Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili complesse (titolo da rivedere, tanto la copertina va fatta tutta nel dettaglio)

Marco Vergamini Relatore: Marco Abate

Data: si vedrà

Indice

Introduzione

DA SCRIVERE ALLA FINE.

1 Preliminari

1.1 Notazione e definizioni di base

Introduciamo la notazione che useremo:

- scriviamo Ω per indicare un *dominio* di $\mathbb{C}^n$, vale a dire un aperto connesso;
- con *varietà complessa* s'intende una varietà differenziabile reale di dimensione pari con i cambi di carta olomorfi se visti come fra aperti di $\mathbb{C}^n$;
- data X varietà complessa e $x \in X$, indichiamo con $T_x X$ lo spazio tangente a X in x, che nel caso dei domini è canonicamente identificato con $\mathbb{C}^n$;
- dati X, Y spazi topologici, quando parliamo di convergenza nell'insieme $C^0(X, Y)$ delle funzioni continue da X a Y sottintendiamo sempre che si parla della topologia compatta-aperta, che nel caso in cui Y sia uno spazio metrico coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti (potrebbe capitare che commetteremo abusi di notazione in merito);
- date X, Y varietà complesse, indichiamo con $\mathrm{Hol}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X a Y, con $\mathcal{O}(X)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X in $\mathbb{C}$ e con $\mathrm{Aut}(X)$ l'insieme delle funzioni biolomorfe da X in sé;
- data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, indichiamo con $Df(x)$ il differenziale di f in $x \in X$;
- il disco unitario è $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, mentre $\mathbb{D}^n$ è il polidisco in $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ è il disco di raggio $r > 0$;
- la palla unitaria (euclidea) in $\mathbb{C}^n$ è $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$, dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea, mentre $\mathbb{B}^n_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$ è la palla (euclidea) di raggio $r > 0$;
- dato un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $x \in \mathbb{C}^n$, scriviamo $\delta(x) = \inf\limits_{w \in \partial\Omega} \|x - w\|$ per indicare la distanza euclidea di x dal bordo di Ω;
- ALTRO?

Ricordiamo cosa sono la metrica e la distanza di Poincaré in $\mathbb{D}$.

Definizione 1.1.1. La *metrica di Poincaré* (o *iperbolica*) su $\mathbb{D}$ è data da

$$K_{\mathbb{D}}(z; v) = \frac{1}{1 - |z|^2} |v| \tag{1}$$

per ogni $z \in \mathbb{D}$ e $v \in \mathbb{C} \cong T^{\mathbb{C}}_z \mathbb{D}$. La metrica $K_{\mathbb{D}}$ è hermitiana completa con curvatura gaussiana costante uguale a -4.

Definizione 1.1.2. La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) $k_{\mathbb{D}}$ su $\mathbb{D}$ è la forma integrata della metrica di Poincaré. Per fatti noti di geometria iperbolica, è una distanza completa la cui espressione è data da

$$k_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|}{1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|} \tag{2}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Oltre alla curvatura negativa costante, la metrica e la distanza di Poincaré sono tali che le funzioni olomorfe dal disco unitario in sé sono semicontrazioni rispetto ad esse (lemma di Schwarz-Pick, INSERIRE UNA CITAZIONE). Quello che vogliamo fare ora è generalizzare la metrica e la distanza di Poincaré ad una qualsiasi varietà complessa mantenendo queste proprietà, in particolare quella di rendere le funzioni olomorfe delle semicontrazioni. Ci sono vari modi per farlo, noi nello specifico vedremo la (pseudo)metrica e la (pseudo)distanza di Kobayashi.

Definizione 1.1.3. Sia X una varietà; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$\begin{aligned} K_X(x;Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, Df(0)v = Z\} \end{aligned} \tag{3}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_xX$.

Osservazione 1.1.4. Non possiamo parlare di metrica perché, ad esempio, $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$; vedremo però tra poco che per i domini limitati è effettivamente una metrica. Notiamo anche che, data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, allora dalla definizione segue che $K_Y\big(f(x); Df(x)Z\big) \leq K_X(x;Z)$ per ogni $x \in X$ e $Z \in T_xX$.

Definiamo adesso la (pseudo)distanza di Kobayashi; più avanti vedremo (SOLO CIT DEL RISULTATO ORIGINALE O ANCHE DIM?) com'è collegata alla pseudometrica di Kobayashi.

Definizione 1.1.5. Sia X una varietà complessa connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$\begin{aligned} k_X(z,w) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{m} k_{\mathbb{D}}(z_{j-1}, z_j) \mid m \in \mathbb{N}, z_j \in \mathbb{D} \text{ per } j = 0, \ldots, m \text{ tali che} \right. \\ \left. \text{esistono } \varphi_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ con } \varphi_1(z_0) = z, \varphi_m(z_m) = w \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

per $z, w \in X$, dove $k_{\mathbb{D}}$ è la distanza di Poincaré.

Osservazione 1.1.6. È facile vedere che k_X è una pseudodistanza, ma in generale non è una distanza, ad esempio perché, come prima, $k_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$. Inoltre, data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, dalla definizione segue che $k_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq k_X(x,y)$ per ogni $x, y \in X$.

Definizione 1.1.7. Sia X una varietà complessa connessa. Se k_X è una distanza, diremo che X è *Kobayashi-iperbolica*.

Il seguente risultato per le varietà Kobayashi-iperboliche verrà spesso usato implicitamente.

Proposizione 1.1.8. *(INSERIRE CIT) Una varietà complessa connessa X è Kobayashi-iperbolica se e solo se k_X induce su X la topologia di varietà.*

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per enunciare i risultati già noti nel caso dei domini regolari.

Definizione 1.1.9. Una funzione continua $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *funzionale di Minkowski* se

(i) $\mu(Z) = 0$ se e solo se $Z = 0$;
(ii) $\mu(\zeta Z) = |\zeta|\mu(Z)$ per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ e $\zeta \in \mathbb{C}$.

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, poniamo $\mu_\Omega(Z) = \inf_{w\in\mathbb{C}^n\setminus\Omega} \mu(Z - w)$.

Definizione 1.1.10. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $u : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *subarmonica* se per ogni $a \in A$, per ogni $r > 0$ tale che $\overline{D(a, r)} \subset A$ e per ogni h continua in $\overline{D(a, r)}$ e armonica in $D(a, r)$, se $h|_{\partial D(a,r)} \geq u|_{\partial D(a,r)}$, allora anche $h|_{D(a,r)} \geq u|_{D(a,r)}$.

Sia $A \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $u : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *plurisubarmonica* se per ogni $a \in A$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ l'applicazione $\zeta \longmapsto u(a + \zeta Z)$ è subarmonica dove definita.

Definizione 1.1.11. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice *(Hartogs) pseudoconvesso* se esiste un funzionale di Minkowski μ tale che $-\log \mu_\Omega$ è plurisubarmonica in Ω.

Nel caso di domini regolari, si può dare una definizione di pseudoconvessità più operativa equivalente.

Definizione 1.1.12. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio con bordo C^2, cioè esiste $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$.

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è

$$H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle\bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}. \tag{5}$$

Diciamo che Ω è *Levi pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n \tag{6}$$

è semidefinita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$. Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso* se la forma di Levi è definita positiva.

Vale il seguente risultato. (INSERIRE CIT, POI: MEGLIO CITARLO COME FATTO O COME TEOREMA?)

Fatto 1.1.13. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con bordo C^2. Allora Ω è Levi pseudoconvesso se e solo se è Hartogs pseudoconvesso.

Nella prossima sottosezione citeremo alcuni risultati sulla geometria dei domini limitati strettamente pseudoconvessi dotati della distanza di Kobayashi. In particolare, vedremo che sono Gromov-iperbolici, il che permette di derivare un teorema di tipo Wolff-Denjoy per questi domini.

Definizione 1.1.14. Sia (X, d) uno spazio metrico proprio , cioè tale che ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto. Dati $x, y, w \in X$ il *prodotto di*

Gromov tra x e y con punto base w è $(x,y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x,w) + d(y,w) - d(x,y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x,y)_w \geq \min\{(x,z)_w, (y,z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se (X,d) è δ-iperbolico per qualche $\delta \geq 0$, diremo che è *Gromov-iperbolico.*

(SERVE DAVVERO LA DEF DEL BORDO?) Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* $\partial_G X$ è costruito come classi di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim_{i,j\to\infty} (x_i, x_j)_w = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim_{i\to\infty} (x_i, y_i)_w = \infty$.

Prima di passare a vedere i risultati noti della teoria sulla pseudometrica e la pseudodistanza di Kobayashi e sui domini strettamente pseudoconvessi, introduciamo il concetto di varietà taut, che sarà per noi un'ipotesi importante per i teoremi che andremo a dimostrare: infatti, quest'ipotesi ci darà la dicotomia nella tesi del teorema. Vedremo anche con un esempio l'importanza di tale ipotesi. Prima di dare la definizione, ci servirà un risultato sul comportamento delle funzioni olomorfe a valori in una varietà Kobayashi-iperbolica.

Proposizione 1.1.15. *(INSERIRE CIT) Sia X una varietà complessa connessa. Allora X è Kobayashi-iperbolica se e solo se* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ *è relativamente compatto in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, dove X^* è la compattificazione di Alexandroff di X. In tal caso,* $\mathrm{Hol}(Y, X)$ *è relativamente compatto in $C^0(Y, X^*)$ per ogni varietà complessa Y.*

Definizione 1.1.16. Una varietà complessa X si dice *taut* se è Kobayashi-iperbolica e ogni mappa nella chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la mappa costante a ∞.

Per finire, diamo delle definizioni che ci serviranno per parlare del comportamente delle iterate di funzioni olomorfe.

Definizione 1.1.17. Siano X e Y due spazi topologici. Diciamo che una successione $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset C^0(X,Y)$ è *compattamente divergente* se per ogni coppia di compatti $H \subseteq X$ e $K \subseteq Y$ esiste $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(H) \cap K = \varnothing$ per ogni $\nu \geq \nu_0$.

Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X,Y)$ è detta *normale* se ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente.

1.2 Risultati noti della teoria

Vediamo ora alcuni risultati noti della teoria che ci saranno utili nelle nostre dimostrazioni. Cominciamo con alcuni teoremi noti dell'analisi complessa in più variabili.

Teorema 1.2.1. *(Montel, INSERIRE CIT) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Una famiglia $\mathcal{F}$ è relativamente compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se è uniformemente limitata sui compatti.*

WEIERSTRASS SERVE? INOLTRE, SE ASCOLI-ARZELÀ È INEVITABILE CAMBIA LA FRASE SOPRA

Vediamo adesso l'espressione esplicita per k_X in un paio di casi espliciti, dalla quale discende un'importante conseguenza.

Proposizione 1.2.2. *(METTERE UNA CIT) Si ha che:*

(i) la distanza di Poincaré e la pseudodistanza di Kobayashi coincidono per $\mathbb{D}$;

(ii) dati $z = (z_1, \ldots, z_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in $\mathbb{D}^n$, si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = \max_{j=1,\ldots,n} \{k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j)\};$$

(iii) L'ESPRESSIONE ESPLICITA PER LA PALLA METTILA SOLO SE SERVE.

Dimostrazione. (i) Che la pseudodistanza di Kobayashi sia almeno la distanza di Poincaré segue dal lemma di Schwarz-Pick e dalla disuguaglianza triangolare per la distanza di Poincaré; per avere l'uguaglianza, basta notare che il minimo nella definizione della pseudodistanza di Kobayashi è effettivamente raggiunto usando l'identità.

(ii) Siano $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}^n)$ e $\zeta_0, \ldots, \zeta_m \in \mathbb{D}$ tali che $\varphi_1(\zeta_0) = z$ e $\varphi_m(\zeta_m) = w$. Allora, chiamando π_j la proiezione sulla j-esima coordinata, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{m} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) &\geq \sum_{h=1}^{m} k_{\mathbb{D}}\big((\pi_j \circ \varphi_h)(\zeta_{j-1}), (\pi_j \circ \varphi_h)(\zeta_j)\big) \\ &\geq k_{\mathbb{D}}\big((\pi_j \circ \varphi_1)(\zeta_0), (\pi_j \circ \varphi_m)(\zeta_m)\big) = k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j),\end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato il lemma di Schwarz-Pick e nella seconda la disuguaglianza triangolare per $k_{\mathbb{D}}$. Segue dunque che $k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \geq \max_{j=1,\ldots,n}\{k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j)\}$. Per mostrare che il minimo è effettivamente raggiunto, ricordiamo dall'Osservazione 1.1.6 che $k_{\mathbb{D}^n}$ è una semicontrazione rispetto alle funzioni olomorfe, in particolare è invariante per biolomorfismo, così come lo è $k_{\mathbb{D}}$ dal lemma di Schwarz-Pick. Componendo quindi con $f_1 \times \cdots \times f_n$ dove $f_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f_j(z_j) = 0$, abbiamo che sia $k_{\mathbb{D}^n}(z, w)$ che $\max_{j=1,\ldots,n}\{k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j)\}$ rimangono invariati. Allora, detto j_0 l'indice per cui $k_{\mathbb{D}}(0, w_{j_0})$ è massimo, possiamo considerare $\varphi = g_1 \times \cdots \times g_n$ dove $g_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ è l'identità per $j = j_0$ e un'opportuna composizione di una rotazione e una contrazione per $j \neq j_0$, di modo che $g_j(w_{j_0}) = w_j$. In tal modo, $\varphi(z_{j_0}) = \varphi(0) = 0 = z$ e $\varphi(w_{j_0}) = w$. □

Corollario 1.2.3. *La pseudodistanza di Kobayashi è effettivamente una distanza per i domini limitati.*

Dimostrazione. Discende tutto dalla Proposizione precedente e dall'Osservazione 1.1.6. Innanzitutto, dalla Proposizione abbiamo che $k_{\mathbb{D}^n}$ è effettivamente una distanza; poiché dall'Osservazione sappiamo che k_X è invariante per biolomorfismi, segue che $k_{\mathbb{D}^n_r}$ è una distanza per ogni $r > 0$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è un dominio limitato, esiste $r > 0$ tale che $\Omega \subseteq \mathbb{D}^n_r$. In tal caso, l'inclusione è una funzione olomorfa. Allora, sempre dall'Osservazione, si ha che se $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ allora $0 < k_{\mathbb{D}^n_r}(x, y) \leq k_\Omega(x, y)$. Segue dunque che k_Ω è una distanza, come voluto. □

Osservazione 1.2.4. Con la stessa dimostrazione, si ottiene anche che le sottovarietà di varietà Kobayashi-iperboliche sono Kobayashi-iperboliche.

Citiamo ora, senza dimostrarlo, un risultato che lega pseudometrica e pseudodistanza di Kobayashi. (PER LE CIT, VEDI L'ARTICOLO DI CHANDEL-MAITRA-SARKAR)

Teorema 1.2.5. *Sia X una sottovarietà complessa connessa embeddata in $\mathbb{C}^d$. Per ogni $z, w \in X$, abbiamo*

(i) $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \longrightarrow X$ *è C^1 a tratti,* $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$*;*
(ii) $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \longrightarrow X$ *è assolutamente continua,* $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$*;*

qui, $l_X(\gamma) = \displaystyle\int_a^b K_X\big(\gamma(t); \gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t$ *è ben definito in entrambi i casi.*

Il seguente è il risultato sulle varietà taut che ci permetterà di ottenere la dicotomia sulle iterate. SAREBBE BELLO FARE LA DIM, MA RICHIEDE UN PO' DI LAVORO EXTRA; VALUTARE IN SEGUITO, E IN CASO METTERE TUTTE LE COSE EQUIVALENTI

Teorema 1.2.6. *(INSERIRE CIT) Sia X una varietà taut e $f \in Hol(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) la successione delle iterate $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non è compattamente divergente;
(ii) l'orbita di z è relativamente compatta in X per ogni $z \in X$.

Per finire, vediamo un risultato di tipo Wolff-Denjoy per domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo C^2), in particolare faremo riferimento a una dimostrazione che sfrutta fatti geometrici quali la Gromov-iperbolicità. Il Teorema, che già era noto ancora prima che venisse mostrata la Gromov-iperbolicità, è il seguente.

Teorema 1.2.7. *(Abate, INSERIRE CIT) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f \in Hol(\Omega, \Omega)$. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite di f sono relativamente compatte in Ω;*
- *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le orbite di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Per dimostrarlo usando la Gromov-iperbolicità, è prima necessario mostrare che (Ω, k_Ω) è Gromov-iperbolico. Citiamo l'articolo di Balogh e Bonk in cui si trova la dimostrazione.

Teorema 1.2.8. *(Balogh, Bonk INSERIRE CIT) Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *con* $n \geq 2$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso. Allora* (Ω, k_Ω) *è Gromov-iperbolico. FORSE CI VUOLE IL RISULTATO SUL BORDO*

Infine, un Teorema dovuto a Karlsson.

Teorema 1.2.9. *(Karlsson, INSERIRE CIT) CAPIRE QUAL È IL TEOREMA GIUSTO DA APPLICARE A SPAZI GROMOV IPERBOLICI.*

Poiché le ipotesi del Teoerema 1.2.9 sono soddisfatte dagli spazi Gromov-iperbolici (??? VERIFICARE, TROVA IL TEOREMA GIUSTO!), insieme al Teorema 1.2.8 ci dà il Teorema 1.2.7.

Come già anticipato nell'introduzione, qui non vedremo questa dimostrazione, ma un risultato che vale anche per domini con bordo non necessariamente regolare. L'ipotesi di tipo geometrico che andremo ad utilizzare è il concetto di visibilità, di cui discuteremo anche il rapporto con la Gromov-iperbolicità.

Riferimenti bibliografici

[A] N. Cognome: Titolo dell'articolo. *Nome della rivista su cui è stato pubblicato*, **1** (1999), no. 1, 100–150

[L] N. Cognome: **Titolo del libro**. Editore, Sede dell'editore, 1999

[P] M. Cognomeuno, N. Cognomedue: Titolo del preprint. Preprint, codicedelpreprint (1999)

Ringraziamenti

Volendo, si possono aggiungere dei ringraziamenti.