z) = f'(\sigma z)$  si ha che vale

$$|g^h(z)| = |g'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |g(z)|^2} = |f'(\sigma z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |\sigma^{-1}f(\sigma z)|^2};$$

ricordando che  $|\sigma| = 1$  troviamo

$$|g^h(z)| = |f'(\sigma z)| \frac{1 - |\sigma z|^2}{1 - |f(\sigma z)|^2} = |f^h(\sigma z)|.$$

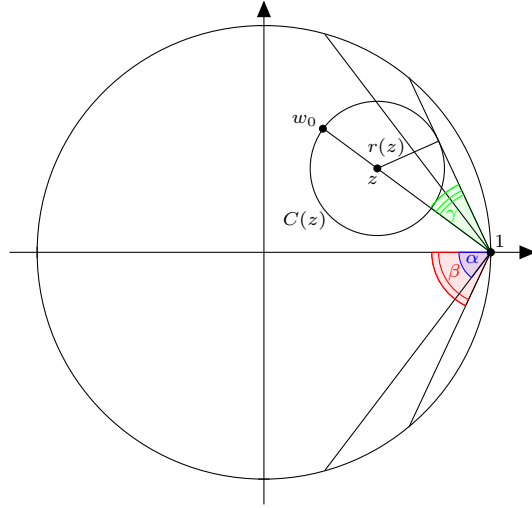
Se avessimo  $|g^h(z)| = 1 + o((z-1)^2)$ , mediante la sostituzione  $\zeta = \sigma z$  si avrebbe

$$o((z-1)^2) = o(\sigma^{-2}(\zeta - \sigma)^2) = o((\zeta - \sigma)^2)$$

e  $|f^h(\sigma z)| = |f^h(\zeta)|$ ; troviamo quindi l'equazione (7) con  $\zeta$  al posto di  $z$ .

Sia  $M > 1$  e consideriamo  $z \in K(1, M)$ . Allora per la Proposizione 1.2.3 si ha  $z \in S(1, \alpha)$  dove  $\alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1}$ . Sia inoltre  $\beta \in (0, \pi/2)$  con  $\beta > \alpha$  e sia  $C(z)$  il cerchio di centro  $z$  e raggio  $r(z) = \text{dist}(z, \partial S(1, \beta))$ , la distanza euclidea di  $z$  dal bordo di  $S(1, \beta)$ . Allora per la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione  $f(z) - z$  si ha

$$f'(z) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw := I(z) \Rightarrow f'(z) = 1 + I(z).$$



Per la Proposizione 1.2.3 esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $w \in S(1, \beta) \cap B(1, \delta)$ , si ha  $w \in K(1, M')$  con  $M' > \sqrt{\tan^2 \beta + 1}$ . Dato  $\varepsilon > 0$  fissato e prendendo  $\delta$  sufficientemente piccolo, per ipotesi abbiamo che  $|f(w) - w| < \varepsilon|1 - w|^3$  per ogni  $w \in K(1, M') \cap B(1, \delta)$  e di conseguenza per ogni  $w \in S(1, \beta) \cap B(1, \delta)$ . Poiché  $S(1, \beta) \subset \mathbb{D}$ , dev'essere  $r(z) \leq \text{dist}(z, \mathbb{D}) = 1 - |z|$ . Si ha anche  $1 - |z| \leq |1 - z|$ ; quindi prendendo  $z \in B(1, \delta/2)$  abbiamo  $r(z) \leq |z - 1| < \delta/2$ . Dunque per ogni  $w \in C(z)$  troviamo che  $|w - 1| \leq |w - z| + |z - 1| = r(z) + |z - 1| < \delta$ . Per questi  $z$ , facendo la sostituzione  $w = z + r(z)e^{i\theta}$ , vale che

$$\begin{aligned} |I(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{f(w) - w}{(w - z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3}{|(z + r(z)e^{i\theta}) - z|^2} r(z) d\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - (z + r(z)e^{i\theta})|^3 = \frac{\varepsilon}{r(z)} \max_{w \in C(z)} |1 - w|^3. \end{aligned}$$

Il massimo è raggiunto per l'intersezione più lontana da 1 tra la circonferenza  $C(z)$  e la retta passante per 1 e  $z$  (il punto  $w_0$  in figura); abbiamo che vale  $|1 - w_0| = r(z) + |z - 1|$ . Allora si ha

$$|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{r(z)} (r(z) + |z - 1|)^3 = \varepsilon r(z)^2 \left(1 + \frac{|z - 1|}{r(z)}\right)^3.$$

Detto  $\gamma$  l'angolo tra la retta congiungente 1 e  $z$  e il tratto affine di  $\partial S(1, \beta)$  più vicino a  $z$  (che è effettivamente il tratto di bordo più vicino a  $z$  se lo si prende sufficientemente vicino a 1), si ha  $\frac{|z - 1|}{r(z)} = \csc \gamma$ . Poiché vale che  $\gamma \geq \beta - \alpha$  e  $r(z) \leq |z - 1|$ , troviamo  $r(z)^2 (1 + \csc \gamma)^3 \leq |z - 1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3$ . Concatenando le disuguaglianze appena viste, risulta che

$$|I(z)| \leq \varepsilon |z - 1|^2 (1 + \csc(\beta - \alpha))^3.$$

Otteniamo dunque  $f'(z) = 1 + o((z - 1)^2)$  per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente.

Notiamo che all'interno della regione di Stolz  $K(1, M)$  si ha  $1 \leq \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \leq M$ , il che ci permette di usare indipendentemente  $z - 1$  o  $1 - |z|$  negli  $o$ -piccoli per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente. Per ipotesi

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \frac{1 - |z| + o((z - 1)^3)}{1 - |z|} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente. Possiamo quindi concludere che

$$|f^h(z)| = |f'(z)| \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = 1 + o((z - 1)^2)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente. □

## 2 Lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

### 2.1 Teorema di Beardon-Minda e corollari

Adesso possiamo procedere a dimostrare la serie di disuguaglianze di [BM], che coinvolgono la distanza di Poincaré  $\omega$  e le funzioni olomorfe dal disco in sé che non sono automorfismi.

L'idea generale è la seguente: stiamo studiando  $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Le funzioni di questo insieme che sono anche automorfismi conservano la distanza iperbolica. Sembra dunque ragionevole vedere come si traduce il lemma di Schwarz-Pick in termini iperbolici (abbiamo già visto che  $\text{contrae } \omega$ ).

**Definizione 2.1.1.** La *rotazione iperbolica* di ordine due attorno a un punto  $a \in \mathbb{D}$  è la funzione  $r_a \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \setminus \{\text{id}\}$  tale che  $r_a \circ r_a = \text{id}$  e  $r_a(a) = a$ . Chiamiamo  $a$  il *centro di rotazione* di  $r_a$ .

**Osservazione 2.1.2.** Le condizioni imposte sono sufficienti a determinare un unico automorfismo  $r_a$ . Infatti, a meno di coniugare possiamo supporre  $a = 0$ , per cui  $r_0$  dev'essere una rotazione di ordine due, cioè di  $\pi$ . Inoltre, è facile vedere che  $r_a$  è caratterizzata dall'equazione  $[r_a(z), a] = -[z, a]$ .

**Osservazione 2.1.3.**  $z, a$  e  $r_a(z)$  appartengono, nell'ordine, alla stessa geodetica. Infatti, a meno di comporre con un opportuno automorfismo possiamo supporre  $a = 0$ ; ma poiché  $r_0(z) = e^{i\pi}z$ , l'affermazione risulta ovvia.

**Definizione 2.1.4.** Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , chiamiamo *prodotto di Blaschke* di grado  $n$  la funzione

$$e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{B}_n$  i prodotti di Blaschke di grado  $n$ .

**Osservazione 2.1.5.** I prodotti di Blaschke sono funzioni olomorfe sul disco unitario, con zeri assegnati. Quelli di grado 1 sono  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ .

**Lemma 2.1.6.** Tra le funzioni  $f$  continue in  $\overline{\mathbb{D}}$  e olomorfe in  $\mathbb{D}$ , i prodotti di Blaschke di grado  $n$  sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

- (i) se  $|z| = 1$  allora  $|f(z)| = 1$ ;
- (ii)  $f$  ha esattamente  $n$  zeri in  $\mathbb{D}$  contati con molteplicità.

*Dimostrazione.* Se  $f$  è un prodotto di Blaschke di grado  $n$ , che soddisfi (ii) è ovvio e che soddisfi (i) segue dall'Osservazione 1.1.11.

Fissiamo ora  $f$  che soddisfi (i) e (ii); consideriamo  $B$  il prodotto di Blaschke definito con  $\theta = 0$  e  $a_n$  gli zeri in  $\mathbb{D}$  di  $f$ , contati con molteplicità. Allora  $f/B$  e  $B/f$  sono due funzioni olomorfe su  $\mathbb{D}$  e continue in  $\overline{\mathbb{D}}$ , di modulo 1 sul bordo. Per il principio del massimo per funzioni olomorfe, deve essere  $|f/B| \leq 1$  e  $|B/f| \leq 1$  sul disco unitario, da cui  $|f/B| = 1$  e  $f/B$  è costante in  $\mathbb{D}$ .  $\square$

**Lemma 2.1.7.** *Sia  $f \in \mathcal{B}_2$ , esistono  $S, T \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  tali che  $S \circ f \circ T(z) = z^2$ .*

*Dimostrazione.* Per transitività di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  su  $\mathbb{D}$ , ci basta dimostrare che esiste un punto  $c \in \mathbb{D}$  tale che  $f(z) - c$  abbia uno zero doppio nel disco. È sufficiente trovare  $z_0 \in \mathbb{D}$  con  $f'(z_0) = 0$ , dato che sappiamo già  $f(z_0) \in \mathbb{D}$ . Scriviamo  $f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \cdot \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}$ . Sempre per transitività, usando  $T$  possiamo supporre  $a_1 = 0$  e poniamo  $a_2 = a$ . Si ha

$$f'(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} + z \cdot \frac{1 - |a|^2}{1 - \bar{a}z} \right).$$

Con qualche passaggio algebrico, l'equazione  $f'(z) = 0$  diventa

$$\bar{a}z^2 - 2z + a = 0.$$

Le soluzioni sono  $(1 \pm \sqrt{1 - |a|^2})/\bar{a}$ ; da  $|a| < 1$ , abbiamo che quella con il più sta fuori da  $\mathbb{D}$  mentre quella con il meno sta dentro, dunque è la soluzione cercata.  $\square$

Notazione: sia  $f \in \mathcal{B}_2$ ; indichiamo con  $R_f$  la rotazione iperbolica di ordine due attorno al punto  $z_0$ , trovato nella dimostrazione del Lemma 2.1.7.

**Corollario 2.1.8.** *Sia  $f \in \mathcal{B}_2$ . Allora  $f^*(R_f(w), w) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $S, T \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  date dal Lemma 2.1.7 tali che  $S \circ f \circ T = F$  con  $F(z) = z^2$ . Abbiamo  $[R_F(z), 0] = -[z, 0]$ , dunque per l'Osservazione 1.1.15 troviamo  $\mu[T(R_F(z)), T(0)] = -\mu[T(z), T(0)]$ . Per costruzione,  $T(0)$  dev'essere il punto attorno al quale avviene la rotazione  $R_f$ , che quindi è caratterizzata dall'equazione  $[R_f(z), T(0)] = -[z, T(0)]$ . Ne segue che  $T(R_F(z)) = R_f(T(z))$ . Perciò abbiamo  $f = S^{-1} \circ F \circ T^{-1}$  e  $R_f = T \circ R_F \circ T^{-1}$ , inoltre  $F \circ R_F = F$ . Ne deduciamo che

$$f \circ R_f = S^{-1} \circ F \circ R_F \circ T^{-1} = S^{-1} \circ F \circ T^{-1} = f,$$

che implica la tesi.  $\square$

**Proposizione 2.1.9.** *Valgono le seguenti affermazioni:*

- (i) *date  $F \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , si ha che  $F \in \mathcal{B}_n$  se e solo se  $S \circ F \in \mathcal{B}_n$ ;*
- (ii) *si ha che  $f \in \mathcal{B}_{n+1}$  se e solo se  $f^*(z, w) \in \mathcal{B}_n$ , con  $w$  un qualsiasi elemento di  $\mathbb{D}$  fissato.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare (i), basta mostrare che  $S$  conserva le proprietà del Lemma 2.1.6. La prima segue dall'Osservazione 1.1.11. Per transitività di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ , la seconda corrisponde a dover dimostrare che, dato  $c \in \mathbb{D}$ , l'equazione



$F(z) = c$  ha esattamente  $n$  zeri contati con molteplicità in  $\mathbb{D}$ , dove  $F \in B_n$ .

Scriviamo  $F(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$ . Allora  $F(z) = c$  si riscrive come

$$c \prod_{j=1}^n (1 - \bar{a}_j z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n (z - a_j). \quad (8)$$

Stiamo uguagliando due polinomi di grado  $n$  con coefficienti direttivi diversi: quello al membro sinistro è di modulo minore di 1, mentre quello al membro destro ha modulo esattamente 1. Dunque la nostra equazione ha esattamente  $n$  soluzioni, contate con molteplicità, in  $\mathbb{C}$ . Per l'Osservazione 1.1.11, se  $z \notin \mathbb{D}$  e  $z \neq 1/\bar{a}_j$  per  $j = 1, \dots, n$ , si ha  $|F(z)| \geq 1$ ; se  $z = 1/\bar{a}_j$  per qualche  $j$ , il membro sinistro di (8) è 0 ma il membro destro no, quindi non ci sono soluzioni in quel caso. Perciò, per  $|c| < 1$ , tutte le soluzioni trovate sono in  $\mathbb{D}$  come voluto.

Per definizione di quoziente iperbolico,  $[f(z), f(w)] = [z, w]f^*(z, w)$ . Il membro di sinistra è della forma  $S(f(z))$ , dove  $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  è  $S(z) = [z, f(w)]$ ; scriviamo anche  $T(z) = [z, w]$ . Se  $f^*(z, w) \in \mathcal{B}_n$ , allora  $T(z)f^*(z, w) \in \mathcal{B}_{n+1}$ ; dunque  $S \circ f \in \mathcal{B}_{n+1}$  e per il punto (i) abbiamo  $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ . Viceversa, se  $f \in \mathcal{B}_{n+1}$  si ha  $S \circ f \in \mathcal{B}_{n+1}$ . Sappiamo anche che  $S(f(w)) = 0$ , dunque nel prodotto ci dev'essere il fattore  $[z, w]$ ; segue dunque che  $f^*(z, w) \in \mathcal{B}_n$ .  $\square$

Il seguente risultato rende chiaro perché nelle varie disuguaglianze si richiede che  $f$  non sia un automorfismo.

**Proposizione 2.1.10.** *Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$  e  $v \in \mathbb{D}$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha che  $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$  e la funzione  $z \mapsto f^*(z, v)$  è olomorfa.*

*Dimostrazione.* L'olomorfia l'abbiamo già vista quando abbiamo definito il rapporto iperbolico. Per il lemma di Schwarz-Pick,  $|f^*(z, v)| \leq 1$ ; inoltre, vale l'uguaglianza in qualche punto solo se  $f$  è un automorfismo. Dunque le ipotesi su  $f$  assicurano che vale la disuguaglianza stretta sempre, cioè  $f^*(z, v) \in \mathbb{D}$  per ogni  $z \in \mathbb{D}$ .  $\square$

L'idea dell'articolo di Beardon-Minda è di applicare il lemma di Schwarz-Pick alla funzione  $f^*(z, v)$ , con  $v$  fissato. Per  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , avremmo una funzione costante di modulo uguale a 1, in particolare in  $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \setminus \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ ; non potremmo quindi applicare quanto appena detto.

**Teorema 2.1.11.** *(Beardon-Minda, 2004) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(f^*(z, v), f^*(w, v)) \leq \omega(z, w). \quad (9)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $f$  non è un automorfismo, per la Proposizione 2.1.10 la funzione  $z \mapsto f^*(z, v)$  è in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ ; perciò il membro sinistro della disuguaglianza (9) è ben definito e la tesi segue dal lemma di Schwarz-Pick e dall'osservazione 1.1.19, punto (ii).

Sempre dal lemma di Schwarz-Pick, si ha l'uguaglianza se e solo se abbiamo  $f^*(z, v) \in \text{Aut}(\mathbb{D}) = \mathcal{B}_1$ . Per il punto (ii) della Proposizione 2.1.9, questo è equivalente a  $f \in \mathcal{B}_2$ .  $\square$

Vogliamo vedere che questa versione a tre punti è effettivamente un miglioramento rispetto al lemma di Schwarz-Pick.

**Esempio 2.1.12.** Consideriamo una funzione  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$ . Il lemma di Schwarz-Pick diventa semplicemente il lemma di Schwarz e ci dice che  $f(z)/z \in \mathbb{D}$ . Prendendo invece  $w = 0$  e  $v = 0$  in (9), troviamo  $\omega(f(z)/z, f'(0)) \leq \omega(z, 0)$ . Dunque  $f(z)/z$  appartiene al disco iperbolico di centro  $f'(0)$  e raggio  $\omega(z, 0)$ , che è un sottoinsieme di  $\mathbb{D}$ .

**Corollario 2.1.13.** Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w). \quad (10)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v)$ ,  $w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Dimostrazione.* Applicando la disuguaglianza triangolare per  $\omega$  e il Teorema 2.1.11, si ha

$$\begin{aligned} \omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w). \end{aligned}$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se vale in entrambe le disuguaglianze appena viste. La seconda è esattamente il caso di uguaglianza del Teorema 2.1.11, che è equivalente a  $f \in \mathcal{B}_2$ . Sia  $T_v(z) = f^*(z, v)$ ; per il Teorema 2.1.9,  $f \in \mathcal{B}_2$  è equivalente a  $T_v \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Ricordiamo che  $p$ , dunque anche  $\omega$ , è invariante sotto l'azione di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora il caso di uguaglianza nella prima delle due disuguaglianze si riscrive come  $\omega(T_v^{-1}(0), z) = \omega(T_v^{-1}(0), w) + \omega(w, z)$ ; per il Lemma 1.1.24, quest'uguaglianza caratterizza l'appartenenza, nell'ordine, alla stessa geodetica. Per il Corollario 2.1.8 si ha  $T_v^{-1}(0) = R_f(v)$ .  $\square$

**Corollario 2.1.14.** Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w, v, u \in \mathbb{D}$  vale

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u). \quad (11)$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $R_f(v), R_f(u), w$  e  $z$  giacciono sulla stessa geodetica, in quest'ordine.

*Dimostrazione.* Applicando il Corollario 2.1.13 si ha

$$\begin{aligned}\omega(0, f^*(z, v)) &\leq \omega(0, f^*(w, v)) + \omega(z, w) = \omega(0, |f^*(w, v)|) + \omega(z, w) \\ &= \omega(0, |f^*(v, w)|) + \omega(z, w) = \omega(0, f^*(v, w)) + \omega(z, w).\end{aligned}$$

Sempre per il Corollario 2.1.13 abbiamo

$$\omega(0, f^*(v, w)) \leq \omega(0, f^*(u, w)) + \omega(z, w) + \omega(v, u).$$

Mettendo assieme le due disuguaglianze otteniamo la (11).

Se si ha l'uguaglianza, dobbiamo studiarla nelle due applicazioni del Corollario 2.1.13. In entrambi i casi ci dice che  $f \in \mathcal{B}_2$ . La prima ci dice anche che  $R_f(v), w$  e  $z$  appartengono, nell'ordine, alla stessa geodetica. Dalla seconda deduciamo la stessa cosa per  $R_f(w), u$  e  $v$ . Poiché  $R_f$  è un automorfismo, abbiamo che lascia invariate le geodetiche e l'ordine dei punti sulle stesse; allora anche  $w, R_f(u)$  e  $R_f(v)$  stanno, nell'ordine, sulla stessa geodetica. Segue il secondo enunciato della tesi. Viceversa, se valgono tutte queste condizioni è facile vedere che si ha l'uguaglianza.  $\square$

Il risultato seguente non ci servirà nel seguito, ma viene riportato per completezza.

**Corollario 2.1.15.** *Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e siano  $z, w \in \mathbb{D}$ . Sia  $\sigma$  una geodetica con  $\sigma(t_1) = z, \sigma(t_2) = v$  e sia  $w = \sigma(t)$  con  $t_1 < t < t_2$ . Allora*

$$2\omega(f(z), f(v)) \leq \log \left( \cosh(2\omega(z, v)) + |f^h(w)| \sinh(2\omega(z, v)) \right). \quad (12)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$ ,  $z$  e  $v$  giacciono sulla stessa geodetica passante per  $c$ , il centro di rotazione di  $R_f$ , e  $w = z$  e sta fra  $c$  e  $v$  oppure  $w = v$  e sta fra  $c$  e  $z$ .*

*Dimostrazione.* Ricordando le definizioni di  $\omega$  e  $p$ , per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  abbiamo

$$\tanh(\omega(0, z)) = |z| \text{ e } \tanh(\omega(z, w)) = p(z, w) = \tanh(\omega(0, [z, w])).$$

Dalla definizioni di  $f^*(z, w)$  e  $p$  e usando le uguaglianze appena citate, abbiamo

$$\begin{aligned}\tanh(\omega(f(z), f(v))) &= p(f(z), f(v)) = p(z, v) |f^*(z, v)| \\ &= p(z, v) \tanh(\omega(0, f^*(z, v))).\end{aligned}$$

Applicando il Corollario 2.1.14 con  $u = w$  e usando il fatto che  $z, w$  e  $v$  stanno, nell'ordine, sulla stessa geodetica, troviamo

$$\omega(0, f^*(z, v)) \leq \omega(0, f^h(w)) + \omega(z, v);$$

ricordando che la tangente iperbolica è strettamente crescente e sfruttando la formula  $\tanh(a + b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$  e le uguaglianze di prima, si ha

$$\tanh(\omega(0, f^*(z, w))) \leq \frac{|f^h(w)| + p(z, v)}{1 + |f^h(w)| p(z, v)}.$$

Mettendo assieme le varie disuguaglianze, risulta che

$$\tanh\left(\omega(f(z), f(v))\right) \leq p(z, v) \left( \frac{|f^h(w)| + p(z, v)}{1 + |f^h(w)|p(z, v)} \right);$$

prendendo  $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  otteniamo

$$\begin{aligned} \omega(f(z), f(v)) &\leq \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + p(z, v)|f^h(w)| + p(z, v)(|f^h(w)| + p(z, v))}{1 + p(z, v)|f^h(w)| - p(z, v)(|f^h(w)| + p(z, v))} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + p^2(z, v)}{1 - p^2(z, v)} + |f^h(w)| \frac{2p(z, v)}{1 - p^2(z, v)} \right). \end{aligned}$$

Usando le uguaglianze

$$\frac{1 + p^2}{1 - p^2} = \cosh(2\omega) \text{ e } \frac{2p}{1 - p^2} = \sinh(2\omega)$$

otteniamo la disuguaglianza della tesi.

Il caso di uguaglianza segue dall'uguaglianza nel Corollario 2.1.14: ricordando l'Osservazione 2.1.3, notiamo che se  $w \neq z, v$  non possono essere soddisfatti tutti gli allineamenti richiesti nell'ordine giusto.  $\square$

**Osservazione 2.1.16.** Poiché  $|f^*| \leq 1$ , anche  $|f^h| \leq 1$ ; per stretta crescenza del logaritmo, otteniamo che la disuguaglianza (12) è un altro miglioramento rispetto al lemma di Schwarz-Pick.

Vorremmo ora dedurre dei risultati simili al lemma di Schwarz-Pick anche per la derivata iperbolica. In generale  $f^h$  non è olomorfa, dunque non è possibile applicare il lemma come si è fatto per  $f^*(z, v)$ . Tuttavia, quanto visto finora può essere usato per mostrare disuguaglianze che si avvicinano a qualcosa di tipo Schwarz-Pick, a costo di un fattore 2.

La prima richiede che uno dei due punti sia 0.

**Corollario 2.1.17.** *Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$ . Allora*

$$\omega(f^h(0), f^h(z)) \leq 2\omega(0, z). \quad (13)$$

*Inoltre, 2 è la migliore costante possibile.*

*Dimostrazione.* Da  $f(0) = 0$  si ha  $f^*(z, 0) = f^*(0, z)$ . Dalla disuguaglianza triangolare per  $\omega$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \omega(f^h(0), f^h(z)) &= \omega(f^*(0, 0), f^*(z, z)) \\ &\leq \omega(f^*(0, 0), f^*(z, 0)) + \omega(f^*(0, z), f^*(z, z)), \end{aligned}$$

inoltre per il Teorema 2.1.11 si ha

$$\omega(f^*(0, 0), f^*(z, 0)) + \omega(f^*(0, z), f^*(z, z)) \leq 2\omega(0, z).$$

Mettendo assieme troviamo la disuguaglianza della tesi.

Per dire che 2 è la migliore costante possibile, basta prendere  $f(z) = z^2$  e  $z \in \mathbb{D}$  con  $|z| = 1/3$  per ottenere l'uguaglianza.  $\square$

Il prossimo risultato è quello che ci permetterà di dimostrare la disuguaglianza di Golusin. È valido per ogni coppia di punti nel disco, ma dobbiamo considerare il modulo della derivata iperbolica.

**Corollario 2.1.18.** *Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  vale*

$$\omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\omega(z, w). \quad (14)$$

*Si ha l'uguaglianza se e solo se  $f \in \mathcal{B}_2$  e  $z$  e  $w$  giacciono sulla stessa geodetica, passante per il centro di rotazione di  $R_f$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $z, w \in \mathbb{D}$ ; senza perdita di generalità possiamo supporre  $|f^h(z)| \geq |f^h(w)|$ . Allora dalla definizione di  $\omega$  abbiamo

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}}{1 - \frac{|f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)|}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(z)| - |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)||f^h(z)| + |f^h(w)| - |f^h(z)|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(w)|}{1 + |f^h(w)|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \right) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(w)|}{1 - |f^h(w)|} \right) \end{aligned}$$

Usando di nuovo la definizione di  $\omega$  otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \omega(0, |f^h(z)|) - \omega(0, |f^h(w)|) \\ &= \omega(0, f^h(z)) - \omega(0, f^h(w)) \leq 2\omega(z, w), \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal Corollario 2.1.14 prendendo  $u = w$  e  $v = z$ . Il caso di uguaglianza segue facilmente.  $\square$

Concludiamo la sezione con il lemma di Dieudonné [D, Chapitre III, paragraphe 8, équation (25)], per il quale l'approccio dell'articolo di Beardon e Minda semplifica le dimostrazioni.

**Lemma 2.1.19.** *(lemma di Dieudonné) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$  e sia  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Allora*

$$|f'(z_0) - f(z_0)/z_0| \leq \frac{|z_0|^2 - |f(z_0)|^2}{|z_0|(1 - |z_0|^2)}. \quad (15)$$

*In particolare,*

$$|f'(z)| \leq \begin{cases} 1 & \text{se } |z| \leq \sqrt{2} - 1 \\ \frac{(1 + |z|^2)^2}{4|z|(1 - |z|^2)} & \text{se } |z| \geq \sqrt{2} - 1. \end{cases} \quad (16)$$

*Dimostrazione.* Per il Teorema 2.1.11 con  $z = v = z_0$  e  $w = 0$  abbiamo

$$\begin{aligned} \omega(f^h(z_0), f^*(0, z_0)) &\leq \omega(0, z_0) \\ \iff p(f^h(z_0), f^*(0, z_0)) &\leq p(0, z_0) = |z_0|, \end{aligned}$$

dove l'equivalenza fra le due disuguaglianze segue dal fatto che  $\operatorname{arctanh}$  è strettamente crescente. Per semplificare, scriviamo  $f^h(z_0) = a$ ,  $f^*(0, z_0) = b$  e  $|z_0| = r$ . Vogliamo portare la disuguaglianza in forma euclidea. Abbiamo

$$\left| \frac{a - b}{1 - \bar{b}a} \right| = p(a, b) \leq r,$$

che si riscrive come

$$\begin{aligned} (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) &\leq r^2(1 - \bar{b}a)(1 - b\bar{a}) \\ \iff |a|^2 - a \cdot \frac{\bar{b}(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2} - \bar{a} \cdot \frac{b(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2} &\leq \frac{r^2 - |b|^2}{1 - r^2|b|^2}; \end{aligned}$$

ponendo  $\alpha = \frac{b(1 - r^2)}{1 - r^2|b|^2}$  e  $R^2 = \frac{r^2 - |b|^2}{1 - r^2|b|^2} + |b|^2 \left( \frac{1 - r^2}{1 - r^2|b|^2} \right)^2$ , si ha

$$|a|^2 - a\bar{\alpha} - \bar{a}\alpha \leq R^2 - |\alpha|^2 \iff (a - \alpha)(\bar{a} - \bar{\alpha}) \leq R^2 \iff |a - \alpha| \leq R.$$

Ricordando che  $r = |z_0|$  e osservando che  $b = f^*(0, z_0) = \frac{[f(0), f(z_0)]}{[0, z_0]} = \frac{f(z_0)}{z_0}$ , troviamo  $\alpha = \frac{f(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0(1 - |f(z_0)|^2)}$  e  $R = \frac{|z_0|^2 - |f(z_0)|^2}{|z_0|(1 - |f(z_0)|^2)}$ . Riprendendo infine la definizione di  $a$ , cioè  $a = f^h(z_0) = \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{1 - |f(z_0)|^2}$ , otteniamo che

$$\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{1 - |f(z_0)|^2} - \frac{f(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0(1 - |f(z_0)|^2)} \right| \leq \frac{|z_0|^2 - |f(z_0)|^2}{|z_0|(1 - |f(z_0)|^2)},$$

che è equivalente alla (15) moltiplicando entrambi i membri per  $\frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}$ .

Mostriamo ora la (16). Dalla (15) con  $z$  al posto di  $z_0$  si ha

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq |f'(z) - f(z)/z| + |f(z)/z| \\ &\leq \frac{|z|^2 - |f(z)|^2}{|z|(1 - |z|^2)} + \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{(|f(z)| + |z|^2)(1 - |f(z)|)}{|z|(1 - |z|^2)}. \end{aligned}$$

Adesso, per  $|z|$  fissato un rapido conto mostra che il massimo si ottiene per  $|f(z)| = \frac{1 - |z|^2}{2}$ ; poiché per il lemma di Schwarz dev'essere  $|f(z)| \leq |z|$ , questo caso può essere raggiunto solo se  $|z| \geq \sqrt{2} - 1$  e sostituendo otteniamo la seconda espressione della (16). Nell'altro caso il massimo si ottiene per  $|f(z)| = |z|$  e sostituendo si trova che è proprio 1.  $\square$

## 2.2 Applicazioni dei lemmi di Schwarz-Pick multi-punto

Vediamo ora alcune applicazioni dei risultati visti nella sezione precedente.

**Teorema 2.2.1.** *Dato  $b \in [0, 1)$ , scriviamo  $F_b(z) = \frac{z(z+b)}{1+bz}$ . Consideriamo  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$ . Se  $|f'(0)| < 1$ , allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha*

$$\left| \frac{f^h(0) - f^h(z)}{1 - \overline{f^h(0)}f^h(z)} \right| \leq \frac{2|z|}{1 + |z|^2} \quad (17)$$

e

$$F_{|f^h(0)|}^h(-|z|) \leq |f^h(z)| \leq F_{|f^h(0)|}^h(|z|). \quad (18)$$

*Dimostrazione.* Poiché  $|f'(0)| < 1$ , per il lemma di Schwarz si ha  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Inoltre  $f(0) = 0$ , perciò possiamo applicare il Corollario 2.1.17; si ha dunque

$$\omega(f^h(0), f^h(z)) \leq 2\omega(0, z).$$

Applicando la tangente iperbolica, sfruttando l'uguaglianza  $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$  e ricordando la definizione di  $\omega$  si ha

$$p(f^h(0), f^h(z)) \leq \frac{2p(0, z)}{1 + p^2(0, z)},$$

da cui

$$\left| \frac{f^h(0) - f^h(z)}{1 - \overline{f^h(0)}f^h(z)} \right| \leq \frac{2|z|}{1 + |z|^2}.$$

Per dimostrare la seconda disuguaglianza, supponiamo dapprima che si abbia  $f^h(0) = b \in [0, 1)$ . Possiamo ripetere i passaggi svolti nella dimostrazione del lemma di Dieudonné ponendo  $a = f^h(z)$  e  $r = \frac{2|z|}{1+|z|^2}$ . Otteniamo la disuguaglianza  $|f^h(z) - \alpha| \leq R$ , dove  $\alpha = \frac{b(1-r^2)}{1-r^2b^2}$  e  $R^2 = \frac{r^2-b^2}{1-r^2b^2} + b^2 \left( \frac{1-r^2}{1-r^2b^2} \right)^2$ . Sostituendo troviamo

$$\alpha = \frac{b(1-|z|^2)^2}{(1+2b|z|+|z|^2)(1-2b|z|+|z|^2)},$$

$$R = \frac{2|z|(|z|^2+1)(1-b^2)}{(1+2b|z|+|z|^2)(1-2b|z|+|z|^2)}.$$

Consideriamo adesso  $F_b^h(z) = \frac{bz^2+2z+b}{|z|^2+2b\Re z+1} \left( \frac{|1+bz|}{1+bz} \right)^2$ . Si ha

$$F_b^h(|z|) = \frac{b|z|^2+2|z|+b}{|z|^2+2b|z|+1} \text{ e } F_b^h(-|z|) = \frac{b|z|^2-2|z|+b}{|z|^2-2b|z|+1}.$$

Notiamo che  $\alpha = (F_b^h(|z|) + F_b^h(-|z|))/2$  e  $R = (F_b^h(|z|) - F_b^h(-|z|))/2$ , perciò la disuguaglianza  $|f^h(z) - \alpha| \leq R$  ci dice che  $f^h(z)$  appartiene al cerchio con diametro sull'asse reale passante per i punti  $F_b^h(|z|)$  e  $F_b^h(-|z|)$ . Con semplici considerazioni geometriche otteniamo la seguente disuguaglianza:

$$F_b^h(-|z|) \leq \Re f^h(z) \leq |f^h(z)| \leq F_b^h(|z|),$$

la quale, ricordando che  $b = f^h(0)$ , ci dà

$$F_{f^h(0)}^h(-|z|) \leq |f^h(z)| \leq F_{f^h(0)}^h(|z|).$$

Per passare al caso generale consideriamo la funzione  $g(z) = |f^h(0)|f(z)/f'(0)$ . Osserviamo che  $f(0) = 0$  ci dice che  $f'(0) = f^h(0)$ , dunque  $|g(z)| = |f(z)|$  e  $|g'(z)| = |f'(z)|$ , pertanto  $|g^h(z)| = |f^h(z)|$ ; inoltre si ha anche  $g(0) = 0$ , da cui  $g^h(0) = g'(0) = |f^h(0)|$ . Perciò applicando l'ultima disuguaglianza trovata alla funzione  $g$  otteniamo proprio la seconda disuguaglianza della tesi.  $\square$

**Corollario 2.2.2.** *Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$  e  $f'(0) \in [0, 1)$ . Allora  $\Re f'(z) > 0$  per  $|z| < f^h(0)/(1 + \sqrt{1 - (f^h(0))^2})$ .*

*Dimostrazione.* Per  $0 \leq b < 1$  e  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|z|^2 - 2b|z| + 1 > |z|^2 - 2|z| + 1 > 0$ , dunque abbiamo che il segno di  $F_b^h(-|z|)$  coincide con quello di  $b|z|^2 - 2|z| + b$ . Quest'ultima quantità è minore di 0 per  $|z| \in ((1 - \sqrt{1 - b^2})/b, (1 + \sqrt{1 - b^2})/b)$ , zero agli estremi e maggiore di 0 altrove. Prendendo  $b = f'(0) = f^h(0)$ , nella dimostrazione del Teorema 2.2.1 abbiamo visto che  $\Re f^h(z) \geq F_{f^h(0)}^h(-|z|)$ ; per gli  $z$  tali che  $|z| < (1 - \sqrt{1 - (f^h(0))^2})/f^h(0) = f^h(0)/(1 + \sqrt{1 - (f^h(0))^2})$  si ha quindi  $\Re f^h(z) > 0$ . Ricordando che  $f^h(z) = \frac{f'(z)(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}$  e  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , per tali  $z$  si ha anche  $\Re f'(z) > 0$ .  $\square$

Del prossimo enunciato, dimostrato indipendentemente da Pick nel 1916 e Nevanlinna nel 1919, vedremo nel dettaglio solo un paio di casi particolari.

**Teorema 2.2.3.** *(Pick-Nevanlinna, [JBG, Chapter 1, Theorem 2.2]) Siano dati  $n$  punti distinti  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  e altri  $n$  punti distinti (non necessariamente diversi dai primi)  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ . Per  $k = 1, \dots, n$ , sia  $A_k$  la matrice  $k \times k$  data da  $A_k(i, j) = \frac{1 - w_i \bar{w}_j}{1 - z_i \bar{z}_j}$ . Allora esiste una funzione  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(z_i) = w_i$  per  $j = 1, \dots, n$  se e solo se  $\det A_k \geq 0$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ .*

Vediamo il caso  $n = 2$ .



*Dimostrazione.* La condizione è sempre verificata per  $k = 1$ , mentre per  $k = 2$  si riscrive come

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} \cdot \frac{1 - |w_2|^2}{1 - |z_2|^2} - \frac{1 - w_1 \bar{w}_2}{1 - z_1 \bar{z}_2} \cdot \frac{1 - \bar{w}_1 w_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \geq 0 \\
& \frac{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2} \\
& \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)} \\
& \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_2|^2} \geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{1 - |w_1|^2 - |w_2|^2 + |w_1|^2 |w_2|^2} \\
& \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{|1 - \bar{z}_2 z_1|^2 - |z_1 - z_2|^2} \geq \frac{|1 - w_1 \bar{w}_2|^2}{|1 - \bar{w}_2 w_1|^2 - |w_1 - w_2|^2} \\
& \frac{1}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|^2} \geq \frac{1}{1 - \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_2 w_1} \right|^2} \\
& \frac{1}{1 - p^2(w_1, w_2)} \leq \frac{1}{1 - p^2(z_1, z_2)} \\
& p(w_1, w_2) \leq p(z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Ricordiamo adesso che  $p$  è invariante per azione di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ ; quindi, a meno di comporre a sinistra e a destra con opportuni automorfismi olomorfi di  $\mathbb{D}$ , possiamo supporre senza perdita di generalità  $z_1 = w_1 = 0$ . La condizione diventa dunque  $p(0, w_2) \leq p(0, z_2)$ , da cui  $|w_2| \leq |z_2|$ ; perciò basta prendere la funzione  $f(z) = w_2 z / z_2$ .  $\square$

Andiamo adesso a dimostrare il Teorema di Pick-Nevanlinna nel caso  $n = 3$ , con una formulazione differente.

**Teorema 2.2.4.** *Siano  $z_1, z_2, z_3$  e  $w_1, w_2, w_3$  due triple di punti distinti in  $\mathbb{D}$ . Allora esiste  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$  tale che  $f(z_i) = w_i$  per  $i = 1, 2, 3$  se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

- (i)  $\omega(w_i, w_j) < \omega(z_i, z_j)$  per  $i, j = 1, 2, 3$  e  $i \neq j$ ;
- (ii)  $\omega\left(\frac{[w_2, w_1]}{[z_2, z_1]}, \frac{[w_3, w_1]}{[z_3, z_1]}\right) \leq \omega(z_2, z_3)$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista siffatta  $f$ . Allora la condizione (i) segue dal lemma di Schwarz-Pick. La condizione (ii) invece si riscrive come  $\omega(f^*(z_2, z_1), f^*(z_3, z_1)) \leq \omega(z_2, z_3)$ , che è l'enunciato del Teorema 2.1.11.

Adesso dimostriamo l'altra freccia. Vediamola prima nel caso  $z_1 = w_1 = 0$ . Allora per la condizione (i) abbiamo  $\omega(0, w_i) < \omega(0, z_i)$ , quindi  $|w_i/z_i| < 1$  per  $i = 2, 3$ . La condizione (ii) si riscrive invece come  $\omega(w_2/z_2, w_3/z_3) \leq \omega(z_2, z_3)$ , cioè  $p(w_2/z_2, w_3/z_3) \leq p(z_2, z_3)$ . Dunque, per il caso  $n = 2$  del Teorema di Pick-Nevanlinna, esiste  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $g(z_2) = w_2/z_2$  e  $g(z_3) = w_3/z_3$ . Allora basta prendere  $f(z) = zg(z)$ .

Mostriamo che ci si può ridurre a questo caso. Consideriamo  $h, g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  date da

$$g(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \text{ e } h(z) = \frac{z - w_1}{1 - \bar{w}_1 z}.$$

Allora esiste  $f$  come quella richiesta dal Teorema se e solo se esiste  $F \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , con  $F = h \circ f \circ g^{-1}$ , tale che  $F(0) = 0$ ,  $F(g(z_2)) = h(w_2)$  e  $F(g(z_3)) = h(w_3)$ . Questo corrisponde proprio al caso precedente, quindi tale  $F$  esiste se e solo se

$$\omega(h(w_i), h(w_j)) \leq \omega(g(z_i), g(z_j))$$

per  $i, j = 1, 2, 3$  con  $i \neq j$  e

$$\omega\left(\frac{h(w_2)}{g(z_2)}, \frac{h(w_3)}{g(z_3)}\right) \leq \omega(g(z_2), g(z_3)).$$

Poiché  $p$ , e di conseguenza  $\omega$ , è invariante per azione di  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ , la prima disuguaglianza è equivalente alla condizione (i). Sempre per questo motivo, sostituendo  $h(z) = [z, w_1]$  e  $g(z) = [z, z_1]$  otteniamo che la seconda è equivalente alla condizione (ii).  $\square$

Concludiamo la sezione con il risultato che, come già anticipato, ci permetterà di dimostrare i teoremi successivi. L'enunciato originale si trova in [GMG], ma vedremo una formulazione che ci tornerà più utile, in particolare perché coinvolge la funzione  $f^h$ .

**Teorema 2.2.5.** (*disuguaglianza di Golusin, 1945*) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  vale

$$|f^h(z)| \leq \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}. \quad (19)$$

*Dimostrazione.* Con passaggi analoghi a quelli della dimostrazione del Corollario 2.1.18 abbiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \omega(|f^h(z)|, |f^h(0)|) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) \\ \omega(z, 0) &= \omega(|z|, 0) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right). \end{aligned}$$

Prendendo  $w = 0$  nella disuguaglianza (14) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} \cdot \frac{1 - |f^h(0)|}{1 + |f^h(0)|} \right) &\leq \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) \\ \frac{1 + |f^h(z)|}{1 - |f^h(z)|} &\leq \frac{1 + |f^h(0)|}{1 - |f^h(0)|} \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Adesso, dalla Proposizione 2.1.10 sappiamo che  $f^h(z), f^h(0) \in \mathbb{D}$ , in particolare  $|f^h(z)|, |f^h(0)| < 1$ , perciò è giustificato il seguente passaggio:

$$\begin{aligned}
|f^h(z)| &\leq \frac{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|} \left( \frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2 - 1}{\frac{1+|f^h(0)|}{1-|f^h(0)|} \left( \frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2 + 1} \\
&= \frac{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) - (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)}{(1+|f^h(0)|)(1+2|z|+|z|^2) + (1-|f^h(0)|)(1-2|z|+|z|^2)} \\
&= \frac{2|f^h(0)| + 2|f^h(0)||z|^2 + 4|z|}{2 + 2|z|^2 + 4|f^h(0)||z|} = \frac{|f^h(0)| + \frac{2|z|}{1+|z|^2}}{1 + |f^h(0)| \frac{2|z|}{1+|z|^2}}.
\end{aligned}$$

□

### 3 Dalla disuguaglianza di Golusin al teorema di Burns-Krantz

#### 3.1 Rigidità al bordo

Dalla disuguaglianza di Golusin possiamo dimostrare un risultato di rigidità al Bordo, seguendo la traccia data nel Remark 5.6 di [BKR].

**Teorema 3.1.1.** (*Bracci-Kraus-Roth, 2020*) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che

$$|f^h(z_n)| = 1 + o((|z_n| - 1)^2) \quad (21)$$

per qualche successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ . Allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Possiamo applicare la disuguaglianza di Golusin 2.2.5 nella forma (20), che riscriviamo come

$$\frac{1 + |f^h(0)|}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} (1 - |f^h(z_n)|) \geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}.$$

Per ipotesi vale (21), dunque

$$\frac{1 + |f^h(0)|}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} o((|z_n| - 1)^2) \geq \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 + |z_n|)^2}$$

da cui

$$\frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} o(1) \geq 1.$$

Se  $f \notin \text{Aut}(\mathbb{D})$ , per il lemma di Schwarz-Pick si ha necessariamente  $|f^h(0)| < 1$ , dunque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |f^h(0)|)(1 + |z_n|)^2}{(1 - |f^h(0)|)(1 + |f^h(z_n)|)} = \frac{2(1 + |f^h(0)|)}{1 - |f^h(0)|} < +\infty$  e otteniamo una contraddizione.  $\square$

Siamo ora pronti a dimostrare il Theorem 2.1 di [BK].

#### 3.2 Teorema di Burns-Krantz

**Teorema 3.2.1.** (*Burns-Krantz, 1994*) Siano  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  e  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  tali che

$$f(z) = \sigma + (z - \sigma) + o((z - \sigma)^3) \quad (22)$$

per  $z \rightarrow \sigma$  non tangenzialmente. Allora  $f$  è l'identità del disco.

*Dimostrazione.* Come già visto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.5, a meno di considerare  $\sigma^{-1}f(\sigma z)$  possiamo supporre senza perdita di generalità  $\sigma = 1$ . Dalla Proposizione 1.2.5 segue anche che vale

$$|f^h(z)| = 1 + o((z-1)^2)$$

per  $z \rightarrow 1$  non tangenzialmente, quindi esiste una successione  $z_n$  che soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1.1 (usiamo di nuovo che, non tangenzialmente,  $|z-1|$  e  $1-|z|$  possono essere scambiati negli  $o$ -piccoli); dunque  $f$  è un automorfismo. Per la Proposizione 1.1.10 esistono  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{D}$  tali che  $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ . Poiché vale (22), dev'essere  $f''(1) = 0$ . Si ha  $f''(z) = \frac{e^{i\theta}\bar{a}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}z)^3}$ ; siccome  $e^{i\theta} \neq 0$  e  $|a| < 1$ , deve necessariamente essere  $\bar{a} = 0$ , perciò  $f(z) = e^{i\theta}z$ . Il fatto che  $f(z) = z$  segue da  $f(1) = 1$  sempre per (22).  $\square$

**Esempio 3.2.2.** Sia  $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{C}$  data da  $f(z) = \frac{1+3z^2}{3+z^2}$ . Verifichiamo che  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Se  $z \in \mathbb{D}$  allora  $|z| < 1$  da cui  $1-|z|^4 > 0$ . Dunque abbiamo  $1-|z|^4 < 9(1-|z|^4)$  che riscriviamo come  $1+9|z|^4 < 9+|z|^4$ , perciò

$$\begin{aligned} (1+3z^2)(1+3\bar{z}^2) &= 1+3z^2+3\bar{z}^2+9|z|^4 \\ &< 9+3z^2+3\bar{z}^2+|z|^4 = (3+z^2)(3+\bar{z}^2), \end{aligned}$$

quindi

$$|f(z)|^2 = \frac{(1+3z^2)(1+3\bar{z}^2)}{(3+z^2)(3+\bar{z}^2)} < 1$$

e l'ultima disuguaglianza ci dice che  $|f(z)| < 1$ , cioè  $f(z) \in \mathbb{D}$ .

Ovviamente  $f$  non può essere iniettiva su  $\mathbb{D}$  perché  $f(z) = f(-z)$ ; dunque non è un automorfismo. Adesso mostriamo che  $f(z) - 1 - (z-1)$  è  $O((z-1)^3)$  ma non  $o((z-1)^3)$  per  $z \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - z = \frac{1+3z^2}{3+z^2} - z \\ &= \frac{1+3z^2-3z-z^3}{3+z^2} = \frac{(1-z)^3}{3+z^2}. \end{aligned}$$

Poiché  $\lim_{z \rightarrow 1} g(z)/(z-1)^3 = -1/4$  si ha che  $g(z)$  è  $O((z-1)^3)$  ma non  $o((z-1)^3)$  per  $z \rightarrow 1$ . Allora il termine  $o((z-\sigma)^3)$  nel Teorema 3.2.1 non è migliorabile.

## Riferimenti bibliografici

- [BK] D. M. Burns, S. G. Krantz: Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary. *Journal of the American Mathematical Society*, **7** (1994), no. 3, 661–676
- [BKR] F. Bracci, D. Kraus, O. Roth: A new Schwarz-Pick Lemma at the boundary and rigidity of holomorphic maps. Preprint, ArXiv:2003.02019v1 (2020)
- [BM] A. F. Beardon, D. Minda: A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse Mathématique*, **92** (2004), 81–104
- [D] J. Dieudonné: Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **48** (1931), 247–358
- [GMG] G. M. Golusin: Some estimations of derivatives of bounded functions. *Recueil Mathématique [Matematicheskii Sbornik]*, **16(58)** (1945), no. 3, 295–306
- [JBG] J. B. Garnett: **Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)**. Springer, New York, 2007
- [NN] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: **Complex analysis in one variable (2nd edition)**. Springer, New York, 2001

## Ringraziamenti

Da scrivere.