

Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili  
complesse (titolo da rivedere, tanto la copertina  
va fatta tutta nel dettaglio)

Autore: Marco Vergamini Relatore: Marco Abate

Data: si vedrà

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Preliminari</b>	<b>5</b>
1.1 Notazioni e definizioni di base . . . . .	5
1.2 Risultati noti della teoria . . . . .	11
<b>2 Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per varietà taut con visibilità</b>	<b>27</b>
2.1 Il concetto di visibilità . . . . .	27
2.2 Risultati tecnici preparatori . . . . .	29
2.3 Il teorema di tipo “Wolff-Denjoy” . . . . .	39
<b>3 Esempi di domini con visibilità</b>	<b>46</b>
3.1 Domini Goldilocks . . . . .	46
3.2 Domini di tipo finito . . . . .	51
3.3 Domini Caltrops . . . . .	53
3.4 Un altro esempio . . . . .	66
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>72</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>73</b>

## Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è dimostrare alcune possibili generalizzazioni, in più variabili complesse o anche per varietà complesse astratte che soddisfano opportune ipotesi, del teorema di Wolff-Denjoy sul comportamento delle iterate di funzioni olomorfe nel disco unitario in  $\mathbb{C}$ , dimostrato indipendentemente nel 1926 da Denjoy in [D] e da Wolff in [Wo]. Riportiamo l'enunciato di tale teorema.

**Teorema 0.0.1.** (*Wolff-Denjoy*) *Sia  $f$  una funzione olomorfa nel disco unitario in  $\mathbb{C}$  a valori nel disco stesso. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *la funzione  $f$  ha un punto fisso nel disco; oppure,*
- *esiste un unico punto del bordo del disco tale che la successione delle iterate di  $f$  converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Era già nota da tempo la generalizzazione, dovuta ad Abate ([A2, Theorem 0.5]), per domini limitati e strettamente pseudoconvessi in più variabili; in questo caso, però, l'affermazione “la funzione  $f$  ha un punto fisso” è sostituita da “le orbite dei punti del dominio tramite  $f$  sono relativamente compatte nel dominio”. Ci riferiremo a enunciati con tesi simili come teoremi di tipo “Wolff-Denjoy”.

Più recentemente, in diversi articoli si è cercato di ottenere risultati analoghi per domini sempre più generali. Nel 2017 Bharali e Zimmer, nel loro articolo [BZ1], hanno dimostrato un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per una particolare classe di domini, da loro chiamati domini Goldilocks, che siano anche taut; esempi di domini Goldilocks sono i domini limitati, pseudoconvessi e di tipo finito nel senso di D’Angelo. Nel 2021 Bharali e Maitra, in [BM], hanno osservato che la dimostrazione fatta in [BZ1] può essere estesa a domini taut che soddisfino una certa condizione per i punti del bordo, detta di visibilità, e hanno anche mostrato un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per domini di tipo topologico finito; inoltre, hanno definito e costruito esempi di una classe di domini, che chiamano domini Caltrops, che hanno questa proprietà ma che non sono domini Goldilocks. Nel preprint [CMS] del 2021 Chandel, Maitra e Sarkar fanno vedere che non è necessario supporre che la varietà sia un dominio, basta che sia una sottovarietà di  $\mathbb{C}^d$ ; costruiscono inoltre altri esempi di domini che soddisfano la condizione di visibilità.

Negli articoli citati finora, sono stati considerati domini e varietà limitati. Il caso di domini illimitati è stato studiato nel 2022 da Bharali e Zimmer nel preprint [BZ2]; considerando il bordo della end compactification al posto del bordo euclideo, riescono così ad ottenere un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” anche per il caso illimitato.

Notiamo inoltre che in [BZ1], [CMS] e [BZ2] vengono anche mostrati dei risultati di estensione al bordo di funzioni olomorfe, isometrie e quasi-isometrie; nei due preprint viene anche evidenziato un legame tra l'estensione al bordo e la condizione di visibilità.

Devo decidere  
come tradurre  
end compacti-  
fication

In questa tesi ci poniamo l'obiettivo di generalizzare ulteriormente il teorema di tipo "Wolff-Denjoy" mostrato in [CMS]. Osserviamo come le varie ipotesi giocano un ruolo fondamentale nella dimostrazione di tale teorema:

- (i) dall'ipotesi che la varietà sia taut segue la dicotomia tra i due enunciati della tesi, cioè se le orbite non sono relativamente compatte la successione delle iterate dev'essere compattamente divergente;
- (ii) dall'ipotesi di limitatezza, grazie al teorema di Montel, segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza uniforme sui compatti a una funzione olomorfa a valori nel bordo della varietà;
- (iii) dall'ipotesi di visibilità segue che tale limite dev'essere una funzione costante.

Nell'enunciato che vogliamo andare a dimostrare, l'ipotesi che la varietà sia una sottovarietà limitata di  $\mathbb{C}^d$  sarà sostituita dall'essere una sottovarietà tautly embedded di una varietà Kobayashi-iperbolica.

Anche qui devo decidere come tradurre

Nella sezione 1 daremo le definizioni di base, come quelle di varietà Kobayashi-iperbolica e di varietà taut, ed enunceremo risultati noti e alla base della teoria della dinamica olomorfa in più variabili; alcuni verranno anche dimostrati, tra cui una versione del teorema di Montel per varietà tautly embedded e il fatto che per varietà taut vale una dicotomia nella dinamica delle funzioni olomorfe.

Nella sezione 2 daremo una definizione formale della condizione di visibilità e vedremo una serie di risultati tecnici, tra cui il fatto che con l'ipotesi di visibilità il limite di una successione convergente uniformemente sui compatti a una funzione a valori nel bordo dev'essere costante. A questo punto, i vari risultati ottenuti verranno utilizzati per dare una dimostrazione di un teorema di tipo "Wolff-Denjoy"; nella dimostrazione rimarrà da verificare che il limite è lo stesso per ogni sottosuccessione delle iterate, da cui poi segue facilmente che dev'essere il limite di tutta la successione. Otterremo come corollari i teoremi di tipo "Wolff-Denjoy" dimostrati in [A2] e in [CMS], e quello per i domini di tipo topologico finito dimostrato in [BM].

Nella sezione 3 costruiremo gli esempi citati sopra e vedremo quali ipotesi del teorema soddisfano.

Nella sezione ?? vedremo il caso dei domini di tipo finito nel senso di D'Angelo e dei domini illimitati, e citeremo alcuni dei legami tra la condizione di visibilità e i risultati di estensione al bordo.

# 1 Preliminari

## 1.1 Notazioni e definizioni di base

Introduciamo le notazioni e definizioni che useremo:

- un *dominio* in  $\mathbb{C}^n$  è un aperto connesso;
- una *varietà complessa* di dimensione  $n$  è una varietà differenziabile reale, di dimensione  $2n$  e tale che i cambi di carta siano olomorfi se considerati fra aperti di  $\mathbb{C}^n$ ;
- dati una varietà complessa  $X$  e  $x \in X$ , indichiamo con  $T_x X$  lo spazio tangente complesso a  $X$  in  $x$ , che nel caso dei domini è canonicamente identificato con  $\mathbb{C}^n$ ;
- nei vari enunciati, quando è data una varietà complessa  $X$  sottintendiamo anche di aver fissato una metrica hermitiana  $\|\cdot\|_X$  su  $X$ , che induce la distanza  $d_X$  se  $X$  è connessa; quando  $X$  è sottovarietà complessa di una varietà complessa  $Y$ , fissiamo la metrica hermitiana su  $Y$  e consideriamo su  $X$  la metrica indotta; se la varietà ambiente è  $Y = \mathbb{C}^n$  useremo sempre  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n} = \|\cdot\|$ , la metrica euclidea su  $\mathbb{C}^n$ ;
- dati  $X, Y$  spazi topologici,  $C^0(X, Y)$  è lo spazio delle funzioni continue da  $X$  a  $Y$  considerato con la topologia compatta-aperta. Nel caso in cui  $Y$  sia uno spazio metrico, tale topologia coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti;
- date  $X, Y$  varietà complesse, indichiamo con  $\text{Hol}(X, Y)$  l'insieme delle funzioni olomorfe da  $X$  a  $Y$ , con  $\mathcal{O}(X)$  l'insieme delle funzioni olomorfe da  $X$  in  $\mathbb{C}$  e con  $\text{Aut}(X)$  l'insieme dei biolomorfismi di  $X$  in sé;
- data  $f \in \text{Hol}(X, Y)$ , indichiamo con  $d_x f$  il differenziale di  $f$  in  $x \in X$ ;
- il disco unitario è  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ; il disco di centro 0 e raggio  $r > 0$  è  $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ ; il disco di centro  $a \in \mathbb{C}$  e raggio  $r > 0$  è  $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ ; il polidisco in  $\mathbb{C}^n$  è  $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$ ;
- la palla unitaria (euclidea) in  $\mathbb{C}^n$  è  $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ , dove  $\|\cdot\|$  indica la norma euclidea, mentre  $\mathbb{B}_r^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$  è la palla (euclidea) di centro l'origine  $O \in \mathbb{C}^n$  e raggio  $r > 0$ ;
- dati uno spazio topologico  $Y$  e un suo sottoinsieme  $A \subseteq Y$ , il bordo relativo di  $A$  in  $Y$  è  $\partial_Y A := \overline{A} \setminus A$ , dove la chiusura è fatta in  $Y$ ; se  $Y = \mathbb{C}^n$  allora  $\partial_{\mathbb{C}^n} A = \partial A$  è il bordo euclideo;
- dato un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  e  $z \in \mathbb{C}^n$ , scriviamo  $\delta_\Omega(z) = \inf_{p \in \partial\Omega} \|z - p\|$  per indicare la distanza euclidea di  $z$  dal bordo euclideo di  $\Omega$ .

Ricordiamo cosa sono la metrica e la distanza di Poincaré in  $\mathbb{D}$ .

**Definizione 1.1.1.** La *metrica di Poincaré* (o *iperbolica*) su  $\mathbb{D}$  è data da

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z; v) = \frac{1}{1 - |z|^2} |v| \quad (1)$$

per ogni  $z \in \mathbb{D}$  e  $v \in \mathbb{C} \cong T_z \mathbb{D}$ . La metrica  $\lambda_{\mathbb{D}}$  è hermitiana di curvatura gaussiana costante uguale a  $-4$  (si veda [Ah, Section 1-5]).

**Definizione 1.1.2.** La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*)  $\omega$  su  $\mathbb{D}$  è la forma integrata della metrica di Poincaré. È una distanza completa la cui espressione è data da

$$\omega(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|} \quad (2)$$

per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  (si veda [Ah, Section 1-1]).

Oltre ad avere curvatura negativa costante, la metrica e la distanza di Poincaré sono tali che le funzioni olomorfe dal disco unitario in sé sono semicontrazioni rispetto ad esse.

**Lemma 1.1.3.** (*lemma di Schwarz-Pick*) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2};$$

inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.

Per la dimostrazione si rimanda a [Ko2, Chapter I, Theorem 1.1].

**Corollario 1.1.4.** Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora si ha

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w) \quad (3)$$

per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$ .

*Dimostrazione.* Discende dal lemma di Schwarz-Pick e dal fatto che la funzione  $\text{arctanh}$  è strettamente crescente.  $\square$

Ci tornerà utile anche la versione semplificata del lemma di Schwarz-Pick.

**Lemma 1.1.5.** (*lemma di Schwarz*) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| \leq 1$ ; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0 \neq 0$  oppure nella seconda allora  $f(z) = e^{i\theta} z$  per qualche  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Enunciamo adesso dei fatti noti sulle geodetiche del disco unitario con la metrica di Poincaré. Visto che ne parleremo più in generale, diamo la definizione per spazi metrici.

**Definizione 1.1.6.** Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Una curva  $\sigma : I \rightarrow X$  è detta *geodetica* se

$$d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

per ogni  $t_1, t_2 \in I$ .

**Osservazione 1.1.7.** Dati una geodetica  $\sigma : I \longrightarrow X$  e  $a, b \in I$ , si ha

$$d(\sigma(a), \sigma(b)) = \inf_{a=t_0, t_1, \dots, t_n=b} \sum_{j=1}^n d(\sigma(t_{j-1}), \sigma(t_j));$$

cioè, le geodetiche sono le curve che “minimizzano la lunghezza”.

**Proposizione 1.1.8.** (*[A5, point (iv) of Proposition 1.2.7]*) *Le geodetiche di  $(\mathbb{D}, \omega)$  sono i diametri di  $\mathbb{D}$  e le intersezioni con  $\mathbb{D}$  dei cerchi euclidei ortogonali a  $\partial\mathbb{D}$ . In particolare, ogni coppia di punti distinti è connessa da un’unica geodetica.*

Quello che vogliamo fare ora è generalizzare la metrica e la distanza di Poincaré a una qualsiasi varietà complessa mantenendo la proprietà di rendere le funzioni olomorfe delle semicontrazioni. Ci sono vari modi per farlo, noi nello specifico vedremo la (pseudo)metrica e la (pseudo)distanza di Kobayashi, introdotte nel 1967 in [Ko1].

**Definizione 1.1.9.** Sia  $X$  una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su  $X$  è

$$K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tale che } f(0) = x, d_0 f(v) = Z\} \quad (4)$$

per ogni  $x \in X$  e  $Z \in T_x X$ .

**Osservazione 1.1.10.** Non possiamo sempre parlare di metrica perché, per esempio,  $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$ . Infatti, dati  $z \in \mathbb{C}^n$  e  $Z \in T_z \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ , abbiamo che la funzione  $f_\varepsilon \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$  data da  $f_\varepsilon(\zeta) = z + \zeta Z/\varepsilon$  è tale che  $d_0 f_\varepsilon(\varepsilon) = Z$  per ogni  $\varepsilon > 0$ ; di conseguenza,  $K_{\mathbb{C}^n}(z; Z) = 0$ .

Vediamo adesso che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto alla pseudometrica di Kobayashi.

**Proposizione 1.1.11.** *Siano  $X$  e  $Y$  varietà complesse, e sia  $f \in \text{Hol}(X, Y)$ . Allora si ha*

$$K_Y(f(x); d_x f(Z)) \leq K_X(x; Z) \quad (5)$$

per ogni  $x \in X$  e  $Z \in T_x X$ .

*Dimostrazione.* Dati  $x \in X$  e  $Z \in T_x X$ , poniamo

$$A_X(x; Z) = \{v \in \mathbb{C} \mid \text{esiste } g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tale che } g(0) = x, d_0 g(v) = Z\},$$

e sia  $A_Y(f(x); d_x f(Z))$  definito analogamente. Per definizione,

$$K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in A_X(x; Z)\}$$

e

$$K_Y(f(x); d_x f(Z)) = \inf\{|v| \mid v \in A_Y(f(x); d_x f(Z))\};$$

quindi ci basta mostrare che  $A_X(x; Z) \subseteq A_Y(f(x); d_x f(Z))$ . Dato  $v \in A_X(x; Z)$ , prendiamo  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  tale che  $g(0) = x$  e  $d_0 g(v) = Z$ . Allora abbiamo  $(f \circ g)(0) = f(x)$  e  $d_0(f \circ g)(v) = (d_x f \circ d_0 g)(v) = d_x f(Z)$ ; dunque  $v \in A_Y(f(x); d_x f(Z))$ . Perciò  $A_X(x; Z) \subseteq A_Y(f(x); d_x f(Z))$ , come voluto.  $\square$

Nei casi a cui siamo interessati, la pseudometrica di Kobayashi è effettivamente una metrica.

**Proposizione 1.1.12.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Allora  $K_X$  è una metrica, cioè  $K_X(z; Z) > 0$  per ogni  $z \in X$  e  $0 \neq Z \in T_z X$ .*

*Dimostrazione.* È un'immediata conseguenza di un risultato più forte che dimostreremo nella prossima sezione, il punto (3) della Proposizione 2.2.2.  $\square$

Definiamo adesso la (pseudo)distanza di Kobayashi; più avanti vedremo com'è collegata alla pseudometrica di Kobayashi.

**Definizione 1.1.13.** Sia  $X$  una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su  $X$  è data da

$$k_X(z, w) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \left| \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \varphi_m(\zeta_m) = w \\ \text{e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\} \quad (6)$$

per  $z, w \in X$ .

**Osservazione 1.1.14.** È facile vedere che  $k_X$  è una pseudodistanza, ma in generale non è una distanza, ad esempio perché, come prima,  $k_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$ . Infatti, dati  $z, w \in X$ , possiamo considerare i punti  $\zeta_0 = 0$  e  $1 > \zeta_1 = \varepsilon > 0$  e la funzione  $\varphi_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$  tale che  $\varphi_1(\zeta) = z + \zeta(w - z)/\varepsilon$ . Si ha  $\varphi_1(\zeta_0) = z$  e  $\varphi_1(\zeta_1) = w$ ; perciò, per definizione,  $k_{\mathbb{C}^n}(z, w) \leq \omega(0, \varepsilon)$  per ogni  $1 > \varepsilon > 0$ , da cui  $k_{\mathbb{C}^n}(z, w) = 0$ .

Vedremo però più avanti (Osservazione 1.2.8) che se  $X$  è una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$  allora  $k_X$  è effettivamente una distanza.

Vediamo adesso che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto alla pseudodistanza di Kobayashi.

**Proposizione 1.1.15.** *Siano  $X$  e  $Y$  varietà complesse e connesse, e consideriamo  $f \in \text{Hol}(X, Y)$ . Allora*

$$k_Y(f(x), f(y)) \leq k_X(x, y) \quad (7)$$

per ogni  $x, y \in X$ .



*Dimostrazione.* Dati  $x, y \in X$ , poniamo

$$A_X(x, y) = \left\{ \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \left| \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = x, \varphi_m(\zeta_m) = y \\ \text{e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\},$$

e sia  $A_Y(f(x), f(y))$  definito analogamente. Per definizione,

$$k_X(x, y) = \inf A_X(x, y) \quad \text{e} \quad k_Y(f(x), f(y)) = \inf A_Y(f(x), f(y));$$

quindi ci basta mostrare che  $A_X(x, y) \subseteq A_Y(f(x), f(y))$ . Dati  $\zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$  e  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  che realizzano  $\sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j)$  in  $A_X(x, y)$ , si verifica immediatamente che  $\zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$  e  $f \circ \varphi_1, \dots, f \circ \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, Y)$  realizzano lo stesso numero in  $A_Y(f(x), f(y))$ . Perciò  $A_X(x, y) \subseteq A_Y(f(x), f(y))$ , come voluto.  $\square$

Segue immediatamente l'invarianza per biolomorfismi.

**Corollario 1.1.16.** *Siano  $X$  e  $Y$  varietà complesse e connesse, e consideriamo un biolomorfismo  $f : X \longrightarrow Y$ . Allora*

$$k_Y(f(x), f(y)) = k_X(x, y) \tag{8}$$

per ogni  $x, y \in X$ .

**Definizione 1.1.17.** Una varietà complessa e connessa  $X$  è *Kobayashi-iperbolica* se  $k_X$  è una distanza.

**Osservazione 1.1.18.** Dalla definizione di  $k_X$  segue che ogni varietà Kobayashi-iperbolica è uno *spazio di lunghezze* nel senso di [BH, Part I, Definition 3.1].

Il seguente risultato per le varietà Kobayashi-iperboliche verrà spesso usato implicitamente.

**Proposizione 1.1.19.** *(Barth, [B]) Sia  $X$  una varietà complessa e connessa. Allora  $X$  è Kobayashi-iperbolica se e solo se  $k_X$  vi induce la topologia di varietà.*

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per enunciare i risultati già noti nel caso dei domini regolari.

**Definizione 1.1.20.** Una funzione continua  $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$  è detta *funzionale di Minkowski* se

- (i)  $\mu(Z) = 0$  se e solo se  $Z = 0$ ;
- (ii)  $\mu(\zeta Z) = |\zeta|\mu(Z)$  per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  e  $\zeta \in \mathbb{C}$ .

Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio, poniamo  $\mu_\Omega(Z) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(Z - w)$ .

**Definizione 1.1.21.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un aperto. Una funzione  $u : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  semicontinua superiormente è detta *subarmonica* se per ogni  $a \in A$ , per ogni  $r > 0$  tale che  $\overline{D(a, r)} \subset A$  e per ogni  $h$  continua in  $\overline{D(a, r)}$  e armonica in  $D(a, r)$ , se  $h|_{\partial D(a, r)} \geq u|_{\partial D(a, r)}$  allora anche  $h|_{D(a, r)} \geq u|_{D(a, r)}$ .

Sia  $A \subseteq \mathbb{C}^n$  un aperto. Una funzione  $u : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  semicontinua superiormente è detta *plurisubarmonica* se per ogni  $a \in A$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  l'applicazione  $\zeta \mapsto u(a + \zeta Z)$  è subarmonica dove definita.

**Definizione 1.1.22.** Un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  si dice (*Hartogs*) *pseudoconvesso* se esiste un funzionale di Minkowski  $\mu$  tale che  $-\log \mu_\Omega$  è plurisubarmonica in  $\Omega$ .

Il seguente risultato ci servirà per un controesempio.

**Teorema 1.1.23.** ([Kr, Theorem 5.1.2]) Ogni dominio pseudoconvesso è un dominio di olomorfia.

Nel caso di domini regolari, si può dare una definizione di pseudoconvessità più operativa equivalente.

**Definizione 1.1.24.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio con bordo  $C^2$ , cioè tale che esista una funzione  $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$  tale che  $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$  e  $d\rho \neq 0$  in ogni punto di  $\partial\Omega$ .

Dato  $p \in \partial\Omega$ , lo spazio tangente complesso a  $\partial\Omega$  in  $p$  è

$$H_p \partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\},$$

dove  $\bar{\partial}\rho(p) = \left( \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_1}(p), \dots, \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_n}(p) \right)$ .

Diciamo che  $\Omega$  è *Levi pseudoconvesso* in  $p \in \partial\Omega$  se la forma di Levi

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è semidefinita positiva in  $H_p \partial\Omega$ . Diciamo che è *pseudoconvesso* se è Levi pseudoconvesso in  $p$  per ogni  $p \in \partial\Omega$ . Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso* in  $p \in \partial\Omega$  se la forma di Levi è definita positiva in  $H_p \partial\Omega$ . Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso* se la forma di Levi è strettamente pseudoconvessa in  $p$  per ogni  $p \in \partial\Omega$ .

Vale il seguente risultato.

**Teorema 1.1.25.** ([Kr, Theorem 3.3.5]) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato con bordo  $C^2$ . Allora  $\Omega$  è Levi pseudoconvesso se e solo se è Hartogs pseudoconvesso.

## 1.2 Risultati noti della teoria

Vediamo ora alcuni risultati noti della teoria che ci saranno utili nelle nostre dimostrazioni. Cominciamo con alcuni teoremi noti dell'analisi complessa in più variabili.

**Teorema 1.2.1.** (*Weierstrass, [N, Chapter 1, Proposition 5]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio. Sia  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$  una successione che converge uniformemente sui compatti a  $f \in C^0(\Omega)$ ; allora  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ .

**Definizione 1.2.2.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio. Una famiglia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$  si dice *uniformemente limitata sui compatti* se per ogni compatto  $K \subseteq \Omega$  esiste una costante  $M_K > 0$  tale che  $|f(z)| \leq M_K$  per ogni  $f \in \mathcal{F}$  e  $z \in K$ .

**Teorema 1.2.3.** (*Montel, [N, Chapter 1, Proposition 6]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio. Sia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ , una famiglia uniformemente limitata sui compatti; allora è relativamente compatta in  $\mathcal{O}(\Omega)$ .

Quella che useremo noi sarà una versione del teorema di Montel per varietà tautly embedded, che vedremo più avanti.

**Teorema 1.2.4.** (*Serre, Ehrenpreis, [Kr, Theorem 1.2.6]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato, con  $n > 1$ . Sia  $K$  un sottoinsieme compatto di  $\Omega$  tale che  $\Omega \setminus K$  è connesso. Se  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ , allora esiste  $F \in \mathcal{O}(\Omega)$  tale che  $F|_{\Omega \setminus K} = f$ .

Il seguente fatto verrà usato spesso.

**Lemma 1.2.5.** Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $Y$  uno spazio topologico tale che esista una successione  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di compatti di  $Y$  con la seguente proprietà: per ogni compatto  $K \subseteq Y$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $K \subseteq K_n$ . Allora  $C^0(Y, X)$  è metrizzabile.

In particolare, un suo sottoinsieme è chiuso (rispettivamente, compatto) se e solo se è chiuso (rispettivamente, compatto) per successioni.

*Dimostrazione.* Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $f, g \in C^0(Y, X)$  poniamo

$$d_n(f, g) = \sup_{x \in K_n} d(f(x), g(x));$$

definiamo

$$\tilde{d}(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}.$$

È facile verificare che  $\tilde{d}$  è una distanza, che induce proprio la topologia della convergenza uniforme sui compatti.  $\square$

Vediamo adesso l'espressione esplicita per  $k_X$  in un paio di casi particolari, dalla quale discende un'importante conseguenza.

**Proposizione 1.2.6.** (*[A1, Proposition 2.3.4 and Corollary 2.3.7]*) Valgono le seguenti affermazioni:

- (i) la distanza di Poincaré e la pseudodistanza di Kobayashi di  $\mathbb{D}$  coincidono;  
(ii) dati  $z = (z_1, \dots, z_n)$  e  $w = (w_1, \dots, w_n)$  in  $\mathbb{D}^n$ , si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = \max_{j=1, \dots, n} \{\omega(z_j, w_j)\}.$$

*Dimostrazione.* (i) Che  $k_{\mathbb{D}} \geq \omega$  segue dal lemma di Schwarz-Pick e dalla disuguaglianza triangolare per la distanza di Poincaré; per avere l'uguaglianza, basta notare che il minimo nella definizione di  $k_{\mathbb{D}}$  è effettivamente raggiunto usando l'identità.

(ii) Poiché le proiezioni nelle varie coordinate sono funzioni olomorfe, per ogni  $j = 1, \dots, n$  si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \geq k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j) = \omega(z_j, w_j),$$

dove la disuguaglianza segue dalla Proposizione 1.1.15 e l'uguaglianza dal punto (i).

Per mostrare che il minimo è effettivamente raggiunto, ricordiamo che dal Corollario 1.1.16 segue che  $k_{\mathbb{D}^n}$  e  $k_{\mathbb{D}} = \omega$  sono invarianti per biolomorfismi. Consideriamo allora  $f_1, \dots, f_n \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  tali che  $f_j(z_j) = 0$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ , e poniamo  $f = f_1 \times \dots \times f_n \in \text{Aut}(\mathbb{D}^n)$ . Abbiamo quindi

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = k_{\mathbb{D}^n}(f(z), f(w)) = k_{\mathbb{D}^n}(O, f(w))$$

e

$$\max_{j=1, \dots, n} \{\omega(z_j, w_j)\} = \max_{j=1, \dots, n} \{\omega(f_j(z_j), f_j(w_j))\} = \max_{j=1, \dots, n} \{\omega(0, f_j(w_j))\};$$

possiamo dunque supporre, senza perdita di generalità,  $z = O$ .

Allora, detto  $j_0$  l'indice per cui  $\omega(0, w_{j_0})$  è massimo, si ha che anche  $|w_{j_0}|$  è massimo. Consideriamo, per ogni  $j = 1, \dots, n$ , la funzione  $g_j \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  data da  $g_j(\zeta) = \zeta \cdot w_j / w_{j_0}$ , di modo che  $g_j(w_{j_0}) = w_j$ . Poniamo  $\varphi = (g_1, \dots, g_n)$ , per cui  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}^n)$ ; inoltre,  $\varphi(z_{j_0}) = \varphi(0) = O = z$  e  $\varphi(w_{j_0}) = w$ . Si ha dunque, per definizione, che

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \leq \omega(0, w_{j_0}) = \max_{j=1, \dots, n} \omega(0, w_j) = \max_{j=1, \dots, n} \omega(z_j, w_j),$$

come voluto.  $\square$

**Corollario 1.2.7.** *I domini limitati di  $\mathbb{C}^n$  sono Kobayashi-iperbolici.*

*Dimostrazione.* Dal punto (ii) della Proposizione 1.2.6 abbiamo che  $k_{\mathbb{D}^n}$  è effettivamente una distanza; poiché dal Corollario 1.1.16 sappiamo che  $k_X$  è invariante per biolomorfismi, segue che  $k_{\mathbb{D}_r^n}$  è una distanza per ogni  $r > 0$ . Se  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  è un dominio limitato, esiste  $r > 0$  tale che  $\Omega \subseteq \mathbb{D}_r^n$ . In tal caso, l'inclusione è una funzione olomorfa. Quindi, dalla Proposizione 1.1.15, si ha che se  $z, w \in \Omega$  con  $z \neq w$  allora  $0 < k_{\mathbb{D}_r^n}(z, w) \leq k_{\Omega}(z, w)$ . Segue dunque che  $k_{\Omega}$  è una distanza, come voluto.  $\square$

**Osservazione 1.2.8.** Con la stessa dimostrazione, si ottiene anche che le sotto-varietà complesse e connesse di varietà Kobayashi-iperboliche sono Kobayashi-iperboliche. In particolare, abbiamo che le sotto-varietà complesse, connesse e limitate di  $\mathbb{C}^d$  sono Kobayashi-iperboliche.

Citiamo ora un risultato che lega pseudometrica e pseudodistanza di Kobayashi.

**Definizione 1.2.9.** Sia  $X$  una varietà complessa e connessa, e consideriamo una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che la funzione  $K_X(\gamma(\cdot); \gamma'(\cdot))$  sia integrabile su  $[a, b]$ . La lunghezza di  $\gamma$  in  $X$  rispetto alla pseudometrica di Kobayashi è

$$l_X(\gamma) := \int_a^b K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) dt.$$

**Teorema 1.2.10.** ([Roy, Theorem 1] e [V, Theorem 3.1]) Sia  $X$  una varietà complessa e connessa. Per ogni  $z, w \in X$  abbiamo che:

- (i)  $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X \text{ è } C^1 \text{ a tratti, } \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\};$
- (ii)  $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X \text{ è assolutamente continua rispetto a } d_X, \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}.$

Qui,  $d_X$  è la distanza indotta dalla metrica hermitiana  $\|\cdot\|_X$ , e  $l_X(\gamma)$  è ben definita in entrambi i casi.

Introduciamo adesso il concetto di varietà taut, che sarà per noi un'ipotesi importante per ciò che andremo a dimostrare: infatti, quest'ipotesi ci darà la dicotomia nella tesi dei teoremi di tipo “Wolff-Denjoy”. Vedremo anche con un esempio l'importanza di tale ipotesi. Prima di dare la definizione, ci servirà un risultato sul comportamento delle funzioni olomorfe a valori in una varietà Kobayashi-iperbolica; non lo dimostreremo tutto, ma per la parte che andremo a mostrare avremo bisogno del ben noto teorema di Ascoli-Arzelà.

**Teorema 1.2.11.** (Ascoli-Arzelà, [Ke, Chapter 7, Theorem 17]) Siano  $X$  uno spazio metrico e  $Y$  uno spazio metrico localmente compatto. Allora un famiglia  $\mathcal{F} \subseteq C^0(Y, X)$  è relativamente compatta in  $C^0(Y, X)$  se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

- (i)  $\mathcal{F}$  è equicontinua;
- (ii) l'insieme  $\{f(y) \mid f \in \mathcal{F}\}$  è relativamente compatto in  $X$  per ogni  $y \in Y$ .

**Lemma 1.2.12.** ([A1, Proposition 2.1.1]) Siano  $X$  una varietà complessa e  $d$  una distanza su  $X$  compatibile con la topologia di varietà. Supponiamo che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  sia equicontinuo rispetto a  $d$ ; allora  $\text{Hol}(W, X)$  è equicontinuo rispetto a  $d$  per ogni varietà complessa  $W$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista una varietà complessa  $W$  per cui ciò non valga; allora esistono  $\varepsilon > 0$ , un punto  $\tilde{w} \in W$  e due successioni

$\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq W$  e  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Hol}(W, X)$  tali che  $w_\nu \rightarrow \tilde{w}$  per  $\nu \rightarrow +\infty$  e  $d(f_\nu(w_\nu), f_\nu(\tilde{w})) \geq \varepsilon$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Scegliendo un opportuno sistema di coordinate locali e a meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che  $W$  sia una qualche  $\mathbb{B}^n$  e prendere  $\tilde{w} = 0$ .

Definiamo  $g_\nu \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  come  $g_\nu(\zeta) = f_\nu(\zeta w_\nu / \|w_\nu\|)$ ; allora  $\|w_\nu\| \rightarrow 0$  per  $\nu \rightarrow +\infty$  e

$$d(g_\nu(\|w_\nu\|), g_\nu(0)) = d(f_\nu(w_\nu), f_\nu(\tilde{w})) \geq \varepsilon$$

per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ , in contraddizione con l'ipotesi che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  sia equicontinuo rispetto a  $d$ .  $\square$

**Proposizione 1.2.13.** ([A3, Theorem 1.3]) *Sia  $X$  una varietà complessa e connessa. Allora  $X$  è Kobayashi-iperbolica se e solo se  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , dove  $X^*$  è la compattificazione di Alexandroff di  $X$ .*

*Inoltre, se  $X$  è Kobayashi-iperbolica allora  $\text{Hol}(Y, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(Y, X^*)$  per ogni varietà complessa  $Y$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo solamente che se  $X$  è Kobayashi-iperbolica allora  $\text{Hol}(Y, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(Y, X^*)$  per ogni varietà complessa  $Y$ , dando per buona la prima parte. Poiché  $X$  è una varietà, per [Ke, 4.16] possiamo fissare una distanza  $d$  su  $X^*$  che induca la topologia della compattificazione. Dato che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , per il teorema di Ascoli-Arzelà è equicontinuo.

Data una varietà complessa  $Y$ , per il Lemma 1.2.12, considerando su  $X$  la distanza  $d|_X$ , si ha che  $\text{Hol}(Y, X)$  è equicontinuo; per compattezza di  $X^*$  valgono le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà, per cui abbiamo che è relativamente compatto in  $C^0(Y, X^*)$ , come voluto.  $\square$

**Definizione 1.2.14.** Una varietà complessa  $X$  si dice *taut* se è Kobayashi-iperbolica e ogni funzione nella chiusura di  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$  è in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  oppure è la funzione costante  $\infty$ .

Strettamente legato al concetto di varietà taut è quello di varietà tautly embedded, ipotesi che può essere interpretata dicendo che per una certa sotto-varietà complessa di una varietà complessa ambiente vale una forma del teorema di Montel.

**Definizione 1.2.15.** Sia  $X$  una sotto-varietà complessa di una varietà complessa  $Y$ . Diciamo che  $X$  è *tautly embedded* in  $Y$  se  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è relativamente compatto in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, Y)$ .

**Proposizione 1.2.16.** ([A1, Proposition 2.1.4, point (i)]) *Sia  $X$  una sotto-varietà complessa di una varietà complessa  $Y$ . Allora  $X$  è tautly embedded in  $Y$  se e solo se  $\text{Hol}(W, X)$  è relativamente compatto in  $\text{Hol}(W, Y)$  per ogni varietà complessa  $W$ .*

*Dimostrazione.* Un'implicazione è immediata. Viceversa, supponiamo che  $X$  sia tautly embedded in  $Y$ , cioè che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  sia relativamente compatto in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, Y)$ . Dato che  $Y$  è una varietà, è Hausdorff, per cui le mappe costanti, che indichiamo con  $\text{cost}(\mathbb{D}, Y)$ , sono un chiuso di  $C^0(\mathbb{D}, Y)$  omeomorfo a  $Y$ ; in particolare, la chiusura di  $\text{cost}(\mathbb{D}, X)$  in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, Y)$  è contenuta sia nella chiusura di  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ , che è un compatto, sia in  $\text{cost}(\mathbb{D}, Y)$ , che è un chiuso. Dunque è un compatto e, a meno di omeomorfismo, coincide con la chiusura di  $X$  in  $Y$ ; segue che  $X$  è relativamente compatta in  $Y$ .

Dato che  $Y$  è una varietà, per [Ke, 4.16] possiamo fissare una distanza  $d$  su  $Y$  che induce la topologia di varietà. Per definizione,  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è relativamente compatto in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, Y)$ , dunque anche in  $C^0(\mathbb{D}, Y)$  in quanto quest'ultimo è Hausdorff perché lo è  $Y$ ; per Ascoli-Arzelà, segue che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è equicontinuo rispetto a  $d$ . Per il Lemma 1.2.12 si ha che  $\text{Hol}(W, X)$  è equicontinuo rispetto a  $d$  per ogni varietà complessa  $W$ ; inoltre, poiché  $\text{Hol}(W, Y \setminus \bar{X})$  è aperto, la chiusura di  $\text{Hol}(W, X)$  in  $\text{Hol}(W, Y)$  è contenuta in  $C^0(W, \bar{X})$ . Dato che  $\bar{X}$  è compatto, possiamo applicare Ascoli-Arzelà per ottenere che  $\text{Hol}(W, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(W, Y)$ . Abbiamo che, essendo  $Y$  metrizzabile e  $W$  una varietà, valgono le ipotesi del Lemma 1.2.5; quindi la chiusura di  $\text{Hol}(W, X)$  in  $C^0(W, Y)$  coincide con la chiusura per successioni. Per il teorema di Weierstrass, applicato in carte opportune, tale chiusura è contenuta in  $\text{Hol}(W, Y)$ , da cui la tesi.  $\square$

Ci servirà anche il seguente fatto.

**Proposizione 1.2.17.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa e relativamente compatta di una varietà taut  $Y$ . Allora  $X$  è tautly embedded in  $Y$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è relativamente compatta in  $Y$ , nessuna successione in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è compattamente divergente; essendo  $X$  taut, per definizione segue che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è relativamente compatto in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, Y)$ , come voluto.  $\square$

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per parlare del comportamento delle iterate di funzioni olomorfe, partendo dalla definizione stessa di iterata.

**Definizione 1.2.18.** Dati un insieme  $X$  e una funzione  $f : X \rightarrow X$ , poniamo induttivamente  $f^0 = \text{id}_X$  e  $f^{k+1} = f \circ f^k$ . Chiamiamo  $f^k$  l'iterata  $k$ -esima di  $f$  e, per ogni  $x \in X$ , l'orbita di  $x$  tramite  $f$  è l'insieme  $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

**Definizione 1.2.19.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici. Diciamo che una successione  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq C^0(X, Y)$  è *compattamente divergente* se, per ogni coppia di compatti  $H \subseteq X$  e  $K \subseteq Y$ , esiste  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $f_\nu(H) \cap K = \emptyset$  per ogni  $\nu \geq \nu_0$ .

Una famiglia  $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$  è detta *normale* se ogni successione in  $\mathcal{F}$  ammette una sottosuccessione che converge a una funzione in  $C^0(X, Y)$  oppure è compattamente divergente.

Adesso vogliamo arrivare a dire che l'ipotesi taut ci permette di ottenere la dicotomia sul comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe. Per farlo, ci servono prima alcuni risultati.

Iniziamo dando una caratterizzazione equivalente all'essere taut per una varietà.

**Proposizione 1.2.20.** *Una varietà complessa e connessa  $X$  è taut se e solo se la famiglia  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è normale.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $X$  sia taut e consideriamo una successione  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ . Per definizione  $X$  è Kobayashi-iperbolica; dunque per la Proposizione 1.2.13, la chiusura di  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è compatta in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ . Poiché  $X$  è una varietà,  $X^*$  è metrizzabile per [Ke, 4.16]; inoltre, è facile vedere che  $\mathbb{D}$  soddisfa le ipotesi dello spazio  $Y$  nel Lemma 1.2.5. Quindi  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$  è metrizzabile e la chiusura di  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è compatta per successioni. Allora esiste una sottosuccessione  $\{f_{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  che converge, uniformemente sui compatti, a una qualche funzione  $f$ . Se  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  abbiamo concluso; altrimenti, poiché  $X$  è taut,  $f$  è la funzione costante  $\infty$ . Ma, dalla definizione della compattificazione di Alexandroff, una successione in  $C^0(\mathbb{D}, X)$  converge in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$  alla funzione costante  $\infty$  se e solo se è compattamente divergente; quindi  $\{f_{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  è compattamente divergente. In ogni caso, possiamo concludere che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è normale.

Supponiamo adesso che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  sia normale. Se  $f$  è una funzione nella sua chiusura in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , allora è il limite di una successione in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ . Poiché questa famiglia è normale, possiamo trovare una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente, ma dovrà comunque convergere a  $f$ . Allora nel primo caso, applicando il teorema di Weierstrass in carte opportune, troviamo che  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ , mentre nel secondo caso è la funzione costante  $\infty$ . Dunque  $X$  è taut.  $\square$

Si può dimostrare qualcosa di più.

**Proposizione 1.2.21.** *([A1, Theorem 2.1.2]) Sia  $X$  una varietà taut. Allora  $\text{Hol}(Y, X)$  è una famiglia normale per ogni varietà complessa  $Y$ .*

*Dimostrazione.* Come fatto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.20, possiamo fissare una distanza  $d$  su  $X^*$  compatibile con la sua topologia. Poiché  $X$  è taut si ha che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X) \cup \{\infty\}$  è compatto in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , da cui, per Ascoli-Arzelà, abbiamo che è equicontinuo rispetto a  $d$ . Allora, per il Lemma 1.2.12,  $\text{Hol}(Y, X)$  è equicontinuo rispetto a  $d$  per ogni varietà complessa  $Y$ .

Supponiamo adesso che esista una varietà complessa  $Y$  tale che  $\text{Hol}(Y, X)$  non sia normale. Allora  $\text{Hol}(Y, X) \cup \{\infty\}$  non è un compatto di  $C^0(Y, X^*)$ ; dato che è equicontinuo rispetto a  $d$ , per Ascoli-Arzelà abbiamo che non è un chiuso di  $C^0(Y, X^*)$ . Poiché  $Y$  è una varietà soddisfa le ipotesi del Lemma 1.2.5, per cui  $C^0(Y, X^*)$  è metrizzabile; allora  $\text{Hol}(Y, X) \cup \{\infty\}$  non è chiuso se e solo se non è chiuso per successioni, cioè esiste una successione  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Hol}(Y, X)$  convergente, uniformemente sui compatti, a una funzione  $f \in C^0(Y, X^*)$  che non sta né in  $C^0(Y, X)$  (altrimenti starebbe in  $\text{Hol}(Y, X)$ , per Weierstrass applicato a carte opportune) né è la funzione costante  $\infty$ . Allora è facile mostrare che esiste un punto  $z_0 \in Y$  tale che  $f(z_0) = \infty$  e  $f$  non è identicamente  $\infty$  in ogni



intorno di  $z_0$ . Dunque, scegliendo un opportuno sistema di coordinate locali, possiamo assumere senza perdita di generalità che  $Y$  sia una qualche  $\mathbb{B}^n$  e che  $z_0 = 0$ .

Dato che  $f \neq \infty$ , esiste  $z_1 \in \mathbb{B}^n$  tale che  $f(z_1) \neq \infty$ . Possiamo allora definire le funzioni  $g_\nu \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  e  $g \in C^0(\mathbb{D}, X^*)$  come  $g_\nu(\zeta) = f_\nu(\zeta z_1 / \|z_1\|)$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$  e  $g(\zeta) = f(\zeta z_1 / \|z_1\|)$ . Allora  $g_\nu \rightarrow g$  per  $\nu \rightarrow +\infty$  uniformemente sui compatti, ma  $g \notin C^0(\mathbb{D}, X) \cup \{\infty\}$ , in contraddizione con il fatto che l'insieme  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X) \cup \{\infty\}$  è un compatto, e in particolare un chiuso (per successioni), di  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , che abbiamo già visto essere metrizzabile.  $\square$

Adesso vogliamo mostrare che tutte le varietà  $X$  Kobayashi-iperboliche tali che  $k_X$  è una distanza completa sono taut.

**Definizione 1.2.22.** Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica. Dati  $x \in X$  e  $r > 0$ , la palla di centro  $x$  e raggio  $r$  rispetto alla distanza di Kobayashi è

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid k_X(x, y) < r\}.$$

Inoltre, dato  $A \subseteq X$  poniamo  $B_X(A, r) := \bigcup_{x \in A} B_X(x, r)$ .

**Lemma 1.2.23.** Siano  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica,  $z_0 \in X$  e  $r_1, r_2 > 0$ . Allora

$$B_X(B_X(z_0, r_1), r_2) = B_X(z_0, r_1 + r_2).$$

*Dimostrazione.* L'inclusione  $B_X(B_X(z_0, r_1), r_2) \subseteq B_X(z_0, r_1 + r_2)$  segue dalla disuguaglianza triangolare.

Per l'altra inclusione, consideriamo  $z \in B_X(z_0, r_1 + r_2)$  e prendiamo  $\varepsilon > 0$  tale che  $3\varepsilon = r_1 + r_2 - k_X(z_0, z)$ . Adesso, se  $k_X(z_0, z) < r_1$  la conclusione è immediata; assumiamo dunque che  $k_X(z_0, z) \geq r_1$ , per cui si ha  $r_2 - \varepsilon > 0$ . Supponiamo che  $r_1 \leq \varepsilon$ . Allora  $k_X(z_0, z) = r_1 + r_2 - 3\varepsilon < r_2$  e anche in questo caso la conclusione segue. Perciò, assumiamo anche che  $r_1 - \varepsilon > 0$ .

Dalla definizione di  $k_X$ , esistono  $\zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$  e  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  tali che  $\varphi_1(\zeta_0) = z_0$ ,  $\varphi_m(\zeta_m) = z$ ,  $\varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j)$  per  $j = 1, \dots, m-1$  e

$$r_1 - \varepsilon < k_X(z_0, z) \leq \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < k_X(z_0, z) + \varepsilon = r_1 + r_2 - 2\varepsilon.$$

Sia  $\mu \leq m$  il più grande intero tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché  $r_1 - \varepsilon > 0$ . Prendiamo  $\eta_\mu$  il punto sulla geodetica congiungente  $\zeta_{\mu-1}$  e  $\zeta_\mu$  tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) = r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché  $r_1 + r_2 - 2\varepsilon > r_1 - \varepsilon$  e per definizione di  $\mu$ . Prendendo dunque  $w = \varphi_\mu(\eta_\mu)$  abbiamo  $k_X(z_0, w) < r_1$ , cioè  $w \in B_X(z_0, r_1)$ . Inoltre, per come è stato scelto  $\eta_\mu$ , si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) &= \sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) \\ &\quad + \omega(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \\ &= r_1 - \varepsilon + \omega(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j), \end{aligned}$$

da cui

$$\omega(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) = \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) - (r_1 - \varepsilon) < r_2 - \varepsilon;$$

perciò  $k_X(w, z) < r_2$ . Di conseguenza,  $z \in B_X(B_X(z_0, r_1), r_2)$  come voluto.  $\square$

**Lemma 1.2.24.** *Siano  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica,  $z_0 \in X$  e  $r > 0$ . Supponiamo che esista un  $\rho > 0$  tale che la palla chiusa  $\overline{B_X(z, \rho)}$  è compatta per ogni  $z \in B_X(z_0, r)$ ; allora  $\overline{B_X(z_0, r)}$  è compatta.*

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è una varietà, è localmente compatta; inoltre, essendo  $X$  Kobayashi-iperbolica,  $k_X$  è una distanza. Dunque esiste  $0 < s < r$  tale che  $\overline{B_X(z_0, s)}$  è compatta. Ci basta allora mostrare che, se  $\overline{B_X(z_0, s)}$  è compatta, anche  $\overline{B_X(z_0, s + \rho/2)}$  lo è. Sia  $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\overline{B_X(z_0, s + \rho/2)}$ ; per il Lemma 1.2.23, esiste una successione  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  in  $\overline{B_X(z_0, s)}$  tale che  $k_X(z_\nu, w_\nu) < 3\rho/4$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre  $w_\nu \rightarrow \tilde{w} \in \overline{B_X(z_0, s)}$ . Allora  $z_\nu \in \overline{B_X(\tilde{w}, \rho)}$  per  $\nu$  sufficientemente grande; dunque, per ipotesi  $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione convergente.  $\square$

**Lemma 1.2.25.** *Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica. Allora  $X$  è  $k_X$ -completa se e solo se le palle chiuse sono compatte.*

*Dimostrazione.* Un'implicazione è ovvia. Assumiamo dunque che  $X$  sia  $k_X$ -completa; per il Lemma 1.2.24, ci basta mostrare che esiste  $\rho > 0$  tale che  $\overline{B_X(z_0, \rho)}$  è compatta per ogni  $z_0 \in X$ . Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esiste  $z_1 \in X$  tale che  $\overline{B_X(z_1, 1/2)}$  non è compatta. Usando il Lemma 1.2.24, possiamo costruire induttivamente una successione  $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  tale che  $z_\nu \in B_X(z_{\nu-1}, 1/2^{\nu-1})$  e  $\overline{B_X(z_\nu, 1/2^\nu)}$  non è compatta. Tale successione è di Cauchy, per cui converge a  $w_0 \in X$  perché  $X$  è  $k_X$ -completa. Poiché  $X$  è una varietà, è localmente compatta; quindi esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $\overline{B_X(w_0, \varepsilon)}$  è compatta. Ma per  $\nu$  sufficientemente grande  $\overline{B_X(z_\nu, 1/2^\nu)} \subseteq \overline{B_X(w_0, \varepsilon)}$ ; dunque sarebbe compatta, contraddizione.  $\square$

**Proposizione 1.2.26.** *Ogni varietà  $X$  Kobayashi-iperbolica e  $k_X$ -completa è taut.*

*Dimostrazione.* Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica e  $k_X$ -completa, e consideriamo una successione  $\{\varphi_\nu\} \subseteq \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  che non è compattamente divergente; vogliamo mostrare che ammette una sottosuccessione che converge in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ .

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo trovare due compatti  $H \subseteq \mathbb{D}$  e  $K \subseteq X$  tali che  $\varphi_\nu(H) \cap K \neq \emptyset$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$  scegliamo  $\zeta_\nu \in H$  tale che  $\varphi_\nu(\zeta_\nu) \in K$ ; fissato  $z_0 \in K$  poniamo  $r = \max\{k_X(z, z_0) \mid z \in K\}$ . Allora per ogni  $\zeta \in \mathbb{D}$  e  $\nu \in \mathbb{N}$  abbiamo che

$$k_X(\varphi_\nu(\zeta), z_0) \leq k_X(\varphi_\nu(\zeta), \varphi_\nu(\zeta_\nu)) + k_X(\varphi_\nu(\zeta_\nu), z_0) \leq k_{\mathbb{D}}(\zeta, \zeta_\nu) + r.$$

Posto  $R_\zeta = \max\{k_{\mathbb{D}}(\zeta, \zeta') \mid \zeta' \in H\}$ , si ha dunque che la successione  $\{\varphi_\nu(\zeta)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è contenuta nella  $k_X$ -palla chiusa di centro  $z_0$  e raggio  $R_\zeta + r$ , che è compatta per il Lemma 1.2.25; di conseguenza, la successione  $\{\varphi_\nu(\zeta)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è relativamente compatta in  $X$ . Inoltre, poiché  $X$  è Kobayashi-iperbolica, l'intera famiglia  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è equicontinua (è 1-lipschitziana rispetto alla distanza di Kobayashi); dunque, per il teorema di Ascoli-Arzelà, la successione  $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è relativamente compatta in  $C^0(\mathbb{D}, X)$ . In particolare, ammette una sottosuccessione che converge in  $C^0(\mathbb{D}, X)$ ; applicando il teorema di Weierstrass in carte opportune, si vede che il limite appartiene a  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Esempio 1.2.27.** In [Rosa] viene costruito un esempio di un dominio di  $\mathbb{C}^3$  limitato (dunque Kobayashi-iperbolico) e taut, ma non Kobayashi-completo.

Usando la Proposizione 1.2.26, si può dimostrare che tutti i domini limitati e strettamente pseudoconvessi sono taut. Tuttavia, più avanti avremo bisogno di un risultato un po' più forte.

**Proposizione 1.2.28.** ([KR, Proposition 2]) *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato, pseudoconvesso e con bordo  $C^1$ . Allora  $\Omega$  è taut.*

Prima di enunciare il risultato che, data una varietà taut, ci dà la dicotomia che cerchiamo per il comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe,

dobbiamo ancora mostrare qualche fatto tecnico preliminare. Partiamo con un paio di definizioni.

**Definizione 1.2.29.** Sia  $f \in C^0(X, X)$ . Diciamo che  $g \in C^0(X, X)$  è una *funzione limite* di  $f$  se esiste una sottosuccessione delle iterate di  $f$  che converge a  $g$  in  $C^0(X, X)$ . Denotiamo con  $\Gamma(f)$  l'insieme di tutte le funzioni limite di  $f$ .

**Definizione 1.2.30.** Una *retrazione olomorfa* di una varietà complessa  $X$  è una funzione  $\rho \in \text{Hol}(X, X)$  tale che  $\rho^2 = \rho$ . L'immagine di una retrazione olomorfa è detta *retrato olomorfo*.

Ci servirà il seguente fatto sull'immagine di una retrazione olomorfa dovuto a Rossi; riportiamo la dimostrazione data da Cartan in [Ca].

**Lemma 1.2.31.** ([Ross, Section 5]) Sia  $X$  una varietà complessa e consideriamo  $\rho \in \text{Hol}(X, X)$  una retrazione olomorfa di  $X$ . Allora l'immagine di  $\rho$  è una sottovarietà complessa chiusa di  $X$ .

*Dimostrazione.* Sia  $M = \rho(X)$ . Per definizione di retrazione  $\rho(X) = \text{Fix}(\rho)$ , da cui si ha che  $M$  è chiusa.

Consideriamo  $z_0 \in M$ . Prendiamo un intorno aperto  $U$  di  $z_0$  in  $X$  che sia contenuto in una carta locale di  $X$  in  $z_0$ . Allora  $V = \rho^{-1}(U) \cap U$  è un intorno aperto di  $z_0$  tale che  $\rho(V) \subseteq V$ . Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che  $X$  sia un dominio limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ .

Sia  $P = D\rho(z_0) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  e definiamo  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$  come

$$\varphi = \text{id} + (2P - \text{id}) \circ (\rho - P).$$

Poiché  $D\varphi(z_0) = \text{id}$ , la funzione  $\varphi$  definisce una carta locale in un intorno di  $z_0$ . Adesso, dato che  $\rho^2 = \rho$  e  $P^2 = P$ , si ha

$$\begin{aligned} \varphi \circ \rho &= \rho + (2P - \text{id}) \circ \rho^2 - (2P - \text{id}) \circ P \circ \rho \\ &= P \circ \rho = P + P \circ (2P - \text{id}) \circ (\rho - P) = P \circ \varphi. \end{aligned}$$

Allora, letta in questa carta,  $\rho$  diventa lineare; perciò,  $M$  è una sottovarietà complessa vicino a  $z_0$ . Per arbitrarietà di  $z_0$ , segue che  $M$  è una varietà.  $\square$

Dobbiamo ora studiare alcune proprietà delle funzioni limite di funzioni olomorfe su varietà taut.

**Teorema 1.2.32.** ([A1, Theorem 2.1.29]) Sia  $X$  una varietà taut e consideriamo  $f \in \text{Hol}(X, X)$ . Se la successione  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle iterate di  $f$  non è compattamente divergente, allora esiste un'unica retrazione olomorfa  $\rho \in \Gamma(f)$  su una sottovarietà complessa  $M$  di  $X$  tale che ogni funzione limite  $h \in \Gamma(f)$  è della forma

$$h = \gamma \circ \rho,$$

con  $\gamma \in \text{Aut}(M)$ .

Inoltre,  $\varphi = f|_M \in \text{Aut}(M)$  e  $\Gamma(f)$  è isomorfo al sottogruppo di  $\text{Aut}(M)$  dato dalla chiusura di  $\{\varphi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

*Dimostrazione.* Poiché la successione delle iterate di  $f$  non è compattamente divergente, esistono due compatti  $H, K \subseteq X$  e una sottosuccessione di iterate tali che l'intersezione di  $K$  con l'immagine di  $H$  tramite le funzioni della sottosuccessione non è mai vuota. Dato che  $X$  è taut, possiamo estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti o è compattamente divergente; per costruzione non può essere il secondo caso, dunque abbiamo trovato una sottosuccessione  $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  che converge uniformemente sui compatti a  $h \in \text{Hol}(X, X)$ . Possiamo anche assumere che  $p_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$  e  $q_\nu = p_\nu - k_\nu$  tendano a  $+\infty$  per  $\nu \rightarrow +\infty$ . A meno di prendere ulteriori sottosuccessioni, possiamo anche supporre che  $\{f^{p_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{f^{q_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergano uniformemente sui compatti o siano compattamente divergenti (non necessariamente la stessa cosa per entrambe); è facile vedere che i ragionamenti che andremo a fare sono validi anche considerando eventuali sottosuccessioni, quindi non perdiamo di generalità. Allora

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f^{p_\nu}(f^{k_\nu}(z)) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f^{k_{\nu+1}}(z) = h(z)$$

per ogni  $z \in X$ . Poiché l'orbita di  $z$  tramite  $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  tende a qualcosa, è relativamente compatta; dunque  $\{f^{p_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  non può essere compattamente divergente. Allora converge, uniformemente sui compatti, a una  $\rho \in \text{Hol}(X, X)$  tale che

$$h \circ \rho = \rho \circ h = h; \quad (9)$$

similmente, troviamo che  $\{f^{q_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti, a una  $g \in \text{Hol}(X, X)$  tale che

$$g \circ h = h \circ g = \rho. \quad (10)$$

In particolare,  $\rho^2 = \rho \circ \rho = g \circ h \circ \rho = g \circ h = \rho$ , perciò  $\rho$  è una retrazione di  $X$  su una sottovarietà complessa  $M$ . Dalla (9) abbiamo  $h(X) \subseteq M$ ; inoltre  $g \circ \rho = \rho \circ g$ , da cui  $g(M) \subseteq M$ . Allora la (10) ci dà  $g \circ h|_M = h \circ g|_M = \text{id}_M$ . Dunque, ponendo  $\gamma = h|_M$ , otteniamo  $h = \gamma \circ \rho$  con  $\gamma \in \text{Aut}(M)$ . Dobbiamo mostrare che  $\rho$  non dipende da  $h$ ; in particolare, non dipende dalla sottosuccessione scelta.

Sia  $\{f^{k'_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  un'altra sottosuccessione convergente a  $h' \in \text{Hol}(X, X)$ . Ragionando come sopra, possiamo supporre che  $s_\nu = k'_\nu - k_\nu$  e  $t_\nu = k_{\nu+1} - k'_\nu$  convergano a  $+\infty$  per  $\nu \rightarrow +\infty$  e che  $\{f^{s_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{f^{t_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergano, uniformemente sui compatti, rispettivamente a  $\alpha, \beta \in \text{Hol}(X, X)$  tali che

$$\alpha \circ h = h \circ \alpha = h' \quad \text{e} \quad \beta \circ h' = h' \circ \beta = h; \quad (11)$$

in particolare,  $h(X) = h'(X)$ , per cui  $M$  non dipende dalla sottosuccessione scelta. Adesso scriviamo  $h = \gamma_1 \circ \rho_1$ ,  $h' = \gamma_2 \circ \rho_2$ ,  $\alpha = \gamma_3 \circ \rho_3$  e  $\beta = \gamma_4 \circ \rho_4$ , dove  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  sono delle retrazioni olomorfe di  $X$  su  $M$  e  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \text{Aut}(M)$ . Vogliamo dire che  $\rho_1 = \rho_2$ . Notiamo che  $h \circ h' = h' \circ h$  e  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ , che

insieme alla (11) ci dà

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 &= \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \rho_1, \\
\gamma_3 \circ \gamma_1 \circ \rho_1 &= \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 = \gamma_2 \circ \rho_2, \\
\gamma_4 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 &= \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 = \gamma_1 \circ \rho_1, \\
\gamma_3 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 &= \gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \rho_3.
\end{aligned} \tag{12}$$

Usando la prima equazione in (12) scriviamo  $\rho_2$  in funzione di  $\rho_1$ , e sostituendo nella seconda troviamo  $\gamma_3 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ . Similmente, usando la prima equazione scriviamo  $\rho_1$  in funzione di  $\rho_2$  e sostituendo nella terza troviamo  $\gamma_4 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ . Allora  $\gamma_3 = \gamma_4^{-1}$  e la quarta equazione ci dà  $\rho_3 = \rho_4$ . Usando la seconda e la terza equazione abbiamo quindi

$$\rho_2 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 = \rho_3 = \rho_4 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 = \rho_1,$$

come voluto.

Adesso, dal fatto che  $f \circ \rho = \rho \circ f$  segue che  $f(M) \subseteq M$ . Ponendo  $\varphi = f|_M$ , se  $f^{p_\nu} \rightarrow \rho$  si ha che  $f^{p_\nu+1} \rightarrow \varphi \circ \rho$ , quindi per quanto visto finora segue che  $\varphi \in \text{Aut}(M)$ .

Infine, data  $h = \gamma \circ \rho \in \Gamma(f)$ , prendiamo due sottosuccessioni  $\{f^{p_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergenti rispettivamente a  $\rho$  e a  $h$ . Come prima, possiamo supporre che  $p_\nu - k_\nu \rightarrow +\infty$  e che  $f^{p_\nu - k_\nu} \rightarrow h_1 = \gamma_1 \circ \rho$  per  $\nu \rightarrow +\infty$ . Allora  $h \circ h_1 = h_1 \circ h = \rho$ , da cui  $\gamma_1 = \gamma^{-1}$ . Dunque l'applicazione  $h = \gamma \circ \rho \mapsto \gamma$  è l'isomorfismo cercato fra  $\Gamma(f)$  e la chiusura di  $\{\varphi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\text{Aut}(M)$ , e così concludiamo.  $\square$

**Definizione 1.2.33.** Siano  $X$  una varietà taut e  $f \in \text{Hol}(X, X)$ . Sia  $M$  data dal Teorema 1.2.32; tale  $M$  è detta la *varietà limite* di  $f$ .

Vediamo finalmente la dicotomia cercata. Nello specifico, la vedremo nella forma di cinque asserzioni equivalenti.

**Teorema 1.2.34.** ([A2, Theorem 1.1]) Sia  $X$  una varietà taut e consideriamo  $f \in \text{Hol}(X, X)$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) la successione  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle iterate di  $f$  non è compattamente divergente;
- (ii) la successione  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle iterate di  $f$  non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;
- (iii) la successione  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle iterate di  $f$  è relativamente compatta in  $\text{Hol}(X, X)$ ;
- (iv) l'orbita di  $z$  è relativamente compatta in  $X$  per ogni  $z \in X$ ;
- (v) esiste  $z_0 \in X$  la cui orbita è relativamente compatta in  $X$ .

*Dimostrazione.* (v)  $\Rightarrow$  (ii). Consideriamo  $H = \{z_0\}$  e  $K = \overline{\{f^k(z_0) \mid k \in \mathbb{N}\}}$ ; ovviamente  $H$  è compatto, e  $K$  lo è per l'ipotesi (v). Allora  $f^k(H) \cap K \neq \emptyset$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , per cui  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  non può contenere sottosuccessioni compattamente divergenti.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Poiché  $X$  è una varietà,  $X$  e  $X^*$  soddisfano le ipotesi del Lemma 1.2.5, da cui  $C^0(X, X^*)$  è metrizzabile; dunque  $\text{Hol}(X, X)$ , visto come suo sottospazio, è metrizzabile. Quindi, se per assurdo  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  non fosse relativamente compatta, ammetterebbe una sottosuccessione  $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  senza sottosottosuccessioni convergenti. Ma allora, dato che  $X$  è taut, conterrebbe una sottosottosuccessione compattamente divergente, ottenendo così una contraddizione all'ipotesi (ii).

(iii)  $\Rightarrow$  (iv). Fissiamo  $z \in X$  e consideriamo la funzione  $\text{Hol}(X, X) \rightarrow X$  data da  $f \mapsto f(z)$ . Questa funzione è continua rispetto alla topologia su  $\text{Hol}(X, X)$ , dunque l'immagine della chiusura di  $\{f^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  è compatta perché immagine di un compatto, chiusa perché compatta in uno spazio di Hausdorff, e contiene  $\{f^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Perciò l'orbita di  $z$  è contenuta in un compatto chiuso, e quindi è relativamente compatta, come voluto.

(iv)  $\Rightarrow$  (i). Ovvio.

(i)  $\Rightarrow$  (v). Sia  $M$  la varietà limite di  $f$  e poniamo  $\varphi = f|_M$ . Sappiamo dal Teorema 1.2.32 che  $\varphi \in \text{Aut}(M)$  e che  $\text{id}_M \in \Gamma(\varphi)$ . Prendiamo  $z_0 \in M$ ; vogliamo mostrare che  $C = \{\varphi^k(z_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  è relativamente compatto in  $M$ , dunque anche in  $X$  dato che  $M$  è chiusa. Scegliamo  $\varepsilon_0 > 0$  tale che  $B_M(z_0, \varepsilon_0)$  è relativamente compatta in  $M$ ; notiamo che  $\varphi \in \text{Aut}(M)$  implica che  $B_M(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0) = \varphi^k(B_M(z_0, \varepsilon_0))$  è relativamente compatta in  $M$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Dal Lemma 1.2.23 abbiamo che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \subseteq B_M(B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8), \varepsilon_0/4);$$

per compattezza esistono quindi  $w_1, \dots, w_r \in B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8)$  tali che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^r B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C,$$

e possiamo assumere che  $B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C \neq \emptyset$  per  $j = 1, \dots, r$ . Per ogni  $j = 1, \dots, r$  scegliamo  $k_j \in \mathbb{N}$  tale che  $\varphi^{k_j}(z_0) \in B_M(w_j, \varepsilon_0/4)$ ; allora

$$B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^r \left( B_M(\varphi^{k_j}(z_0), \varepsilon_0/2) \cap C \right). \quad (13)$$

Dato che  $\text{id}_M \in \Gamma(\varphi)$ , l'insieme  $I = \{k \in \mathbb{N} \mid k_M(\varphi^k(z_0), z_0) < \varepsilon_0/2\}$  è infinito; dunque possiamo trovare un  $k_0 \in I$  tale che  $k_0 \geq \max\{1, k_1, \dots, k_r\}$ .

Poniamo  $K = \bigcup_{k=0}^{k_0} \overline{B_M(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0)}$ ; per costruzione,  $K$  è chiuso e compatto, dunque ci basta mostrare che  $C \subseteq K$ . Prendiamo  $h \in I$ ; dato che l'insieme  $I$  è infinito, è sufficiente mostrare che  $\varphi^k(z_0) \in K$  per ogni  $0 \leq k \leq h$ .

Supponiamo, per assurdo, che esista un minimo  $h_0 \in I$  tale che l'insieme  $\{\varphi^k(z_0) \mid 0 \leq k \leq h_0\}$  non sia contenuto in  $K$ . Ovviamente  $h_0 > k_0$ . Poiché  $h_0, k_0 \in I$ , abbiamo anche che  $k_M(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)) < \varepsilon_0$ . Dunque

$$k_M(\varphi^{k_0-j}(z_0), \varphi^{h_0-j}(z_0)) = k_M(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)) < \varepsilon_0$$

per ogni  $0 \leq j \leq k_0$ . In particolare,

$$\varphi^j(z_0) \in K \quad (14)$$

per ogni  $j = h_0 - k_0, \dots, h_0$  e  $\varphi^{h_0 - k_0}(z_0) \in B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C$ . Per la (13) possiamo trovare  $1 \leq l \leq r$  tale che  $k_M(\varphi^{k_l}(z_0), \varphi^{h_0 - k_0}(z_0)) < \varepsilon_0/2$ ; quindi

$$k_M(\varphi^{k_l - j}(z_0), \varphi^{h_0 - k_0 - j}(z_0)) < \varepsilon_0/2 \quad (15)$$

per ogni  $0 \leq j \leq \min\{k_l, h_0 - k_0\}$ . Adesso, se  $k_l \geq h_0 - k_0$  allora, per la (14), la (15) e la definizione di  $K$ , abbiamo  $\varphi^j(z_0) \in K$  per ogni  $0 \leq j \leq h_0$ , in contraddizione con la scelta di  $h_0$ . Perciò dev'essere  $k_l < h_0 - k_0$ ; poniamo  $h_1 = h_0 - k_0 - k_l$ . Per la (15) si ha  $h_1 \in I$ ; dunque, essendo  $h_1 < h_0$ , dev'essere  $\varphi^j(z_0) \in K$  per ogni  $0 \leq j \leq h_1$ . Ma la (14), la (15) e la definizione di  $K$  implicano che  $\varphi^j(z_0) \in K$  per ogni  $h_1 \leq j \leq h_0$ , dunque anche in questo caso troviamo una contraddizione.  $\square$

Il seguente esempio mostra come l'ipotesi che  $X$  sia taut è necessaria per ottenere la dicotomia, anche in un caso piuttosto regolare. In realtà, dalla Proposizione 1.2.13 sappiamo che l'essere Kobayashi-iperbolica implica una proprietà di compattezza per le funzioni olomorfe da  $X$  in sé. Per definizione, l'essere taut impone che le funzioni limite in  $\text{Hol}(X, X)$  siano ancora in  $\text{Hol}(X, X)$  oppure siano la costante  $\infty$ ; ciò ci dà appunto la dicotomia (orbite relativamente compatte oppure iterate comapttamente divergenti) che esclude i casi misti nel Teorema 1.2.34.

**Esempio 1.2.35.** Consideriamo  $\Omega = \mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , la palla unitaria in  $\mathbb{C}^2$  privata dell'origine. Essendo un dominio limitato è Kobayashi-iperbolico, ma non è taut in quanto non è pseudoconvesso (per il Teorema 1.2.4, non è un dominio di olomorfia), e i domini taut diversi da  $\mathbb{C}^n$  sono sempre pseudoconvessi (si veda [Wu, Theorem F]).

Prendiamo come  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$  la funzione  $f(z, w) = (z/2, e^{i\theta}w)$ . L'orbita di un qualunque punto del tipo  $(0, w)$  con  $w \neq 0$  è relativamente compatta, mentre l'orbita di un qualunque punto del tipo  $(z, 0)$  con  $z \neq 0$  tende al punto del bordo  $(0, 0)$ . Dunque orbite relativamente compatte coesistono con orbite che tendono al bordo, quindi  $\{f^h\}_{h \in \mathbb{N}}$  non è né compattamente divergente né ha tutte le orbite relativamente compatte.

In particolare, le funzioni limite di  $f$  non sono né costanti né in  $\text{Hol}(\Omega, \Omega)$ , e questo è un controesempio, senza l'ipotesi taut, per il teorema di tipo “Wolff-Denjoy” che vedremo nella sezione 2.

Per finire, vediamo un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo  $C^2$ ); in particolare, faremo riferimento a una dimostrazione che sfrutta fatti geometrici quali la Gromov-iperbolicità.

**Definizione 1.2.36.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y, w \in X$  il *prodotto di Gromov* tra  $x$  e  $y$  con punto base  $w$  è

$$(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)).$$



Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se  $(X, d)$  è  $\delta$ -iperbolico per qualche  $\delta \geq 0$ , diremo che è *Gromov-iperbolico*.

**Definizione 1.2.37.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico Gromov-iperbolico. Fissato  $w \in X$ , il *bordo iperbolico*  $\partial^G X$  è dato dalle classi di equivalenza delle successioni  $(x_i)$  che convergono a infinito, cioè tali che  $\lim_{i,j \rightarrow +\infty} (x_i, x_j)_w = +\infty$ ; due tali successioni  $(x_i), (y_i)$  sono equivalenti se  $\lim_{i \rightarrow +\infty} (x_i, y_i)_w = +\infty$ . Questa costruzione è indipendente dalla scelta di  $w$ .

Inoltre, è possibile estendere il prodotto di Gromov a tutto  $X \cup \partial^G X$  in modo che valga ancora la disuguaglianza per la Gromov-iperbolicità, eventualmente cambiando  $\delta$ . Il bordo iperbolico possiede anche una *classe canonica di distanze* correlate al prodotto di Gromov, che inducono tutte la stessa topologia.

**Osservazione 1.2.38.** È possibile mettere una topologia su  $X \cup \partial^G X$  che lo rende uno spazio compatto, e tale che ristretta a  $\partial^G X$  coincida con la topologia indotta dalla classe canonica di distanze. Si veda [BH, Part III, Chapter H, Paragraph 3] per i dettagli.

Il Teorema, che già era noto ancora prima che venisse mostrata la Gromov-iperbolicità, è il seguente.

**Teorema 1.2.39.** (Abate, [A2, Theorem 0.5]) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ . Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- le orbite dei punti di  $\Omega$  tramite  $f$  sono relativamente compatte in  $\Omega$ ; oppure,
- esiste un unico punto di  $\partial\Omega$  tale che le iterate di  $f$  convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.

Per dimostrarlo usando la Gromov-iperbolicità, è prima necessario mostrare che  $(\Omega, k_\Omega)$  è Gromov-iperbolico. Citiamo l'articolo di Balogh e Bonk in cui si trova la dimostrazione.

**Teorema 1.2.40.** (Balogh, Bonk, [BB, Theorem 1.4]) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  con  $n \geq 2$  un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso; allora  $(\Omega, k_\Omega)$  è Gromov-iperbolico. Inoltre, il bordo iperbolico  $\partial^G \Omega$  può essere identificato con il bordo euclideo  $\partial\Omega$ , cioè sono identificati come spazi topologici.

Serve anche un Teorema dovuto a Karlsson.

**Teorema 1.2.41.** (Karlsson, [Ka, Corollary 3.7]) Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico proprio, cioè in cui ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto, tale che

- (i) è un aperto denso di uno spazio topologico  $\overline{X}$  compatto e di Hausdorff la cui topologia di sottospazio coincide con la topologia di spazio metrico. Inoltre, dati  $x \in X$  e  $x_n$  una successione in  $X$  che converge a un punto di  $\overline{X} \setminus X$ , si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, x_n) = +\infty$ ;

Per definirlo non c'è molto altro da dire, l'Osservazione dopo serviva ad aggiungere i fatti interessanti

In [BH] usa l'ipotesi proprio e geodetico per dire che la topologia è la stessa; non vorrei fosse una cosa diversa da quella a cui mi sto riferendo

(ii) date  $x_n$  e  $y_n$  due successioni convergenti a due punti distinti di  $\overline{X} \setminus X$  e  $z \in X$ , si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, z), d(y_n, z)\} = +\infty$ .

Sia  $\phi : X \rightarrow X$  una semicontrazione. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- le orbite dei punti di  $X$  tramite  $\phi$  sono limitate;
- esiste un unico punto di  $\overline{X} \setminus X$  a cui convergono tutte le orbite di  $\phi$ .

L'ipotesi (ii) del Teorema 1.2.41 è sempre verificata dagli spazi Gromov-iperbolici, mentre segue dal Teorema 1.2.40 che la (i) è vera per i domini limitati e strettamente pseudoconvessi; per [G, Paragraph 3.3], sono anche propri. Usando anche il teorema di Montel, si ottiene così il Teorema 1.2.39.

Tuttavia, come già anticipato nell'introduzione, quello che noi andremo a vedere è un risultato che vale anche per domini con bordo non necessariamente regolare. L'ipotesi di tipo geometrico che andremo ad utilizzare è il concetto di visibilità, di cui discuteremo anche il rapporto con la Gromov-iperbolicità.

## 2 Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per varietà taut con visibilità

### 2.1 Il concetto di visibilità

Nella sezione 1 abbiamo visto come l’ipotesi di varietà taut ci permette di dire, se le orbite di una certa funzione non sono relativamente compatte, che la successione delle iterate è compattamente divergente.

Per ottenere un teorema di tipo “Wolff-Denjoy”, nel caso in cui le iterate siano compattamente divergenti dobbiamo dire due cose: che le iterate convergono uniformemente sui compatti a una funzione a valori nel bordo euclideo, e che in realtà tale funzione è una costante.

La convergenza al bordo uniforme sui compatti è data dalla Proposizione 1.2.16, supponendo che la varietà sia una sottovarietà tautly embedded di una varietà Kobayashi-iperbolica. Per dire che la funzione limite è costante, invece, ci serviranno delle ipotesi aggiuntive di tipo geometrico: la condizione di visibilità per le simil-geodetiche.

Nel seguito, ricordiamo che data una varietà complessa  $X$  abbiamo fissato una metrica hermitiana  $\|\cdot\|_X$ , che nel caso in cui  $X$  sia connessa induce una distanza  $d_X$ . Se abbiamo delle sottovarietà, fissiamo la metrica sulla varietà ambiente e prendiamo la restrizione sulle sottovarietà, e se la varietà ambiente è  $\mathbb{C}^d$  prendiamo la metrica euclidea. Ricordiamo inoltre che, se  $X \subseteq Y$  è un sottospazio topologico, abbiamo posto  $\partial_Y X = \overline{X} \setminus X$ .

**Definizione 2.1.1.** Sia  $X$  una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa \geq 0$ . Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo; una curva  $\sigma : I \rightarrow X$  è detta una  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica se

1. per ogni  $s, t \in I$  si ha

$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - \kappa \leq k_X(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \lambda|t - s| + \kappa; \quad (16)$$

2.  $\sigma$  è assolutamente continua rispetto a  $d_X$  (quindi  $\sigma'(t)$  esiste per quasi ogni  $t \in I$ ) e per quasi ogni  $t \in I$  si ha

$$K_X(\sigma(t); \sigma'(t)) \leq \lambda. \quad (17)$$

**Definizione 2.1.2.** Sia  $X$  una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa  $Y$ , e fissiamo  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa \geq 0$ . Diciamo che  $X$  è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile se

1. ogni due punti distinti di  $X$  possono essere collegati da una  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti  $p, q \in \partial_Y X$  con  $p \neq q$ , esistono in  $\overline{X}$  due intorni  $V$  e  $W$ , di  $p$  e  $q$  rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto  $K$  di  $X$  tali che ogni  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica in  $X$  che collega un punto di  $V$  a un punto di  $W$  interseca  $K$ .

**Osservazione 2.1.3.** Nel caso di un dominio limitato con bordo regolare, l'ipotesi di essere strettamente pseudoconvesso permetteva di concludere la condizione geometrica di Gromov-iperbolicità. Inoltre, in tal caso il dominio è proprio e completo (si veda [G, Paragraph 3.3]); dunque, ricordando l'Osservazione 1.1.18, per il teorema di Hopf-Rinow ([BH, Part I, Proposition 3.7]) è uno spazio geodetico, cioè ogni coppia di punti è collegata da una geodetica. Si può dimostrare che gli spazi Gromov-iperbolici, propri e geodetici sono visibili sia per le geodetiche che per le simil-geodetiche: per le prime si può ragionare come in [BNT, Proposition 2.5], usando il fatto che per ogni coppia di punti distinti di  $\partial^G X$  esistono due loro intorni disgiunti in  $X \cup \partial^G X$  (si veda [BH, Part III, Chapter H, Lemma 3.6]); per le seconde, segue da [BH, Part III, Chapter H, Theorem 1.7].

Tuttavia, nella sezione 3 vedremo esempi di domini che sono visibili per le simil-geodetiche ma che non sono Gromov-iperbolici. Segue dunque che i risultati che andremo a dimostrare sono, in un certo senso, più generali. In particolare, il Teorema 1.2.39 sarà un corollario del teorema che dimostreremo.

Le simil-geodetiche sono delle curve che, a meno di costanti moltiplicative e additive, si comportano come le geodetiche, cioè come le curve che minimizzano la lunghezza. Quello che chiediamo, euristicamente, nella Definizione 2.1.2 è che, se vogliamo andare da un punto a un altro del bordo con tali curve, allora non possiamo stare arbitrariamente vicini al bordo, ma siamo costretti a “piegarci” verso l'interno; in pratica, stiamo chiedendo che ci sia una sorta di curvatura negativa.

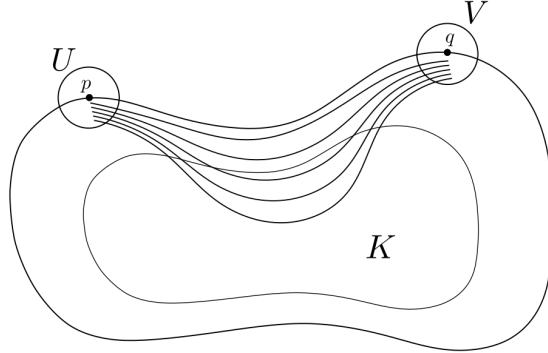


Figura 1: il caso, da noi escluso, in cui le simil-geodetiche da  $U$  a  $V$  fuggono dai compatti di  $X$

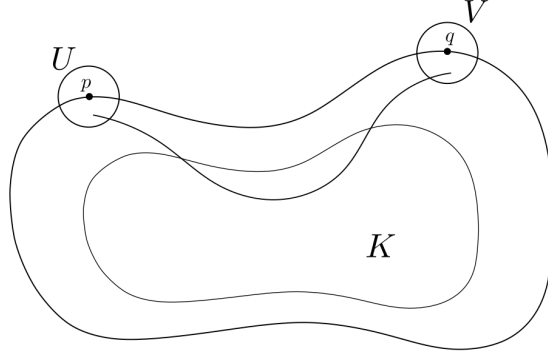


Figura 2: sotto ipotesi di visibilità, le simil-geodetiche da  $U$  a  $V$  devono curvare verso l'interno per intersecare un compatto  $K$

**Esempio 2.1.4.** Il dominio  $\Omega$  definito nell'Esempio 1.2.35 è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile per ogni  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa \geq 0$ . Per vederlo, fissiamo  $\lambda$  e  $\kappa$  e consideriamo due casi:

- (i) uno dei due punti è l'origine. Allora basta prendere come compatto un qualsiasi insieme della forma  $\{r \leq |z| \leq R\}$  con  $0 < r < R < 1$  e i due intorno aperti sufficientemente piccoli;
- (ii) i due punti sono entrambi sulla sfera unitaria. Per [NTT, Proposition 6] è facile vedere che, se la palla unitaria è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile, allora  $\Omega$  soddisfa la condizione voluta anche in questo caso. Ma la palla unitaria è limitata, ed è facile vedere che è strettamente pseudoconvessa; quindi, per l'Osservazione 2.1.3, è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile, come voluto.

Perciò, l'ipotesi che la varietà sia taut è necessaria per ottenere un teorema di tipo "Wolff-Denjoy", anche con la condizione di visibilità.

## 2.2 Risultati tecnici preparatori

Prima di andare a vedere il teorema di tipo "Wolff-Denjoy", dobbiamo mostrare diversi risultati preliminari. Visto che andremo a dimostrare la versione del teorema che si trova in [CMS], tali risultati sono per la maggior parte dimostrati, e il resto citati, nel suddetto articolo.

Cominciamo con delle stime dal basso e dall'alto per la metrica di Kobayashi, che permettono anche di ottenere la lipschitzianità delle simil-geodetiche.

**Lemma 2.2.1.** *Sia  $X$  una varietà complessa. Se un sottoinsieme compatto  $K \subseteq X$  è contenuto nel polidisco di una carta di  $X$ , allora esiste una costante  $C = C(K) > 0$  tale che  $K_X(z; Z) \leq C\|Z\|_X$  per ogni  $z \in K$  e  $Z \in T_z X$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $n = \dim X$  e  $D = \mathbb{D}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}$  il polidisco che contiene  $K$ . Applicando la Proposizione 1.1.11 all'inclusione e passando in coordinate,

per ogni  $z \in K$  e  $Z \in T_z X$  si ha che

$$K_X(z; Z) \leq K_D(z; Z) \leq \max_{j=1, \dots, n} \frac{r_j |Z_j|}{r_j^2 - |z_j|^2},$$

dove  $|\cdot|$  è il modulo, cioè la norma euclidea delle coordinate della carta. Per ottenere la seconda disuguaglianza, ragioniamo al seguente modo: a meno di riscaldare tutto per una costante, possiamo supporre che il membro destro sia uguale a 1 (se fosse 0, avremmo  $Z = 0$  e la tesi sarebbe immediata). Consideriamo adesso la funzione  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, D)$  che manda  $\zeta \in \mathbb{D}$  nell'elemento di  $D$  che ha come  $j$ -esima coordinata  $\frac{r_j \alpha_j \zeta + z_j}{1 + \bar{z}_j \alpha_j \zeta / r_j}$ , dove  $\alpha_j = \frac{r_j Z_j}{r_j^2 - |z_j|^2}$ ; allora  $f(0) = z$  e si ha che  $Df(0) \cdot 1 = Z$  e la disuguaglianza discende dalla definizione di  $K_D$ . Poiché, per compattezza di  $K$ , la quantità  $r_j^2 - |z_j|^2$  è limitata dal basso da una costante positiva per  $j = 1, \dots, n$ , esiste una costante  $C_0 > 0$  tale che

$$K_X(z; Z) \leq C_0 \max_{j=1, \dots, n} \{|Z_j|\}.$$

Consideriamo la norma hermitiana come una funzione

$$\|\cdot\|_X : K \times \left\{v \in \mathbb{C}^n \mid \max_{j=1, \dots, n} \{|v_j|\} = 1\right\} \longrightarrow (0, +\infty),$$

dove il secondo fattore nel dominio della funzione è visto come sottoinsieme del tangente al variare dei punti nel primo fattore. Per compattezza tale funzione ammette un minimo  $c > 0$ ; a meno di riscaldare abbiamo che

$$\|Z\|_X \geq c \max_{j=1, \dots, n} \{|Z_j|\}$$

per ogni  $z \in K$  e  $Z \in T_z X$ . Basta allora prendere  $C = C_0/c$ .  $\square$

**Proposizione 2.2.2.** *Sia  $X$  una varietà complessa. Allora:*

- (1) *se  $X$  è connessa, è Kobayashi-iperbolica se e solo se per ogni compatto  $K \subseteq X$  esiste una costante  $c = c(K) > 0$  tale che  $c\|Z\|_X \leq K_X(z; Z)$  per ogni  $z \in X$  e  $Z \in T_z X$ ;*
- (2) *per ogni compatto  $K \subseteq X$  esiste una costante  $C = C(K) > 0$  tale che  $K_X(z; Z) \leq C\|Z\|_X$  per ogni  $z \in X$  e  $Z \in T_z X$ ;*
- (3) *se  $X$  è una sottovarietà limitata di  $\mathbb{C}^d$  esiste una costante  $c > 0$  tale che  $c\|Z\| \leq K_X(z; Z)$  per ogni  $z \in X$  e  $Z \in T_z X$ .*

*Dimostrazione.* (1) Mostriamo che se vale quella condizione allora  $X$  è Kobayashi-iperbolica. Prendiamo due punti distinti  $z_0, w_0 \in X$ , per cui esiste un intorno compatto  $K$  di  $z_0$  con  $w_0 \notin K$ ; in particolare, ogni curva da  $z_0$  a  $w_0$  deve uscire da  $K$ . Quindi per il Teorema 1.2.10 si ha

$$k_X(z_0, w_0) \geq c \cdot d_X(z_0, \partial_X K) > 0,$$

da cui  $k_X$  è una distanza e  $X$  è Kobayashi-iperbolica.

Viceversa, supponiamo che  $X$  sia Kobayashi-iperbolica. Prendiamo un punto  $z_0 \in X$  e fissiamo un intorno  $U$  di  $X$  contenuto in una carta e che sia biolomorfo a  $\mathbb{B}^n$ , dove  $n = \dim X$ . Consideriamo l'aperto  $V \subseteq U$  corrispondente a  $\mathbb{B}_{1/2}^n$  tramite il biolomorfismo, che è ancora un intorno di  $z_0$ . Scegliamo inoltre  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_X(z_0, 2\varepsilon) \subset\subset V$  (ricordiamo che con  $B_X$  si intendono le palle rispetto a  $k_X$ ). In particolare, per la Definizione 1.1.2, il punto (i) della Proposizione 1.2.6 e la Proposizione 1.1.15, per ogni  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  tale che  $\varphi(0) \in B_X(z_0, \varepsilon)$  si ha  $\varphi(\mathbb{D}_{\tanh \varepsilon}) \subseteq B_X(z_0, 2\varepsilon)$ .

Dati  $z \in B_X(z_0, \varepsilon)$  e  $Z \in T_z X$ , siano  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  e  $v \in \mathbb{C}$  tali che  $\varphi(0) = z$  e  $d_0 \varphi(v) = Z$ . Allora, ponendo  $\psi(\zeta) = \varphi((\tanh \varepsilon)\zeta)$ , abbiamo che  $\psi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, V)$ ,  $\psi(0) = z$  e  $d_0 \psi(v) = (\tanh \varepsilon)Z$ . Dalla definizione della pseudometrica di Kobayashi segue che

$$(\tanh \varepsilon)K_V(z; Z) \leq k_X(z; Z)$$

per ogni  $z \in B_X(z_0, \varepsilon)$  e  $Z \in T_z X$ . Dal punto (3), che dimostreremo indipendentemente tra poco, segue che la condizione voluta è vera in  $\mathbb{B}_{1/2}^n$ , e dunque in  $V$ , senza che la costante dipenda da un compatto, ma rispetto alla metrica euclidea. Tuttavia, considerano il compatto  $\overline{\mathbb{B}_{1/2}^n}$  (motivo per cui abbiamo dovuto prendere la palla più piccola) e chiamando  $E_j$  i vettori delle base canonica di  $T_w X$  identificato, al variare di  $w \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ , con  $\mathbb{C}^n$ , si ha

$$\begin{aligned} \|Z\|_X &\leq \sum_{j=1}^n |a_j| \cdot \|E_j\|_X \leq \max_{\substack{w \in \mathbb{B}_{1/2}^n, \\ j=1, \dots, n}} \|E_j\|_X \sum_{j=1}^n |a_j| \\ &\leq C_1 \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_j|^2} = C_1 \|Z\| \end{aligned}$$

per ogni  $w \in \overline{\mathbb{B}_{1/2}^n}$  e  $Z \in T_w X$  della forma  $Z = \sum_{j=1}^n a_j E_j$ , e per una qualche

costante  $C_1 > 0$ , per cui la condizione vale anche con la metrica  $\|\cdot\|_X$ . Dato allora un compatto  $K$ , basta ricoprirlo con un numero finito di interni della forma  $B_X(z_0, \varepsilon)$  e prendere la costante più piccola al variare di tali interni.

(2) Per ogni  $z \in K$ , scegliamo un polidisco  $U_z$  centrato in  $z$  e contenuto in una carta di  $X$ ; sia  $U'_z \subseteq U_z$  un altro polidisco, nella stessa carta, centrato in  $z$  e relativamente compatto in  $U_z$  per ogni  $z \in K$ . Dato che  $K$  è compatto, esistono  $z_1, \dots, z_l$  tali che  $K \subseteq \bigcup_{j=1}^l U'_{z_j}$ . Allora, poiché  $\overline{U'_{z_j}}$  è un sottoinsieme compatto di  $U_{z_j}$  per  $j = 1, \dots, l$ , per il Lemma 2.2.1 abbiamo

$$K_X(z, Z) \leq C_j \|Z\|_X$$

per ogni  $z \in U'_{z_j}$  e  $Z \in T_z X$ , dove  $C_j > 0$  è una costante che dipende dal compatto  $\overline{U'_{z_j}}$ . Basta allora porre  $C(K) = \max_{j=1, \dots, l} \{C_j\}$ .

(3) Supponiamo per assurdo che esistano  $z_j \in X$  e  $Z_j \in T_{z_j}X$ , con  $Z_j \neq 0$ , tali che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} K_X(z_j; Z_j)/\|Z_j\| \rightarrow 0$ . Senza perdita di generalità possiamo supporre  $\|Z_j\| = 1$  per ogni  $j$ . Per definizione di  $K_X$ , esistono delle funzioni  $f_j \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  e dei  $v_j \in \mathbb{C}$  tali che  $f_j(0) = z_j$  e

$$|v_j| \leq K_X(z_j; Z_j) + 1/j \quad \text{e} \quad d_0 f_j(v_j) = Z_j.$$

Segue che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|d_0 f_j(1)\| \geq \lim_{j \rightarrow +\infty} 1/|v_j| = +\infty$ . A meno di sottosuccessioni e di riordinare le coordinate, possiamo supporre che siano le prime componenti dei vettori  $d_0 f_j(1)$  a tendere a  $+\infty$ . Chiamiamo  $g_j$  la prima componente di  $f_j$ , cosicché  $g'_j$  è la prima componente di  $df_j(1)$ . Le  $g_j$  sono le composizioni delle  $f_j$  con un embedding e una proiezione, dunque sono olomorfe; inoltre, poiché  $X$  è limitata, sono equilimitate. Esiste quindi un  $r > 0$  tale che  $g_j \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}_r)$  per ogni  $j$ . Adesso, noi sappiamo che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} |g'_j(0)| = +\infty$ ;

basta allora applicare il lemma di Schwarz a  $\frac{g_j - g_j(0)}{2r}$  con  $j$  sufficientemente grande per ottenere una contraddizione.  $\square$

**Osservazione 2.2.3.** Per il punto (3) della Proposizione precedente non è necessario che la metrica sia quella euclidea, basta una metrica hermitiana qualsiasi. Per vederlo, basta usare il punto (1) e la Proposizione 1.1.11.

**Corollario 2.2.4.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà Kobayashi-iperbolica  $Y$ . Allora esiste  $c > 0$  tale che  $c \cdot d_Y(z, w) \leq k_X(z, w)$  per ogni  $z, w \in X$ .*

*Dimostrazione.* Per il Teorema 1.2.10 ci basta mostrare che  $c \cdot d_Y(z, w) \leq l_X(\gamma)$  per ogni curva  $C^1$  a tratti  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(a) = z$  e  $\gamma(b) = w$ . Prendendo  $c = c(\bar{X}) > 0$  dato dal punto (1) della Proposizione 2.2.2 e usando la Proposizione 1.1.11, abbiamo che

$$\begin{aligned} l_X(\gamma) &= \int_a^b K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) dt \geq \int_a^b K_Y(\gamma(t); \gamma'(t)) dt \\ &\geq \int_a^b c \|\gamma'(t)\|_Y dt \geq c \cdot d_Y(z, w), \end{aligned}$$

come voluto.  $\square$

**Proposizione 2.2.5.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà Kobayashi-iperbolica  $Y$ . Allora si ha che per ogni  $\lambda \geq 1$  esiste una costante  $C = C(\lambda) > 0$  tale che ogni  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica è  $C$ -lipschitziana rispetto a  $d_Y$ .*



*Dimostrazione.* Ogni  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica  $\sigma : I \longrightarrow X$  è, per definizione, assolutamente continua rispetto a  $d_X$ . Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, per ogni  $s, t \in I$  abbiamo che

$$\sigma(t) = \sigma(s) + \int_s^t \sigma'(r) dr.$$

Per il punto (1) della Proposizione 2.2.2, esiste una costante  $c = c(\overline{X}) > 0$  tale che  $c\|Z\|_Y \leq K_Y(z; Z)$  per ogni  $z \in X$  e  $Z \in T_z X$ , e per definizione di  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica  $K_X(\sigma(t); \sigma'(t)) \leq \lambda$  per quasi ogni  $t \in I$ . Dunque, usando anche la Proposizione 1.1.11, si ha che  $\|\sigma'(t)\|_Y \leq \lambda/c$  per quasi ogni  $t \in I$ , da cui

$$d_Y(\sigma(t), \sigma(s)) \leq \int_s^t \|\sigma'(r)\|_Y dr \leq \frac{\lambda}{c}|t - s|,$$

cioè  $\sigma$  è  $\lambda/c$ -lipschitziana rispetto a  $d_Y$ .  $\square$

Il seguente Lemma è un fatto tecnico che ci servirà tra poco.

**Lemma 2.2.6.** *Siano  $X$  una varietà complessa e connessa e  $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$  una curva assolutamente continua rispetto a  $d_X$ . Se*

$$l_X(\sigma) \leq k_X(\sigma(a), \sigma(b)) + \kappa,$$

*allora, per ogni  $a \leq s \leq t \leq b$ , si ha*

$$l_X(\sigma|_{[s, t]}) \leq k_X(\sigma(s), \sigma(t)) + \kappa.$$

*Dimostrazione.* Siano  $s$  e  $t$  come sopra. Allora

$$l_X(\sigma|_{[s, t]}) = l_X(\sigma) - l_X(\sigma|_{[a, s]}) - l_X(\sigma|_{[t, b]}).$$

Usando la nostra ipotesi e il punto (ii) del Teorema 1.2.10, troviamo

$$l_X(\sigma|_{[s, t]}) \leq k_X(\sigma(a), \sigma(b)) + \kappa - k_X(\sigma(a), \sigma(s)) - k_X(\sigma(t), \sigma(b));$$

applicando la disuguaglianza triangolare, si ottiene la tesi.  $\square$

Adesso vogliamo mostrare che le varietà Kobayashi-iperboliche sono connesse per archi simil-geodetici.

**Teorema 2.2.7.** *Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica. Per ogni  $z, w \in X$  e ogni  $\kappa > 0$  esiste una  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica  $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$  tale che  $\sigma(a) = z$  e  $\sigma(b) = w$ .*

*Dimostrazione.* Per il punto (i) del Teorema 1.2.10, a meno di riparametrizzare esiste una curva  $C^1$  a tratti  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$  e

$$l_X(\gamma) < k_X(z, w) + \kappa;$$

inoltre, a meno di perturbare di poco la curva, possiamo assumere che sia  $C^1$  e che  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Consideriamo la funzione  $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  data da

$$f(t) = \int_0^t K_X(\gamma(r); \gamma'(r)) \, dr.$$

Poiché  $\gamma([0, 1])$  è compatto in  $X$ , per i punti (1) e (2) della Proposizione 2.2.2 esiste  $C > 0$  tale che

$$\frac{1}{C} \|\gamma'(t)\|_X \leq K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) \leq C \|\gamma'(t)\|_X \text{ per ogni } t \in [0, 1].$$

Dato che  $\|\gamma'(t)\|_X > 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$  e  $\gamma'$  è continua, esistono  $A, B > 0$  tali che  $A \leq \|\gamma'(t)\|_X \leq B$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Dunque  $f$  è una funzione bilipschitziana e, di conseguenza, strettamente crescente. Sia ora  $g : [0, l_X(\gamma)] \rightarrow [0, 1]$  l'inversa di  $f$ . Vogliamo dire che la curva  $\sigma = \gamma \circ g : [0, l_X(\gamma)] \rightarrow X$  è una  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica; sostanzialmente,  $\sigma$  è la riparametrizzazione per lunghezza d'arco di  $\gamma$ .

Poiché  $g$  è bilipschitziana (perché lo è la sua inversa) e  $\gamma \in C^1$ , abbiamo che  $\sigma$  è lipschitziana, per cui anche assolutamente continua, rispetto a  $d_X$ ; allora, per i  $t$  per i quali  $g'(t)$  esiste, si ha  $\sigma'(t) = \gamma'(g(t))g'(t)$ . Inoltre, per tali  $t$  anche  $f'(g(t))$  esiste ed è non-nullo, e  $g'(t) = 1/f'(g(t)) > 0$ . Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha che  $f'$  esiste per quasi ogni  $s \in [0, 1]$  e  $f'(s) = K_X(\gamma(s); \gamma'(s))$ . Siccome  $g$  è bilipschitziana, la preimmagine degli  $s \in [0, 1]$  per cui  $f'(s)$  esiste è un sottoinsieme di  $[0, l_X(\gamma)]$  di misura piena. Visto che  $\gamma'(s) \neq 0$  per ogni  $s \in [0, 1]$ , otteniamo che

$$g'(t) = \frac{1}{K_X(\gamma(g(t)); \gamma'(g(t)))}$$

per quasi ogni  $t \in [0, l_X(\gamma)]$ . Per tali  $t$  si ha che

$$K_X(\sigma(t); \sigma'(t)) = K_X(\gamma(g(t)); \gamma'(g(t))g'(t)) = 1;$$

quindi  $l_X(\sigma) = l_X(\gamma) \leq k_X(z, w) + \kappa$ . Per il Lemma 2.2.6 si ha, per ogni  $0 \leq s \leq t \leq l_X(\gamma)$ , che

$$|t - s| = l_X(\sigma|_{[s, t]}) \leq k_X(\sigma(s), \sigma(t)) + \kappa.$$

Dato che  $\sigma$  è assolutamente continua, per il punto (ii) del Teorema 1.2.10 abbiamo anche che

$$k_X(\sigma(s), \sigma(t)) \leq l_X(\sigma|_{[s, t]}) = |s - t|$$

per ogni  $0 \leq s \leq t \leq l_X(\gamma)$ . Segue dunque che  $\sigma$  è una  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica.  $\square$

Adesso ci servirà un Lemma quasi ovvio.

**Lemma 2.2.8.** *Sia  $X$  una varietà complessa e connessa. Se  $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$  è una  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica per qualche  $\kappa > 0$ , allora per ogni  $t \in [a, b]$  si ha*

$$k_X(\sigma(a), \sigma(t)) + k_X(\sigma(t), \sigma(b)) \leq k_X(\sigma(a), \sigma(b)) + 3\kappa.$$

*Dimostrazione.* È un'immediata conseguenza della definizione di  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica.  $\square$

Il seguente Lemma, invece, ci servirà per la prossima dimostrazione. È un risultato sulla convergenza puntuale, mentre più avanti ne vedremo uno sulla convergenza uniforme sui compatti per varietà  $(1, \kappa_0)$ -visibili per qualche  $\kappa_0 > 0$ .

**Lemma 2.2.9.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa e relativamente compatta di una varietà complessa e connessa  $Y$ , e sia  $F \in \text{Hol}(X, X)$ . Dati una funzione strettamente crescente  $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  e  $z \in X$ , se l'insieme dei punti limite della successione  $\{F^{\mu(j)}(z)\}_{j \in \mathbb{N}}$  consiste in un solo punto  $\xi$  allora abbiamo che*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F^{\mu(j)}(z) \longrightarrow \xi.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che non valga la tesi. Allora esistono un  $\varepsilon > 0$  e una sottosuccessione  $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tali che  $d_Y(F^{\mu(j_n)}(z), \xi) \geq \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per relativa compattezza di  $X$ , a meno di prendere un'ulteriore sottosuccessione possiamo supporre che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^{\mu(j_n)}(z) \longrightarrow \xi'$ . Per ipotesi dev'essere  $\xi' = \xi$ , in contraddizione con il fatto che  $d_Y(F^{\mu(j_n)}(z), \xi) \geq \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Quello che andremo ora a dimostrare è uno dei fatti cruciali per ottenere il teorema di tipo “Wolff-Denjoy”. Esso afferma che, sotto condizioni di visibilità per le simil-geodetiche, le sottosuccessioni di iterate di una funzione olomorfa che “tendono a infinito” convergono tutte, puntualmente, a un unico punto del bordo.

**Proposizione 2.2.10.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà Kobayashi-iperbolica  $Y$ . Supponiamo che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile. Data una funzione  $F \in \text{Hol}(X, X)$ , esiste  $\xi \in \partial_Y X$  tale che per ogni funzione  $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  strettamente crescente per cui esiste  $y_0 \in X$  tale che*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu(j)}(y_0), y_0) = +\infty \quad (18)$$

*si ha*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F^{\mu(j)}(z) = \xi \quad (19)$$

*per ogni  $z \in X$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} k_X(F^n(x), x) < +\infty$  per ogni  $x \in X$  l'affermazione è vera a vuoto per ogni  $\xi \in \partial_Y X$ . Altrimenti, esiste  $x_0 \in X$  tale per cui possiamo prendere una funzione strettamente crescente  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che:

- si ha  $k_X(F^{\nu(j)}(x_0), x_0) \geq k_X(F^k(x_0), x_0)$  per ogni  $j \in \mathbb{N}$  e per ogni  $k \leq \nu(j)$ ;
- si ha  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)}(x_0), x_0) = +\infty$ ;
- la successione  $\{F^{\nu(j)}(x_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge a un certo  $\xi \in \partial_Y X$ .

Infatti, definendo induttivamente  $l_0 = 0$  e  $l_n$  come il minimo numero naturale  $h > l_{n-1}$  tale che  $k_X(F^h(x_0), x_0) \geq \max\{n, k_X(F^{l_{n-1}}(x_0), x_0)\}$ , abbiamo  $k_X(F^{l_n}(x_0), x_0) \geq k_X(F^k(x_0), x_0)$  per ogni  $n$  e per ogni  $k \leq l_n$ ; inoltre, abbiamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_X(F^{l_n}(x_0), x_0) = +\infty$ . Per relativa compattezza di  $X$ , esiste un'ulteriore sottosuccessione  $l_{n_j}$  tale che  $F^{l_{n_j}}(x_0)$  converge a un certo  $\xi \in \overline{X}$ , e in realtà  $\xi \in \partial_Y X$  visto che la distanza di Kobayashi da  $x_0$  tende a  $+\infty$ ; basta allora porre  $\nu(j) = l_{n_j}$ .

Vogliamo ora mostrare la seguente asserzione.

Siano  $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{m'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e  $z_0, z'_0 \in X$  tali che:

- (1) per ogni  $j \in \mathbb{N}$  si ha  $m_j \geq m'_j$ ;
- (2) per ogni  $j \in \mathbb{N}$  e  $k \leq m_j$  si ha  $k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) \geq k_X(F^k(z_0), z_0)$ ;
- (3) si ha  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) = \lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{m'_j}(z'_0), z_0) = +\infty$ ;
- (4) le successioni  $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergono, rispettivamente, a  $\zeta$  e  $\zeta'$  in  $\partial_Y X$ ;

allora  $\zeta = \zeta'$ .

Supponiamo per assurdo che  $\zeta \neq \zeta'$ . Per l'Osservazione 1.2.8 anche  $X$  è Kobayashi-iperbolica; quindi grazie al Teorema 2.2.7 possiamo scegliere, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , una  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica  $\sigma_j : [0, T_j] \rightarrow X$  tale che  $\sigma_j(0) = F^{m_j}(z_0)$  e  $\sigma_j(T_j) = F^{m'_j}(z'_0)$ . Adesso, dato che abbiamo assunto che  $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergano a due punti di  $\partial_Y X$  distinti e  $X$  ha la visibilità rispetto alle  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetiche, esistono una costante  $0 < R < +\infty$  e, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , un  $t_j \in [0, T_j]$  tali che  $k_X(z_0, \sigma_j(t_j)) < R$ . Per il Lemma 2.2.8 si ha dunque che

$$\begin{aligned}
k_X(F^{m_j}(z_0), F^{m'_j}(z'_0)) &\geq k_X(F^{m_j}(z_0), \sigma_j(t_j)) + k_X(\sigma_j(t_j), F^{m'_j}(z'_0)) - 3\kappa_0 \\
&\geq k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) - k_X(z_0, \sigma_j(t_j)) \\
&\quad + k_X(F^{m'_j}(z'_0), z_0) - k_X(z_0, \sigma_j(t_j)) - 3\kappa_0 \\
&\geq k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) + k_X(F^{m'_j}(z'_0), z_0) - 3\kappa_0 - 2R;
\end{aligned} \tag{20}$$

d'altra parte, abbiamo anche che

$$\begin{aligned}
k_X(F^{m_j}(z_0), F^{m'_j}(z'_0)) &\leq k_X(F^{m_j-m'_j}(z_0), z'_0) \\
&\leq k_X(F^{m_j-m'_j}(z_0), z_0) + k_X(z_0, z'_0) \\
&\leq k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) + k_X(z_0, z'_0),
\end{aligned} \tag{21}$$

dove per la prima e la terza disuguaglianza abbiamo usato, rispettivamente, le condizioni (1) e (2) sulle successioni  $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{m'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ; nella prima, abbiamo anche usato che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a  $k_X$ . Concatenando la (20) e la (21) e riarrangiando i termini, otteniamo

$$k_X(F^{m'_j}(z'_0), z_0) \leq k_X(z_0, z'_0) + 3\kappa_0 + 2R,$$

che è in contraddizione con la condizione (3).

Adesso che l'asserzione è stata dimostrata, possiamo concludere la dimostrazione. Usando la disuguaglianza triangolare e il fatto che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a  $k_X$ , troviamo che

$$k_X(F^{\mu(j)}(z), z') \geq k_X(F^{\mu(j)}(y_0), y_0) - k_X(y_0, z) - k_X(z', y_0);$$

segue che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu(j)}(z), z') = +\infty$  per ogni  $z, z' \in X$ .

Fissiamo ora uno  $z \in X$ , e prendiamo  $\xi'$  punto limite di  $\{F^{\mu(j)}(z)\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Allora deve esistere una funzione strettamente crescente  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} F^{(\mu \circ \tau)(j)}(z) = \xi'$ ; inoltre, poiché  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu(j)}(z), z) = +\infty$ , dev'essere  $\xi' \in \partial_Y X$ . Scegliamo una funzione strettamente crescente  $\tau' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che  $\nu \circ \tau' \geq \mu \circ \tau$  e applichiamo l'asserzione dimostrata sopra alle successioni  $m_j = (\nu \circ \tau')(j)$ ,  $m'_j = (\mu \circ \tau)(j)$  e ai punti  $z_0 = x_0$ ,  $z'_0 = z$ , per i quali si verificano facilmente le condizioni (1), (2), (3) e (4). Troviamo così  $\xi' = \xi$  e si conclude grazie al Lemma 2.2.9.  $\square$

Anche il seguente teorema ci aiuterà nella nostra dimostrazione. Esso afferma che, sotto condizioni di visibilità per le simil-geodetiche, le successioni di funzioni olomorfe che convergono uniformemente sui compatti di  $X$  devono necessariamente convergere a una costante.

**Teorema 2.2.11.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa e connessa di una varietà Kobayashi-iperbolica  $Y$ . Supponiamo che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile. Consideriamo una successione  $\{F_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Hol}(X, X)$  che converge uniformemente sui compatti di  $X$  a una  $\psi \in \text{Hol}(X, Y)$  con  $\psi(X) \subseteq \partial_Y X$ . Allora  $\psi$  è costante.*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che  $\psi$  non sia costante. Allora, dati  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , la restrizione di  $\psi$  a  $B_X(x, \varepsilon)$ , la palla aperta rispetto alla distanza di Kobayashi di centro  $x$  e raggio  $\varepsilon$ , non è costante. Infatti, tale palla è un aperto di  $X$ , e se  $\psi$  fosse costante su di essa lo sarebbe su tutta  $X$  per il

principio di identità delle funzioni olomorfe, poiché  $X$  è connessa. Questa, però, sarebbe una contraddizione alla nostra assunzione.

Fissiamo  $x_0 \in X$  e poniamo  $\varepsilon_0 = \kappa_0/3$ . Per quanto detto, deve esistere un  $x_1 \in B_X(x_0, \varepsilon_0)$  tale che  $\{F_\nu(x_0)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{F_\nu(x_1)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergono, rispettivamente, a  $\xi$  e  $\eta$ , con  $\xi, \eta \in \partial_Y X$  e  $\xi \neq \eta$ . Consideriamo adesso una  $(1, \kappa_0/3)$ -simil-geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(a) = x_0$  e  $\gamma(b) = x_1$ , che esiste per il Teorema 2.2.7; da (16) nella definizione di simil-geodetica si ha che

$$|a - b| - \kappa_0/3 \leq k_X(x_0, x_1) \Rightarrow |a - b| \leq k_X(x_0, x_1) + \kappa_0/3 \leq 2\kappa_0/3.$$

Per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ , definiamo  $\sigma_\nu : [a, b] \rightarrow X$  come  $\sigma_\nu = F_\nu \circ \gamma$ . Mostriamo che  $\sigma_\nu$  è una  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Per ogni  $s, t \in [a, b]$  si ha

$$\begin{aligned} k_X(\sigma_\nu(s), \sigma_\nu(t)) &= k_X(F_\nu(\gamma(s)), F_\nu(\gamma(t))) \\ &\leq k_X(\gamma(s), \gamma(t)) \leq |s - t| + \kappa_0/3 \leq |s - t| + \kappa_0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto alla distanza di Kobayashi e, dato che  $\gamma$  è una  $(1, \kappa_0/3)$ -simil-geodetica, la (16). Inoltre, si ha che  $|s - t| - \kappa_0 \leq |a - b| - \kappa_0 \leq -\kappa_0/3 < 0$  per ogni  $s, t \in [a, b]$ ; dunque

$$|s - t| - \kappa_0 \leq k_X(\sigma_\nu(s), \sigma_\nu(t)) \leq |s - t| + \kappa_0. \quad (22)$$

Infine, per ogni  $t$  si ha

$$\begin{aligned} K_X(\sigma_\nu(t); \sigma'_\nu(t)) &= K_X(F_\nu(\gamma(t)); d_{\gamma(t)} F_\nu(\gamma'(t))) \\ &\leq K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) \leq 1, \end{aligned} \quad (23)$$

dove abbiamo usato che la Proposizione 1.1.11 e, visto che  $\gamma$  è una  $(1, \kappa_0/3)$ -simil-geodetica, la (17). Si ha anche che la curva  $\sigma_\nu$  è assolutamente continua rispetto a  $d_X$  per ogni  $\nu$ , poiché composizione di  $\gamma$ , che è assolutamente continua per definizione di  $(1, \kappa_0/3)$ -simil-geodetica, e  $F_\nu$ , che è olomorfa e dunque lipschitziana (sempre rispetto a  $d_X$ ) sul compatto  $\gamma([a, b])$ . Grazie alla (22) e alla (23), possiamo concludere che  $\sigma_\nu$  è una  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica per ogni  $\nu$ .

Adesso, poiché  $\{F_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sui compatti di  $X$  a una funzione olomorfa  $\psi$  a valori in  $\partial_Y X$ , ne consegue che per ogni compatto  $K \subseteq X$  esiste un  $\nu(K) \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $\nu \geq \nu(K)$ , si ha  $\sigma_\nu([a, b]) \cap K = \emptyset$ . Ma così troviamo una contraddizione, perché  $X$  è  $(1, \kappa_0)$ -visibile.  $\square$

Concludiamo la questa sottosezione con l'analogo del Lemma 2.2.9 per la convergenza uniforme sui compatti.

**Lemma 2.2.12.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e tautly embedded di una varietà Kobayashi-iperbolica  $Y$ . Supponiamo che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile. Consideriamo una  $F \in \text{Hol}(X, X)$  tale che la successione delle iterate di  $F$  è compattamente divergente, e supponiamo che esistano un compatto  $K$  di  $X$ , una funzione strettamente crescente  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$*

e  $\xi \in \partial_Y X$  tali che la successione  $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge alla costante  $\xi$  uniformemente su  $K$ ; allora converge alla costante  $\xi$  uniformemente su tutti i compatti di  $X$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che non valga la tesi; allora esistono un compatto  $H \subseteq X$ , un  $\varepsilon > 0$ , una successione di numeri naturali  $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e una successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $z_n \in H$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $d_Y(F^{\mu(j_n)}(z_n), \xi) \geq \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per la Proposizione 1.2.16  $\text{Hol}(X, X)$  è relativamente compatto in  $\text{Hol}(X, Y)$ ; dalla dimostrazione della suddetta Proposizione segue anche che  $C^0(X, Y)$  è metrizzabile, per cui  $\text{Hol}(X, X)$  è relativamente compatto per successioni in  $\text{Hol}(X, Y)$ . Possiamo allora trovare una sottosuccessione  $\{j_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  tale che la successione  $\{F^{\mu(j_{n_m})}\}_{m \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sui compatti di  $X$  a una funzione olomorfa  $\tilde{F} : X \rightarrow Y$  con  $\tilde{F}(X) \subseteq \bar{X}$ . Poiché la successione delle iterate di  $F$  è compattamente divergente, dev'essere  $\tilde{F}(X) \subseteq \partial_Y X$ ; allora per il Teorema 2.2.11  $\tilde{F}$  è costante. Siccome su  $K$  la successione  $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge alla costante  $\xi$ , la funzione  $\tilde{F}$  dev'essere proprio tale costante; ma per costruzione la convergenza non può essere uniforme sul compatto  $H$ , assurdo.  $\square$

## 2.3 Il teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

Andiamo adesso ad enunciare e dimostrare una versione generale di un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per varietà Kobayashi-iperboliche. La dimostrazione riportata ricalca quella data in [CMS], che a sua volta riprende la strategia e le tecniche impiegate da [BZ1] e [BM]. Ognuno di questi articoli ha generalizzato il risultato ottenuto nel precedente.

**Teorema 2.3.1.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa e tautly embedded di una varietà Kobayashi-iperbolica  $Y$ . Supponiamo che  $X$  sia taut e che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile.*

*Sia  $F : X \rightarrow X$  una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di  $X$  tramite  $F$  sono relativamente compatte in  $X$ ; oppure,*
- *esiste un unico punto di  $\partial_Y X$  tale che la successione delle iterate di  $F$  converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è taut, per il Teorema 1.2.34 o l'orbita di  $z$  tramite  $F$  è relativamente compatta per ogni  $z \in X$ , oppure la successione delle iterate  $\{F^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è compattamente divergente. Supponiamo che le orbite di  $F$  non siano relativamente compatte in  $X$ ; allora la successione delle iterate di  $F$  è compattamente divergente.

Consideriamo una sottosuccessione di  $\{F^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  che converge uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa  $\tilde{F} : X \rightarrow Y$  con  $\tilde{F}(X) \subseteq \bar{X}$ . Poiché le iterate di  $F$  sono compattamente divergenti, si deve avere che  $\tilde{F}(X) \subseteq \partial_Y X$ .

Allora, per il Teorema 2.2.11, troviamo che  $\tilde{F}$  è costante. Identifichiamo quindi

$$\Gamma := \overline{\{F^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}} \setminus \{F^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$$

come un insieme di punti di  $\partial_Y X$ , dove la chiusura è intesa rispetto alla topologia compatta-aperta. Supponiamo, per assurdo, che  $\Gamma$  contenga almeno due punti.

Caso 1: esiste (e quindi per ogni)  $o \in X$  tale che

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} k_X(F^\nu(o), o) = +\infty.$$

Possiamo dunque scegliere, in modo simile a quanto fatto all'inizio della dimostrazione della Proposizione 2.2.10 e applicando la Proposizione 1.2.16, una sottosuccessione  $\{\nu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tale che:

- (1) per ogni  $j \in \mathbb{N}$  e  $k \leq \nu_j$  si ha  $k_X(F^k(o), o) \leq k_X(F^{\nu_j}(o), o)$ ;
- (2)  $\{F^{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\xi \in \partial_Y X$ .

Adesso, poiché abbiamo assunto che  $\Gamma$  contenga almeno due elementi, esiste una sottosuccessione  $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tale che  $\{F^{\mu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\eta \in \partial_Y X$  con  $\eta \neq \xi$ . Segue immediatamente dalla Proposizione 2.2.10 che non possiamo avere  $\limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu_j}(o), o) = +\infty$ . Perciò dev'essere

$\limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu_j}(o), o) < +\infty$ ; notiamo che se  $X$  fosse  $k_X$ -completa, allora per il

Lemma 1.2.25 avremmo subito un assurdo. Altrimenti, si ha

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu_h}(o), F^{\mu_j}(o)) \\ & \geq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow +\infty} (k_X(F^{\nu_h}(o), o) - k_X(F^{\mu_j}(o), o)) = +\infty. \end{aligned} \tag{24}$$

Consideriamo ora un  $l \in \mathbb{N}$ . Poiché la successione  $\{F^{\mu_j-l}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sul compatto  $\{F^l(o)\}$  a  $\eta$ , per il Lemma 2.2.12 converge, uniformemente su tutti i compatti di  $X$ , a  $\eta$ .

Poniamo

$$M_l := \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu_j-l}(o), o);$$

afferriamo che

$$\limsup_{l \rightarrow +\infty} M_l < +\infty.$$

Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esiste una sottosuccessione  $\{l_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tale che  $M_{l_m} > m$  per ogni  $m$ . Per definizione di  $M_l$  e per quanto appena trovato sulla successione  $\{F^{\mu_j-l}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , abbiamo quindi che esiste una sottosottosuccessione  $\{j_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tale che:

- (1)  $d_Y(F^{\mu_{j_m}-l_m}(o), \eta) < 1/m$ ;
- (2)  $k_X(F^{\mu_{j_m}-l_m}(o), o) > m$ .



Per la Proposizione 2.2.10 deve dunque essere  $\eta = \xi$ , contraddizione. Perciò segue che  $\limsup_{l \rightarrow +\infty} M_l < +\infty$ . Allora

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu_h}(o), F^{\mu_j}(o)) \\ \leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(o, F^{\mu_j - \nu_h}(o)) = \limsup_{h \rightarrow +\infty} M_{\nu_h} < +\infty, \end{aligned}$$

in contraddizione con la (24); questo conclude il Caso 1.

Caso 2: esiste (e quindi per ogni)  $o \in X$  tale che

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} k_X(F^\nu(o), o) < +\infty.$$

Ricordiamo che abbiamo assunto che esistano due punti distinti  $\xi, \eta \in \Gamma$ . Poiché  $X$  è  $(1, \kappa_0)$ -visibile, esistono  $V_\xi, V_\eta$  intorno in  $\bar{X}$  rispettivamente di  $\xi$  e di  $\eta$ , con  $\bar{V}_\xi \cap \bar{V}_\eta = \emptyset$ , e un compatto  $K$  di  $X$  tali che ogni  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica in  $X$  che collega un punto di  $V_\xi$  a un punto di  $V_\eta$  interseca  $K$ . Adesso definiamo, per  $\delta > 0$  arbitrario, la funzione  $G_\delta : K \times K \rightarrow [0, +\infty)$  data da

$$G_\delta(x_1, x_2) := \inf \{k_X(F^m(x_1), x_2) \mid m \in \mathbb{N}, d_Y(F^m(x_1), \xi) < \delta\}.$$

Notiamo che  $G_\delta$  è ben definita per ogni  $\delta > 0$  (basta considerare la sottosuccessione delle iterate di  $F$  che converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ ) e che  $G_{\delta_1}(x_1, x_2) \geq G_{\delta_2}(x_1, x_2)$  per ogni  $x_1, x_2 \in K$  e  $\delta_1 \leq \delta_2$ . Vogliamo dire che, in questo caso, si ha

$$\sup_{\delta > 0, x_1, x_2 \in K} G_\delta(x_1, x_2) < +\infty.$$

Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esistono una successione di reali positivi  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e due successioni  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $K$  tali che  $G_{\delta_n}(x'_n, x''_n) \geq n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Possiamo inoltre supporre che le successioni  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergano, rispettivamente, a  $\delta_0 \geq 0$  e  $x', x'' \in K$ . Sia  $\{\nu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una sottosuccessione di  $\mathbb{N}$  tale che  $\{F^{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\xi$ . Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $j(n) \in \mathbb{N}$  tale che si ha  $\sup_{x \in K} d_Y(F^{\nu_j}(x), \xi) < \delta_n$  per ogni  $j \geq j(n)$ . In particolare, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $d_Y(F^{\nu_{j(n)}}(x'_n), \xi) < \delta_n$ . Segue che

$$n \leq G_{\delta_n}(x'_n, x''_n) \leq k_X(F^{\nu_{j(n)}}(x'_n), x''_n);$$

da ciò discende facilmente che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu_{j(n)}}(x'), x') = +\infty$ , in contraddizione con l'ipotesi del Caso 2.

Abbiamo dunque che, per ogni  $x_1, x_2 \in K$ , è ben definita la funzione data da

$$G(x_1, x_2) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} G_\delta(x_1, x_2);$$

definiamo inoltre

$$\varepsilon := \liminf_{z \rightarrow \eta} \inf_{y \in K} k_X(z, y).$$

Per il Corollario 2.2.4 abbiamo che  $k_X(z, y) \geq c \cdot d_Y(z, y)$ , e quest'ultima quantità è sempre maggiore di una costante positiva per  $z$  sufficientemente vicino al bordo e di conseguenza lontano dal compatto  $K$ ; quindi  $\varepsilon > 0$ . Scegliamo ora due punti  $q_1, q_2 \in K$  tali che

$$G(q_1, q_2) < \inf_{x_1, x_2 \in K} G(x_1, x_2) + \varepsilon.$$

Inoltre, dalla definizione di  $G_\delta$  abbiamo che, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $d_Y(F^m(q_1), \xi) < 1/j$  e  $G_{1/j}(q_1, q_2) \leq k_X(F^m(q_1), q_2) \leq G_{1/j}(q_1, q_2) + 1/j$ . Possiamo dunque trovare una funzione strettamente crescente  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che per ogni  $j \in \mathbb{N}$  si ha

$$d_Y(F^{\nu(j)}(q_1), \xi) < 1/\nu(j)$$

e

$$G_{1/\nu(j)}(q_1, q_2) \leq k_X(F^{\nu(j)}(q_1), q_2) \leq G_{1/\nu(j)}(q_1, q_2) + 1/\nu(j);$$

poiché  $\{F^{\nu(j)}(q_1)\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$ , per il Lemma 2.2.12 la successione  $\{F^{\nu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\xi$ . Da come è stata scelta  $\nu$ , abbiamo anche che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)}(q_1), q_2) = G(q_1, q_2)$ .

Fissiamo adesso una funzione strettamente crescente  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che la successione  $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\eta$ . Dato un compatto  $K \subseteq X$ , anche  $F^{\mu(j)}(K)$  è compatto, in quanto immagine continua di un compatto; allora, poiché la successione  $\{F^{\nu(h)}\}_{h \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ , per ogni  $j \in \mathbb{N}$  fissato troviamo che la successione  $\{F^{\nu(h)+\mu(j)}\}_{h \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ . Ciò implica, considerando un'eshaustione di  $X$  in compatti, che esiste una funzione strettamente crescente  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che la successione  $\{F^{(\nu \circ \tau)(j)+\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ . Ricordando le proprietà di  $\nu$ , e a meno di rinominare le funzioni, possiamo dunque dire di avere due funzioni strettamente crescenti  $\nu, \mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tali che:

- (1) le successioni  $\{F^{\nu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergono, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\xi$  e  $\eta$  rispettivamente;
- (2) la successione  $\{F^{\nu(j)+\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ ;
- (3) si ha  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)}(q_1), q_2) = G(q_1, q_2)$ .

Per il Teorema 2.2.7, abbiamo che per ogni  $j \in \mathbb{N}$  esiste una  $(1, 1/j)$ -simil-geodetica  $\sigma_j : [0, T_j] \rightarrow X$  con  $\sigma_j(0) = F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1)$  e  $\sigma_j(T_j) = F^{\mu(j)}(q_2)$ . Dato che  $\{F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1)\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{F^{\mu(j)}(q_2)\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergono, rispettivamente, a  $\xi$  e  $\eta$ , per  $j$  abbastanza grande si ha che  $\sigma_j(0) \in V_\xi$  e  $\sigma_j(T_j) \in V_\eta$ , e  $\sigma_j$  è una  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica. Dunque  $\sigma_j([0, T_j]) \cap K \neq \emptyset$  per  $j$  abbastanza grande. Per ogni tale  $j$  scegliamo un  $t_j \in [0, T_j]$  tale che  $x_j^* = \sigma_j(t_j) \in K$ . Per

compattezza di  $K$ , a meno di passare a una sottosuccessione possiamo supporre che  $x_j^* \rightarrow x^* \in K$  per  $j \rightarrow +\infty$ . Poiché per ogni  $j \in \mathbb{N}$  la curva  $\sigma_j$  è una  $(1, 1/j)$ -simil-geodetica, per il Lemma 2.2.8 troviamo che

$$k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)) \geq k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x_j^*) + k_X(x_j^*, F^{\mu(j)}(q_2)) - 3/j. \quad (25)$$

Adesso, si ha che

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x_j^*) &\geq \liminf_{j \rightarrow +\infty} (k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x^*) - k_X(x^*, x_j^*)) \\ &= \liminf_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x^*) \geq G(q_1, x^*); \end{aligned} \quad (26)$$

inoltre, per definizione di  $\varepsilon$  abbiamo che

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} k_X(x_j^*, F^{\mu(j)}(q_2)) \geq \varepsilon. \quad (27)$$

Mettendo assieme la (25), la (26) e la (27), troviamo che

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)) \geq G(q_1, x^*) + \varepsilon;$$

d'altra parte, abbiamo che

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)) \leq \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)}(q_1), q_2) = G(q_1, q_2).$$

Dunque si ha che  $G(q_1, q_2) \geq G(q_1, x^*) + \varepsilon$ , in contraddizione con la scelta di  $q_1$  e  $q_2$ .

Poiché sia il Caso 1 che il Caso 2 portano a una contraddizione, ne consegue che la supposizione che  $\Gamma$  contenga almeno due punti dev'essere sbagliata, da cui segue facilmente la tesi.  $\square$

Vogliamo ora ottenere come conseguenza il teorema di tipo “Wolff-Denjoy” dimostrato in [CMS]. Per fare ciò, ci servirà il seguente Lemma.

**Lemma 2.3.2.** ([A1, Proposition 2.1.5]) *Sia  $X$  una sottovarietà complessa e relativamente compatta di una varietà taut  $Y$ . Allora  $X$  è una sottovarietà tautly embedded di  $Y$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è relativamente compatta in  $Y$ , nessuna successione in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  può essere compattamente divergente in  $Y$ . Dato che  $Y$  è taut, ne consegue che ogni tale successione ammette una sottosuccessione convergente, uniformemente sui compatti, a una funzione in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, Y)$ . Ciò implica che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è relativamente compatto per successioni in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ ; quindi, per il Lemma 1.2.5, è relativamente compatto, cioè  $X$  è una sottovarietà tautly embedded di  $Y$ , come voluto.  $\square$

**Corollario 2.3.3.** ([CMS, Theorem 1.15]) Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Supponiamo che  $X$  sia taut e che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile.

Sia  $F : X \rightarrow X$  una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- le orbite dei punti di  $X$  tramite  $F$  sono relativamente compatte in  $X$ ; oppure,
- esiste un unico punto di  $\partial X$  tale che la successione delle iterate di  $F$  converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è limitata, esiste  $R > 0$  tale che  $X$  è una sottovarietà complessa e relativamente compatta della varietà Kobayashi-iperbolica  $\mathbb{B}_R^d$ . Abbiamo già osservato che  $\mathbb{B}_R^d$  è pseudoconvessa; quindi è taut per la Proposizione 1.2.28. Allora  $X$  è una sottovarietà tautly embedded di  $\mathbb{B}_R^d$  per il Lemma 2.3.2. Essendo anche taut e  $(1, \kappa_0)$ -visibile, soddisfa le ipotesi del Teorema 2.3.1, da cui la tesi.  $\square$

Adesso la dimostrazione del Teorema 1.2.39 è immediata.

**Corollario 2.3.4.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ . Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- le orbite dei punti di  $\Omega$  tramite  $f$  sono relativamente compatte in  $\Omega$ ; oppure,
- esiste un unico punto di  $\partial\Omega$  tale che la successione delle iterate di  $f$  converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.

*Dimostrazione.* Abbiamo già notato, nell'Osservazione 2.1.3, che i domini limitati e strettamente pseudoconvessi di  $\mathbb{C}^n$  sono visibili per le simil-geodetiche. Abbiamo anche visto che sono completi rispetto alla distanza di Kobayashi, dunque per la Proposizione 1.2.26 sono taut. Si conclude applicando il Corollario 2.3.3.  $\square$

Sotto ipotesi di natura topologica si può ottenere qualcosa di più.

**Definizione 2.3.5.** Una varietà complessa  $X$  si dice di *tipo topologico finito* se i gruppi di omologia singolare  $H_j(\Omega; \mathbb{Z})$  hanno rango finito per ogni  $j \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.3.6.** ([A2, Theorem 0.4]) Sia  $X$  una varietà taut e di tipo topologico finito. Supponiamo che  $H^j(X; \mathbb{Q}) = 0$  per ogni  $j > 0$ , e consideriamo una funzione  $F \in \text{Hol}(X, X)$ . Allora la successione  $\{F^h\}_{h \in \mathbb{N}}$  non è compattamente divergente se e solo se  $F$  ha un punto periodico in  $X$ , cioè esistono  $x \in X$  e  $h_0 \in \mathbb{N}$  tali che  $F^{h_0}(x) = x$ .

**Corollario 2.3.7.** ([BM, Theorem 1.9]) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato. Supponiamo che  $\Omega$  sia taut e che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $\Omega$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile.

Supponiamo inoltre che  $\Omega$  sia di tipo topologico finito e che  $H^j(X; \mathbb{C}) = 0$  per ogni  $1 \leq j \leq n$ .

Sia  $F : \Omega \longrightarrow \Omega$  una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- le orbite dei punti di  $\Omega$  tramite  $F$  sono relativamente compatte in  $\Omega$ , ed esiste un punto periodico in  $\Omega$  per  $F$ ; oppure,
- esiste un unico punto di  $\partial X$  tale che la successione delle iterate di  $F$  converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.

*Dimostrazione.* Dato che  $\Omega$  è un dominio taut limitato, per [Wu, Theorem F] è pseudoconvesso. È allora ben noto che  $H^j(\Omega; \mathbb{C}) = 0$  per ogni  $j > n$  (si veda [H, Theorema 4.2.7]). Poiché  $\Omega$  è di tipo topologico finito, per il teorema dei coefficienti universali si ha che

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^j(\Omega; \mathbb{Q}) = \text{rank } H_j(\Omega; \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{C}} H^j(\Omega; \mathbb{C})$$

per ogni  $j \in \mathbb{N}$ . Si verifica allora che  $H^j(X; \mathbb{Q}) = 0$  per ogni  $j \in \mathbb{N}$ . Si conclude facilmente usando il Teorema 2.3.6 e il Corollario 2.3.3.  $\square$

### 3 Esempi di domini con visibilità

Dopo aver dimostrato il Corollario 2.3.3, viene naturale chiedersi: esistono sottovarietà limitate di  $\mathbb{C}^d$  che possiamo dimostrare essere taut e visibili per le simil-geodetiche, anche senza ipotesi di regolarità (l'esempio che già conosciamo, i domini strettamente pseudoconvessi, hanno regolarità  $C^2$ )?

In questa sezione andremo a vedere diversi esempi di domini limitati in  $\mathbb{C}^n$  che soddisfano la condizione di visibilità: due classi di domini, la prima introdotta [BZ1] e della quale studieremo una sottoclasse di esempi espliciti, e la seconda introdotta in [BM] della quale costruiremo un esempio semplice; un ulteriore esempio introdotto in [CMS]. Inoltre, i domini della classe introdotta in [BM] sono anche taut, perciò per essi vale automaticamente il Corollario 2.3.3.

Capire come dire che non sono Gromov, aggiungere all'intro della sezione

#### 3.1 Domini Goldilocks

Il primo esempio di una classe di domini di  $\mathbb{C}^n$  con visibilità è quello, introdotto in [BZ1], dei domini Goldilocks. Prima di darne la definizione, introduciamo per un dominio limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  e  $r > 0$  la quantità

$$M_\Omega(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_\Omega(x; v)} \mid x \in \Omega, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\}.$$

La funzione  $M_\Omega$  è monotona crescente, dunque misurabile secondo Lebesgue; inoltre, segue dal punto (3) della Proposizione 2.2.2 che è anche limitata. Perciò ha senso la definizione che stiamo per dare.

**Definizione 3.1.1.** Un dominio limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  è detto *dominio Goldilocks* se:

- (1) esiste (e quindi per ogni)  $\varepsilon > 0$  tale che  $\int_0^\varepsilon \frac{1}{r} M_\Omega(r) dr < +\infty$ ;
- (2) per ogni  $x_0 \in \Omega$  esistono due costanti  $C, \alpha > 0$  (che dipendono da  $x_0$ ) tali che  $k_\Omega(x_0, x) \leq C + \alpha \log \frac{1}{\delta_\Omega(x)}$  per ogni  $x \in \Omega$ .

**Osservazione 3.1.2.** Il nome particolare, domini Goldilocks (Riccioli d'oro, in italiano), è dovuto al fatto che, come la protagonista della fiaba, tali domini evitano due estremi “sgradevoli”: il bordo non ha cuspidi rivolte verso l'esterno né punti in cui il bordo stesso è piatto fino a ordine infinito. Il primo caso è escluso dalla condizione (2) nella definizione. La condizione (1) implica che il dominio è pseudoconvesso ([BZ1, Proposition 2.15]).

Per vedere che i domini Goldilocks soddisfano la condizione di visibilità, iniziamo mostrando un risultato che ci servirà anche nei prossimi esempi. Poniamo

$$M_{\Omega, U}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_\Omega(x; v)} \mid x \in \Omega \cap U, \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\}.$$

**Teorema 3.1.3.** ([CMS, Theorem 1.9]) Sia  $\Omega$  un dominio limitato di  $\mathbb{C}^d$ . Sia  $S \subseteq \partial\Omega$  un insieme chiuso tale che per ogni  $p, q \in \partial\Omega$  con  $p \neq q$  esistono  $p' \in \partial\Omega$  e  $r > 0$  tali, detta  $B(p', r)$  la palla euclidea di centro  $p'$  e raggio  $r$ , che:

- (i) si ha  $p \in B(p', r)$  e  $q \in \partial\Omega \setminus \overline{B(p', r)}$ ;
- (ii) si ha  $S \cap \partial B(p', r) = \emptyset$ .

Inoltre, supponiamo che per ogni  $q' \in \partial\Omega \setminus S$  esistono un intorno  $U$  di  $q'$ , uno  $z_0 \in \Omega$  e una funzione  $C^1$  strettamente crescente  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(t) \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$ , tali che:

- (1) si ha  $k_\Omega(z_0, z) \leq f(1/\delta_\Omega(z))$  per ogni  $z \in \Omega \cap U$ ;
- (2) si ha  $M_{\Omega, U}(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow 0$ ;
- (3) esiste  $r_0 > 0$  tale che  $\int_0^{r_0} \frac{M_{\Omega, U}(r)}{r^2} f'\left(\frac{1}{r}\right) dr < +\infty$ .

Allora  $\Omega$  è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile per ogni  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa > 0$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esistano  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa > 0$  tali che  $\Omega$  non sia  $(\lambda, \kappa)$ -visibile. Allora esistono  $p, q \in \partial\Omega$  con  $p \neq q$ , due successioni  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , convergenti rispettivamente a  $p$  e  $q$ , e una successione  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetiche, con  $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_n(a_n) = p_n$  e  $\gamma_n(b_n) = q_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , tali che

$$\max_{a_n \leq t \leq b_n} \delta_\Omega(\gamma_n(t)) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Per ipotesi esistono  $p' \in \partial\Omega$  e  $r > 0$  tali che valgano (i) e (ii). Poiché  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow q$  per  $n \rightarrow +\infty$ , possiamo assumere senza perdita di generalità che  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B(p', r)$  e  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega \setminus \overline{B(p', r)}$ . Poiché  $\gamma_n$  è una curva continua che collega  $p_n$  e  $q_n$ , deve esistere  $\alpha_n \in (a_n, b_n)$  tale che  $\xi_n := \gamma_n(\alpha_n) \in \partial B(p', r)$ ; a meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che  $\xi_n \rightarrow \xi \in \partial\Omega \cap \partial B(p', r)$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Per (ii) si ha che  $\xi \in \partial\Omega \setminus S$ ; allora esistono, per ipotesi, un intorno  $U$  di  $\xi$ , uno  $z_0 \in \Omega$  e una funzione  $C^1$  strettamente crescente  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tali che valgano (1), (2) e (3). Osserviamo che tali ipotesi sono ancora soddisfatte se prendiamo un intorno  $V \subseteq U$  di  $\xi$ , per cui, a meno di prendere un intorno più piccolo, possiamo supporre che  $\overline{U} \cap (S \cup \{p, q\}) = \emptyset$ ; inoltre, di nuovo a meno di sottosuccessioni, possiamo anche supporre che  $q_n \notin \overline{U}$ .

Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $\overline{B(\xi, \varepsilon)} \subseteq U$ ; poiché  $\xi_n \rightarrow \xi$  per  $n \rightarrow +\infty$ , possiamo assumere senza perdita di generalità che  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B(\xi, \varepsilon)$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  poniamo

$$\beta_n := \inf\{t \in [\alpha_n, b_n] \mid \gamma_n(t) \in \partial B(\xi, \varepsilon)\};$$

per definizione di  $\beta_n$  e per il fatto che  $\partial B(\xi, \varepsilon)$  è chiuso, si ha  $\gamma_n(\beta_n) \in \partial B(\xi, \varepsilon)$  e  $a_n < \alpha_n < \beta_n < b_n$ . Poniamo  $\sigma_n := \gamma_n|_{[\alpha_n, \beta_n]} : [\alpha_n, \beta_n] \rightarrow \Omega$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora, poiché  $\gamma_n(\alpha_n) = \xi_n \in B(\xi, \varepsilon)$ , per definizione di  $\beta_n$  dev'essere  $\sigma_n([\alpha_n, \beta_n]) \subseteq \overline{B(\xi, \varepsilon)} \subseteq U$ . Notiamo che, essendo la restrizione della  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica  $\gamma_n$ , anche  $\sigma_n$  è una  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; inoltre, si ha

$$\max_{\alpha_n \leq t \leq \beta_n} \delta_\Omega(\sigma_n(t)) \leq \max_{a_n \leq t \leq b_n} \delta_\Omega(\gamma_n(t)) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Adesso, a meno di riparametrizzare le curve  $\sigma_n$ , possiamo assumere che  $\alpha_n \leq 0 \leq \beta_n$  e che

$$\max_{\alpha_n \leq t \leq \beta_n} \delta_\Omega(\sigma_n(t)) = \delta_\Omega(\sigma_n(0))$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per la Proposizione 2.2.5 esiste una costante  $C > 0$ , che dipende solo da  $\lambda$ , tale che le  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetiche di  $\Omega$  sono  $C$ -lipschitziane rispetto alla distanza euclidea. Allora, applicando il teorema di Ascoli-Arzelà e passando a un'opportuna sottosuccessione con un procedimento diagonale, possiamo assumere che:

- si ha  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in [-\infty, 0]$  e  $\beta_n \rightarrow \beta \in [0, +\infty]$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- la successione  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sui compatti di  $(\alpha, \beta)$  a una curva continua  $\sigma : (\alpha, \beta) \rightarrow \overline{B(\xi, \varepsilon)} \subseteq U$ ;
- si ha  $\sigma_n(\alpha_n) = \xi_n \rightarrow \xi$  e  $\sigma_n(\beta_n) = \eta_n \rightarrow \eta$  per  $n \rightarrow +\infty$ , con  $\xi \in \partial\Omega \cap \partial B(p', r)$  e  $\eta \in \partial\Omega \cap \partial B(\xi, \varepsilon)$ .

Ovviamente dev'essere  $\xi \neq \eta$ ; quindi, dato che  $\|\sigma(\alpha_n) - \sigma(\beta_n)\| \leq C(\beta_n - \alpha_n)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha che  $C(\beta - \alpha) \geq \|\xi - \eta\| > 0$ , per cui  $\beta > \alpha$ .

Mostriamo adesso che  $\sigma$  è costante. Vediamo innanzitutto che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per quasi ogni  $t \in (\alpha_n, \beta_n)$  si ha

$$\|\sigma'_n(t)\| \leq \lambda M_{\Omega, U}(\delta_\Omega(\sigma_n(t))).$$

Sia  $t \in (\alpha_n, \beta_n)$  tale che  $\sigma'_n(t)$  esiste e  $\|\sigma'_n(t)\| \neq 0$  (altrimenti la disuguaglianza è immediata). Ricordiamo che ogni  $\sigma_n$  è una  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica, per cui  $K_\Omega(\sigma_n(t); \sigma'_n(t)) \leq \lambda$ ; quindi, dato che  $\sigma_n([\alpha_n, \beta_n]) \subseteq U$ , si ha

$$\|\sigma'_n(t)\| \leq \frac{\lambda}{K_\Omega(\sigma_n(t); \frac{\sigma'_n(t)}{\|\sigma'_n(t)\|})} \leq \lambda M_{\Omega, U}(\delta_\Omega(\sigma_n(t))),$$

come voluto. Adesso, poiché  $\max_{\alpha_n \leq t \leq \beta_n} \delta_\Omega(\sigma_n(t)) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , dal fatto che  $M_{\Omega, U}$  è crescente e dall'ipotesi (2) si ha che  $M_{\Omega, U}(\delta_\Omega(\sigma_n(t))) \rightarrow 0$  uniformemente. Ma allora, dati  $\alpha < u \leq w < \beta$ , si ha

$$\begin{aligned} \|\sigma(u) - \sigma(w)\| &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(u) - \sigma_n(w)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \int_u^w \sigma'_n(t) dt \right\| \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_u^w \|\sigma'_n(t)\| dt \\ &\leq \lambda \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_u^w M_{\Omega, U}(\delta_\Omega(\sigma_n(t))) dt = 0; \end{aligned}$$

dunque  $\sigma$  è costante su  $(\alpha, \beta)$ .

Vogliamo ottenere una contraddizione mostrando anche che  $\sigma$  non è costante. Distinguiamo due casi.



Caso 1: sia  $\alpha$  che  $\beta$  sono finiti. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , definiamo al seguente modo la curva  $\tilde{\sigma}_n : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ : restringiamo  $\sigma_n$  all'intervallo  $[\alpha_n, \beta_n] \cap [\alpha, \beta]$  ed estendiamola ad una costante sugli intervalli  $[\alpha, \alpha_n]$  e  $[\beta_n, \beta]$  se  $\alpha < \alpha_n$  o  $\beta_n < \beta$ . È facile vedere che le  $\tilde{\sigma}_n$  sono ancora  $C$ -lipschitziane, per cui, applicando di nuovo Ascoli-Arzelà, a meno di sottosuccessioni convergono, uniformemente sui compatti, a una curva continua  $\tilde{\sigma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \bar{\Omega}$ . Questa curva estende in modo continuo  $\sigma$  a tutto  $[\alpha, \beta]$  e  $\tilde{\sigma}(\alpha) = \xi \neq \eta = \tilde{\sigma}(\beta)$ , per cui  $\tilde{\sigma}$  non è costante, e di conseguenza non lo è neanche  $\sigma$ .

Caso 2:  $\alpha = -\infty$  o  $\beta = +\infty$ . Ricordiamo che  $\sigma_n$  è una  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; dunque si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}|t| - \kappa &\leq k_\Omega(\sigma_n(0), \sigma_n(t)) \\ &\leq k_\Omega(\sigma_n(0), z_0) + k_\Omega(z_0, \sigma_n(t)) \leq 2f\left(\frac{1}{\delta_\Omega(\sigma_n(t))}\right), \end{aligned} \quad (28)$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall'ipotesi (1), dal fatto che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $\sigma_n([\alpha_n, \beta_n]) \subseteq \Omega \cap U$  e da  $\max_{\alpha_n \leq t \leq \beta_n} \delta_\Omega(\sigma_n(t)) = \delta_\Omega(\sigma_n(0))$ .

Consideriamo il caso  $\beta = +\infty$ . Poiché la successione  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $+\infty$  e  $f$  è continua con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ , esistono un naturale  $N \in \mathbb{N}$  e una

costante  $B > 0$  tali che per ogni  $n \geq N$  e  $t \in (B, \beta_n]$  si ha  $\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2} \in f((0, +\infty))$ . Usando anche la disuguaglianza (28) e il fatto che  $f$  è strettamente crescente, troviamo che

$$f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right) \leq \frac{1}{\delta_\Omega(\sigma_n(t))}$$

per ogni  $n \geq N$  e  $t \in (B, \beta_n]$ . Se  $\alpha = -\infty$ , ragionando allo stesso modo troviamo un intero  $N'$  e una costante  $A > 0$  tali che

$$f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right) \leq \frac{1}{\delta_\Omega(\sigma_n(t))}$$

per ogni  $n \geq N'$  e  $t \in [\alpha_n, -A)$ . Vediamo il caso  $\alpha = -\infty$  e  $\beta = +\infty$ . Dalle due disuguaglianze appena mostrate, usando anche che  $\|\sigma'_n(t)\| \leq \lambda M_{\Omega, U}(\delta_\Omega(\sigma_n(t)))$  e che  $M_{\Omega, U}$  è crescente, troviamo che

$$\|\sigma'_n(t)\| \leq \lambda M_{\Omega, U}\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}\right)$$

per ogni  $n \geq \max\{N, N'\}$  e per quasi ogni  $t \in [\alpha_n, -A) \cup (B, \beta_n]$ . Usando l'ipotesi (3) e il cambio di variabile  $r = \frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}$ , si ha che esistono due

costanti  $c \in (-\infty, -A)$  e  $d \in (B, +\infty)$  tali che

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{-\infty}^c M_{\Omega, U} \left( \frac{1}{f^{-1} \left( \frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2} \right)} \right) dt + \lambda \int_d^{+\infty} M_{\Omega, U} \left( \frac{1}{f^{-1} \left( \frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2} \right)} \right) dt \\ & < \|\xi - \eta\|. \end{aligned}$$

Allora, usando le ultime due disuguaglianze, otteniamo

$$\begin{aligned} \|\sigma(d) - \sigma(c)\| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(d) - \sigma_n(c)\| \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\|\sigma_n(\beta_n) - \sigma_n(\alpha_n)\| - \|\sigma_n(\alpha_n) - \sigma_n(c)\| \\ &\quad - \|\sigma_n(\beta_n) - \sigma_n(d)\|) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(\beta_n) - \sigma_n(\alpha_n)\| - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\| \int_{\alpha_n}^c \sigma'_n(t) dt \right\| \\ &\quad - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\| \int_d^{\beta_n} \sigma'_n(t) dt \right\| \\ &\geq \|\xi - \eta\| - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_n}^c \|\sigma'_n(t)\| dt - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_d^{\beta_n} \|\sigma'_n(t)\| dt \\ &\geq \|\xi - \eta\| - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_{\alpha_n}^c M_{\Omega, U} \left( \frac{1}{f^{-1} \left( \frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2} \right)} \right) dt \\ &\quad - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_d^{\beta_n} M_{\Omega, U} \left( \frac{1}{f^{-1} \left( \frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2} \right)} \right) dt \\ &= \|\xi - \eta\| - \lambda \int_{-\infty}^c M_{\Omega, U} \left( \frac{1}{f^{-1} \left( \frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2} \right)} \right) dt \\ &\quad - \lambda \int_d^{+\infty} M_{\Omega, U} \left( \frac{1}{f^{-1} \left( \frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2} \right)} \right) dt > 0; \end{aligned}$$

dunque in questo caso  $\sigma$  non è costante. Se invece  $a < -\infty$  e  $b = +\infty$  (il caso  $a = -\infty$  e  $b < +\infty$  è analogo), ragionando come nel caso 1 estendiamo le  $\sigma_n$  a delle  $\tilde{\sigma}_n$  che, a meno di sottosuccessioni, convergono uniformemente sui compatti a una curva continua  $\tilde{\sigma} : [a, +\infty) \rightarrow \bar{\Omega}$  che estende  $\sigma$ . Allora basta ripetere la stima precedente con  $\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}$  e  $\alpha$  al posto di  $\sigma_n, \sigma$  e  $c$  e scegliendo un  $d$  opportuno, trovando così che  $\tilde{\sigma}$ , e di conseguenza  $\sigma$ , non è costante.

Poiché la nostra assunzione porta a una contraddizione, dev'essere falsa, da cui la tesi.  $\square$

Adesso mostriamo che i domini Goldilocks sono visibili per le simil-geodetiche.

**Corollario 3.1.4.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato Goldilocks, e fissiamo  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa \geq 0$ . Se  $\xi, \eta \in \partial\Omega$  e  $V_\xi, V_\eta$  sono intorni di  $\xi, \eta$  in  $\mathbb{C}^n$  tali che  $\overline{V}_\xi \cap \overline{V}_\eta = \emptyset$ , allora esiste un compatto  $K \subseteq \Omega$  tale che ogni  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica in  $\Omega$  che collega un punto di  $V_\xi$  a un punto di  $V_\eta$  interseca  $K$ .*

*Dimostrazione.* Basta applicare il Teorema 3.1.3 con  $S = \emptyset$ ,  $U = \mathbb{C}^n$ , per cui abbiamo che  $M_{\Omega, U} = M_\Omega$ , e  $f(x) = \log x$ .  $\square$

Un esempio esplicito di domini Goldilocks sono i domini limitati, pseudo-convessi e di tipo finito.

### 3.2 Domini di tipo finito

Vogliamo ora discutere dei domini di tipo finito, che sono un esempio di domini Goldilocks. Iniziamo con la definizione di dominio di tipo finito nel senso di D'Angelo, introdotta in [D'A].

**Definizione 3.2.1.** Dati un aperto  $A \subseteq \mathbb{C}^n$ , una funzione  $g \in C^\infty(A)$  e  $p \in A$ , l'ordine (o la molteplicità) di  $g$  in  $p$  è  $v_p(g)$ , il grado del primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor in  $p$  di  $g - g(p)$ . Se la funzione è a valori in più variabili, si considera il minimo degli ordini di contatto delle componenti.

**Definizione 3.2.2.** Un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  ha bordo  $C^\infty$  se esiste una funzione  $\rho \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$  tale che  $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$  e  $d\rho \neq 0$  in ogni punto di  $\partial\Omega$ .

**Definizione 3.2.3.** Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio con bordo  $C^\infty$  e  $\xi \in \partial\Omega$ . L'insieme dei *dischi analitici* che toccano il bordo di  $\Omega$  in  $\xi$  e che sono lisci nell'origine è dato da

$$\mathcal{D}_\xi = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n) \mid f(0) = \xi \text{ e } f'(0) \neq 0\}.$$

**Definizione 3.2.4.** Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio con bordo  $C^\infty$  e  $\xi \in \partial\Omega$ . Il *tipo* di  $\xi$  è dato da

$$\Delta_1(\xi) := \sup_{f \in \mathcal{D}_\xi} v_0(\rho \circ f).$$

**Definizione 3.2.5.** Un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  con bordo  $C^\infty$  si dice *di tipo finito nel senso di D'Angelo* (o più brevemente *di tipo finito*) se  $\Delta_1(\xi) < +\infty$  per ogni  $\xi \in \partial\Omega$ .

**Osservazione 3.2.6.**

1. Esistono diverse definizioni di dominio di tipo finito, che sono sostanzialmente equivalenti (o quasi) in due variabili o per domini convessi in qualsiasi numero di variabili; negli altri casi, invece, la situazione è più complicata. Noi ci limiteremo al caso di domini di tipo finito nel senso di D'Angelo, poiché è ciò che ci serve per ottenere la stima dal basso sulla metrica di Kobayashi.
2. La condizione  $f'(0) \neq 0$  nella Definizione 3.2.3, cioè che il disco analitico sia liscio, è necessaria. Altrimenti, calcolando un disco analitico in  $z^k$  con  $k > 1$  invece che in  $z$ , otteniamo un altro disco analitico non liscio con ordine di contatto almeno  $k$ ; di conseguenza, tutti i punti e tutti i domini sarebbero di tipo infinito.
3. È naturale supporre, come faremo a breve, la pseudoconvessità del dominio; infatti, si può mostrare ([D'A, Corollary 5.6] con  $p = p_0$ ) che in tal caso il tipo del dominio è almeno 2. Inoltre, i punti strettamente pseudoconvessi hanno tipo esattamente uguale a 2 ([D'A, Corollary 5.8]).

Ci servirà il seguente fatto.

**Teorema 3.2.7.** ([Ch, Theorem 1]) *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato. Siano inoltre  $\xi \in \partial\Omega$  di tipo finito e  $U$  un intorno di  $\xi$  tale che  $\partial\Omega \cap U$  è liscio e pseudoconvesso. Allora esistono un intorno  $V \subseteq U$  di  $\xi$  e due costanti  $c, \varepsilon > 0$  tali che si ha*

$$K_\Omega(z; Z) \geq c \frac{\|Z\|}{\delta_\Omega(z)^\varepsilon}$$

per ogni  $z \in \Omega \cap V$  e  $Z \in T_z\Omega$ .

Possiamo allora dimostrare che per i domini limitati, pseudoconvessi e di tipo finito vale la condizione (1) nella definizione di dominio Goldilocks.

**Corollario 3.2.8.** ([BZ1, Lemma 2.6]) *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato, pseudoconvesso e di tipo finito. Allora  $\Omega$  soddisfa la condizione (1) nella Definizione 3.1.1.*

*Dimostrazione.* Poiché  $\Omega$  è limitato, pseudoconvesso e di tipo finito,  $\partial\Omega$  è compatto e ogni intorno di ogni suo punto soddisfa le ipotesi del Teorema 3.2.7. Possiamo allora trovare un numero finito di aperti  $V_1, \dots, V_N$  che ricoprono  $\partial\Omega$  e delle costanti  $c, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N > 0$  tali che

$$K_\Omega(x; v) \geq c \cdot \delta_\Omega(z)^{-\varepsilon_j}$$

per ogni  $z \in \Omega \cap V_j$  e  $v \in T_z\Omega$  con  $\|v\| = 1$ .

Basta dunque prendere  $s = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\}$  e  $r > 0$  piccolo abbastanza affinché  $r < 1$  e  $\{z \in \Omega \mid \delta_\Omega(z) \leq r\} \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_N$ . Segue che

$$M_\Omega(r) \leq r^s / c$$

con  $s > 0$  per  $r$  sufficientemente piccolo, per cui la condizione (1) nella Definizione 3.1.1 è soddisfatta.  $\square$

Andiamo ora a dimostrare che soddisfano anche la condizione (2). Per questa, servono ipotesi meno stringenti.

**Proposizione 3.2.9.** ([A1, Theorem 2.3.51]) *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato con bordo  $C^2$ . Allora  $\Omega$  soddisfa la condizione (2) nella Definizione 3.1.1.*

*Dimostrazione.* Per [S, Chapter 9, Theorem 20],  $\partial\Omega$  ammette un intorno tubolare  $U_\varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$ , tale che:

- (i) si ha  $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \delta_\Omega(z) < \varepsilon\}$ ;
- (ii) per ogni  $z \in \Omega \cap U_\varepsilon$  esiste un unico punto  $\pi(z) \in \partial\Omega$  con  $\|\pi(z) - z\| = \delta_\Omega(z)$ ;
- (iii) per ogni  $z \in \Omega$ , la fibra  $\pi^{-1}(\pi(z))$  è un sottoinsieme della normale a  $\partial\Omega$  in  $\pi(z)$ ;
- (iv) la mappa  $z \mapsto (\pi(z), \delta_\Omega(z))$  è un omeomorfismo tra  $U_\varepsilon$  e  $\partial\Omega \times (0, \varepsilon)$ .

È facile osservare che, per ogni  $z \in \Omega$  con  $\delta_\Omega(z) = \varepsilon$ , si ha che la palla euclidea di centro  $z$  e raggio  $\varepsilon$  è tutta contenuta in  $\Omega$ . Presi allora  $p, q \in \Omega$  con  $\pi(p) = \pi(q)$  e  $\varepsilon \geq \delta_\Omega(p) \geq \delta_\Omega(q)$ , poniamo  $z_0$  il punto (interno a  $\Omega$ ) della normale a  $\partial\Omega$  in  $\pi(p)$  tale che  $\delta_\Omega(z_0) = \varepsilon$ . Usando la funzione olomorfa  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  tale che  $\varphi(\zeta) = z_0 + \zeta(\pi(p) - z_0)$ , troviamo

$$k_\Omega(p, q) \leq \frac{1}{2} \log \frac{\delta_\Omega(p)}{\delta_\Omega(q)}.$$

Adesso, notiamo che l'insieme  $K = \{z \in \Omega \mid \delta_\Omega(z) \geq \varepsilon\}$  è compatto. Dato  $x_0 \in \Omega$ , basta allora prendere  $\alpha = 1/2$  e  $C = \frac{1}{2} \log \varepsilon + D_{k_\Omega}(x_0, K)$ , dove abbiamo posto  $D_{k_\Omega}(x_0, K) = \max\{k_\Omega(x_0, z) \mid z \in K\}$ . Segue dunque che  $\Omega$  soddisfa la condizione (2) nella Definizione 3.1.1.  $\square$

Usando il Corollario 3.2.8, la Proposizione 3.2.9 e la Proposizione 1.2.28, otteniamo il seguente risultato.

**Corollario 3.2.10.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato, pseudoconvesso e di tipo finito. Allora  $\Omega$  è un dominio Goldilocks e una varietà taut.*

*In particolare, per il Corollario 3.1.4 si ha che  $\Omega$  soddisfa le ipotesi del Corollario 2.3.3.*

### 3.3 Domini Caltrops

Il secondo esempio, introdotto in [BM], è quello dei domini Caltrops.

**Definizione 3.3.1.** Un dominio limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ , con  $n \geq 2$ , è detto *dominio Caltrop* se esiste un insieme finito di punti  $\{q_1, \dots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$  tale che:

- il sottoinsieme del bordo  $\partial\Omega \setminus \{q_1, \dots, q_N\}$  è  $C^2$  e  $\Omega$  è strettamente pseudoconvesso in ogni punto di tale insieme;
- per ogni  $j = 1, \dots, N$  esiste un intorno aperto e connesso  $V_j \ni q_j$  tale che esistono due costanti  $p_j \in (1, 3/2)$  e  $C_j > 1$ , una trasformazione unitaria

$\mathbb{U}^{(j)}$  è una funzione continua  $\psi_j : [0, A_j] \longrightarrow [0, +\infty)$ , con  $A_j > 0$ , tali che  $\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j)$  è un “solido di rivoluzione” dato da

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \in (0, A_j), \right. \\ \left. (\Im z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\Re z_n)^2 \right\}$$

dove  $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$  per ogni  $z \in \mathbb{C}^n$ . Inoltre,  $\psi_j$  ha le seguenti proprietà:

- è di classe  $C^2$  su  $(0, A_j)$ ;
- per ogni  $x \in [0, A_j]$  si ha  $(1/C_j)x^{p_j} \leq \psi_j(x) \leq C_j x^{p_j}$ ;
- si ha che  $\psi_j$  è strettamente crescente e  $\psi_j'$  è crescente su  $(0, A_j)$ ;
- si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi_j(x)\psi_j''(x) = 0$ .

**Osservazione 3.3.2.** Il nome, che in italiano può essere tradotto come tribolo o “piede di corvo” (un’arma da lancio a quattro punte), rimanda al fatto che, vicino ai punti in cui non è liscio, il bordo di tali domini assume una forma simile a quella di una cuspidè hölderiana non eccessivamente appuntita.

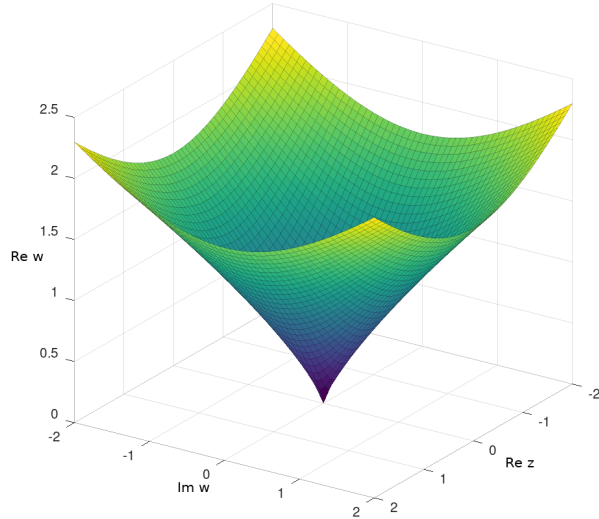


Figura 3: proiezione a  $\Im m z = 0$  del bordo della punta in  $\mathbb{C}^2$  con coordinate  $(z, w)$  corrispondente a  $\psi(x) = x^{5/4}$

Ci occupiamo adesso di mostrare che i domini Caltrops esistono. Vediamo l’esempio di un dominio Caltrop con una sola punta in  $\mathbb{C}^2$ . Siano  $A, \beta > 0$  e sia  $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$  una funzione continua di classe  $C^2$  su  $(-A, \beta)$  tale che:

- (1) per ogni  $t \in (-A, -B)$  si ha  $\psi(t) = (t + A)^p$ ;  
(2) per ogni  $t \in (0, \beta)$  si ha  $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$ ,  
dove  $B \in (0, A)$  e  $p \in (1, 3/2)$ . Consideriamo il “solido di rivoluzione” dato da

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\Im w|^2 < C\psi(\Re w)^2, -A < \Re w < \beta\},$$

dove  $C > 0$  è una costante che sceglieremo più avanti.

Poniamo inoltre

$$\rho(z, w) := |z|^2 + |\Im w|^2 - C\psi(\Re w)^2,$$

considerata sull'insieme  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid -A < \Re w < \beta + \varepsilon\}$ , dove  $\varepsilon > 0$  è fissato e  $\psi^2$  è estesa nel modo ovvio su  $(\beta, \varepsilon)$ . Si verifica che  $\rho$  è una funzione  $C^2$  avente l'ipersuperficie reale  $\partial\Omega \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid -A < \Re w\}$  come luogo di zeri. Calcoliamo le seguenti derivati parziali seconde:

$$\begin{aligned}\partial_{z\bar{z}}^2 \rho &\equiv 1; \\ \partial_{z\bar{w}}^2 \rho &= \partial_{\bar{z}w}^2 \rho \equiv 0; \\ \partial_{w\bar{w}}^2 \rho(z, w) &= \frac{1}{2} - \frac{C}{2} (\psi''(\Re w)\psi(\Re w) + \psi'(\Re w)^2).\end{aligned}$$

In particolare, si ha che

$$\partial_{w\bar{w}}^2 \rho(z, w) - \frac{1}{2} = -\frac{Cp(2p-1)}{2} (\Re w + A)^{2(p-1)}$$

per  $\Re w$  sufficientemente vicino a  $-A$ , che tende crescendo a 0 per  $\Re w$  che tende decrescendo a  $-A$ . Allora, essendo  $\psi$  di classe  $C^2$  su  $(-A, \beta)$ , scegliendo  $C$  sufficientemente piccolo possiamo imporre che  $\partial_{w\bar{w}}^2 \rho(z, w) \geq \frac{1}{4}$  per ogni  $w$  tale che  $-A < \Re w \leq 0$ . Segue che  $\partial\Omega \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid -A < \Re w \leq 0\}$  è un sottoinsieme di punti strettamente pseudoconvessi del bordo di  $\Omega$ . Per la condizione (2) su  $\psi$ , anche  $\partial\Omega \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \Re w > 0\}$  lo è. Le altre proprietà di dominio Caltrop seguono dalla condizione (1) su  $\psi$ ; la punta è in  $(0, -A)$ .

In [CMS, Section 3.2] vengono costruiti domini Caltrops con un numero arbitrario di punte.

Vediamo adesso che i domini Caltrops hanno le proprietà volute. Vogliamo mostrare innanzitutto la condizione di visibilità e il fatto che non sono domini Goldilocks, per cui costituiscono una classe di esempi più ampia. Per fare ciò, vogliamo applicare il Teorema 3.1.3 con  $U = \mathbb{C}^n$ , per cui  $M_{\Omega, U} = M_\Omega$ , e  $S = \emptyset$ . Per mostrare che un dominio Caltrop  $\Omega$  soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1.3 l'idea, spiegata in [CMS, Section 6], è la seguente: si calcola  $k_D$  per un dominio planare  $D$  che useremo come modello, dopodiché immergeremo copie di  $D$  in  $\Omega$  in maniera affine, di modo che ogni punti di  $\Omega$  sufficientemente vicino al bordo sia contenuto in una di queste copie. A questo punto, useremo la Proposizione 1.1.15 per stimare la distanza di Kobayashi su  $\Omega$ .

Per essere precisi, useremo una classe di domini con certe proprietà, che adesso andiamo a costruire. Dati  $a, h > 0$ , poniamo

$$S_{a,h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > a \text{ e } -h < \Im z < h\}.$$

Indichiamo con  $T_{a,h}$  l'immagine di  $S_{a,h}$  tramite la mappa  $z \mapsto 1/z$  e notiamo che

$$T_{a,h} = \left( \mathbb{C} \setminus \overline{D\left(\frac{-i}{2h}, \frac{1}{2h}\right)} \right) \cap \left( \mathbb{C} \setminus \overline{D\left(\frac{i}{2h}, \frac{1}{2h}\right)} \right) \cap D\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right).$$

Indichiamo con  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  l'immagine di  $T_{a,h}$  tramite la mappa  $\phi_\alpha(z) = z^\alpha$ , dove  $\alpha$  è un reale maggiore di 1 e  $a$  e  $h$  sono scelti in modo che  $\phi_\alpha$  sia un biolomorfismo.

Osserviamo che  $T_{a,h}$  ha una cuspid quadratica in 0. Dunque esistono due costanti  $c_1, c_2 > 0$  tali che per ogni  $z \in \partial T_{a,h}$  si ha

$$c_1(\Re z)^2 \leq |\Im z| \leq c_2(\Re z)^2 \quad (29)$$

per  $\Re z$  sufficientemente piccola. Più precisamente, per  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo l'insieme  $\partial T_{a,h} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re z \leq \delta\}$  è dato dall'unione dei grafici di  $f$  e  $-f$ , dove, posto  $z = x + iy$ , si ha  $f(x) = \frac{1}{2h} - \sqrt{\frac{1}{4h^2} - x^2}$ , per cui abbiamo che

$$f(x) = hx^2 + O(x^4) \quad (30)$$

per  $x \rightarrow 0^+$ .

**Osservazione 3.3.3.** Scrivendo l'equazione esplicita per il bordo di  $\mathcal{Q}^{2,a,1}$  vicino a 0, con  $a$  sufficientemente grande, troviamo una cardioide, della quale ricordiamo la cuspid proprio in 0. Tuttavia, sebbene semplice da calcolare, il caso  $\alpha = 2$  non è contemplato per via di una costrizione che imporranno più avanti.

Il seguente risultato sulle proprietà dei domini  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  sarà quello usato per ottenere stime sulla distanza di Kobayashi dei domini Caltrops.

**Proposizione 3.3.4.** *Sia  $\alpha > 1$  e sia  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  come sopra, con  $a, h > 0$  scelti opportunamente. Poniamo  $p = (1 + \alpha)/\alpha$ ; allora*

- (1) *esistono delle costanti  $\varepsilon, C_1, C_2 > 0$  tali che, per ogni  $z \in \partial \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  con  $0 \leq \Re z \leq \varepsilon$ , si ha che*

$$C_1(\Re z)^p \leq |\Im z| \leq C_2(\Re z)^p;$$

- (2) *fissata una costante  $M > 1$  esiste  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo tale che la disuguaglianza al punto (1) vale con  $C_2 = Mh\alpha$ . Inoltre, fissati  $\alpha > 1$  e  $h > 0$ , tale scelta di  $\varepsilon$  decresce al crescere di  $a$ ;*  
(3) *fissiamo un punto  $x_0 \in \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \mathbb{R}$ . Esiste una costante  $C = C(x_0) > 0$  tale che per ogni  $x \in (0, x_0)$  si ha che*

$$k_{\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}}(x_0, x) \leq C + \frac{\pi}{4h} x^{-1/\alpha}.$$



*Dimostrazione.* Siano  $c_1$  e  $c_2$  le costanti date in (29), e sia  $f$  la funzione di (30), cioè  $f(x) = \frac{1}{2h} - \sqrt{\frac{1}{4h^2} - x^2}$ . Vogliamo studiare l'immagine dei grafici di  $f$  e  $-f$  tramite  $\phi_\alpha$ . Per simmetria, ci basterà studiare l'immagine del grafico di  $f$ . Scriviamo  $z$  nel grafico di  $f$  sufficientemente vicino a 0 come  $z = x + iy$ , con  $x \geq 0$  e  $c_1 x^2 \leq y \leq c_2 x^2$ . Per  $x > 0$  sufficientemente piccolo, svolgiamo il seguente conto:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(z) &= (x + iy)^\alpha \\ &= x^\alpha \left( 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \prod_{\nu=0}^{2j-1} (\alpha - \nu) \frac{y^{2j}}{x^{2j}} \right) \\ &\quad + ix^\alpha \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \prod_{\nu=0}^{2j} (\alpha - \nu) \frac{y^{2j+1}}{x^{2j+1}} \right).\end{aligned}$$

Usando il fatto che  $c_1 x^2 \leq y \leq c_2 x^2$ , si vede facilmente che

$$\begin{aligned}\Re(\phi_\alpha(z)) &= x^\alpha + O(x^{2+\alpha}) \\ &\quad \text{e} \\ c_1 \alpha x^{1+\alpha} (1 - O(x^2)) &\leq \Im(\phi_\alpha(z)) \leq c_2 \alpha x^{1+\alpha} (1 + O(x^2))\end{aligned}$$

per  $z = x + iy$  nel grafico di  $f$  e  $x > 0$  sufficientemente piccolo. Da queste disuguaglianze segue la tesi del punto (1).

Il punto (2) segue dalle stime con le quali abbiamo dimostrato il punto (1), e da come il dominio di  $f$  dipende, per costruzione, da  $a$ .

Consideriamo il biolomorfismo  $\Phi_{\alpha,a,h}$  da  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  in  $\mathbb{D}$  dato da

$$\Phi_{\alpha,a,h} = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ g \circ (\phi_\alpha|_{T_{a,h}})^{-1},$$

dove

$$\begin{aligned}g(z) &= 1/z \text{ per ogni } z \in T_{a,h}, \\ f_1(z) &= \frac{\pi i}{2h}(z - a) \text{ per ogni } z \in S_{a,h}, \\ f_2(z) &= \sin z \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ con } -\pi/2 < \Re z < \pi/2 \text{ e } \Im z > 0, \\ f_3(z) &= \frac{z - i}{z + i} \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ con } \Im z > 0.\end{aligned}$$

Osserviamo che  $\Phi_{\alpha,a,h}$  manda l'intervallo chiuso e limitato  $\overline{\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \mathbb{R}}$  omeomorficamente in  $[-1, 1]$ . Inoltre, manda il punto  $o = \frac{1}{\left(\frac{2h}{\pi} \log(\sqrt{2} + 1) + a\right)^\alpha}$  in 0, e se  $x \in \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \mathbb{R}$  è minore di  $o$  allora  $\Phi_{\alpha,a,h}(x) \in (0, 1)$ . Allora per tali  $x$  si ha che

$$k_{\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}}(o, x) = k_{\mathbb{D}}(0, \Phi_{\alpha,a,h}(x)) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \Phi_{\alpha,a,h}(x)}{1 - \Phi_{\alpha,a,h}(x)} \right).$$

Calcolando esplicitamente  $\Phi_{\alpha,a,h}(x)$ , troviamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \Phi_{\alpha,a,h}(x)}{1 - \Phi_{\alpha,a,h}(x)} \right) &= \frac{1}{2} \log \left( e^{\frac{\pi}{2h} \left( \frac{1}{x^{1/\alpha}} - a \right)} - e^{-\frac{\pi}{2h} \left( \frac{1}{x^{1/\alpha}} - a \right)} \right) - \frac{\log 2}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \log \left( e^{\frac{\pi}{2h} \left( \frac{1}{x^{1/\alpha}} - a \right)} \right) \leq \frac{\pi}{4h} x^{-1/\alpha}; \end{aligned}$$

usando anche la disuguaglianza triangolare, otteniamo così la tesi del punto (3).  $\square$

I prossimi risultati saranno quelli necessari a immergere affinementemente copie di  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  in un dominio Caltrop nel modo voluto. Nel seguito, con  $o$  indichiamo il punto introdotto nella dimostrazione della Proposizione 3.3.4, associato al dominio  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  che staremo trattando.

**Lemma 3.3.5.** *Siano  $\varepsilon > 0$  e  $\phi : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, strettamente crescente e derivabile in  $(0, \varepsilon)$ . Supponiamo che  $\phi'$  sia strettamente crescente e che  $\phi(0) = 0$ . Allora per ogni  $(x, y) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$  tale che  $x + y < \varepsilon$  si ha che  $\phi(x + y) \geq \phi(x) + \phi(y)$ .*

*Dimostrazione.* È una banale conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale.  $\square$

**Lemma 3.3.6.** *Siano  $A > 0$  e  $\psi : [0, A] \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione continua che sia di classe  $C^2$  su  $(0, A)$ , e sia  $p \in (1, 2)$ . Supponiamo inoltre che:*

- *esiste una costante  $C > 1$  tale che  $x^p/C \leq \psi(x) \leq Cx^p$  per ogni  $x \in [0, A]$ ;*
- *si ha che  $\psi$  è strettamente crescente;*
- *si ha che  $\psi'$  è strettamente crescente su  $(0, A)$ .*

*Poniamo  $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re z < A \text{ e } |\Im z| < \psi(\Re z)\}$ . Allora esistono una costante  $B \in (0, A)$ , un compatto  $K$  che interseca  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = A\}$  e tale che  $K \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = A\} \subsetneq \mathcal{R}$ , e due costanti  $a, h > 0$  tali che per ogni  $x + iy \in \mathcal{R}$  con  $x \leq B$  si ha che:*

- (1) *vale  $(\psi^{-1}(|y|) + iy) + \mathcal{Q}^{1/(p-1),a,h} \subseteq \mathcal{R}$ ;*
- (2) *vale  $\psi^{-1}(|y|) + o > x$ ;*
- (3) *vale  $(\psi^{-1}(|y|) + iy) + o \in K$ ;*
- (4) *vale  $\delta_{\mathcal{R}}(x + iy) \leq |\psi^{-1}(|y|) - x|$ .*

*Dimostrazione.* Per il punto (2) della Proposizione 3.3.4, possiamo fissare una costante  $M > 1$  tale che per ogni  $\alpha > 1$  e ogni  $a, h > 0$  esiste un  $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, a, h) > 0$  tale che

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \{\Re w < \varepsilon\} &\subseteq \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re w < \varepsilon \text{ e } |\Im w| < Mh\alpha(\Re w)^{(1+\alpha)/\alpha}\} \\ &=: S^{\alpha,a,h}, \end{aligned}$$

e tale che, per  $\alpha$  e  $h$  fissati,  $\varepsilon \rightarrow 0$  per  $a \rightarrow +\infty$ ; notiamo anche che possiamo imporre  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \{\Re w < \varepsilon\} = \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  per  $a$  sufficientemente grande. Fissiamo

adesso  $\alpha = 1/(p-1)$ . Poiché, per costruzione di  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ , a parte reale fissata di un punto del bordo la parte immaginaria decresce, la costante  $\varepsilon$  scelta non decresce al decrescere di  $h$ . Allora possiamo scegliere  $a$  sufficientemente grande e  $h$  sufficientemente piccolo, in modo che  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \{\Re w < \varepsilon\} = \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  e  $\varepsilon, o < A/2$ , e  $Mh\alpha < 1/C$ .

Adesso fissiamo una costante  $B \in (0, A)$  tale che  $B < \min\{o, \varepsilon/2\}$ . Sia  $z = x + iy \in \mathcal{R}$  con  $x \leq B$ . Consideriamo l'insieme  $(\psi^{-1}(|y|) + iy) + \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ . Un elemento arbitrario di questo insieme è della forma  $(\psi^{-1}(|y|) + s) + i(y+t)$ , con  $s + it \in \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ . Dato che  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \subseteq S^{\alpha,a,h}$ , si ha  $0 < s < \varepsilon$  e  $|t| < Mh\alpha s^p$ . Il punto  $(\psi^{-1}(|y|) + s) + i(y+t)$  sta in  $\mathcal{R}$  se e solo

$$\begin{aligned} 0 < \psi^{-1}(|y|) + s < A \\ \text{e} \\ |y+t| < \psi(\psi^{-1}(|y|) + s). \end{aligned}$$

Poiché  $x + iy \in \mathcal{R}$  e  $\psi$  è strettamente crescente, si ha  $0 \leq \psi^{-1}(|y|) < x \leq B$ , per cui  $0 < \psi^{-1}(|y|) + s < \varepsilon/2 + \varepsilon < A$ . Dunque, per mostrare il punto (1), ci resta da dimostrare che  $|y+t| < \psi(\psi^{-1}(|y|) + s)$ . Notiamo che  $\psi$  soddisfa le ipotesi del Lemma 3.3.5, da cui

$$\psi(\psi^{-1}(|y|) + s) \geq |y| + \psi(s) \geq |y| + s^p/C,$$

dove la prima disuguaglianza è data dal Lemma e la seconda è vera per ipotesi. Allora si ha che

$$|y+t| \leq |y| + |t| < |y| + Mh\alpha s^p < |y| + s^p/C \leq \psi(\psi^{-1}(|y|) + s),$$

come voluto.

Per ogni  $x + iy \in \mathcal{R}$  con  $x \leq B$  si ha  $\psi^{-1}(|y|) + o > B \geq x$  per come è stato scelto  $B$ , e questo dimostra il punto (2).

Definiamo  $K := \{z \in \mathbb{C} \mid o \leq \Re z \leq A \text{ e } |\Im z| \leq \psi(\Re(z) - o)\}$ . Per ogni  $x + iy \in \mathcal{R}$  con  $x \leq B$  si ha

$$o \leq o + \psi^{-1}(|y|) < o + x \leq o + B < 2o < A.$$

Inoltre  $|y| = \psi((\psi^{-1}(|y|) + o) - o)$ , per cui  $o + (\psi^{-1}(|y|) + iy) \in K$ . Per costruzione,  $K$  è un compatto che soddisfa le condizioni richieste, dunque abbiamo mostrato il punto (3).

Infine, per ogni  $x + iy \in \mathcal{R}$  con  $x \leq B$  si ha che  $\psi^{-1}(|y|) + iy \in \partial\mathcal{R}$ , per cui  $\delta_{\mathcal{R}}(x + iy) \leq |(\psi^{-1}(|y|) + iy) - (x + iy)| = |\psi^{-1}(|y|) - x|$ ; questo dimostra il punto (4).  $\square$

Il prossimo risultato, che è sostanzialmente una versione parametrizzata del precedente, tratta dell'immersione del dominio modello  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  in un dominio Caltrop con una punta. Per brevità, scriveremo  $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}^n$  come  $(z', z_n)$ .

**Lemma 3.3.7.** *Siano  $A > 0$  e  $\psi : [0, A] \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione continua che sia di classe  $C^2$  su  $(0, A)$ , e sia  $p \in (1, 2)$ . Supponiamo inoltre che:*

- esiste una costante  $C > 1$  tale che  $x^p/C \leq \psi(x) \leq Cx^p$  per ogni  $x \in [0, A]$ ;
- si ha che  $\psi$  è strettamente crescente;
- si ha che  $\psi'$  è strettamente crescente su  $(0, A)$ .

Sia

$$D := \{z \in \mathbb{C}^n \mid 0 < \Re z_n < A \text{ e } (\Im z_n)^2 + \|z'\|^2 < (\psi(\Re z_n))^2\}.$$

Sia  $w' \in \mathbb{C}^{n-1}$  e poniamo

$$\mathcal{R}_{w'} := \pi_n [(w', 0) + \{0_{n-1}\} \times \mathbb{C}) \cap D],$$

dove  $\pi_n$  è la proiezione sull'ultima coordinata. Sia  $\alpha = 1/(p-1)$ . Allora esistono delle costanti  $a, h, B > 0$  e un compatto  $K \subseteq \{z \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \leq A\}$ , che interseca  $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n = A\}$  e tale che  $K \setminus \{z \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n = A\} \subsetneq D$ , tali che per ogni  $w' \in \mathbb{C}^{n-1}$  con  $\|w'\| < \psi(B/2)$  e ogni  $\zeta \in \mathcal{R}_{w'}$  con  $\Re \zeta \leq B$  si ha che:

- (1) vale  $(\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + i\Im \zeta) + \mathcal{Q}^{\alpha, a, h} \subseteq \mathcal{R}_{w'}$ ;
- (2) vale  $\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + o > \Re \zeta$ ;
- (3) vale  $(\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + i\Im \zeta) + o \in \pi_n [(w', 0) + \{0_{n-1}\} \times \mathbb{C}) \cap D]$ ;
- (4) vale  $\delta_D((w', \zeta)) \leq |\Re \zeta - \psi^{-1}(S(\zeta, w'))|$ ,

dove  $S(\zeta, w') = \sqrt{(\Im \zeta)^2 + \|w'\|^2}$ .

*Dimostrazione.* Notiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{w'} &= \{\zeta \mid (w', \zeta) \in D\} \\ &= \{\zeta \mid 0 < \Re \zeta < A \text{ e } (\Im \zeta)^2 + \|w'\|^2 < (\psi(\Re \zeta))^2\} \\ &= \{\zeta \mid \psi^{-1}(\|w'\|) < \Re \zeta < A \text{ e } (\Im \zeta)^2 + \|w'\|^2 < (\psi(\Re \zeta))^2\}, \end{aligned}$$

per cui  $\mathcal{R}_{w'} \neq \emptyset$  se e solo se  $\|w'\| < \psi(A)$ ; poiché la costante  $B$  sarà scelta in  $(0, A)$ , nel nostro caso  $\mathcal{R}_{w'}$  sarà sempre non vuoto. Notiamo inoltre che l'insieme  $\mathcal{R}_{0_{n-1}}$  coincide con l'insieme  $\mathcal{R}$  del Lemma 3.3.6. Prendiamo dunque  $a, h$  e  $B$  date da tale Lemma. Scriviamo per semplicità  $c = 1/C$ , e osserviamo che dalla dimostrazione del Lemma 3.3.6 discendono le seguenti disuguaglianze:

$$B + s < 3A/4 < A \text{ e } |t| < cs^p \text{ per ogni } s + it \in \mathcal{Q}^{\alpha, a, h}; \quad (31)$$

$$o > B. \quad (32)$$

Supponiamo ora che  $w' \neq 0_{n-1}$ . Sia  $\zeta \in \mathcal{R}_{w'}$  tale che  $\Re \zeta \leq B$ . Un elemento arbitrario dell'insieme  $(\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + i\Im \zeta) + \mathcal{Q}^{\alpha, a, h}$  è della forma  $(\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + s) + i(\Im \zeta + t)$  con  $s + it \in \mathcal{Q}^{\alpha, a, h}$ . Un tale punto appartiene a  $\mathcal{R}_{w'}$  se e solo se:

- (i) si ha  $\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + s < A$ ;

(ii) si ha  $\|w'\|^2 + (\Im w + t)^2 < \left( \psi \left( \psi^{-1}(S(\zeta, w') + s) \right) \right)^2$ .

Poiché  $\zeta \in \mathcal{R}_{w'}$  e  $\Re \zeta \leq B$ , abbiamo che

$$(\Im \zeta)^2 + \|w'\|^2 < (\psi(\Re \zeta))^2 < (\psi(B))^2;$$

quindi  $\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + s < B + s < A$ , dove l'ultima disuguaglianza è la prima in (31). È così verificata la condizione (i). Vediamo ora la condizione (ii). Per il Lemma 3.3.5 e per le ipotesi su  $\psi$  si ha che

$$\psi \left( \psi^{-1}(S(\zeta, w') + s) \right) \geq S(\zeta, w') + \psi(s) \geq S(\zeta, w') + cs^p;$$

dunque

$$\left( \psi \left( \psi^{-1}(S(\zeta, w') + s) \right) \right)^2 - (\Im \zeta)^2 - \|w'\|^2 \geq 2cs^p S(\zeta, w') + c^2 s^{2p}.$$

Allora la condizione (ii) segue se mostriamo che

$$2t\Im \zeta + t^2 < 2cs^p S(\zeta, w') + c^2 s^{2p},$$

ma quest'ultima disuguaglianza segue dalla seconda disuguaglianza in (31). Abbiamo così dimostrato il punto (1).

Adesso notiamo che

$$\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + o \geq \psi^{-1}(\Im \zeta) + o > B \geq \Re \zeta,$$

dove la seconda disuguaglianza segue da (32); questo dimostra il punto (2).

Poniamo  $K := \{(w', \zeta) \in \mathbb{C}^n \mid o \leq \Re \zeta \leq A \text{ e } S(\zeta, w') \leq \psi(\Re \zeta - o)\}$ . Si verifica facilmente che  $K$  è un compatto con le proprietà richieste. Sia  $\zeta \in \mathcal{R}_{w'}$  tale che  $\Re \zeta \leq B$  e poniamo  $\eta := \left( \psi^{-1}(S(\zeta, w')) + i\Im \zeta \right) + o$ ; allora abbiamo che

$$o \leq \psi^{-1}(\|w'\|) + o \leq \Re \eta < \Re \zeta + o \leq B + o < A.$$

Inoltre, si ha che  $S(\eta, w') = S(\zeta, w') = \psi(\Re \eta - o)$ ; quindi

$$\eta \in \pi_n \left[ ((w', 0) + \{0_{n-1}\} \times \mathbb{C}) \cap K \right],$$

e questo dimostra il punto (3).

Per il punto (4), se  $(w', \zeta)$  è preso come sopra, allora

$$\psi^{-1}(S(\zeta, w')) + i\Im \zeta \in \partial \mathcal{R}_{w'};$$

dunque

$$\delta_D((w', \zeta)) \leq \delta_{\mathcal{R}_{w'}}(\zeta) \leq |\Re \zeta - \psi^{-1}(S(\zeta, w'))|,$$

come voluto. □

Ci serviranno anche i seguenti risultati.

**Lemma 3.3.8.** *Siano  $A > 0$ ,  $p > 1$  e  $\psi : [0, A] \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione tale che:*

- *è di classe  $C^1$  su  $(0, A)$ ;*
- *esiste  $C > 1$  tale che per ogni  $x \in [0, A]$  si ha  $\psi(x) \leq Cx^p$ ;*
- *si ha che  $\psi'$  è crescente su  $(0, A)$ .*

*Allora  $\psi$  è derivabile in 0 e  $\psi'$  è continua su  $[0, A)$ , per cui  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi'(x) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Che  $\psi'(0)$  esista e sia uguale a 0 segue immediatamente dalla stima su  $\psi(x)$ . Dunque  $\psi'$  si estende a una funzione su  $[0, A)$ . Poiché  $\psi'$  è monotona crescente, esiste  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi'(x) = l < +\infty$ . Segue allora da risultati elementari di analisi in una variabile che  $l = 0$ .  $\square$

**Lemma 3.3.9.** *([BM, Result 2.6]) Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio e  $p \in \Omega$ . Supponiamo che esista una funzione  $u$  plurisubarmonica, negativa, di classe  $C^2$  in un intorno di  $p$  e tale che esiste  $c > 0$  per cui si ha*

$$L_u(p; v) \geq c\|v\|^2$$

*per ogni  $v \in \mathbb{C}^n$ . Allora esiste una costante  $\alpha > 0$  tale che*

$$K_\Omega(p; v) \geq \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{1/2} \frac{\|v\|}{|u(p)|^2}$$

*per ogni  $v \in \mathbb{C}^n$ .*

**Lemma 3.3.10.** *([BM, Result 2.4]) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  con  $n \geq 2$  un dominio limitato. Sia  $\mathcal{M}_0$  un insieme aperto in  $\partial\Omega$  che sia anche un'ipersuperficie di classe  $C^2$ . Assumiamo che  $\mathcal{M}_0$  ammetta una funzione di definizione  $\phi$  di classe  $C^2$  in un qualche aperto contenente  $\mathcal{M}_0$ , e tale che esista una costante  $\delta > 0$  per cui  $L_\phi(\xi; v) \geq \sigma\|v\|^2$  per ogni  $\xi \in \mathcal{M}_0$  e  $v \in \mathbb{C}^n$ . Sia  $\mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_0$  un sottoinsieme compatto. Allora esistono un intorno di  $\mathcal{M}_1$  in  $\overline{\Omega}$ , sia esso  $\mathcal{V}$ , e due costanti  $C, c > 0$  tali che  $K_\Omega(z; v) \geq (1 - C\delta_\Omega(z)^{1/2}) \frac{c\|v\|}{\delta_\Omega(z)^{1/2}}$  per ogni  $z \in \mathcal{V} \cap \Omega$  e  $v \in \mathbb{C}^n$ .*

Siamo ora pronti a dimostrare quello che volevamo.

**Teorema 3.3.11.** *([BM, Theorem 1.4]) Sia  $\Omega$  un dominio Caltrop; allora  $\Omega$  è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile per ogni  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa > 0$ , ma non è un dominio Goldilocks.*

*Dimostrazione.* Fissiamo la seguente notazione: date due funzioni non negative  $F$  e  $G$  che dipendono da alcuni parametri, scriviamo  $G \lesssim F$  per dire che esiste una costante  $C > 0$ , indipendente dai parametri, tale che  $G \leq C \cdot F$ . Scriviamo

Sistemare con la reference originale

Sistemare con la reference originale

$G \approx F$  per intendere  $G \lesssim F$  e  $F \lesssim G$ .

Passo 1: una stima dal basso per  $K_\Omega(w; \cdot)$  per  $w$  contenuto in una punta.

Siano  $\{q_1, \dots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$  i punti della Definizione 3.3.1, e fissiamo  $q_{j^*}$  uno di tali punti. Siano  $p_{j^*} \in (1, 3/2)$  l'esponente,  $\mathbb{U}^{(j^*)}$  la trasformazione unitaria e  $\psi_{j^*} : [0, A_{j^*}] \rightarrow [0, +\infty)$  la funzione associata a  $q_{j^*}$  nella Definizione 3.3.1. Per la Proposizione 1.1.11 abbiamo che  $K_\Omega$  è invariante per biolomorfismi, e  $\mathbb{U}_{j^*}$  è un biolomorfismo con differenziale  $\mathbb{U}^{(j^*)}$  che preserva la norma euclidea; allora possiamo assumere senza perdita di generalità  $\mathbb{U}_{j^*} = \text{id}$  e  $q_{j^*} = 0$ , per cui, ponendo  $A = A_{j^*}$  e  $\psi = \psi_{j^*}$ , si ha che

$$\Omega \cap V_{j^*} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid 0 < \Re z_n < A \text{ e } (\Im z_n)^2 + \|z'\|^2 < (\psi(\Re z_n))^2 \right\}.$$

Poniamo  $\rho(z) := (\Im z_n)^2 + \|z'\|^2 - (\psi(\Re z_n))^2$  per  $z \in \Omega \cap V_{j^*}$ . Calcolando le derivate parziali seconde in modo analogo a come fatto nella costruzione dell'esempio a una punta, ricordando le proprietà di  $\psi$  e applicando il Lemma 3.3.8, troviamo che esiste una costante  $A' \in (0, A]$  tale che

$$L_\rho(z; v) \geq \|v'\|^2 + |v_n|^2/4$$

per ogni  $z \in \Omega \cap V_{j^*}$  con  $0 < \Re z_n < A'$  e  $v \in \mathbb{C}^n$ .

Siano  $U^{(\nu)}$ , per  $\nu = 1, 2, 3, 4$ , degli intorni aperti e connessi di 0 tali che:

- si ha  $U^{(1)} \subset \subset U^{(2)} \subset \subset U^{(3)} \subset \subset U^{(4)}$ ;
- si ha  $U^{(\nu)} \cap \Omega = \{z \in \Omega \cap V_{j^*} \mid 0 < \|z\| < \nu A'/4\}$  per  $\nu = 1, 2, 3, 4$ .

Sia  $\chi_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow [0, 1]$  una funzione liscia con  $\chi_1|_{U^{(1)}} \equiv 0$  e  $\chi_1|_{\mathbb{C}^n \setminus U^{(2)}} \equiv 1$ , e

sia  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione liscia con le seguenti proprietà:

- è convessa e non decrescente;
- è nulla in  $[0, (A')^2/16]$ ;
- cresce lentamente nell'intervallo  $((A')^2/16, (A')^2/4]$ ;
- cresce rapidamente nell'intervallo  $[9(A')^2/16, +\infty)$ .

A breve specificheremo cosa intendiamo di preciso con le ultime due condizioni, ma per farlo ci serviranno altre funzioni che adesso definiamo. Poniamo  $M_\phi := \sup_{z \in \Omega} \phi(\|z\|^2)$  e  $\Phi(z) := \phi(\|z\|^2) - M_\phi$  per ogni  $z \in \Omega$ . Abbiamo che  $\Phi$  è plurisubarmonica per [Kr, Proposition 2.2.6]. Si ha allora che

$$\begin{aligned} L_{\rho+\chi_1\Phi}(z; v) &= L_\rho(z; v) + \chi_1(z)L_\Phi(z; v) \\ &\quad + 2\Re \left( \sum_{j,k=1}^n \partial_{z_j} \chi_1(z) \partial_{\bar{z}_k} \Phi(z) v_j \bar{v}_k \right) + \Phi(z)L_{\chi_1}(z; v) \\ &\geq \|v'\|^2 + |v_n|^2/4 - 2 \sum_{j,k=1}^n |\partial_{z_j} \chi_1(z) \partial_{\bar{z}_k} \Phi(z)| |v_j| |\bar{v}_k| \\ &\quad - |\Phi(z)| |L_{\chi_1}(z; v)| \end{aligned}$$

È lecito citarlo, anche se le dimostrazioni rilevanti sono lasciate per esercizio?

per ogni  $z \in (U^{(2)} \setminus U^{(1)}) \cap \Omega$  e  $v \in \mathbb{C}^n$ . Specifichiamo adesso la prima condizione di crescita di  $\phi$ . Sull'intervallo  $((A')^2/16, (A')^2/4]$  deve crescere così lentamente che

$$L_{\rho+\chi_1\Phi}(z; v) \geq 2\|v'\|^2 + |v_n|^2/8$$

per ogni  $z \in (U^{(2)} \setminus U^{(1)}) \cap \Omega$  e  $v \in \mathbb{C}^n$ .

Sia adesso  $\chi_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow [0, 1]$  una funzione liscia e a supporto compatto tale che  $\chi_2|_{U^{(3)}} \equiv 1$  e  $\chi_2|_{\mathbb{C}^n \setminus U^{(4)}} \equiv 0$ , e chiediamo che il supporto di  $\chi_2$  intersecato con  $\Omega$  sia contenuto in  $\{z \in \Omega \mid \|z\| < 7A'/8\}$ . Abbiamo allora che

$$\begin{aligned} L_{\chi_2\rho+\Phi}(z; v) &\geq \phi'(\|z\|^2)\|v\|^2 + \phi''(\|z\|^2)|\langle z, v \rangle|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{j,k=1}^n |\partial_{z_j}\chi_2(z)\partial_{\bar{z}_k}\rho(z)| |v_j||\bar{v}_k| - |\rho(z)| |L_{\chi_2}(z; v)| \end{aligned}$$

per ogni  $z \in (U^{(4)} \setminus U^{(3)}) \cap \Omega$  e  $v \in \mathbb{C}^n$ . Specifichiamo adesso la seconda condizione di crescita di  $\phi$ . Sull'intervallo  $[9(A')^2/16, +\infty)$  deve crescere così lentamente che esiste una costante  $c > 0$  tale che

$$L_{\chi_2\rho+\Phi}(z; v) \geq c\|v\|^2$$

per ogni  $z \in (U^{(4)} \setminus U^{(3)}) \cap \Omega$  e  $v \in \mathbb{C}^n$ .

Poniamo ora  $u(z) := \chi_1(z)\Phi(z) + \chi_2(z)\rho(z)$ . Ricordiamo che  $\Phi$  è plurisubarmonica; allora:

- per il principio del massimo ([Kr, Corollary 2.1.5], segue facilmente dalla Definizione 1.1.21 che vale anche per funzioni plurisubarmoniche) applicato a  $\Phi$ , e per le definizioni di  $\chi_1, \chi_2$  e  $\rho$ , abbiamo che  $u < 0$  su  $\Omega$ ;
- dalle disuguaglianze sulla forma di Levi che seguono dalle condizioni imposte su  $\phi$ , e dalle definizioni di  $\chi_1$  e  $\chi_2$ , segue per [Kr, Exercise prior to Proposition 2.2.6] che  $u$  è plurisubarmonica su  $\Omega$ .

Qua la citazione mi piace ancora meno

Per la simmetria di rotazione della punta  $\Omega \cap V_{j^*}$ , per ogni  $w \in \Omega \cap V_{j^*}$  con  $\Re w_n$  sufficientemente piccolo si ha che  $\delta_\Omega(w) = \text{dist}(\Re w_n + iS(w), \text{graph}(\psi))$ , dove con  $\text{graph}(\psi)$  s'intende il grafico di  $\psi$  e  $S(w) = \sqrt{(\Im w_n)^2 + \|w'\|^2}$ . Segue dunque, da semplici stime geometriche e dal Lemma 3.3.8, ponendo  $\xi_n^w = \pi_n(\xi^w)$ , che

$$\frac{\partial_\Omega(w)}{\psi(\Re w_n) - S(w)} = \frac{|(\Re \xi_n^w - \Re w_n) + i(\psi(\Re \xi_n^w) - S(w))|}{\psi(\Re w_n) - S(w)} \rightarrow 1$$

per  $\Re w_n \rightarrow 0$ . Allora esiste una costante  $A'' > 0$  tale che:

$$\{z \in \Omega \cap V_{j^*} \mid 0 < \Re z_n < A''\} \subseteq \Omega \cap U^{(1)}; \quad (33)$$

$$\psi(x) \in (0, 1) \text{ per ogni } x \in (0, A''); \quad (34)$$

$$\frac{\delta_\Omega(w)}{\psi(\Re w_n) - S(w)} > 1/2 \quad (35)$$



per ogni  $w \in \Omega \cap V_{j^*}$  tale che  $\Re w_n \in (0, A'')$ .

Fissiamo ora un punto  $w \in \Omega \cap V_{j^*}$  tale che  $0 < \Re w_n < A''$ ; allora esiste una costante  $b > 0$  tale che

$$\begin{aligned} K_\Omega(w; v) &\geq b \frac{\|v\|}{|u(w)|^2} \\ &= b \frac{\|v\|}{(\psi(\Re w_n) - S(w))^{1/2} (\psi(\Re w_n) + S(w))^{1/2}} \\ &\geq \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\|v\|}{(\psi(\Re w_n) - S(w))^{1/2}} \geq \frac{b}{2} \cdot \frac{\|v\|}{\delta_\Omega(w)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (36)$$

dove la prima disuguaglianza segue dal Lemma 3.3.9, l'uguaglianza segue da (33) e dalle definizioni di  $\chi_1$  e  $\chi_2$ , e la penultima e ultima disuguaglianza seguono, rispettivamente, da (34) e da (35).

Passo 2: una stima dall'alto per  $M_\Omega$ .

Dato che le stime fatte al passo 1 valgono per un qualsiasi  $q_{j^*}$ , che sono in numero finito, ne deduciamo che esistono delle costanti  $\beta, A_1'', \dots, A_N'' > 0$  tali che

$$K_\Omega(w; v) \geq \beta \frac{\|v\|}{\delta_\Omega(w)^{1/2}} \quad (37)$$

per ogni  $w \in \Omega \cap \bigcup_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n < A_j''\})$ , per ogni  $v \in \mathbb{C}^n$  e per  $j = 1, \dots, N$ . Adesso poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &:= \partial\Omega \cap \bigcap_{j=1}^N \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n > A_j''/2\}), \\ \mathcal{M}_1 &:= \partial\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n < A_j''\}). \end{aligned}$$

Dalla Definizione 3.3.1, in ogni punto di  $\partial\Omega \setminus \{q_1, \dots, q_N\}$  esiste una funzione di definizione locale. Poiché  $\mathcal{M}_0$  è relativamente compatto in  $\partial\Omega$ , usando delle partizioni dell'unità possiamo incollare tra loro un numero finito di tali funzioni per ottenere una funzione di definizione per  $\mathcal{M}_0$ ; siccome possiamo sempre farlo in modo che vicino a un punto specifico sia uguale alla funzione di definizione locale per  $\partial\Omega \setminus \{q_1, \dots, q_N\}$ , e dato che la stretta pseudoconvessità in un punto è indipendente dalla funzione di definizione scelta ([Kr, Section 3.2]), usando anche [Kr, Proposition 3.2.1] si trova che  $\mathcal{M}_0$  soddisfa le ipotesi del Lemma 3.3.10.

Dunque esistono un intorno  $\mathcal{V}$  di  $\mathcal{M}_1$  in  $\overline{\Omega}$  e una costante  $\beta' > 0$  tali che

$$K_\Omega(w; v) \geq \beta' \frac{\|v\|}{\delta_\Omega(w)^{1/2}} \quad (38)$$

per ogni  $w \in \mathcal{V} \cap \Omega$  e  $v \in \mathbb{C}^n$ . Consideriamo adesso l'insieme

$$\Omega \setminus \left( \mathcal{V} \cup \bigcup_{j=1}^N \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n < A_j''\}) \right),$$

che è compatto per definizione; allora la pseudometrica di Kobayashi ha un minimo positivo su tale insieme. Per la (37) e la (38), segue che

$$\frac{1}{K_\Omega(w; v)} \lesssim \delta_\Omega(w)^{1/2}$$

per ogni  $w \in \Omega$  e per ogni  $v \in \mathbb{C}^n$  con  $\|v\| = 1$ . In particolare,  $M_\Omega(r) \lesssim r^{1/2}$ .

Passo 3: il comportamento di  $k_\Omega$ .

Fissiamo inizialmente un punto  $q_j$ , e siano  $a_j$ ,  $h_j$  e  $B_j$  le costanti date dal Lemma 3.3.7 con  $\psi = \psi_j$ . Per semplicità di notazione poniamo  $a = a_j$  e  $h = h_j$ . Consideriamo un punto  $w \in \Omega \cap \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n < B_j/2\})$  e scriviamo  $\mathbb{U}_j(w) = (\omega', \omega_n)$ . Sia  $\Psi_{j,w} : \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \rightarrow \mathbb{C}^n$  la funzione olomorfa data da

$$\psi_{j,w}(\zeta) := \mathbb{U}_j^{-1}(\omega', \psi_j^{-1}(S(\omega)) + i\Im \omega_n + \zeta),$$

con  $\alpha = 1/(p_j - 1)$  e  $S(\omega) = \sqrt{(\Im \omega_n)^2 + \|\omega'\|^2}$ . Notiamo che questa mappa è un'immersione affine di  $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$  in  $\mathbb{C}^n$ . Vogliamo vedere che è un'immersione a valori in  $\Omega$ , per potervi ottenere la stime per  $k_\Omega$ .

Notiamo che  $\Re \omega_n < B_j/2$ ; allora, per come è stato preso  $w$  e per la Definizione 3.3.1, si ha  $\|\omega'\| < \psi_j(B_j/2)$ . Segue quindi dai punti (1) e (2) del Lemma 3.3.7 che:

(i) si ha

$$\begin{aligned} & \{\omega'\} \times \left( \psi_j^{-1}(S(\omega)) + i\Im \omega_n + \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \right) \\ & \subseteq \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re z_n \in (0, A_j) \text{ e } (\Im z_n)^2 + \|z'\|^2 < \psi_j(\Re z_n)^2\}; \end{aligned}$$

(ii) si ha  $\Re \omega_n \in \left( \psi_j^{-1}(S(\omega)), \psi_j^{-1}(S(\omega)) + o \right)$ .

Adesso poniamo  $K_j := \mathbb{U}_j^{-1}(K)$  e  $z_w := \Psi_{j,w}(o)$ , dove  $K$  è il compatto dato dal Lemma 3.3.7. Allora segue, dalla parte (3) del Lemma, che  $z_w \in K_j$  per ogni  $w \in \Omega \cap V_j$  tale che  $0 < \Re \omega_n < B_j/2$ .

Dal punto (i) sopra segue che  $\Psi_{j,w}(\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}) \subseteq \Omega$ . Per definizione abbiamo che  $\Psi_{j,w}(-\psi_j^{-1}(S(\omega)) + \Re \omega_n) = w$ . Allora, per la Proposizione 1.1.15, si ha  $k_\Omega(z_w, w) \leq k_{\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}}(o, -\psi_j^{-1}(S(\omega)) + \Re \omega_n)$ . Dal punto (ii) e dalla Proposizione 3.3.4 con  $x_0 = o$  troviamo che esiste una costante  $C^{(j)} > 0$  tale che  $k_\Omega(z_w, w) \leq C^{(j)} + \frac{\pi}{4h} |\Re \omega_n - \psi_j^{-1}(S(\omega))|^{-(p_j-1)}$ .  $\square$

### 3.4 Un altro esempio

L'ultimo esempio è quello mostrato in [CMS, Section 5.2]; si tratta di un altro esempio di dominio non di tipo Goldilocks che soddisfa la condizione di visibilità.

Iniziamo considerando la funzione  $\Phi_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\Phi_0(z) := \begin{cases} \exp(-1/\|z\|^2) - \Im(z_2) & \text{se } z = (z_1, z_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Poiché la matrice hessiana di  $\Phi_0$  (vista come funzione da  $\mathbb{R}^4$  in  $\mathbb{R}$ ) è la stessa della funzione  $\exp(-1/\|z\|^2)$  estesa a 0 nell'origine, che è convessa vicino all'origine, esiste  $0 < \varepsilon < 1$  tale che  $\Phi_0$  è convessa in  $\mathbb{B}_{2\varepsilon}^2$ . Scegliamo inoltre una funzione liscia  $\psi : \mathbb{C}^2 \rightarrow [0, 1]$  tale che  $\psi \equiv 1$  in  $\mathbb{B}_{2\varepsilon}^2$  e  $\text{supp } \psi \subseteq \mathbb{B}_{3\varepsilon}^2$ . Poniamo  $\Phi := \Phi_0 \cdot \psi$  e  $c_0 := \sup_{z \in \mathbb{C}^2} (-\Phi(z)) > 0$ .

Scegliamo adesso una funzione liscia  $\chi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  che sia identicamente nulla in  $[0, \varepsilon^2]$ , strettamente crescente in  $[\varepsilon^2, +\infty)$  e strettamente convessa in  $(\varepsilon^2, (\varepsilon + \delta)^2)$  per  $0 < \delta < \varepsilon$ ; per esempio, possiamo prendere  $\chi(t) = \exp(-1/(t - \varepsilon^2))$  per  $t > \varepsilon^2$  e 0 altrove. Poniamo  $c_1 := \chi((\varepsilon + \delta/2)^2)$  e  $C := c_0/c_1$ . Definiamo

$$\Psi(z) := C\chi(\|z\|^2)$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}^2$ .

Osserviamo che:

- la funzione  $\Psi$  è liscia e non negativa su tutto  $\mathbb{C}^2$ , nulla in  $\overline{\mathbb{B}_\varepsilon^2}$ , e strettamente convessa e strettamente positiva in  $\mathbb{B}_{\varepsilon+\delta}^2 \setminus \overline{\mathbb{B}_\varepsilon^2}$ ;
- si ha  $\Psi(z) \geq c_0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{B}_{\varepsilon+\delta/2}^2$ , da cui  $\Psi(z) + \Phi(z) \geq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{B}_{\varepsilon+\delta/2}^2$ ;
- si ha  $\Psi(z) + \Phi(z) = \Phi(z) = \Phi_0(z)$  per ogni  $z \in \mathbb{B}_\varepsilon^2$ .

Consideriamo il dominio

$$\Omega := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \rho(z) := \Psi(z) + \Phi(z) < 0\}.$$

Notiamo che  $\Omega \subseteq \mathbb{B}_{\varepsilon+\delta/2}^2$ , dove  $\rho = \Psi + \Phi_0$ , che è una funzione convessa; per cui  $\Omega$  è un dominio convesso limitato. Calcolando il gradiente di  $\rho$ , vediamo che esiste al più un punto  $p_0 \in \partial\Omega$  dove il gradiente si annulla, che è della forma  $p_0 = (0, ic)$ ; inoltre,  $p_0 \in \overline{\mathbb{B}_{\varepsilon+\delta/2}^2} \setminus \overline{\mathbb{B}_\varepsilon^2}$ . Dunque  $\Omega$  è un dominio limitato e convesso tale che  $\partial\Omega \setminus \{p_0\}$  è liscio. Si ha anche che ogni punto di  $(\partial\Omega \setminus \{p_0\}) \cap (\mathbb{B}_{\varepsilon+\delta}^2 \setminus \overline{\mathbb{B}_\varepsilon^2})$  è un punto del bordo di  $\Omega$  strettamente convesso (perché in  $\mathbb{B}_{\varepsilon+\delta}^2 \setminus \overline{\mathbb{B}_\varepsilon^2}$  la funzione  $\Psi$  è strettamente convessa e la funzione  $\Phi_0$  è convessa); dunque è pseudoconvesso (segue dalla dimostrazione di [A1, Proposition 2.1.13]) e, per [D'A, Corollary 5.6], è un punto di tipo finito. Poniamo  $A := \partial\Omega \cap \overline{\mathbb{B}_\varepsilon^2}$  e osserviamo che

$$A = \overline{\mathbb{B}_\varepsilon^2} \cap \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \Phi_0(z) = 0\};$$

si ha anche che ogni punto di  $A$  diverso da  $(0, 0)$  è un punto del bordo di  $\Omega$  di tipo finito (perché  $\Phi_0$  è strettamente convessa in  $\overline{\mathbb{B}_\varepsilon^2} \setminus \{(0, 0)\}$ , per cui ogni

punto di  $A$  è strettamente convesso).

Possiamo ora procedere a dimostrare che  $\Omega$  è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile per ogni  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa > 0$ .

**Proposizione 3.4.1.** (*[CMS, Corollary 1.10]*) *Sia  $\Omega$  un dominio limitato di  $\mathbb{C}^d$ . Supponiamo che esista un compatto  $S \subseteq \partial\Omega$  tale che  $S_a$ , l'insieme dei punti di accumulazione di  $S$ , sia finito, e inoltre che ogni punto  $p \in \partial\Omega \setminus S$  sia un punto liscio di bordo pseudoconvesso e di tipo finito. Allora  $\Omega$  è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile per ogni  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa > 0$ .*

*Dimostrazione.* Mostriamo che, dati  $p, q \in \partial\Omega$  con  $p \neq q$ , sono soddisfatte le ipotesi (i) e (ii) del Teorema 3.1.3. Per farlo, consideriamo  $S_0 := S_a \cup \{p, q\}$ . Allora, per finitezza di  $S_0$ , esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che  $\overline{B(x, \varepsilon_0)} \cap \overline{B(x', \varepsilon_0)} = \emptyset$  per ogni  $x, x' \in S_0$ . Adesso poniamo

$$S_1 := (S \cup \{p, q\}) \setminus \left( \bigcup_{x \in S_a} \overline{B(x, \varepsilon_0)} \right);$$

notiamo che  $S_1$  è un insieme finito disgiunto dal compatto  $K := \bigcup_{x \in S_a} \overline{B(x, \varepsilon_0)}$ .

Dunque esiste  $\varepsilon_1 > 0$  tale che:

- si ha  $\overline{B(y, \varepsilon_1)} \cap K = \emptyset$  per ogni  $y \in S_1$ ;
- $\overline{B(y, \varepsilon_1)} \cap \overline{B(y', \varepsilon_1)} = \emptyset$  per ogni  $y, y' \in S_1$  con  $y \neq y'$ .

Distinguiamo ora due casi.

Caso 1:  $p \notin K$ .

Basta prendere  $p' = p$  e  $r = \varepsilon_1$ .

Caso 2:  $p \in K$ .

In questo caso esiste un  $x_0 \in S_a$  tale che  $p \in \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ . Consideriamo la seguente famiglia di insiemi con chiusure mutualmente disgiunte:

$$\mathcal{B} := \{B(x, \varepsilon_0) \mid x \in S_a\} \cup \{B(y, \varepsilon_1) \mid y \in S_1\};$$

allora esiste  $\varepsilon_2 > 0$  tale che  $\varepsilon_2 < \text{dist}(B_1, B_2)/4$  per ogni  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Segue che  $\mathcal{C} := \{B(x, \varepsilon_0 + \varepsilon_2) \mid x \in S_a\} \cup \{B(y, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \mid y \in S_1\}$  è una famiglia di insiemi con chiusure mutualmente disgiunte. Allora basta prendere  $p' = x_0$  e  $r = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .

Per concludere mostriamo adesso che, per ogni  $q' \in \partial\Omega \setminus S$ , esistono un intorno  $U$  e una funzione  $f$  che soddisfano le ipotesi (1), (2) e (3) del Teorema 3.1.3. Fissiamo un tale  $q'$ ; allora sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.2.7 e di [FR, Proposition 2.5], per cui esistono un intorno  $U$  di  $q'$ , due costanti  $c, \varepsilon > 0$ , un punto  $z_0 \in \Omega$  e una costante  $A$  tali che, ponendo  $f(x) := A + \frac{1}{2} \log x$

per ogni  $x \in (0, +\infty)$ , si ha

$$k_\Omega(z, z_0) \leq f(1/\delta_\Omega(z))$$

e

$$K_\Omega(z; v) \geq c \frac{\|v\|}{\delta_\Omega(z)^\varepsilon}$$

per ogni  $z \in \Omega \cap U$  e  $v \in \mathbb{C}^d$ . Ne consegue facilmente che le ipotesi (1), (2) e (3) del Teorema 3.1.3 sono soddisfatte, come voluto.  $\square$

Basta allora prendere  $S = \{p_0, (0, 0)\}$  per ottenere che  $\Omega$  soddisfa le ipotesi della Proposizione 3.4.1, dunque è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile per ogni  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa > 0$ .

Mostriamo adesso che  $\Omega$  non soddisfa la condizione (1) nella Definizione 3.1.1. Iniziamo notando che

$$\Omega \cap \mathbb{B}_{\varepsilon/2}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}^2 \mid \Im(z_2) > \exp(-1/\|z\|^2)\};$$

dunque, per  $r > 0$  sufficientemente piccolo, si ha che  $p_r := (0, ir) \in \Omega$ . Poniamo  $v := (1, 0)$  e  $s := \sqrt{\frac{1}{\log(1/r)} - r^2}$ ; allora la funzione  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  data da  $\varphi(\zeta) = p_r + \zeta sv$  è ben definita (cioè l'immagine è effettivamente contenuta in  $\Omega$ ) e olomorfa, per cui

$$K_\Omega(p_r; v) \leq \frac{1}{s}.$$

Adesso, poiché  $(0, 0) \in \partial\Omega$ , si ha  $\delta_\Omega(p_r) \leq r$ , per cui

$$M_\Omega(r) \geq \frac{1}{K_\Omega(p_r; v)} \geq s = \sqrt{\frac{1}{\log(1/r)} - r^2};$$

per cui ci basta mostrare che, per  $r_0 > 0$  sufficientemente piccolo affinché l'integranda sia definita, si ha

$$\int_0^{r_0} \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{\log(1/r)} - r^2} dr = +\infty.$$

Ciò segue facilmente confrontando con la funzione  $r \mapsto \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log(1/r)}}$ .

## Riferimenti bibliografici

- [A1] M. Abate: **Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds**. Mediterranean Press, Cosenza, 1989 [<http://www.dm.unipi.it/~abate/libri/libriric/libriric.html>]
- [A2] M. Abate: Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*, **18** (1991), no. 2, 167–191
- [A3] M. Abate: A characterization of hyperbolic manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **117** (1993), no. 3, 789–793
- [A4] M. Abate: Dynamics in several complex variables. In **Metrical and dynamical aspects in complex analysis**, Ed. L. Blanc-Centi, Lecture Notes in Mathematics **2195**, Springer, Berlin, 2017, pp. 25–54
- [A5] M. Abate: **Holomorphic Dynamics on Hyperbolic Riemann Surfaces**. De Gruyter, Berlin, 2023
- [Ah] L. V. Ahlfors: **Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory**. AMS Chelsea Publishing, Providence, 1973
- [B] T. J. Barth: The Kobayashi distance induces the standard topology. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **35** (1972), 439–441
- [BB] Z. M. Balogh, M. Bonk: Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **75** (2000), no. 3, 504–533
- [BH] M. R. Bridson, A. Haefliger: **Metric-Spaces of Non-Positive Curvature**. Springer, Berlin, 1999
- [BM] G. Bharali, A. Maitra: A weak notion of visibility, a family of examples, and Wolff-Denjoy theorems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, **22** (2021), no. 1, 195–240
- [BNT] F. Bracci, N. Nikolov, P. J. Thomas: Visibility of Kobayashi geodesics in convex domains and related properties. *Mathematische Zeitschrift*, **301** (2022), no. 2, 2011–2035
- [BZ1] G. Bharali, A. Zimmer: Goldilocks domains, a weak notion of visibility, and applications. *Advances in Mathematics*, **310** (2017), 377–425

Non sono sicuro del Berlin; Berlin o Leck?

- [BZ2] G. Bharali, A. Zimmer: Unbounded visibility domains, the end compactification, and applications. Preprint, arXiv:2206.13869v1 (2022)
- [Ca] H. Cartan: Sur les rétractions d'une variété. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, **303** (1986), no. 14, 715
- [Ch] S. Cho: A lower bound on the Kobayashi metric near a point of finite type in  $\mathbb{C}^n$ . *Journal of Geometric Analysis*, **2** (1992), no. 4, 317–325
- [CMS] V. S. Chandel, A. Maitra, A. D. Sarkar: Notions of Visibility with respect to the Kobayashi distance: Comparison and Applications. Preprint, arXiv:2111.00549v1 (2021)
- [D] A. Denjoy: Sur l'itération des fonctions analytiques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **182** (1926), 255–257
- [D'A] J. P. D'Angelo: Real hypersurfaces, orders of contact, and applications. *Annals of Mathematics. Second Series*, **115** (1982), no. 3, 615–637
- [FR] F. Forstnerič, J.-P. Rosay: Localization of the Kobayashi metric and the boundary continuity of proper holomorphic mappings. *Mathematische Annalen*, **279** (1987), no. 2, 239–252
- [G] I. Graham: Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in  $\mathbb{C}^n$  with smooth boundary. *Transactions of the American Mathematical Society*, **207** (1975), 219–240
- [H] L. Hörmander: **An Introduction to Complex Analysis in Several Variables**. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1990
- [Ka] A. Karlsson: Non-expanding maps and Busemann functions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **21** (2001), no. 5, 1447–1457
- [Ke] J. L. Kelley: **General Topology**. Springer, New York, 1975
- [Ko1] S. Kobayashi: Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **19** (1967), 460–480
- [Ko2] S. Kobayashi: **Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings: An Introduction (Second Edition)**. World Scientific Publishing, Singapore, 2005

- [Kr] S. G. Krantz: **Function Theory of Several Complex Variables: Second Edition**. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001
- [KR] N. Kerzman, J.-P. Rosay: Fonctions plurisousharmoniques d'exhaustion bornées et domaines taut. *Mathematische Annalen*, **257** (1981), no. 2, 171–184
- [N] R. Narasimhan: **Several Complex Variables**. University of Chicago Press, Chicago, 1971
- [NTT] N. Nikolov, P. J. Thomas, M. Trybula: Gromov (non-)hyperbolicity of certain domains in  $\mathbb{C}^2$ . *Forum Mathematicum*, **28** (2016), no. 4, 783–794
- [Rosa] J.-P. Rosay: Un exemple d'ouvert borné de  $\mathbb{C}^3$  “taut” mais non hyperbolique complet. *Pacific Journal of Mathematics*, **98** (1982), no. 1, 153–156
- [Ross] H. Rossi: Vector fields on analytic spaces. *Annals of Mathematics. Second Series*, **78** (1963), 455–467
- [Roy] H. L. Royden: Remarks on the Kobayashi metric. In **Several Complex Variables II**, Proceedings of the International Mathematical Conference, Lecture Notes in Mathematics **185**, Springer, Berlin, 1971, pp. 125–137
- [S] M. Spivak: **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume I, Third edition**. Publish or Perish, Inc., Houston, 1999
- [V] S. Venturini: Pseudodistances and pseudometrics on real and complex manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta*, **154** (1989), 385–402
- [Wo] J. Wolff: Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **182** (1926), 918–920
- [Wu] H. Wu: Normal families of holomorphic mappings. *Acta Mathematica*, **119** (1967), 193–233



## Ringraziamenti

Da scrivere alla fine.