

Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili
complesse (titolo da rivedere, tanto la copertina
va fatta tutta nel dettaglio)

Marco Vergamini Relatore: Marco Abate

Data: si vedrà

Indice

Introduzione	3
1 Preliminari	4
1.1 Notazione e definizioni di base	4
1.2 Risultati noti della teoria	7
Riferimenti bibliografici	10
Ringraziamenti	11

Introduzione

DA SCRIVERE ALLA FINE.

1 Preliminari

1.1 Notazione e definizioni di base

Introduciamo la notazione che useremo:

- scriviamo Ω per indicare un *dominio* di \mathbb{C}^n , vale a dire un aperto connesso;
- con *varietà complessa* s'intende una varietà differenziabile reale di dimensione pari con i cambi di carta olomorfi se visti come fra aperti di \mathbb{C}^n ;
- data X varietà complessa e $x \in X$, indichiamo con $T_x X$ lo spazio tangente a X in x , che nel caso dei domini è canonicamente identificato con \mathbb{C}^n ;
- date X, Y varietà complesse, indichiamo con $\text{Hol}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X a Y e con $\text{Aut}(X)$ l'insieme delle funzioni biolomorfe da X in sé;
- data $f \in \text{Hol}(X, Y)$, indichiamo con $Df(x)$ il differenziale di f in $x \in X$;
- il disco unitario è $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, mentre \mathbb{D}^n è il polidisco in \mathbb{C}^n e $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ è il disco di raggio $r > 0$;
- la palla unitaria (euclidea) in \mathbb{C}^n è $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$, dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea, mentre $\mathbb{B}_r^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$ è la palla (euclidea) di raggio $r > 0$;
- dato un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $x \in \mathbb{C}^n$, scriviamo $\delta(x) = \inf_{w \in \partial\Omega} \|x - w\|$ per indicare la distanza euclidea di x dal bordo di Ω ;
- ALTRO?

Ricordiamo cosa sono la metrica e la distanza di Poincaré in \mathbb{D} .

Definizione 1.1.1. La *metrica di Poincaré* (o *iperbolica*) su \mathbb{D} è data da

$$K_{\mathbb{D}}(z; v) = \frac{1}{1 - |z|^2} |v| \quad (1)$$

per ogni $z \in \mathbb{D}$ e $v \in \mathbb{C} \cong T_z^{\mathbb{C}} \mathbb{D}$. La metrica $K_{\mathbb{D}}$ è hermitiana completa con curvatura gaussiana costante uguale a -4 .

Definizione 1.1.2. La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) $k_{\mathbb{D}}$ su \mathbb{D} è la forma integrata della metrica di Poincaré. Per fatti noti di geometria iperbolica, è una distanza completa la cui espressione è data da

$$k_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|} \quad (2)$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Oltre alla curvatura negativa costante, la metrica e la distanza di Poincaré sono tali che le funzioni olomorfe dal disco unitario in sé sono semicontrazioni rispetto ad esse (Lemma di Schwarz-Pick, INSERIRE UNA CITAZIONE). Quello che vogliamo fare ora è generalizzare la metrica e la distanza di Poincaré

ad una qualsiasi varietà complessa mantenendo queste proprietà, in particolare quella di rendere le funzioni olomorfe delle semicontrazioni. Ci sono vari modi per farlo, noi nello specifico vedremo la (pseudo)metrica e la (pseudo)distanza di Kobayashi.

Definizione 1.1.3. Sia X una varietà; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x; Z) = \inf \{ |v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tale che } f(0) = x, Df(0)v = Z \} \quad (3)$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Osservazione 1.1.4. Non possiamo parlare di metrica perché, ad esempio, $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$; vedremo però tra poco che per i domini limitati è effettivamente una metrica. Notiamo anche che, data $f \in \text{Hol}(X, Y)$, allora dalla definizione segue che $K_Y(f(x); Df(x)Z) \leq K_X(x; Z)$ per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Definiamo adesso la (pseudo)distanza di Kobayashi; più avanti vedremo (SOLO CIT DEL RISULTATO ORIGINALE O ANCHE DIM?) com'è collegata alla pseudometrica di Kobayashi.

Definizione 1.1.5. Sia X una varietà complessa connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$k_X(z, w) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m k_{\mathbb{D}}(z_{j-1}, z_j) \mid m \in \mathbb{N}, z_j \in \mathbb{D} \text{ per } j = 0, \dots, m \text{ tali che} \right. \\ \left. \text{esistono } \varphi_j \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ con } \varphi_1(z_0) = z, \varphi_m(z_m) = w \right\} \quad (4)$$

per $z, w \in X$, dove $k_{\mathbb{D}}$ è la distanza di Poincaré.

Osservazione 1.1.6. È facile vedere che k_X è una pseudodistanza, ma in generale non è una distanza, ad esempio perché, come prima, $k_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$. Inoltre, data $f \in \text{Hol}(X, Y)$, dalla definizione segue che $k_Y(f(x), f(y)) \leq k_X(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Definizione 1.1.7. Sia X una varietà complessa connessa. Se k_X è una distanza, diremo che X è *Kobayashi-iperbolica*.

DA QUALCHE PARTE POTREBBE SERVIRTI METTERE LA PROP CHE PER LE VARIETÀ K-IPERBOLICHE LA TOPOLOGIA INDOTTA DA k È LA STESSA CHE QUELLA DI VARIETÀ

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per enunciare i risultati già noti nel caso dei domini regolari.

Definizione 1.1.8. Una funzione continua $\mu : \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$ è detta *funzionale di Minkowski* se

- (i) $\mu(Z) = 0$ se e solo se $Z = 0$;
- (ii) $\mu(\zeta Z) = |\zeta|\mu(Z)$ per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ e $\zeta \in \mathbb{C}$.

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, poniamo $\mu_\Omega(Z) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(Z - w)$.

Definizione 1.1.9. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $u : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *subarmonica* se per ogni $a \in A$, per ogni $r > 0$ tale che $\overline{D(a, r)} \subset A$ e per ogni h continua in $\overline{D(a, r)}$ e armonica in $D(a, r)$, se $h|_{\partial D(a, r)} \geq u|_{\partial D(a, r)}$, allora anche $h|_{D(a, r)} \geq u|_{D(a, r)}$.

Sia $A \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $u : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *plurisubarmonica* se per ogni $a \in A$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ l'applicazione $\zeta \mapsto u(a + \zeta Z)$ è subarmonica dove definita.

Definizione 1.1.10. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice (*Hartogs*) *pseudoconvesso* se esiste un funzionale di Minkowski μ tale che $-\log \mu_\Omega$ è plurisubarmonica in Ω .

Nel caso di domini regolari, si può dare una definizione di pseudoconvessità più operativa equivalente.

Definizione 1.1.11. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio con bordo C^2 , cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $d\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$.

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è

$$H_p \partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}. \quad (5)$$

Diciamo che Ω è *Levi pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n \quad (6)$$

è semidefinita positiva in $H_p \partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$. Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso* se la forma di Levi è definita positiva.

Vale il seguente risultato. (INSERIRE CIT, POI: MEGLIO CITARLO COME FATTO O COME TEOREMA?)

Fatto 1.1.12. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con bordo C^2 . Allora Ω è Levi pseudoconvesso se e solo se è Hartogs pseudoconvesso.

Nella prossima sottosezione citeremo alcuni risultati sulla geometria dei domini limitati strettamente pseudoconvessi dotati della distanza di Kobayashi. In particolare, vedremo che sono Gromov-iperbolici, il che permette di derivare un teorema di tipo Wolff-Denjoy per questi domini.

Definizione 1.1.13. Sia (X, d) uno spazio metrico proprio, cioè tale che ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto. Dati $x, y, w \in X$ il *prodotto di Gromov* tra x e y con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ -iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se (X, d) è δ -iperbolico per qualche $\delta \geq 0$, diremo che è *Gromov-iperbolico*.

(SERVE DAVVERO LA DEF DEL BORDO?) Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* $\partial_G X$ è costruito come classi di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i, x_j)_w = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, y_i)_w = \infty$.

Prima di passare a vedere i risultati noti della teoria sulla pseudometrica e la pseudodistanza di Kobayashi e sui domini strettamente pseudoconvessi, introduciamo il concetto di varietà taut, che sarà per noi un'ipotesi importante per i teoremi che andremo a dimostrare: infatti, quest'ipotesi ci darà la dicotomia nella tesi del teorema. Vedremo anche con un esempio l'importanza di tale ipotesi.

FORSE QUI CI VA THEOREM 1.3.1 DI LILLECAP1, CON ANCHE LA DEFINIZIONE DI X^* COME COMPATTIFICAZIONE DI ALEXANDROFF

Definizione 1.1.14. Una varietà complessa X si dice taut se è Kobayashi-iperbolica e ogni mappa nella chiusura di $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la mappa costante a ∞ .

Per finire, diamo delle definizioni che ci serviranno per parlare del comportamento delle iterate di funzioni olomorfe.

Definizione 1.1.15. Siano X e Y due spazi topologici. Diciamo che una successione $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C^0(X, Y)$ è *compattamente divergente* se per ogni coppia di compatti $H \subseteq X$ e $K \subseteq Y$ esiste $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(H) \cap K = \emptyset$ per ogni $\nu \geq \nu_0$.

Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ è detta *normale* se ogni successione in \mathcal{F} ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente.

DA METTERE: COR 1.3.4 di LILLECAP1, MA QUESTO FORSE MEGLIO NEI RISULTATI

1.2 Risultati noti della teoria

Vediamo ora alcuni risultati noti della teoria che ci saranno utili nelle nostre dimostrazioni. Cominciamo con l'espressione esplicita per k_X in un paio di casi espliciti, dalla quale discende un'importante conseguenza.

Proposizione 1.2.1. (METTERE UNA CIT) Si ha che:

(i) la distanza di Poincaré e la pseudodistanza di Kobayashi coincidono per \mathbb{D} ;

(ii) dati $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ in \mathbb{D}^n , si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = \max_{j=1, \dots, n} \{k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j)\};$$

(iii) L'ESPRESSIONE ESPLICITA PER LA PALLA METTILA SOLO SE SERVE.

- Dimostrazione.* (i) Che la pseudodistanza di Kobayashi sia almeno la distanza di Poincaré segue dal lemma di Schwarz-Pick e dalla disuguaglianza triangolare per la distanza di Poincaré; per avere l'uguaglianza, basta notare che il minimo nella definizione della pseudodistanza di Kobayashi è effettivamente raggiunto usando l'identità.
- (ii) Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}^n)$ e $\zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$ tali che $\varphi_1(\zeta_0) = z$ e $\varphi_m(\zeta_m) = w$. Allora, chiamando π_j la proiezione sulla j -esima coordinata, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^m k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) &\geq \sum_{h=1}^m k_{\mathbb{D}}((\pi_j \circ \varphi_h)(\zeta_{j-1}), (\pi_j \circ \varphi_h)(\zeta_j)) \\ &\geq k_{\mathbb{D}}((\pi_j \circ \varphi_1)(\zeta_0), (\pi_j \circ \varphi_m)(\zeta_m)) = k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j), \end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato il lemma di Schwarz-Pick e nella seconda la disuguaglianza triangolare per $k_{\mathbb{D}}$. Segue dunque che $k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \geq \max_{j=1, \dots, n} \{k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j)\}$. Per mostrare che il minimo è effettivamente raggiunto, ricordiamo dall'Osservazione 1.1.6 che $k_{\mathbb{D}^n}$ è una semi-contrazione rispetto alle funzioni olomorfe, in particolare è invariante per biolomorfismo, così come lo è $k_{\mathbb{D}}$ dal lemma di Schwarz-Pick. Componendo quindi con $f_1 \times \dots \times f_n$ dove $f_j \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f_j(z_j) = 0$, abbiamo che sia $k_{\mathbb{D}^n}(z, w)$ che $\max_{j=1, \dots, n} \{k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j)\}$ rimangono invariati. Allora, detto j_0 l'indice per cui $k_{\mathbb{D}}(0, w_{j_0})$ è massimo, possiamo considerare $\varphi = g_1 \times \dots \times g_n$ dove $g_j \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ è l'identità per $j = j_0$ e un'opportuna composizione di una rotazione e una contrazione per $j \neq j_0$, di modo che $g_j(w_{j_0}) = w_j$. In tal modo, $\varphi(z_{j_0}) = \varphi(0) = 0 = z$ e $\varphi(w_{j_0}) = w$. \square

Corollario 1.2.2. *La pseudodistanza di Kobayashi è effettivamente una distanza per i domini limitati.*

Dimostrazione. Discende tutto dalla Proposizione precedente e dall'Osservazione 1.1.6. Innanzitutto, dalla Proposizione abbiamo che $k_{\mathbb{D}^n}$ è effettivamente una distanza; poiché dall'Osservazione sappiamo che k_X è invariante per biolomorfismi, segue che $k_{\mathbb{D}_r^n}$ è una distanza per ogni $r > 0$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è un dominio limitato, esiste $r > 0$ tale che $\Omega \subseteq \mathbb{D}_r^n$. In tal caso, l'inclusione è una funzione olomorfa. Allora, sempre dall'Osservazione, si ha che se $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ allora $0 < k_{\mathbb{D}_r^n}(x, y) \leq k_{\Omega}(x, y)$. Segue dunque che k_{Ω} è una distanza, come voluto. \square

Osservazione 1.2.3. Con la stessa dimostrazione, si ottiene anche che le sottovarietà di varietà Kobayashi-iperboliche sono Kobayashi-iperboliche.

Citiamo ora, senza dimostrarlo, un risultato che lega pseudometrica e pseudodistanza di Kobayashi. (PER LE CIT, VEDI L'ARTICOLO DI CHANDEL-MAITRA-SARKAR)

Teorema 1.2.4. *Sia X una sottovarietà complessa connessa embeddata in \mathbb{C}^d . Per ogni $z, w \in X$, abbiamo*

- (i) $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \longrightarrow X \text{ è } C^1 \text{ a tratti, } \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\};$
- (ii) $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \longrightarrow X \text{ è assolutamente continua, } \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\};$

qui, $l_X(\gamma) = \int_a^b K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) dt$ è ben definito in entrambi i casi.

SE SERVONO DA METTERE QUI, MA NON SO SE SERVONO: COSE SULLE VARIETÀ IPERBOLICHE COMPLETE? (IN CASO, LA DEF NELLA SOTTOSEZIONE PRECEDENTE)

DA FARE QUI:

UN SACCO DI RISULTATI, DA DIMOSTRARE E NON, SU PSEUDOMETRICA E PSEUDODISTANZA

UN SACCO DI RISULTATI, DA DIMOSTRARE E NON, SULLE VARIETÀ TAUT

ALTRE COSE CHE TI VENGONO IN MENTE VIA VIA CHE SCRIVI E CHE SONO TROPPO DI BASE PER TROVARE POSTO ALTROVE
NON TI SCORDARE IL TEOREMA DI MONTEL (E FORSE SERVIRÀ ANCHE WEIERSTRASS); SERVIRÀ ANCHE ASCOLI ARZELÀ? SPERIAMO DI NO

Riferimenti bibliografici

- [A] N. Cognome: Titolo dell'articolo. *Nome della rivista su cui è stato pubblicato*, **1** (1999), no. 1, 100–150
- [L] N. Cognome: **Titolo del libro**. Editore, Sede dell'editore, 1999
- [P] M. Cognomeuno, N. Cognomedue: Titolo del preprint. Preprint, codicedelpreprint (1999)

Ringraziamenti

Volendo, si possono aggiungere dei ringraziamenti.