Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili complesse (titolo da rivedere, tanto la copertina va fatta tutta nel dettaglio)

Marco Vergamini Relatore: Marco Abate

Data: si vedrà

Indice

Introduzione

DA SCRIVERE ALLA FINE.

1 Preliminari

1.1 Notazione e definizioni di base

Introduciamo la notazione che useremo:

- scriviamo Ω per indicare un *dominio* di $\mathbb{C}^n$, vale a dire un aperto connesso;
- con *varietà complessa* s'intende una varietà differenziabile reale di dimensione pari con i cambi di carta olomorfi se visti come fra aperti di $\mathbb{C}^n$;
- data X varietà complessa e $x \in X$, indichiamo con $T_x X$ lo spazio tangente a X in x, che nel caso dei domini è canonicamente identificato con $\mathbb{C}^n$;
- dati X, Y spazi topologici, quando parliamo di convergenza nell'insieme $C^0(X, Y)$ delle funzioni continue da X a Y sottintendiamo sempre che si parla della topologia compatta-aperta, che nel caso in cui Y sia uno spazio metrico coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti (potrebbe capitare che commetteremo abusi di terminologia in merito);
- dato X spazio topologico e data $f \in C^0(X, X)$, poniamo induttivamente $f^0 = \mathrm{id}_X$ e $f^{k+1} = f \circ f^k$. Chiamiamo f^k l'*iterata* k-esima di f e, per ogni $x \in X$, l'*orbita* di x tramite f è l'insieme $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$;
- date X, Y varietà complesse, indichiamo con $\mathrm{Hol}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X a Y, con $\mathcal{O}(X)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X in $\mathbb{C}$ e con $\mathrm{Aut}(X)$ l'insieme delle funzioni biolomorfe da X in sé;
- data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, indichiamo con $Df(x)$ il differenziale di f in $x \in X$;
- il disco unitario è $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, mentre $\mathbb{D}^n$ è il polidisco in $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ è il disco di raggio $r > 0$;
- la palla unitaria (euclidea) in $\mathbb{C}^n$ è $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$, dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea, mentre $\mathbb{B}^n_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$ è la palla (euclidea) di raggio $r > 0$;
- dato un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $x \in \mathbb{C}^n$, scriviamo $\delta(x) = \inf\limits_{w \in \partial\Omega} \|x - w\|$ per indicare la distanza euclidea di x dal bordo di Ω;
- ALTRO?

Ricordiamo cosa sono la metrica e la distanza di Poincaré in $\mathbb{D}$.

Definizione 1.1.1. La *metrica di Poincaré* (o *iperbolica*) su $\mathbb{D}$ è data da

$$K_{\mathbb{D}}(z; v) = \frac{1}{1 - |z|^2} |v| \tag{1}$$

per ogni $z \in \mathbb{D}$ e $v \in \mathbb{C} \cong T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{D}$. La metrica $K_{\mathbb{D}}$ è hermitiana completa con curvatura gaussiana costante uguale a -4.

Definizione 1.1.2. La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) $k_{\mathbb{D}}$ su $\mathbb{D}$ è la forma integrata della metrica di Poincaré. Per fatti noti di geometria iperbolica, è una distanza completa la cui espressione è data da

$$k_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|}{1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|} \tag{2}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Oltre alla curvatura negativa costante, la metrica e la distanza di Poincaré sono tali che le funzioni olomorfe dal disco unitario in sé sono semicontrazioni rispetto ad esse (lemma di Schwarz-Pick, si veda ad esempio [K1, Chapter I, paragraph 1, Theorem 1.1]).

Quello che vogliamo fare ora è generalizzare la metrica e la distanza di Poincaré ad una qualsiasi varietà complessa mantenendo queste proprietà, in particolare quella di rendere le funzioni olomorfe delle semicontrazioni. Ci sono vari modi per farlo, noi nello specifico vedremo la (pseudo)metrica e la (pseudo)distanza di Kobayashi, introdotte nel 1967 in [K2].

Definizione 1.1.3. Sia X una varietà; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$\begin{aligned} K_X(x;Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, Df(0)v = Z\} \end{aligned} \tag{3}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_xX$.

Osservazione 1.1.4. Non possiamo parlare di metrica perché, ad esempio, $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$; vedremo però tra poco che per i domini limitati è effettivamente una metrica. Notiamo anche che, data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, allora dalla definizione segue che $K_Y\big(f(x); Df(x)Z\big) \le K_X(x;Z)$ per ogni $x \in X$ e $Z \in T_xX$.

Definiamo adesso la (pseudo)distanza di Kobayashi; più avanti vedremo (SOLO CIT DEL RISULTATO ORIGINALE O ANCHE DIM?) com'è collegata alla pseudometrica di Kobayashi.

Definizione 1.1.5. Sia X una varietà complessa connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$\begin{aligned} k_X(z,w) = \inf\Bigg\{ \sum_{j=1}^{m} k_{\mathbb{D}}(z_{j-1}, z_j) \mid m \in \mathbb{N}, z_j \in \mathbb{D} \text{ per } j = 0, \dots, m \text{ tali che} \\ \text{esistono } \varphi_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ con } \varphi_1(z_0) = z, \varphi_m(z_m) = w \Bigg\} \end{aligned} \tag{4}$$

per $z, w \in X$, dove $k_{\mathbb{D}}$ è la distanza di Poincaré.

Osservazione 1.1.6. È facile vedere che k_X è una pseudodistanza, ma in generale non è una distanza, ad esempio perché, come prima, $k_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$. Inoltre, data $f \in \mathrm{Hol}(X,Y)$, dalla definizione segue che $k_Y\big(f(x), f(y)\big) \le k_X(x,y)$ per ogni $x, y \in X$.

Definizione 1.1.7. Sia X una varietà complessa connessa. Se k_X è una distanza, diremo che X è *Kobayashi-iperbolica*.

Il seguente risultato per le varietà Kobayashi-iperboliche verrà spesso usato implicitamente.

Proposizione 1.1.8. *(INSERIRE CIT) Una varietà complessa connessa X è Kobayashi-iperbolica se e solo se k_X induce su X la topologia di varietà.*

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per enunciare i risultati già noti nel caso dei domini regolari.

Definizione 1.1.9. Una funzione continua $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *funzionale di Minkowski* se

(i) $\mu(Z) = 0$ se e solo se $Z = 0$;
(ii) $\mu(\zeta Z) = |\zeta|\mu(Z)$ per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ e $\zeta \in \mathbb{C}$.

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, poniamo $\mu_\Omega(Z) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(Z - w)$.

Definizione 1.1.10. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $u : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *subarmonica* se per ogni $a \in A$, per ogni $r > 0$ tale che $\overline{D(a, r)} \subset A$ e per ogni h continua in $\overline{D(a, r)}$ e armonica in $D(a, r)$, se $h|_{\partial D(a,r)} \geq u|_{\partial D(a,r)}$, allora anche $h|_{D(a,r)} \geq u|_{D(a,r)}$.

Sia $A \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $u : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *plurisubarmonica* se per ogni $a \in A$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ l'applicazione $\zeta \longmapsto u(a + \zeta Z)$ è subarmonica dove definita.

Definizione 1.1.11. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice *(Hartogs) pseudoconvesso* se esiste un funzionale di Minkowski μ tale che $-\log \mu_\Omega$ è plurisubarmonica in Ω.

Nel caso di domini regolari, si può dare una definizione di pseudoconvessità più operativa equivalente.

Definizione 1.1.12. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio con bordo C^2, cioè esiste una funzione $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$.

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è

$$H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\}. \tag{5}$$

Diciamo che Ω è *Levi pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n \tag{6}$$

è semidefinita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$. Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso* se la forma di Levi è definita positiva.

Vale il seguente risultato. (INSERIRE CIT, POI: MEGLIO CITARLO COME FATTO O COME TEOREMA?)

Fatto 1.1.13. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con bordo C^2. Allora Ω è Levi pseudoconvesso se e solo se è Hartogs pseudoconvesso.

Nella prossima sottosezione citeremo alcuni risultati sulla geometria dei domini limitati strettamente pseudoconvessi dotati della distanza di Kobayashi.

In particolare, vedremo che sono Gromov-iperbolici, il che permette di derivare un teorema di tipo Wolff-Denjoy per questi domini.

Definizione 1.1.14. Sia (X, d) uno spazio metrico proprio, cioè tale che ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto. Dati $x, y, w \in X$ il *prodotto di Gromov* tra x e y con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ-*iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se (X, d) è δ-iperbolico per qualche $\delta \geq 0$, diremo che è *Gromov-iperbolico*.

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* $\partial_G X$ è costruito come classi di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim\limits_{i,j\to\infty}(x_i, x_j)_w = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i)_w = \infty$. Questa costruzione è indipendente dalla scelta di w.

Prima di passare a vedere i risultati noti della teoria sulla pseudometrica e la pseudodistanza di Kobayashi e sui domini strettamente pseudoconvessi, introduciamo il concetto di varietà taut, che sarà per noi un'ipotesi importante per i teoremi che andremo a dimostrare: infatti, quest'ipotesi ci darà la dicotomia nella tesi del teorema. Vedremo anche con un esempio l'importanza di tale ipotesi. Prima di dare la definizione, ci servirà un risultato sul comportamento delle funzioni olomorfe a valori in una varietà Kobayashi-iperbolica.

Proposizione 1.1.15. *(INSERIRE CIT) Sia X una varietà complessa connessa. Allora X è Kobayashi-iperbolica se e solo se* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ *è relativamente compatto in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, dove X^* è la compattificazione di Alexandroff di X. In tal caso,* $\mathrm{Hol}(Y, X)$ *è relativamente compatto in $C^0(Y, X^*)$ per ogni varietà complessa Y.*

Definizione 1.1.16. Una varietà complessa X si dice *taut* se è Kobayashi-iperbolica e ogni funzione nella chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante a ∞.

Per finire, diamo delle definizioni che ci serviranno per parlare del comportamente delle iterate di funzioni olomorfe.

Definizione 1.1.17. Siano X e Y due spazi topologici. Diciamo che una successione $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset C^0(X, Y)$ è *compattamente divergente* se per ogni coppia di compatti $H \subseteq X$ e $K \subseteq Y$ esiste $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(H) \cap K = \varnothing$ per ogni $\nu \geq \nu_0$.

Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ è detta *normale* se ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente.

Definizione 1.1.18. Sia $f \in C^0(X, X)$. Diciamo che $g \in C^0(X, X)$ è una *funzione limite* di f se esiste una sottosuccessione delle iterate di f che converge a g uniformemente sui compatti. Denotiamo con $\Gamma(f)$ l'insieme di tutte le funzioni limite di f.

Definizione 1.1.19. Una *retrazione olomorfa* di una varietà complessa X è una funzione $\rho \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che $\rho^2 = \rho$. L'immagine di una retrazione olomorfa è detta *retratto olomorfo*.

1.2 Risultati noti della teoria

Vediamo ora alcuni risultati noti della teoria che ci saranno utili nelle nostre dimostrazioni. Cominciamo con alcuni teoremi noti dell'analisi complessa in più variabili.

Teorema 1.2.1. *(Montel, INSERIRE CIT) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Una famiglia $\mathcal{F}$ è relativamente compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se è uniformemente limitata sui compatti.*

WEIERSTRASS SERVE? INOLTRE, SE ASCOLI-ARZELÀ È INEVITABILE CAMBIA LA FRASE SOPRA

Vediamo adesso l'espressione esplicita per k_X in un paio di casi espliciti, dalla quale discende un'importante conseguenza.

Proposizione 1.2.2. *(METTERE UNA CIT) Si ha che:*

(i) la distanza di Poincaré e la pseudodistanza di Kobayashi coincidono per $\mathbb{D}$;

(ii) dati $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ in $\mathbb{D}^n$, si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = \max_{j=1,\dots,n} \{k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j)\};$$

(iii) L'ESPRESSIONE ESPLICITA PER LA PALLA METTILA SOLO SE SERVE.

Dimostrazione. (i) Che la pseudodistanza di Kobayashi sia almeno la distanza di Poincaré segue dal lemma di Schwarz-Pick e dalla disuguaglianza triangolare per la distanza di Poincaré; per avere l'uguaglianza, basta notare che il minimo nella definizione della pseudodistanza di Kobayashi è effettivamente raggiunto usando l'identità.

(ii) Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}^n)$ e $\zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$ tali che $\varphi_1(\zeta_0) = z$ e $\varphi_m(\zeta_m) = w$. Allora, chiamando π_j la proiezione sulla j-esima coordinata, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{m} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) &\geq \sum_{h=1}^{m} k_{\mathbb{D}}\big((\pi_j \circ \varphi_h)(\zeta_{j-1}), (\pi_j \circ \varphi_h)(\zeta_j)\big) \\ &\geq k_{\mathbb{D}}\big((\pi_j \circ \varphi_1)(\zeta_0), (\pi_j \circ \varphi_m)(\zeta_m)\big) = k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j),\end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato il lemma di Schwarz-Pick e nella seconda la disuguaglianza triangolare per $k_{\mathbb{D}}$. Segue dunque che

$k_{\mathbb{D}^n}(z,w) \geq \max_{j=1,\dots,n}\{k_{\mathbb{D}}(z_j,w_j)\}$. Per mostrare che il minimo è effettivamente raggiunto, ricordiamo dall'Osservazione 1.1.6 che $k_{\mathbb{D}^n}$ è una semicontrazione rispetto alle funzioni olomorfe, in particolare è invariante per biolomorfismo, così come lo è $k_{\mathbb{D}}$ dal lemma di Schwarz-Pick. Componendo quindi con $f_1 \times \cdots \times f_n$ dove $f_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f_j(z_j) = 0$, abbiamo che sia $k_{\mathbb{D}^n}(z,w)$ che $\max_{j=1,\dots,n}\{k_{\mathbb{D}}(z_j,w_j)\}$ rimangono invariati. Allora, detto j_0 l'indice per cui $k_{\mathbb{D}}(0,w_{j_0})$ è massimo, possiamo considerare $\varphi = g_1 \times \cdots \times g_n$ dove $g_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ è l'identità per $j = j_0$ e un'opportuna composizione di una rotazione e una contrazione per $j \neq j_0$, di modo che $g_j(w_{j_0}) = w_j$. In tal modo, $\varphi(z_{j_0}) = \varphi(0) = 0 = z$ e $\varphi(w_{j_0}) = w$. $\square$

Corollario 1.2.3. *La pseudodistanza di Kobayashi è effettivamente una distanza per i domini limitati.*

Dimostrazione. Discende tutto dalla Proposizione precedente e dall'Osservazione 1.1.6. Innanzitutto, dalla Proposizione abbiamo che $k_{\mathbb{D}^n}$ è effettivamente una distanza; poiché dall'Osservazione sappiamo che k_X è invariante per biolomorfismi, segue che $k_{\mathbb{D}^n_r}$ è una distanza per ogni $r > 0$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è un dominio limitato, esiste $r > 0$ tale che $\Omega \subseteq \mathbb{D}^n_r$. In tal caso, l'inclusione è una funzione olomorfa. Allora, sempre dall'Osservazione, si ha che se $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ allora $0 < k_{\mathbb{D}^n_r}(x,y) \leq k_\Omega(x,y)$. Segue dunque che k_Ω è una distanza, come voluto. $\square$

Osservazione 1.2.4. Con la stessa dimostrazione, si ottiene anche che le sottovarietà di varietà Kobayashi-iperboliche sono Kobayashi-iperboliche.

Citiamo ora un risultato che lega pseudometrica e pseudodistanza di Kobayashi; per una dimostrazione si rimanda a [R].

Teorema 1.2.5. *[CMS, Result 2.1] Sia X una sottovarietà complessa connessa embeddata in $\mathbb{C}^d$. Per ogni $z, w \in X$, abbiamo*

(i) $k_X(z,w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \longrightarrow X$ *è* C^1 *a tratti,* $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$*;*
(ii) $k_X(z,w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \longrightarrow X$ *è assolutamente continua,* $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$*;*

qui, $l_X(\gamma) = \displaystyle\int_a^b K_X\big(\gamma(t);\gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t$ *è ben definito in entrambi i casi.*

Adesso vogliamo arrivare a dire che l'ipotesi taut ci permette di ottenere la dicotomia sul comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe. Per farlo, ci servono prima alcuni risultati.

Lemma 1.2.6. *Siano X una varietà Kobayashi-iperbolica, $z_0 \in X$ e $r_1, r_2 > 0$. Allora $B_X\big(B_X(z_0,r_1),r_2\big) = B_X(z_0,r_1+r_2)$, dove $B_X(x,r)$ è la palla di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$ rispetto alla distanza di Kobayashi e, dato $A \subseteq X$, poniamo $B_X(A,r) = \bigcup_{x\in A} B_X(x,r)$.*

Dimostrazione. L'inclusione $B_X\big(B_X(z_0, r_1), r_2\big) \subseteq B_X(z_0, r_1 + r_2)$ segue dalla disuguaglianza triangolare.

Per l'altra inclusione, consideriamo $z \in B_X(z_0, r_1 + r_2)$ e prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $3\varepsilon = r_1 + r_2 - k_X(z_0, z)$. Adesso, se $k_X(z_0, z) < r_1$ la conclusione è immediata; assumiamo dunque che $k_X(z_0, z) \geq r_1$, allora si ha $r_2 - \varepsilon \geq 0$. Supponiamo che $r_1 \leq \varepsilon$. Allora $k_X(z_0, z) = r_1 + r_2 - 3\varepsilon < r_2$ e anche in questo caso la conclusione segue. Assumiamo quindi anche che $r_1 - \varepsilon > 0$.

Dalla definizione di k_X, esistono $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ e $\zeta_0, \ldots, \zeta_m \in \mathbb{D}$ tali che $\varphi_1(\zeta_0) = z_0, \varphi_m(\zeta_m) = z$ e

$$\sum_{j=1}^{m} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < r_1 + r_2 - 2\varepsilon.$$

Sia $\mu \leq m$ il più grande intero tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché $r_1 - \varepsilon > 0$. Prendiamo η_μ il punto sulla geodetica congiungente $\zeta_{\mu-1}$ e ζ_μ tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + k_{\mathbb{D}}(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) = r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché $r_1 + r_2 - 2\varepsilon \geq r_1 - \varepsilon$. Prendendo dunque $w = \varphi_\mu(\eta_\mu)$ abbiamo $k_X(z_0, w) < r_1$, inoltre per come è stato scelto η_μ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) &= \sum_{j=1}^{\mu-1} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + k_{\mathbb{D}}(\zeta_{\mu-1}, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^{m} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\mu-1} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + k_{\mathbb{D}}(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) + \\
&\quad + k_{\mathbb{D}}(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^{m} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j),
\end{aligned}$$

da cui

$$k_{\mathbb{D}}(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^{m} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) = \sum_{j=1}^{m} k_{\mathbb{D}}(\zeta_{j-1}, \zeta_j) - (r_1 - \varepsilon) < r_2 - \varepsilon,$$

perciò $k_X(w, z) < r_2$ e di conseguenza $z \in B_X\big(B_X(z_0, r_1), r_2\big)$, come voluto. $\square$

Vogliamo dare una caratterizzazione equivalente all'essere taut per una varietà.

Osservazione 1.2.7. Dalla definizione della compattificazione di Alexandroff, una successione in $C^0(Y, X)$ converge in $C^0(Y, X^*)$ alla funzione costante a ∞ se e solo se è compattamente divergente. Inoltre, se X e Y sono varietà (ma in realtà bastano ipotesi meno stringenti) un sottoinsieme di $C^0(Y, X^*)$ è compatto se e solo se è compatto per successioni.

Corollario 1.2.8. *Una varietà complessa connessa X è taut se e solo se la famiglia $Hol(\mathbb{D}, X)$ è normale.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia taut e prendiamo una successione $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$. Per la Proposizione 1.1.15, la chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è compatta in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, e per l'Osservazione 1.2 è compatta per successioni. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ che converge, uniformemente sui compatti, a una qualche funzione f. Se $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ abbiamo concluso; altrimenti, poiché X è taut, f è la funzione costante a ∞. Ma, per l'Osservazione , questo significa che $\{f_{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ è compattamente divergente. In ogni caso, possiamo concludere che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è normale.

Supponiamo adesso che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ sia normale. Se f è una funzione nella sua chiusura in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, allora è il limite di una successione in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$. Poiché questa famiglia è normale, possiamo trovare una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente, ma dovrà comunque convergere a f. Allora nel primo caso $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$, mentre nel secondo è la funzione costante a ∞. Dunque X è taut. $\square$

Si può dimostrare qualcosa di più.

Proposizione 1.2.9. *(INSERIRE CIT) Sia X una varietà taut. Allora $Hol(Y, X)$ è una famiglia normale per ogni varietà complessa Y.*

Prima di enunciare il risultato che, data una varietà taut, ci dà la dicotomia che cerchiamo per il comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe, dobbiamo studiarne alcune proprietà.

Lemma 1.2.10. *Sia X una varietà complessa e $\rho \in Hol(X, X)$ una retrazione olomorfa di X. Allora l'immagine di ρ è una sottovarietà chiusa di X.*

Dimostrazione. Sia $M = \rho(X)$ e consideriamo $z_0 \in M$. Prendiamo un intorno aperto U di z_0 in X che sia contenuto in una carta locale di X in z_0. Allora $V = \rho^{-1}(U) \cap U$ è un intorno aperto di z_0 tale che $\rho(V) \subseteq V$. Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che X sia un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$.

Sia $P = D\rho(z_0) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ e definiamo $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ come

$$\varphi = \mathrm{id} + (2P - \mathrm{id}) \circ (\rho - P).$$

Poiché $D\varphi(z_0) = \mathrm{id}$, la funzione φ definisce una carta locale in un intorno di z_0. Adesso, dato che $P^2 = P$ e $\rho^2 = \rho$ si ha

$$\begin{aligned}\varphi \circ \rho &= \rho + (2P - \mathrm{id}) \circ \rho^2 - (2P - \mathrm{id}) \circ P \circ \rho \\ &= P \circ \rho = P + P \circ (2P - \mathrm{id}) \circ (\rho - P) = P \circ \varphi.\end{aligned}$$

Allora letta in questa carta ρ diventa lineare, perciò M è una sottovarietà vicino a z_0. Per arbitrarietà di z_0, segue che M è una varietà. È chiusa perché $\rho(X) = \mathrm{Fix}(\rho)$. $\square$

Teorema 1.2.11. *(INSERIRE CIT) Siano X una varietà taut e $f \in Hol(X, X)$. Supponiamo che la successione $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f non sia compattamente divergente. Allora esiste un unica retrazione olomorfa $\rho \in \Gamma(f)$ su una sottovarietà M di X tale che ogni funzione limite di f è della forma $h = \gamma \circ \rho$. Chiamiamo tale M la* varietà limite *di f.*

Inoltre, $\varphi = f|_M \in Aut(M)$ e $\Gamma(f)$ è isomorfo al sottogruppo di $Aut(M)$ dato dalla chiusura di $\{\varphi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Dimostrazione. Poiché la successione delle iterate non è compattamente divergente, esistono due compatti $H, K \subseteq X$ e una sottosuccessione delle iterate tali che l'intersezione di K con l'immagine di H tramite le funzioni della sottosuccessione non è mai vuota. Dato che X è tesa, possiamo estrarre una sotto-sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti o è compattamente divergente; per costruzione non può essere il secondo caso, dunque abbiamo trovato una sottosuccessione $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente sui compatti a $h \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Possiamo anche assumere che $p_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$ e $q_\nu = p_\nu - k_\nu$ tendano a $+\infty$ per $\nu \longrightarrow +\infty$. A meno di prendere ulteriori sottosuccessioni, possiamo anche supporre che $\{f^{p_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{f^{q_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergano uniformemente sui compatti o siano compattamente divergenti (non necessariamente la stessa cosa per entrambe); è facile vedere che i ragionamenti che andremo a fare vanno bene considerando anche eventuali sottosuccessioni, quindi non perdiamo di generalità. Allora

$$\lim_{\nu\longrightarrow+\infty} f^{p_\nu}\left(f^{k_\nu}(z)\right) = \lim_{\nu\longrightarrow+\infty} f^{k_{\nu+1}}(z) = h(z)$$

per ogni $z \in X$; poiché l'orbita di z tramite $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tende a qualcosa, è relativamente compatta, dunque $\{f^{p_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ non può essere compattamente divergente. Allora converge a una $\rho \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che

$$h \circ \rho = \rho \circ h = h. \tag{7}$$

Similmente troviamo che $\{f^{q_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge a una $g \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che

$$g \circ h = h \circ g = \rho. \tag{8}$$

In particolare, $\rho^2 = \rho \circ \rho = g \circ h \circ \rho = g \circ h = \rho$, perciò ρ è una retrazione di X su una sottovarietà M. Dalla (7) abbiamo $h(X) \subseteq M$, inoltre $g \circ \rho = \rho \circ g$, da cui $g(M) \subseteq M$; allora la (8) ci dà $g \circ h|_M = h \circ g|_M = \mathrm{id}_M$. Dunque ponendo $\gamma = h|_M$ otteniamo $h = \gamma \circ \rho$ con $\gamma \in \mathrm{Aut}(M)$. Dobbiamo mostrare che ρ non dipende da h, in particolare non dipende dalla sottosuccessione scelta.

Sia $\{f^{k'_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ un'altra sottosuccessione convergente a $h' \in \mathrm{Hol}(X,X)$. Ragionando come sopra, possiamo supporre che $s_\nu = k'_\nu - k_\nu$ e $t_\nu = k_{\nu+1} - k'_\nu$ convergano a $+\infty$ per $\nu \longrightarrow +\infty$ e che $\{f^{s_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{f^{t_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergano rispettivamente a $\alpha, \beta \in \mathrm{Hol}(X,X)$ tali che

$$\alpha \circ h = h \circ \alpha = h' \qquad \text{e} \qquad \beta \circ h' = h' \circ \beta = h. \tag{9}$$

Allora $h(X) = h'(X)$, dunque M non dipende dalla sottosuccessione scelta. Adesso scriviamo $h = \gamma_1 \circ \rho_1, h' = \gamma_2 \circ \rho_2, \alpha = \gamma_3 \circ \rho_3, \beta = \gamma_4 \circ \rho_4$ dove $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ sono delle retrazioni olomorfe di X su M e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathrm{Aut}(M)$. Vogliamo dire che $\rho_1 = \rho_2$. Notiamo che $h \circ h' = h' \circ h$ e $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, che insieme alla (9) ci dà

$$\begin{aligned} \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 &= \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \rho_1, \\ \gamma_3 \circ \gamma_1 \circ \rho_1 = \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 &= \gamma_2 \circ \rho_2, \\ \gamma_4 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 = \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 &= \gamma_1 \circ \rho_1, \\ \gamma_3 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 &= \gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \rho_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Usando la prima equazione in (10) scriviamo ρ_2 in funzione di ρ_1, e sostituendo nella seconda troviamo $\gamma_3 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$. Similmente, usando la prima equazione scriviamo ρ_1 in funzione di ρ_2 e sostituendo nella terza troviamo $\gamma_4 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$. Allora $\gamma_3 = \gamma_4^{-1}$ e la quarta equazione ci dà $\rho_3 = \rho_4$. Usando la seconda e la terza equazione abbiamo quindi

$$\rho_2 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 = \rho_3 = \rho_4 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 = \rho_1,$$

come voluto.

Adesso, dal fatto che $f \circ \rho = \rho \circ f$ segue che $f(M) \subseteq M$. Ponendo $\varphi = f|_M$, se $f^{p_\nu} \longrightarrow \rho$ si ha che $f^{p_\nu+1} \longrightarrow \varphi \circ \rho$, quindi per quanto visto finora segue che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$.

Infine, data $h = \gamma \circ \rho \in \Gamma(f)$, prendiamo due sottosuccessioni $\{f^{p_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergenti rispettivamente a ρ e a h. Come prima, possiamo supporre che $p_\nu - k_\nu \longrightarrow +\infty$ e che $f^{p_\nu - k_\nu} \longrightarrow h_1 = \gamma_1 \circ \rho$ per $\nu \longrightarrow +\infty$. Allora $h \circ h_1 = h_1 \circ h = \rho$, da cui $\gamma_1 = \gamma^{-1}$. Dunque l'applicazione $h = \gamma \circ \rho \longmapsto \gamma$ è l'isomorfismo cercato fra $\Gamma(f)$ e la chiusura di $\{\varphi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Aut}(M)$, e così concludiamo. $\square$

Vediamo finalmente la dicotomia cercata. Nello specifico, la vedremo nella forma di cinque asserzioni equivalenti.

Teorema 1.2.12. *(INSERIRE CIT) Sia X una varietà taut e $f \in Hol(X,X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) la successione delle iterate $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non è compattamente divergente;

(ii) la successione delle iterate $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;

(iii) $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è relativamente compatta in $Hol(X,X)$;

(iv) l'orbita di z è relativamente compatta in X per ogni $z \in X$;

(v) esiste $z_0 \in X$ la cui orbita è relativamente compatta in X.

Dimostrazione. (v) $\Rightarrow$ (ii). Consideriamo $H = \{z_0\}$ e $K = \overline{\{f^k(z_0) \mid k \in \mathbb{N}\}}$; ovviamente H è compatto, e K lo è per l'ipotesi (v). Allora $f^k(H) \cap K \neq \varnothing$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, dunque $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non può contenere sottosuccessioni compattamente divergenti.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Poiché (X, k_X) è uno spazio metrico, $\mathrm{Hol}(X, X)$ è metrizzabile, prendendo ad esempio la distanza del sup (così facendo, la topologia coincide con quella di sottospazio di $C^0(X, X)$, che è quella che vogliamo). Quindi, se per assurdo $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non fosse relativamente compatto, ammetterebbe una sottosuccessione $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ senza sottosottosuccessioni convergenti. Ma allora, dato che X è tesa, conterrebbe una sottosottosuccessione compattamente divergente, ottenendo così una contraddizione all'ipotesi (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Fissiamo $z \in X$ e consideriamo la funzione $\mathrm{Hol}(X, X) \longrightarrow X$ tale che $f \longmapsto f(z)$. Questa funzione è continua rispetto alla topologia su $\mathrm{Hol}(X, X)$, dunque l'immagine della chiusura di $\{f^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ è compatta perché immagine di un compatto, chiusa perché compatta in uno spazio Hausdorff, e contiene $\{f^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Perciò l'orbita di z è contenuta in un compatto chiuso, quindi è relativamente compatta, come voluto.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Ovvio.

(i) $\Rightarrow$ (v). Sia M la varietà limite di f e poniamo $\varphi = f|_M$. Sappiamo dal Teorema 1.2.11 che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$ e che $\mathrm{id}_M \in \Gamma(\varphi)$. Prendiamo $z_0 \in M$; vogliamo mostrare che $C = \{\varphi^k(z_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è relativamente compatto in M, dunque anche in X dato che M è chiusa. Scegliamo $\varepsilon_0 > 0$ tale che $B_M(z_0, \varepsilon_0)$ è relativamente compatta in M; notiamo che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$ implica che $B_M\big(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0\big) = \varphi^k\big(B_M(z_0, \varepsilon_0)\big)$ è relativamente compatta in M per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dal Lemma 1.2.6 abbiamo che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \subseteq B_M\big(B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8), \varepsilon_0/4\big);$$

per compattezza esistono quindi $w_1, \dots, w_r \in B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8)$ tali che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C,$$

e possiamo assumere che $B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C \neq \varnothing$ per $j = 1, \dots, r$. Per ogni $j = 1, \dots, r$ scegliamo $k_j \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi^{k_j}(z_0) \in B_M(w_j, \varepsilon_0/4)$; allora

$$B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} \left[B_M\big(\varphi^{k_j}(z_0), \varepsilon_0/2\big) \cap C\right]. \tag{11}$$

Dato che $\mathrm{id}_M \in \Gamma(\varphi)$, l'insieme $I = \{k \in \mathbb{N} \mid k_M\big(\varphi^k(z_0), z_0\big) < \varepsilon_0/2\}$ è infinito; dunque possiamo trovare un $k_0 \in I$ tale che $k_0 \geq \max\{1, k_1, \dots, k_r\}$. Poniamo $K = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{k_0} \overline{B_M\big(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0\big)}$; per costruzione, K è compatto, dunque ci basta mostrare che $C \subseteq K$. Prendiamo $h \in I$; dato che l'insieme I è infinito, è sufficiente mostrare che $\varphi^k(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq k \leq h$.

Supponiamo, per assurdo, che esista un minimo $h_0 \in I$ tale che l'insieme $\{\varphi^k(z_0) \mid 0 \leq k \leq k_0\}$ non è contenuto in K. Ovviamente $h_0 > k_0$. Poiché $h_0, k_0 \in I$, abbiamo anche che $k_M\big(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0$. Dunque

$$k_M\big(\varphi^{k_0-j}(z_0), \varphi^{h_0-j}(z_0)\big) = k_M\big(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0$$

per ogni $0 \leq j \leq k_0$. In particolare,

$$\varphi^j(z_0) \in K \tag{12}$$

per ogni $j = h_0 - k_0, \ldots, h_0$ e $\varphi^{h_0-k_0}(z_0) \in B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C$. Per la (11) possiamo trovare $1 \leq l \leq r$ tale che $k_M\big(\varphi^{k_l}(z_0), \varphi^{h_0-k_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0/2$, quindi

$$k_M\big(\varphi^{k_l-j}(z_0), \varphi^{h_0-k_0-j}(z_0)\big) < \varepsilon_0/2 \tag{13}$$

per ogni $0 \leq j \leq \min\{k_l, h_0 - k_0\}$. Adesso, se $k_l \geq h_0 - k_0$ allora, per la (12), la (13) e la definizione di K, abbiamo $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq j \leq h_0$, in contraddizione con la scelta di h_0. Perciò dev'essere $k_l < h_0 - k_0$; poniamo $h_1 = h_0 - k_0 - k_l$. Per la (13) si ha $h_1 \in I$; dunque, essendo $h_1 < h_0$, dev'essere $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq j \leq h_1$. Ma la (12), la (13) e la definizione di K implicano che $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $h_1 \leq j \leq h_0$, dunque anche in questo caso troviamo una contraddizione. □

Per finire, vediamo un risultato di tipo Wolff-Denjoy per domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo C^2), in particolare faremo riferimento a una dimostrazione che sfrutta fatti geometrici quali la Gromov-iperbolicità. Il Teorema, che già era noto ancora prima che venisse mostrata la Gromov-iperbolicità, è il seguente.

Teorema 1.2.13. *(Abate, [A, Theorem 0.5]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f \in Hol(\Omega, \Omega)$. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite di f sono relativamente compatte in Ω;*
- *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le orbite di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Per dimostrarlo usando la Gromov-iperbolicità, è prima necessario mostrare che (Ω, k_Ω) è Gromov-iperbolico. Citiamo l'articolo di Balogh e Bonk in cui si trova la dimostrazione.

Teorema 1.2.14. *(Balogh, Bonk [BB, Theorem 1.4]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ con $n \geq 2$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso. Allora (Ω, k_Ω) è Gromov-iperbolico. Inoltre, il bordo iperbolico $\partial_G\Omega$ è identificato con il bordo euclideo $\partial\Omega$.*

Serve anche un Teorema dovuto a Karlsson.

Teorema 1.2.15. *(Karlsson, [Ka, Corollary 3.7]) Sia (X, d) uno spazio metrico proprio tale che* *(i) è un aperto denso di uno spazio topologico $\overline{X}$ compatto e di Hausdorff la cui topologia di sottospazio coincide con la topologia di spazio metrico. Inoltre, dati $x \in X$ e x_n una successione in X che converge a un punto di $\overline{X} \setminus X$, si ha $\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x, x_n) = +\infty$;*

(ii) date x_n e y_n due successioni convergenti a due punti distinti di $\overline{X} \setminus X$ e $z \in X$, si ha $\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, z), d(y_n, z)\} = +\infty$.

Sia $\phi : X \longrightarrow X$ una semicontrazione. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite di ϕ sono limitate;*
- *esiste un unico punto di $\overline{X} \setminus X$ a cui convergono tutte le orbite.*

L'ipotesi (ii) del Teoerema 1.2.15 è sempre verificata dagli spazi Gromov-iperbolici, mentre segue dal Teorema 1.2.14 che la (i) è vera per i domini limitati e strettamente pseudoconvessi. Usando anche il teorema di Montel, si ottiene così il Teorema 1.2.13.

Tuttavia, come già anticipato nell'introduzione, quello che noi andremo a vedere è un risultato che vale anche per domini con bordo non necessariamente regolare. L'ipotesi di tipo geometrico che andremo ad utilizzare è il concetto di visibilità, di cui discuteremo anche il rapporto con la Gromov-iperbolicità.

Riferimenti bibliografici

[A] M. Abate: Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, **18** (1991), no. 2, 167–191

[BB] Z. M. Balogh, M. Bonk: Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **75** (2000), no. 3, 504–533

[CMS] V. S. Chandel, A. Maitra, A. D. Sarkar: Notions of Visibility with respect to the Kobayashi distance: Comparison and Applications. Preprint, arXiv:2111.00549v1 (2021)

[Ka] A. Karlsson: Non-expanding maps and Busemann functions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **21** (2001), no. 5, 1447–1457

[K1] S. Kobayashi: **Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings (Second Edition)**. World Scientific Publishing Co., Singapore (MA FA FEDE LA SEDE UFFICIALE, O DOV'È STATA STAMPATA LA 'MIA COPIA'?), 2005

[K2] S. Kobayashi: Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **19** (1967), 460–480

[R] H. L. Royden: Remarks on the Kobayashi metric, in **Several Complex Variables II**, *Proceedings of the International Mathematical Conference* (College Park, MD, 1970), pp. 125–137, *Lecture Notes in Mathematics*, **185**, Springer, Berlin, 1971

Ringraziamenti

Volendo, si possono aggiungere dei ringraziamenti.