

Teoremi di tipo “Wolff-Denjoy” in più variabili  
complesse (titolo da rivedere, tanto la copertina  
va fatta tutta nel dettaglio)

Autore: Marco Vergamini Relatore: Marco Abate

Data: si vedrà

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Preliminari</b>	<b>4</b>
1.1 Notazioni e definizioni di base . . . . .	4
1.2 Risultati noti della teoria . . . . .	12
<b>2 Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per varietà taut con visibilità</b>	<b>24</b>
2.1 Il concetto di visibilità . . . . .	24
2.2 Risultati tecnici preparatori . . . . .	26
2.3 Il teorema di tipo “Wolff-Denjoy” . . . . .	34
<b>3 Esempi di domini con visibilità</b>	<b>40</b>
3.1 Domini Goldilocks . . . . .	40
<b>4 Ulteriori risultati</b>	<b>43</b>
4.1 Domini di tipo finito . . . . .	43
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>48</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>49</b>

## **Introduzione**

DA SCRIVERE ALLA FINE.

# 1 Preliminari

## 1.1 Notazioni e definizioni di base

Introduciamo le notazioni e definizioni che useremo:

- un *dominio* in  $\mathbb{C}^n$  è un aperto connesso;
- una *varietà complessa* di dimensione  $n$  è una varietà differenziabile reale, di dimensione  $2n$  e tale che i cambi di carta siano olomorfi se considerati fra aperti di  $\mathbb{C}^n$ ;
- dati una varietà complessa  $X$  e  $x \in X$ , indichiamo con  $T_x X$  lo spazio tangente complesso a  $X$  in  $x$ , che nel caso dei domini è canonicamente identificato con  $\mathbb{C}^n$ ;
- dati  $X, Y$  spazi topologici,  $C^0(X, Y)$  è lo spazio delle funzioni continue da  $X$  a  $Y$  considerato con la topologia compatta-aperta. Nel caso in cui  $Y$  sia uno spazio metrico, tale topologia coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti;
- dati un insieme  $X$  e una funzione  $f : X \rightarrow X$ , poniamo induttivamente  $f^0 = \text{id}_X$  e  $f^{k+1} = f \circ f^k$ . Chiamiamo  $f^k$  l'*iterata*  $k$ -esima di  $f$  e, per ogni  $x \in X$ , l'*orbita* di  $x$  tramite  $f$  è l'insieme  $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ ;
- date  $X, Y$  varietà complesse, indichiamo con  $\text{Hol}(X, Y)$  l'insieme delle funzioni olomorfe da  $X$  a  $Y$ , con  $\mathcal{O}(X)$  l'insieme delle funzioni olomorfe da  $X$  in  $\mathbb{C}$  e con  $\text{Aut}(X)$  l'insieme dei biolomorfismi di  $X$  in sé;
- data  $f \in \text{Hol}(X, Y)$ , indichiamo con  $df_x$  il differenziale di  $f$  in  $x \in X$ ;
- il disco unitario è  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ; il disco di centro 0 e raggio  $r > 0$  è  $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ ; il disco di centro  $a \in \mathbb{C}$  e raggio  $r > 0$  è  $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ ; il polidisco in  $\mathbb{C}^n$  è  $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$ ;
- la palla unitaria (euclidea) in  $\mathbb{C}^n$  è  $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ , dove  $\|\cdot\|$  indica la norma euclidea, mentre  $\mathbb{B}_r^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$  è la palla (euclidea) di centro l'origine  $O \in \mathbb{C}^n$  e raggio  $r > 0$ ;
- dato un sottoinsieme  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ , indichiamo il *bordo euclideo* con  $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ ;
- dato un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  e  $z \in \mathbb{C}^n$ , scriviamo  $\delta(z) = \inf_{p \in \partial\Omega} \|z - p\|$  per indicare la distanza euclidea di  $z$  dal bordo euclideo di  $\Omega$ .

Ricordiamo cosa sono la metrica e la distanza di Poincaré in  $\mathbb{D}$ .

**Definizione 1.1.1.** La *metrica di Poincaré* (o *iperbolica*) su  $\mathbb{D}$  è data da

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z; v) = \frac{1}{1 - |z|^2} |v| \quad (1)$$

per ogni  $z \in \mathbb{D}$  e  $v \in \mathbb{C} \cong T_z \mathbb{D}$ . La metrica  $\lambda_{\mathbb{D}}$  è hermitiana di curvatura gaussiana costante uguale a  $-4$  (si veda [A5, Definition 1.10.1 and Example 1.10.2]).

**Definizione 1.1.2.** La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*)  $\omega$  su  $\mathbb{D}$  è la forma integrata della metrica di Poincaré. È una distanza completa la cui espressione

è data da

$$\omega(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|} \quad (2)$$

per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  (si veda [A5, point (iii) of Proposition 1.2.7 and Proposition 1.9.14]).

Oltre ad avere curvatura negativa costante, la metrica e la distanza di Poincaré sono tali che le funzioni olomorfe dal disco unitario in sé sono semicontrazioni rispetto ad esse.

**Lemma 1.1.3.** (*lemma di Schwarz-Pick*) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$  si ha

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| e \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2};$$

inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0, w_0$  con  $z_0 \neq w_0$  o nella seconda per  $z_0$  allora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e vale sempre l'uguaglianza.

Per la dimostrazione si rimanda a [Ko2, Chapter I, Theorem 1.1].

**Corollario 1.1.4.** Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Allora si ha

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w) \quad (3)$$

per ogni  $z, w \in \mathbb{D}$ .

*Dimostrazione.* Discende dal lemma di Schwarz-Pick e dal fatto che la funzione  $\text{arctanh}$  è strettamente crescente.  $\square$

Ci tornerà utile anche la versione semplificata del lemma di Schwarz-Pick.

**Lemma 1.1.5.** (*lemma di Schwarz*) Sia  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tale che  $f(0) = 0$ . Allora per ogni  $z \in \mathbb{D}$  si ha  $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| \leq 1$ ; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per  $z_0 \neq 0$  oppure nella seconda allora  $f(z) = e^{i\theta} z$  per qualche  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Enunciamo adesso dei fatti noti sulle geodetiche del disco unitario con la metrica di Poincaré. Visto che ne parleremo più in generale, diamo la definizione per spazi metrici.

**Definizione 1.1.6.** Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Una curva  $\sigma : I \rightarrow X$  è detta *geodetica* se

$$d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

per ogni  $t_1, t_2 \in I$ .

**Osservazione 1.1.7.** Dati una geodetica  $\sigma : I \rightarrow X$  e  $a, b \in I$ , si ha

Sono in dubbio se definire una lunghezza in generale per spazi metrici: potrebbe confondersi con la def. 1.2.8

$$d(\sigma(a), \sigma(b)) = \inf_{a=t_0, t_1, \dots, t_n=b} \sum_{j=1}^n d(\sigma(t_{j-1}), \sigma(t_j));$$

cioè, le geodetiche sono le curve che “minimizzano la lunghezza”.

**Proposizione 1.1.8.** (*[A5, point (iv) of Proposition 1.2.7]*) *Le geodetiche di  $(\mathbb{D}, \omega)$  sono i diametri di  $\mathbb{D}$  e le intersezioni con  $\mathbb{D}$  dei cerchi euclidei ortogonali a  $\partial\mathbb{D}$ . In particolare, ogni coppia di punti distinti è connessa da un'unica geodetica.*

Quello che vogliamo fare ora è generalizzare la metrica e la distanza di Poincaré a una qualsiasi varietà complessa mantenendo la proprietà di rendere le funzioni olomorfe delle semicontrazioni. Ci sono vari modi per farlo, noi nello specifico vedremo la (pseudo)metrica e la (pseudo)distanza di Kobayashi, introdotte nel 1967 in [Ko1].

**Definizione 1.1.9.** Sia  $X$  una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su  $X$  è

$$K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tale che } f(0) = x, df_0(v) = Z\} \quad (4)$$

per ogni  $x \in X$  e  $Z \in T_x X$ .

**Osservazione 1.1.10.** Non possiamo sempre parlare di metrica perché, per esempio,  $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$ . Infatti, dati  $z \in \mathbb{C}^n$  e  $Z \in T_z \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ , abbiamo che la funzione  $f_\varepsilon \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$  data da  $f_\varepsilon(\zeta) = z + \zeta Z/\varepsilon$  è tale che  $d(f_\varepsilon)_0(\varepsilon) = Z$  per ogni  $\varepsilon > 0$ ; di conseguenza,  $K_{\mathbb{C}^n}(z; Z) = 0$ .

Vediamo adesso che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto alla pseudometrica di Kobayashi.

**Proposizione 1.1.11.** *Siano  $X$  e  $Y$  varietà complesse, e sia  $f \in \text{Hol}(X, Y)$ . Allora si ha*

$$K_Y(f(x); df_x(Z)) \leq K_X(x; Z) \quad (5)$$

per ogni  $x \in X$  e  $Z \in T_x X$ .

*Dimostrazione.* Dati  $x \in X$  e  $Z \in T_x X$ , poniamo

$$A_X(x; Z) = \{v \in \mathbb{C} \mid \text{esiste } g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tale che } g(0) = x, dg_0(v) = Z\},$$

e sia  $A_Y(f(x); df_x(Z))$  definito analogamente. Per definizione,

$$K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in A_X(x; Z)\} \\ \text{e} \\ K_Y(f(x); df_x(Z)) = \inf\{|v| \mid v \in A_Y(f(x); df_x(Z))\};$$

quindi ci basta mostrare che  $A_X(x; Z) \subseteq A_Y(f(x); df_x(Z))$ . Dato  $v \in A_X(x; Z)$ , prendiamo  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  tale che  $g(0) = x$  e  $dg_0(v) = Z$ . Allora abbiamo  $(f \circ g)(0) = f(x)$  e  $d(f \circ g)_0(v) = (df_x \circ dg_0)(v) = df_x(Z)$ ; dunque  $v \in A_Y(f(x); df_x(Z))$ . Perciò  $A_X(x; Z) \subseteq A_Y(f(x); df_x(Z))$ , come voluto.  $\square$

Nei casi a cui siamo interessati, la pseudometrica di Kobayashi è effettivamente una metrica.

**Proposizione 1.1.12.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Allora  $K_X$  è una metrica, cioè  $K_X(z; Z) > 0$  per ogni  $z \in X$  e  $0 \neq Z \in T_z X$ .*

*Dimostrazione.* È un'immediata conseguenza di un risultato più forte che dimostreremo nella prossima sezione, il punto (1) della Proposizione 2.2.2.  $\square$

Definiamo adesso la (pseudo)distanza di Kobayashi; più avanti vedremo com'è collegata alla pseudometrica di Kobayashi.

**Definizione 1.1.13.** Sia  $X$  una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su  $X$  è data da

$$k_X(z, w) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \left| \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \varphi_m(\zeta_m) = w \\ \text{e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\} \quad (6)$$

per  $z, w \in X$ .

**Osservazione 1.1.14.** È facile vedere che  $k_X$  è una pseudodistanza, ma in generale non è una distanza, ad esempio perché, come prima,  $k_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$ . Infatti, dati  $z, w \in X$ , possiamo considerare i punti  $\zeta_0 = 0$  e  $1 > \zeta_1 = \varepsilon > 0$  e la funzione  $\varphi_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$  tale che  $\varphi_1(\zeta) = z + \zeta(w - z)/\varepsilon$ . Si ha  $\varphi_1(\zeta_0) = z$  e  $\varphi_1(\zeta_1) = w$ ; perciò, per definizione,  $k_{\mathbb{C}^n}(z, w) \leq \omega(0, \varepsilon)$  per ogni  $1 > \varepsilon > 0$ , da cui  $k_{\mathbb{C}^n}(z, w) = 0$ .

Vedremo però più avanti (Osservazione 1.2.7) che se  $X$  è una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$  allora  $k_X$  è effettivamente una distanza.

Vediamo adesso che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto alla pseudodistanza di Kobayashi.

**Proposizione 1.1.15.** *Siano  $X$  e  $Y$  varietà complesse e connesse, e consideriamo  $f \in \text{Hol}(X, Y)$ . Allora*

$$k_Y(f(x), f(y)) \leq k_X(x, y) \quad (7)$$

per ogni  $x, y \in X$ .

*Dimostrazione.* Dati  $x, y \in X$ , poniamo

$$A_X(x, y) = \left\{ \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \left| \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = x, \varphi_m(\zeta_m) = y \\ \text{e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1, \dots, m-1 \end{array} \right. \right\},$$

e sia  $A_Y(f(x), f(y))$  definito analogamente. Per definizione,

$$k_X(x, y) = \inf A_X(x, y) \quad \text{e} \quad k_Y(f(x), f(y)) = \inf A_Y(f(x), f(y));$$

quindi ci basta mostrare che  $A_X(x, y) \subseteq A_Y(f(x), f(y))$ . Dati  $\zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$  e  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  che realizzano  $\sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j)$  in  $A_X(x, y)$ , si verifica immediatamente che  $\zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$  e  $f \circ \varphi_1, \dots, f \circ \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, Y)$  realizzano lo stesso numero in  $A_Y(f(x), f(y))$ . Perciò  $A_X(x, y) \subseteq A_Y(f(x), f(y))$ , come voluto.  $\square$

Segue immediatamente l'invarianza per biolomorfismi.

**Corollario 1.1.16.** *Siano  $X$  e  $Y$  varietà complesse e connesse, e consideriamo un biolomorfismo  $f : X \longrightarrow Y$ . Allora*

$$k_Y(f(x), f(y)) = k_X(x, y) \tag{8}$$

per ogni  $x, y \in X$ .

**Definizione 1.1.17.** Una varietà complessa e connessa  $X$  è *Kobayashi-iperbolica* se  $k_X$  è una distanza.

**Osservazione 1.1.18.** Dalla definizione di  $k_X$  segue che ogni varietà Kobayashi-iperbolica è uno *spazio di lunghezze* nel senso di [BH, Part I, Definition 3.1].

Il seguente risultato per le varietà Kobayashi-iperboliche verrà spesso usato implicitamente.

**Proposizione 1.1.19.** *(Barth, [B]) Sia  $X$  una varietà complessa e connessa. Allora  $X$  è Kobayashi-iperbolica se e solo se  $k_X$  vi induce la topologia di varietà.*

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per enunciare i risultati già noti nel caso dei domini regolari.

**Definizione 1.1.20.** Una funzione continua  $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$  è detta *funzionale di Minkowski* se



- (i)  $\mu(Z) = 0$  se e solo se  $Z = 0$ ;
- (ii)  $\mu(\zeta Z) = |\zeta|\mu(Z)$  per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  e  $\zeta \in \mathbb{C}$ .

Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio, poniamo  $\mu_\Omega(Z) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(Z - w)$ .

**Definizione 1.1.21.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un aperto. Una funzione  $u : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  semicontinua superiormente è detta *subarmonica* se per ogni  $a \in A$ , per ogni  $r > 0$  tale che  $\overline{D(a, r)} \subset A$  e per ogni  $h$  continua in  $\overline{D(a, r)}$  e armonica in  $D(a, r)$ , se  $h|_{\partial D(a, r)} \geq u|_{\partial D(a, r)}$  allora anche  $h|_{D(a, r)} \geq u|_{D(a, r)}$ .

Sia  $A \subseteq \mathbb{C}^n$  un aperto. Una funzione  $u : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  semicontinua superiormente è detta *plurisubarmonica* se per ogni  $a \in A$  e per ogni  $Z \in \mathbb{C}^n$  l'applicazione  $\zeta \mapsto u(a + \zeta Z)$  è subarmonica dove definita.

**Definizione 1.1.22.** Un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  si dice (*Hartogs*) *pseudoconvesso* se esiste un funzionale di Minkowski  $\mu$  tale che  $-\log \mu_\Omega$  è plurisubarmonica in  $\Omega$ .

Il seguente risultato ci servirà per un controesempio.

**Teorema 1.1.23.** ([Kr, Theorem 5.1.2]) Ogni dominio pseudoconvesso è un dominio di olomorfia.

Nel caso di domini regolari, si può dare una definizione di pseudoconvessità più operativa equivalente.

**Definizione 1.1.24.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio con bordo  $C^2$ , cioè tale che esista una funzione  $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$  tale che  $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$  e  $d\rho \neq 0$  in ogni punto di  $\partial\Omega$ .

Dato  $p \in \partial\Omega$ , lo spazio tangente complesso a  $\partial\Omega$  in  $p$  è

$$H_p \partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\},$$

dove  $\bar{\partial}\rho(p) = \left( \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_1}(p), \dots, \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_n}(p) \right)$ .

Diciamo che  $\Omega$  è *Levi pseudoconvesso* se la forma di Levi

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è semidefinita positiva in  $H_p \partial\Omega$  per ogni  $p \in \partial\Omega$ . Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso* se la forma di Levi è definita positiva in  $H_p \partial\Omega$  per ogni  $p \in \partial\Omega$ .

Vale il seguente risultato.

**Teorema 1.1.25.** ([Kr, Theorem 3.3.5]) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato con bordo  $C^2$ . Allora  $\Omega$  è Levi pseudoconvesso se e solo se è Hartogs pseudoconvesso.

Nella sottosezione 1.2 citeremo alcuni risultati sulla geometria dei domini limitati strettamente pseudoconvessi dotati della distanza di Kobayashi. In

Nel risultato citato non c'è l'ipotesi di limitatezza; teniamolo a mente, potrebbe tornare utile

particolare, vedremo che sono Gromov-iperbolici, il che permette di derivare un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per questi domini.

**Definizione 1.1.26.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dati  $x, y, w \in X$  il *prodotto di Gromov* tra  $x$  e  $y$  con punto base  $w$  è  $(x, y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$ . Dato  $\delta \geq 0$ , diciamo che  $X$  è  $\delta$ -iperbolico se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se  $(X, d)$  è  $\delta$ -iperbolico per qualche  $\delta \geq 0$ , diremo che è *Gromov-iperbolico*.

**Definizione 1.1.27.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico Gromov-iperbolico. Fissato  $w \in X$ , il *bordo iperbolico*  $\partial_G X$  è dato dalle classi di equivalenza delle successioni  $(x_i)$  che convergono a infinito, cioè tali che  $\lim_{i,j \rightarrow +\infty} (x_i, x_j)_w = +\infty$ ; due tali successioni  $(x_i), (y_i)$  sono equivalenti se  $\lim_{i \rightarrow +\infty} (x_i, y_i)_w = +\infty$ . Questa costruzione è indipendente dalla scelta di  $w$ .

Inoltre, è possibile estendere il prodotto di Gromov a tutto  $X \cup \partial_G X$  in modo che valga ancora la disuguaglianza per la Gromov-iperbolicità, eventualmente cambiando  $\delta$ . Il bordo iperbolico possiede anche una *classe canonica di distanze* correlate al prodotto di Gromov, che inducono tutte la stessa topologia.

**Osservazione 1.1.28.** È possibile mettere una topologia su  $X \cup \partial_G X$  che lo rende uno spazio compatto, e tale che ristretta a  $\partial_G X$  coincida con la topologia indotta dalla classe canonica di distanze. Si veda [BH, Part III, Chapter H, Paragraph 3] per i dettagli.

Prima di passare a vedere i risultati noti della teoria sulla pseudometrica e la pseudodistanza di Kobayashi e sui domini strettamente pseudoconvessi, introduciamo il concetto di varietà taut, che sarà per noi un’ipotesi importante per ciò che andremo a dimostrare: infatti, quest’ipotesi ci darà la dicotomia nella tesi dei teoremi di tipo “Wolff-Denjoy”. Vedremo anche con un esempio l’importanza di tale ipotesi. Prima di dare la definizione, ci servirà un risultato sul comportamento delle funzioni olomorfe a valori in una varietà Kobayashi-iperbolica; non lo dimostreremo tutto, ma per la parte che andremo a mostrare avremo bisogno del ben noto teorema di Ascoli-Arzelà.

**Teorema 1.1.29.** (*Ascoli-Arzelà, [Ke, Chapter 7, Theorem 17]*) Siano  $X$  uno spazio metrico e  $Y$  uno spazio metrico localmente compatto. Allora un famiglia  $\mathcal{F} \subseteq C^0(Y, X)$  è relativamente compatta in  $C^0(Y, X)$  se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

- (i)  $\mathcal{F}$  è equicontinua;
- (ii) l’insieme  $\{f(y) \mid f \in \mathcal{F}\}$  è relativamente compatto in  $X$  per ogni  $y \in Y$ .

**Proposizione 1.1.30.** ([A3, Theorem 1.3]) Sia  $X$  una varietà complessa e connessa. Allora  $X$  è Kobayashi-iperbolica se e solo se  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , dove  $X^*$  è la compattificazione di Alexandroff di  $X$ .

Per definirlo non c’è molto altro da dire, l’Osservazione dopo serviva ad aggiungere i fatti interessanti

In [BH] usa l’ipotesi proprio e geodetico per dire che la topologia è la stessa; non vorrei fosse una cosa diversa da quella a cui mi sto riferendo

Inoltre, se  $X$  è Kobayashi-iperbolica allora  $\text{Hol}(Y, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(Y, X^*)$  per ogni varietà complessa  $Y$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo solamente che se  $X$  è Kobayashi-iperbolica allora  $\text{Hol}(Y, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(Y, X^*)$  per ogni varietà complessa  $Y$ , dando per buona la prima parte. Poiché  $X$  è una varietà, possiamo fissare una distanza  $d$  su  $X^*$  che induca la topologia della compattificazione. Dato che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è relativamente compatto in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , per il teorema di Ascoli-Arzelà è equicontinuo.

Se devo giustificarlo, direi [Ke, 4.16]

Sia  $Y$  una varietà complessa, mostriamo che  $\text{Hol}(Y, X)$  è equicontinuo. Se per assurdo non lo fosse, esisterebbero  $\varepsilon > 0$ , un punto  $z \in Y$  e due successioni  $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq Y$  e  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Hol}(Y, X)$  tali che  $d(f_\nu(z_\nu), f_\nu(z)) \geq \varepsilon$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Scegliendo delle coordinate opportune, possiamo assumere che  $Y$  sia la palla euclidea di un qualche  $\mathbb{C}^n$  e che  $z = 0$ . Definiamo  $g_\nu \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  nel seguente modo:  $g_\nu(\zeta) = f_\nu(\zeta z_\nu / \|z_\nu\|)$ ; allora  $\|z_\nu\| \rightarrow 0$  per  $\nu \rightarrow 0$  e  $d(g_\nu(\|z_\nu\|), g_\nu(0)) = d(f_\nu(z_\nu), f_\nu(z)) \geq \varepsilon$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ , contraddizione con il fatto che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è equicontinuo.

Dunque  $\text{Hol}(Y, X)$  è equicontinuo; per compattezza di  $X^*$  valgono le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà, per cui abbiamo che è relativamente compatto in  $C^0(Y, X^*)$ , come voluto.  $\square$

**Definizione 1.1.31.** Una varietà complessa  $X$  si dice *taut* se è Kobayashi-iperbolica e ogni funzione nella chiusura di  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$  è in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  oppure è la funzione costante  $\infty$ .

Per finire, diamo delle definizioni che ci serviranno per parlare del comportamento delle iterate di funzioni olomorfe.

**Definizione 1.1.32.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici. Diciamo che una successione  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq C^0(X, Y)$  è *compattamente divergente* se, per ogni coppia di compatti  $H \subseteq X$  e  $K \subseteq Y$ , esiste  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $f_\nu(H) \cap K = \emptyset$  per ogni  $\nu \geq \nu_0$ .

Una famiglia  $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$  è detta *normale* se ogni successione in  $\mathcal{F}$  ammette una sottosuccessione che converge a una funzione in  $C^0(X, Y)$  oppure è compattamente divergente.

**Definizione 1.1.33.** Sia  $f \in C^0(X, X)$ . Diciamo che  $g \in C^0(X, X)$  è una *funzione limite* di  $f$  se esiste una sottosuccessione delle iterate di  $f$  che converge a  $g$  in  $C^0(X, X)$ . Denotiamo con  $\Gamma(f)$  l'insieme di tutte le funzioni limite di  $f$ .

**Definizione 1.1.34.** Una *retrazione olomorfa* di una varietà complessa  $X$  è una funzione  $\rho \in \text{Hol}(X, X)$  tale che  $\rho^2 = \rho$ . L'immagine di una retrazione olomorfa è detta *retrato olomorfo*.

## 1.2 Risultati noti della teoria

Vediamo ora alcuni risultati noti della teoria che ci saranno utili nelle nostre dimostrazioni. Cominciamo con alcuni teoremi noti dell'analisi complessa in più variabili.

**Teorema 1.2.1.** (*Weierstrass, [N, Chapter 1, Proposition 5]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio. Sia  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$  una successione che converge uniformemente sui compatti a  $f \in C^0(\Omega)$ ; allora  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ .

**Teorema 1.2.2.** (*Montel, [N, Chapter 1, Proposition 6]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio. Sia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ , una famiglia uniformemente limitata sui compatti, cioè tale che per ogni compatto  $K \subseteq \Omega$  esiste una costante  $M_K > 0$  tale che  $|f(z)| \leq M_K$  per ogni  $f \in \mathcal{F}$  e  $z \in K$ ; allora è relativamente compatta in  $\mathcal{O}(\Omega)$ .

Ci tornerà utile una conseguenza del teorema di Montel per sottovarietà di  $\mathbb{C}^d$ .

**Corollario 1.2.3.** Sia  $X$  una sottovarietà complessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ , e consideriamo una successione  $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Hol}(X, X)$ . Allora esiste una sottosuccessione  $\{F_{j_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  che converge uniformemente sui compatti di  $X$  a una funzione olomorfa  $F : X \rightarrow \mathbb{C}^d$  con  $F(X) \subseteq \bar{X}$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è limitata, la successione  $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  è uniformemente limitata sui compatti di  $X$ ; possiamo dunque fissare un ricoprimento numerabile di  $X$  fatto di aperti relativamente compatti contenuti in carte ed estrarre, con un procedimento diagonale nel quale si applica il teorema di Montel ad ogni tale carta, una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti di ogni carta, in particolare sugli aperti del ricoprimento. Preso allora un qualsiasi compatto  $K$  di  $X$ , basta estrarre un suo sottoricoprimento finito degli aperti presi sopra e notare che per un numero finito di aperti la convergenza rimane uniforme sull'unione.

Chiaramente la convergenza uniforme sui compatti implica la convergenza puntuale e  $F_j(X) \subseteq X$  per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , per cui abbiamo automaticamente che  $F(X) \subseteq \bar{X}$ .  $\square$

**Teorema 1.2.4.** (*Serre, Ehrenpreis, [Kr, Theorem 1.2.6]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato, con  $n > 1$ . Sia  $K$  un sottoinsieme compatto di  $\Omega$  tale che  $\Omega \setminus K$  è connesso. Se  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ , allora esiste  $F \in \mathcal{O}(\Omega)$  tale che  $F|_{\Omega \setminus K} = f$ .

Vediamo adesso l'espressione esplicita per  $k_X$  in un paio di casi particolari, dalla quale discende un'importante conseguenza.

**Proposizione 1.2.5.** (*[A1, Proposition 2.3.4 and Corollary 2.3.7]*) Valgono le seguenti affermazioni:

- (i) la distanza di Poincaré e la pseudodistanza di Kobayashi di  $\mathbb{D}$  coincidono;

(ii) dati  $z = (z_1, \dots, z_n)$  e  $w = (w_1, \dots, w_n)$  in  $\mathbb{D}^n$ , si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = \max_{j=1, \dots, n} \{\omega(z_j, w_j)\}.$$

*Dimostrazione.* (i) Che  $k_{\mathbb{D}} \geq \omega$  segue dal lemma di Schwarz-Pick e dalla disuguaglianza triangolare per la distanza di Poincaré; per avere l'uguaglianza, basta notare che il minimo nella definizione di  $k_{\mathbb{D}}$  è effettivamente raggiunto usando l'identità.

(ii) Poiché le proiezioni nelle varie coordinate sono funzioni olomorfe, per ogni  $j = 1, \dots, n$  si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \geq k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j) = \omega(z_j, w_j),$$

dove la disuguaglianza segue dalla Proposizione 1.1.15 e l'uguaglianza dal punto (i).

Per mostrare che il minimo è effettivamente raggiunto, ricordiamo che dal Corollario 1.1.16 segue che  $k_{\mathbb{D}^n}$  e  $k_{\mathbb{D}} = \omega$  sono invarianti per biolomorfismi. Consideriamo allora  $f_1, \dots, f_n \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  tali che  $f_j(z_j) = 0$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ , e poniamo  $f = f_1 \times \dots \times f_n \in \text{Aut}(\mathbb{D}^n)$ . Abbiamo quindi

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = k_{\mathbb{D}^n}(f(z), f(w)) = k_{\mathbb{D}^n}(O, f(w))$$

e

$$\max_{j=1, \dots, n} \{\omega(z_j, w_j)\} = \max_{j=1, \dots, n} \{\omega(f_j(z_j), f_j(w_j))\} = \max_{j=1, \dots, n} \{\omega(0, f_j(w_j))\};$$

possiamo dunque supporre, senza perdita di generalità,  $z = O$ .

Allora, detto  $j_0$  l'indice per cui  $\omega(0, w_{j_0})$  è massimo, si ha che anche  $|w_{j_0}|$  è massimo. Consideriamo, per ogni  $j = 1, \dots, n$ , la funzione  $g_j \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  data da  $g_j(\zeta) = \zeta \cdot w_j / w_{j_0}$ , di modo che  $g_j(w_{j_0}) = w_j$ . Poniamo  $\varphi = (g_1, \dots, g_n)$ , per cui  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}^n)$ ; inoltre,  $\varphi(z_{j_0}) = \varphi(0) = O = z$  e  $\varphi(w_{j_0}) = w$ . Si ha dunque, per definizione, che

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \leq \omega(0, w_{j_0}) = \max_{j=1, \dots, n} \omega(0, w_j) = \max_{j=1, \dots, n} \omega(z_j, w_j),$$

come voluto. □

**Corollario 1.2.6.** *I domini limitati di  $\mathbb{C}^n$  sono Kobayashi-iperbolici.*

*Dimostrazione.* Dal punto (ii) della Proposizione 1.2.5 abbiamo che  $k_{\mathbb{D}^n}$  è effettivamente una distanza; poiché dal Corollario 1.1.16 sappiamo che  $k_X$  è invariante per biolomorfismi, segue che  $k_{\mathbb{D}_r^n}$  è una distanza per ogni  $r > 0$ . Se  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  è un dominio limitato, esiste  $r > 0$  tale che  $\Omega \subseteq \mathbb{D}_r^n$ . In tal caso, l'inclusione è una funzione olomorfa. Quindi, dalla Proposizione 1.1.15, si ha che se  $z, w \in \Omega$  con  $z \neq w$  allora  $0 < k_{\mathbb{D}_r^n}(z, w) \leq k_{\Omega}(z, w)$ . Segue dunque che  $k_{\Omega}$  è una distanza, come voluto. □

**Osservazione 1.2.7.** Con la stessa dimostrazione, si ottiene anche che le sottovarietà connesse di varietà Kobayashi-iperboliche sono Kobayashi-iperboliche. In particolare, abbiamo che le sottovarietà complesse, connesse e limitate di  $\mathbb{C}^d$  sono Kobayashi-iperboliche.

Citiamo ora un risultato che lega pseudometrica e pseudodistanza di Kobayashi.

**Definizione 1.2.8.** Sia  $X$  una sottovarietà complessa e connessa di  $\mathbb{C}^d$ , e sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che la funzione  $K_X(\gamma(\cdot); \gamma'(\cdot))$  sia integrabile su  $[a, b]$ . La lunghezza di  $\gamma$  in  $X$  rispetto alla pseudometrica di Kobayashi è

$$l_X(\gamma) := \int_a^b K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) dt.$$

**Teorema 1.2.9.** ([Roy, Theorem 1] e [V, Theorem 3.1]) Sia  $X$  una sottovarietà complessa e connessa di  $\mathbb{C}^d$ . Per ogni  $z, w \in X$  abbiamo che:

- (i)  $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X \text{ è } C^1 \text{ a tratti, } \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\};$
- (ii)  $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X \text{ è assolutamente continua, } \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}.$

Qui,  $l_X(\gamma)$  è ben definita in entrambi i casi.

Adesso vogliamo arrivare a dire che l'ipotesi taut ci permette di ottenere la dicotomia sul comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe. Per farlo, ci servono prima alcuni risultati.

**Definizione 1.2.10.** Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica. Dati  $x \in X$  e  $r > 0$ , la palla di centro  $x$  e raggio  $r$  rispetto alla distanza di Kobayashi è

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid k_X(x, y) < r\}.$$

Inoltre, dato  $A \subseteq X$  poniamo  $B_X(A, r) := \bigcup_{x \in A} B_X(x, r).$

**Lemma 1.2.11.** Siano  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica,  $z_0 \in X$  e  $r_1, r_2 > 0$ . Allora

$$B_X(B_X(z_0, r_1), r_2) = B_X(z_0, r_1 + r_2).$$

*Dimostrazione.* L'inclusione  $B_X(B_X(z_0, r_1), r_2) \subseteq B_X(z_0, r_1 + r_2)$  segue dalla disuguaglianza triangolare.

Per l'altra inclusione, consideriamo  $z \in B_X(z_0, r_1 + r_2)$  e prendiamo  $\varepsilon > 0$  tale che  $3\varepsilon = r_1 + r_2 - k_X(z_0, z)$ . Adesso, se  $k_X(z_0, z) < r_1$  la conclusione è immediata; assumiamo dunque che  $k_X(z_0, z) \geq r_1$ , per cui si ha  $r_2 - \varepsilon > 0$ . Supponiamo che  $r_1 \leq \varepsilon$ . Allora  $k_X(z_0, z) = r_1 + r_2 - 3\varepsilon < r_2$  e anche in questo caso la conclusione segue. Perciò, assumiamo anche che  $r_1 - \varepsilon > 0$ .

Dalla definizione di  $k_X$ , esistono  $\zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$  e  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  tali che  $\varphi_1(\zeta_0) = z_0$ ,  $\varphi_m(\zeta_m) = z$ ,  $\varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j)$  per  $j = 1, \dots, m-1$  e

$$r_1 - \varepsilon < k_X(z_0, z) \leq \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < k_X(z_0, z) + \varepsilon = r_1 + r_2 - 2\varepsilon.$$

Sia  $\mu \leq m$  il più grande intero tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché  $r_1 - \varepsilon > 0$ . Prendiamo  $\eta_\mu$  il punto sulla geodetica congiungente  $\zeta_{\mu-1}$  e  $\zeta_\mu$  tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) = r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché  $r_1 + r_2 - 2\varepsilon > r_1 - \varepsilon$  e per definizione di  $\mu$ . Prendendo dunque  $w = \varphi_\mu(\eta_\mu)$  abbiamo  $k_X(z_0, w) < r_1$ , cioè  $w \in B_X(z_0, r_1)$ . Inoltre, per come è stato scelto  $\eta_\mu$ , si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) &= \sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) \\ &\quad + \omega(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \\ &= r_1 - \varepsilon + \omega(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j), \end{aligned}$$

da cui

$$\omega(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) = \sum_{j=1}^m \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) - (r_1 - \varepsilon) < r_2 - \varepsilon;$$

perciò  $k_X(w, z) < r_2$ . Di conseguenza,  $z \in B_X(B_X(z_0, r_1), r_2)$  come voluto.  $\square$

Vogliamo dare ora una caratterizzazione equivalente all'essere taut per una varietà.

**Osservazione 1.2.12.** Dalla definizione della compattificazione di Alexandroff, una successione in  $C^0(Y, X)$  converge in  $C^0(Y, X^*)$  alla funzione costante  $\infty$  se e solo se è compattamente divergente. Inoltre, se  $X$  e  $Y$  sono varietà

Servirebbe una reference dove la dimostrazione è fatta più nel dettaglio; per ora lascio così, poi ci torno cercando qualcosa di più specifico

(ma in realtà bastano ipotesi meno stringenti), un sottoinsieme di  $C^0(Y, X^*)$  è compatto se e solo se è compatto per successioni (si veda [A3, Section 1]).

**Proposizione 1.2.13.** *Una varietà complessa e connessa  $X$  è taut se e solo se la famiglia  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è normale.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $X$  sia taut e consideriamo una successione  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ . Per definizione  $X$  è Kobayashi-iperbolica; dunque per la Proposizione 1.1.30, la chiusura di  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è compatta in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , e per l'Osservazione 1.2.12 è compatta per successioni. Allora esiste una sottosuccessione  $\{f_{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  che converge, uniformemente sui compatti, a una qualche funzione  $f$ . Se  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  abbiamo concluso; altrimenti, poiché  $X$  è taut,  $f$  è la funzione costante  $\infty$ . Ma, per l'Osservazione 1.2.12, questo significa che  $\{f_{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  è compattamente divergente. In ogni caso, possiamo concludere che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è normale.

Supponiamo adesso che  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  sia normale. Se  $f$  è una funzione nella sua chiusura in  $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ , allora è il limite di una successione in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ . Poiché questa famiglia è normale, possiamo trovare una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente, ma dovrà comunque convergere a  $f$ . Allora nel primo caso, applicando il teorema di Weierstrass in carte opportune, troviamo che  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ , mentre nel secondo caso è la funzione costante  $\infty$ . Dunque  $X$  è taut.  $\square$

Si può dimostrare qualcosa di più.

**Proposizione 1.2.14.** ([A1, Theorem 2.1.2]) *Sia  $X$  una varietà taut. Allora  $\text{Hol}(Y, X)$  è una famiglia normale per ogni varietà complessa  $Y$ .*

Adesso vogliamo mostrare che tutte le varietà  $X$  Kobayashi-iperboliche tali che  $k_X$  è una distanza completa sono taut.

**Lemma 1.2.15.** *Siano  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica,  $z_0 \in X$  e  $r > 0$ . Supponiamo che esista un  $\rho > 0$  tale che la palla chiusa  $\overline{B_X(z, \rho)}$  è compatta per ogni  $z \in B_X(z_0, r)$ ; allora  $\overline{B_X(z_0, r)}$  è compatta.*

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è una varietà, è localmente compatta; inoltre, essendo  $X$  Kobayashi-iperbolica,  $k_X$  è una distanza. Dunque esiste  $0 < s < r$  tale che  $\overline{B_X(z_0, s)}$  è compatta. Ci basta allora mostrare che, se  $\overline{B_X(z_0, s)}$  è compatta, anche  $\overline{B_X(z_0, s + \rho/2)}$  lo è. Sia  $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\overline{B_X(z_0, s + \rho/2)}$ ; per il Lemma 1.2.11, esiste una successione  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  in  $\overline{B_X(z_0, s)}$  tale che  $k_X(z_\nu, w_\nu) < 3\rho/4$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre  $w_\nu \rightarrow \tilde{w} \in \overline{B_X(z_0, s)}$ . Allora  $z_\nu \in \overline{B_X(\tilde{w}, \rho)}$  per  $\nu$  sufficientemente grande; dunque, per ipotesi  $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione convergente.  $\square$

**Lemma 1.2.16.** *Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica. Allora  $X$  è  $k_X$ -completa se e solo se le palle chiuse sono compatte.*



*Dimostrazione.* Un'implicazione è ovvia. Assumiamo dunque che  $X$  sia  $k_X$ -completa; per il Lemma 1.2.15, ci basta mostrare che esiste  $\rho > 0$  tale che  $\overline{B_X(z_0, \rho)}$  è compatta per ogni  $z_0 \in X$ . Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esiste  $z_1 \in X$  tale che  $\overline{B_X(z_1, 1/2)}$  non è compatta. Usando il Lemma 1.2.15, possiamo costruire induttivamente una successione  $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  tale che  $z_\nu \in B_X(z_{\nu-1}, 1/2^{\nu-1})$  e  $\overline{B_X(z_\nu, 1/2^\nu)}$  non è compatta. Tale successione è di Cauchy, per cui converge a  $w_0 \in X$  perché  $X$  è  $k_X$ -completa. Poiché  $X$  è una varietà, è localmente compatta; quindi esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $\overline{B_X(w_0, \varepsilon)}$  è compatta. Ma per  $\nu$  sufficientemente grande  $\overline{B_X(z_\nu, 1/2^\nu)} \subseteq \overline{B_X(w_0, \varepsilon)}$ ; dunque sarebbe compatta, contraddizione.  $\square$

**Proposizione 1.2.17.** *Ogni varietà  $X$  Kobayashi-iperbolica e  $k_X$ -completa è taut.*

*Dimostrazione.* Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica e  $k_X$ -completa, e consideriamo una successione  $\{\varphi_\nu\} \subseteq \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  che non è compattamente divergente; vogliamo mostrare che ammette una sottosuccessione che converge in  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ .

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo trovare due compatti  $H \subseteq \mathbb{D}$  e  $K \subseteq X$  tali che  $\varphi_\nu(H) \cap K \neq \emptyset$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$  scegliamo  $\zeta_\nu \in H$  tale che  $\varphi_\nu(\zeta_\nu) \in K$ ; fissato  $z_0 \in K$  poniamo  $r = \max\{k_X(z, z_0) \mid z \in K\}$ . Allora per ogni  $\zeta \in \mathbb{D}$  e  $\nu \in \mathbb{N}$  abbiamo che

$$k_X(\varphi_\nu(\zeta), z_0) \leq k_X(\varphi_\nu(\zeta), \varphi_\nu(\zeta_\nu)) + k_X(\varphi_\nu(\zeta_\nu), z_0) \leq k_{\mathbb{D}}(\zeta, \zeta_\nu) + r.$$

Posto  $R_\zeta = \max\{k_{\mathbb{D}}(\zeta, \zeta') \mid \zeta' \in H\}$ , si ha dunque che la successione  $\{\varphi_\nu(\zeta)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è contenuta nella  $k_X$ -palla chiusa di centro  $z_0$  e raggio  $R_\zeta + r$ , che è compatta per il Lemma 1.2.16; di conseguenza, la successione  $\{\varphi_\nu(\zeta)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è relativamente compatta in  $X$ . Inoltre, poiché  $X$  è Kobayashi-iperbolica, l'intera famiglia  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  è equicontinua (è 1-lipschitziana rispetto alla distanza di Kobayashi); dunque, per il teorema di Ascoli-Arzelà, la successione  $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è relativamente compatta in  $C^0(\mathbb{D}, X)$ . In particolare, ammette una sottosuccessione che converge in  $C^0(\mathbb{D}, X)$ ; usando il teorema di Weierstrass, si vede che il limite appartiene a  $\text{Hol}(\mathbb{D}, X)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Esempio 1.2.18.** In [Rosa] viene costruito un esempio di un aperto di  $\mathbb{C}^3$  Dominio? limitato (dunque Kobayashi-iperbolico) e taut, ma non Kobayashi-completo.

Usando la Proposizione 1.2.17, si può dimostrare che tutti i domini limitati e strettamente pseudoconvessi sono taut. Tuttavia, più avanti avremo bisogno di un risultato un po' più forte.

**Proposizione 1.2.19.** ([KR, Proposition 2]) *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato, pseudoconvesso e con bordo  $C^1$ . Allora  $\Omega$  è taut.*

Prima di enunciare il risultato che, data una varietà taut, ci dà la dicotomia che cerchiamo per il comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe,

dobbiamo studiare alcune proprietà delle funzioni limite di funzioni olomorfe su varietà taut.

Per farlo, ci servirà il seguente fatto sull'immagine di una retrazione olomorfa dovuto a Rossi; riportiamo la dimostrazione data da Cartan in [Ca].

**Lemma 1.2.20.** (*[Ross, Section 5]*) *Sia  $X$  una varietà complessa e  $\rho \in \text{Hol}(X, X)$  una retrazione olomorfa di  $X$ . Allora l'immagine di  $\rho$  è una sottovarietà chiusa di  $X$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $M = \rho(X)$ . Per definizione di retrazione  $\rho(X) = \text{Fix}(\rho)$ , da cui si ha che  $M$  è chiusa.

Consideriamo  $z_0 \in M$ . Prendiamo un intorno aperto  $U$  di  $z_0$  in  $X$  che sia contenuto in una carta locale di  $X$  in  $z_0$ . Allora  $V = \rho^{-1}(U) \cap U$  è un intorno aperto di  $z_0$  tale che  $\rho(V) \subseteq V$ . Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che  $X$  sia un dominio limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ .

Sia  $P = D\rho(z_0) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  e definiamo  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$  come

$$\varphi = \text{id} + (2P - \text{id}) \circ (\rho - P).$$

Poiché  $D\varphi(z_0) = \text{id}$ , la funzione  $\varphi$  definisce una carta locale in un intorno di  $z_0$ . Adesso, dato che  $\rho^2 = \rho$  e  $P^2 = P$ , si ha

$$\begin{aligned} \varphi \circ \rho &= \rho + (2P - \text{id}) \circ \rho^2 - (2P - \text{id}) \circ P \circ \rho \\ &= P \circ \rho = P + P \circ (2P - \text{id}) \circ (\rho - P) = P \circ \varphi. \end{aligned}$$

Allora, letta in questa carta,  $\rho$  diventa lineare; perciò,  $M$  è una sottovarietà vicino a  $z_0$ . Per arbitrarietà di  $z_0$ , segue che  $M$  è una varietà.  $\square$

**Teorema 1.2.21.** (*[A1, Theorem 2.1.29]*) *Sia  $X$  una varietà taut e consideriamo  $f \in \text{Hol}(X, X)$ . Se la successione  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle iterate di  $f$  non è compattamente divergente, allora esiste un'unica retrazione olomorfa  $\rho \in \Gamma(f)$  su una sottovarietà  $M$  di  $X$  tale che ogni funzione limite  $h \in \Gamma(f)$  è della forma*

$$h = \gamma \circ \rho,$$

con  $\gamma \in \text{Aut}(M)$ .

Inoltre,  $\varphi = f|_M \in \text{Aut}(M)$  e  $\Gamma(f)$  è isomorfo al sottogruppo di  $\text{Aut}(M)$  dato dalla chiusura di  $\{\varphi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

*Dimostrazione.* Poiché la successione delle iterate di  $f$  non è compattamente divergente, esistono due compatti  $H, K \subseteq X$  e una sottosuccessione di iterate tali che l'intersezione di  $K$  con l'immagine di  $H$  tramite le funzioni della sottosuccessione non è mai vuota. Dato che  $X$  è taut, possiamo estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti o è compattamente divergente; per costruzione non può essere il secondo caso, dunque abbiamo trovato una sottosuccessione  $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  che converge uniformemente sui compatti a  $h \in \text{Hol}(X, X)$ . Possiamo anche assumere che  $p_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$  e  $q_\nu = p_\nu - k_\nu$

tendano a  $+\infty$  per  $\nu \rightarrow +\infty$ . A meno di prendere ulteriori sottosuccessioni, possiamo anche supporre che  $\{f^{p_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{f^{q_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergano uniformemente sui compatti o siano compattamente divergenti (non necessariamente la stessa cosa per entrambe); è facile vedere che i ragionamenti che andremo a fare sono validi anche considerando eventuali sottosuccessioni, quindi non perdiamo di generalità. Allora

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f^{p_\nu}(f^{k_\nu}(z)) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f^{k_{\nu+1}}(z) = h(z)$$

per ogni  $z \in X$ . Poiché l'orbita di  $z$  tramite  $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  tende a qualcosa, è relativamente compatta; dunque  $\{f^{p_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  non può essere compattamente divergente. Allora converge, uniformemente sui compatti, a una  $\rho \in \text{Hol}(X, X)$  tale che

$$h \circ \rho = \rho \circ h = h; \quad (9)$$

similmente, troviamo che  $\{f^{q_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti, a una  $g \in \text{Hol}(X, X)$  tale che

$$g \circ h = h \circ g = \rho. \quad (10)$$

In particolare,  $\rho^2 = \rho \circ \rho = g \circ h \circ \rho = g \circ h = \rho$ , perciò  $\rho$  è una retrazione di  $X$  su una sottovarietà  $M$ . Dalla (9) abbiamo  $h(X) \subseteq M$ ; inoltre  $g \circ \rho = \rho \circ g$ , da cui  $g(M) \subseteq M$ . Allora la (10) ci dà  $g \circ h|_M = h \circ g|_M = \text{id}_M$ . Dunque, ponendo  $\gamma = h|_M$ , otteniamo  $h = \gamma \circ \rho$  con  $\gamma \in \text{Aut}(M)$ . Dobbiamo mostrare che  $\rho$  non dipende da  $h$ ; in particolare, non dipende dalla sottosuccessione scelta.

Sia  $\{f^{k'_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  un'altra sottosuccessione convergente a  $h' \in \text{Hol}(X, X)$ . Ragionando come sopra, possiamo supporre che  $s_\nu = k'_\nu - k_\nu$  e  $t_\nu = k_{\nu+1} - k'_\nu$  convergano a  $+\infty$  per  $\nu \rightarrow +\infty$  e che  $\{f^{s_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{f^{t_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergano, uniformemente sui compatti, rispettivamente a  $\alpha, \beta \in \text{Hol}(X, X)$  tali che

$$\alpha \circ h = h \circ \alpha = h' \quad \text{e} \quad \beta \circ h' = h' \circ \beta = h; \quad (11)$$

in particolare,  $h(X) = h'(X)$ , per cui  $M$  non dipende dalla sottosuccessione scelta. Adesso scriviamo  $h = \gamma_1 \circ \rho_1$ ,  $h' = \gamma_2 \circ \rho_2$ ,  $\alpha = \gamma_3 \circ \rho_3$  e  $\beta = \gamma_4 \circ \rho_4$ , dove  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  sono delle retrazioni olomorfe di  $X$  su  $M$  e  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \text{Aut}(M)$ . Vogliamo dire che  $\rho_1 = \rho_2$ . Notiamo che  $h \circ h' = h' \circ h$  e  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ , che insieme alla (11) ci dà

$$\begin{aligned} \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 &= \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \rho_1, \\ \gamma_3 \circ \gamma_1 \circ \rho_1 &= \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 = \gamma_2 \circ \rho_2, \\ \gamma_4 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 &= \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 = \gamma_1 \circ \rho_1, \\ \gamma_3 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 &= \gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \rho_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Usando la prima equazione in (12) scriviamo  $\rho_2$  in funzione di  $\rho_1$ , e sostituendo nella seconda troviamo  $\gamma_3 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ . Similmente, usando la prima equazione scriviamo  $\rho_1$  in funzione di  $\rho_2$  e sostituendo nella terza troviamo  $\gamma_4 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ .

Allora  $\gamma_3 = \gamma_4^{-1}$  e la quarta equazione ci dà  $\rho_3 = \rho_4$ . Usando la seconda e la terza equazione abbiamo quindi

$$\rho_2 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 = \rho_3 = \rho_4 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 = \rho_1,$$

come voluto.

Adesso, dal fatto che  $f \circ \rho = \rho \circ f$  segue che  $f(M) \subseteq M$ . Ponendo  $\varphi = f|_M$ , se  $f^{p_\nu} \rightarrow \rho$  si ha che  $f^{p_\nu+1} \rightarrow \varphi \circ \rho$ , quindi per quanto visto finora segue che  $\varphi \in \text{Aut}(M)$ .

Infine, data  $h = \gamma \circ \rho \in \Gamma(f)$ , prendiamo due sottosuccessioni  $\{f^{p_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergenti rispettivamente a  $\rho$  e a  $h$ . Come prima, possiamo supporre che  $p_\nu - k_\nu \rightarrow +\infty$  e che  $f^{p_\nu - k_\nu} \rightarrow h_1 = \gamma_1 \circ \rho$  per  $\nu \rightarrow +\infty$ . Allora  $h \circ h_1 = h_1 \circ h = \rho$ , da cui  $\gamma_1 = \gamma^{-1}$ . Dunque l'applicazione  $h = \gamma \circ \rho \mapsto \gamma$  è l'isomorfismo cercato fra  $\Gamma(f)$  e la chiusura di  $\{\varphi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\text{Aut}(M)$ , e così concludiamo.  $\square$

**Definizione 1.2.22.** Siano  $X$  una varietà taut e  $f \in \text{Hol}(X, X)$ . Sia  $M$  data dal Teorema 1.2.21; tale  $M$  è detta la *varietà limite* di  $f$ .

Vediamo finalmente la dicotomia cercata. Nello specifico, la vedremo nella forma di cinque asserzioni equivalenti.

**Teorema 1.2.23.** ([A2, Theorem 1.1]) Sia  $X$  una varietà taut e consideriamo  $f \in \text{Hol}(X, X)$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) la successione  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle iterate di  $f$  non è compattamente divergente;
- (ii) la successione  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle iterate di  $f$  non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;
- (iii) la successione  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle iterate di  $f$  è relativamente compatta in  $\text{Hol}(X, X)$ ;
- (iv) l'orbita di  $z$  è relativamente compatta in  $X$  per ogni  $z \in X$ ;
- (v) esiste  $z_0 \in X$  la cui orbita è relativamente compatta in  $X$ .

*Dimostrazione.* (v)  $\Rightarrow$  (ii). Consideriamo  $H = \{z_0\}$  e  $K = \overline{\{f^k(z_0) \mid k \in \mathbb{N}\}}$ ; ovviamente  $H$  è compatto, e  $K$  lo è per l'ipotesi (v). Allora  $f^k(H) \cap K \neq \emptyset$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , per cui  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  non può contenere sottosuccessioni compattamente divergenti.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Poiché  $(X, k_X)$  è uno spazio metrico,  $\text{Hol}(X, X)$  è metrizzabile, prendendo ad esempio la distanza del sup (così facendo, la topologia coincide con quella di sottospazio di  $C^0(X, X)$ , che è quella che vogliamo). Quindi, se per assurdo  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  non fosse relativamente compatta, ammetterebbe una sottosuccessione  $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  senza sottosottosuccessioni convergenti. Ma allora, dato che  $X$  è taut, conterebbe una sottosottosuccessione compattamente divergente, ottenendo così una contraddizione all'ipotesi (ii).

(iii)  $\Rightarrow$  (iv). Fissiamo  $z \in X$  e consideriamo la funzione  $\text{Hol}(X, X) \rightarrow X$  data da  $f \mapsto f(z)$ . Questa funzione è continua rispetto alla topologia su  $\text{Hol}(X, X)$ , dunque l'immagine della chiusura di  $\{f^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  è compatta perché

immagine di un compatto, chiusa perché compatta in uno spazio di Hausdorff, e contiene  $\{f^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Perciò l'orbita di  $z$  è contenuta in un compatto chiuso, e quindi è relativamente compatta, come voluto.

(iv)  $\Rightarrow$  (i). Ovvio.

(i)  $\Rightarrow$  (v). Sia  $M$  la varietà limite di  $f$  e poniamo  $\varphi = f|_M$ . Sappiamo dal Teorema 1.2.21 che  $\varphi \in \text{Aut}(M)$  e che  $\text{id}_M \in \Gamma(\varphi)$ . Prendiamo  $z_0 \in M$ ; vogliamo mostrare che  $C = \{\varphi^k(z_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  è relativamente compatto in  $M$ , dunque anche in  $X$  dato che  $M$  è chiusa. Scegliamo  $\varepsilon_0 > 0$  tale che  $B_M(z_0, \varepsilon_0)$  è relativamente compatta in  $M$ ; notiamo che  $\varphi \in \text{Aut}(M)$  implica che  $B_M(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0) = \varphi^k(B_M(z_0, \varepsilon_0))$  è relativamente compatta in  $M$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Dal Lemma 1.2.11 abbiamo che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \subseteq B_M(B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8), \varepsilon_0/4);$$

per compattezza esistono quindi  $w_1, \dots, w_r \in B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8)$  tali che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^r B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C,$$

e possiamo assumere che  $B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C \neq \emptyset$  per  $j = 1, \dots, r$ . Per ogni  $j = 1, \dots, r$  scegliamo  $k_j \in \mathbb{N}$  tale che  $\varphi^{k_j}(z_0) \in B_M(w_j, \varepsilon_0/4)$ ; allora

$$B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^r \left( B_M(\varphi^{k_j}(z_0), \varepsilon_0/2) \cap C \right). \quad (13)$$

Dato che  $\text{id}_M \in \Gamma(\varphi)$ , l'insieme  $I = \{k \in \mathbb{N} \mid k_M(\varphi^k(z_0), z_0) < \varepsilon_0/2\}$  è infinito; dunque possiamo trovare un  $k_0 \in I$  tale che  $k_0 \geq \max\{1, k_1, \dots, k_r\}$ .

Poniamo  $K = \bigcup_{k=0}^{k_0} \overline{B_M(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0)}$ ; per costruzione,  $K$  è chiuso e compatto,

dunque ci basta mostrare che  $C \subseteq K$ . Prendiamo  $h \in I$ ; dato che l'insieme  $I$  è infinito, è sufficiente mostrare che  $\varphi^k(z_0) \in K$  per ogni  $0 \leq k \leq h$ .

Supponiamo, per assurdo, che esista un minimo  $h_0 \in I$  tale che l'insieme  $\{\varphi^k(z_0) \mid 0 \leq k \leq h_0\}$  non sia contenuto in  $K$ . Ovviamente  $h_0 > k_0$ . Poiché  $h_0, k_0 \in I$ , abbiamo anche che  $k_M(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)) < \varepsilon_0$ . Dunque

$$k_M(\varphi^{k_0-j}(z_0), \varphi^{h_0-j}(z_0)) = k_M(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)) < \varepsilon_0$$

per ogni  $0 \leq j \leq k_0$ . In particolare,

$$\varphi^j(z_0) \in K \quad (14)$$

per ogni  $j = h_0 - k_0, \dots, h_0$  e  $\varphi^{h_0-k_0}(z_0) \in B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C$ . Per la (13) possiamo trovare  $1 \leq l \leq r$  tale che  $k_M(\varphi^{k_l}(z_0), \varphi^{h_0-k_0}(z_0)) < \varepsilon_0/2$ ; quindi

$$k_M(\varphi^{k_l-j}(z_0), \varphi^{h_0-k_0-j}(z_0)) < \varepsilon_0/2 \quad (15)$$

per ogni  $0 \leq j \leq \min\{k_l, h_0 - k_0\}$ . Adesso, se  $k_l \geq h_0 - k_0$  allora, per la (14), la (15) e la definizione di  $K$ , abbiamo  $\varphi^j(z_0) \in K$  per ogni  $0 \leq j \leq h_0$ , in contraddizione con la scelta di  $h_0$ . Perciò dev'essere  $k_l < h_0 - k_0$ ; poniamo  $h_1 = h_0 - k_0 - k_l$ . Per la (15) si ha  $h_1 \in I$ ; dunque, essendo  $h_1 < h_0$ , dev'essere  $\varphi^j(z_0) \in K$  per ogni  $0 \leq j \leq h_1$ . Ma la (14), la (15) e la definizione di  $K$  implicano che  $\varphi^j(z_0) \in K$  per ogni  $h_1 \leq j \leq h_0$ , dunque anche in questo caso troviamo una contraddizione.  $\square$

Il seguente esempio mostra come l'ipotesi che  $X$  sia taut è necessaria per ottenere la dicotomia, anche in un caso piuttosto regolare. In realtà, dalla Proposizione 1.1.30 sappiamo che l'essere Kobayashi-iperbolica implica una proprietà di compattezza per le funzioni olomorfe da  $X$  in sé. Per definizione, l'essere taut impone che le funzioni limite in  $\text{Hol}(X, X)$  siano ancora in  $\text{Hol}(X, X)$  oppure siano la costante  $\infty$ ; ciò ci dà appunto la dicotomia (orbite relativamente compatte oppure iterate comapttamente divergenti) che esclude i casi misti nel Teorema 1.2.23.

**Esempio 1.2.24.** Consideriamo  $\Omega = \mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , la palla unitaria in  $\mathbb{C}^2$  privata dell'origine. Essendo un dominio limitato è Kobayashi-iperbolico, ma non è taut in quanto non è pseudoconvesso (per il Teorema 1.2.4, non è un dominio di olomorfia), e i domini taut diversi da  $\mathbb{C}^n$  sono sempre pseudoconvessi (si veda [W, Theorem F]).

Prendiamo come  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$  la funzione  $f(z, w) = (z/2, e^{i\theta}w)$ . L'orbita di un qualunque punto del tipo  $(0, w)$  con  $w \neq 0$  è relativamente compatta, mentre l'orbita di un qualunque punto del tipo  $(z, 0)$  con  $z \neq 0$  tende al punto del bordo  $(0, 0)$ . Dunque orbite relativamente compatte coesistono con orbite che tendono al bordo, quindi  $\{f^h\}_{h \in \mathbb{N}}$  non è né compattamente divergente né ha tutte le orbite relativamente compatte.

In particolare, le funzioni limite di  $f$  non sono né costanti né in  $\text{Hol}(\Omega, \Omega)$ , e questo è un controesempio, senza l'ipotesi taut, per il teorema di tipo “Wolff-Denjoy” che vedremo nella sezione 2.

Per finire, vediamo un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo  $C^2$ ); in particolare, faremo riferimento a una dimostrazione che sfrutta fatti geometrici quali la Gromov-iperbolicità. Il Teorema, che già era noto ancora prima che venisse mostrata la Gromov-iperbolicità, è il seguente.

**Teorema 1.2.25.** (Abate, [A2, Theorem 0.5]) *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ . Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di  $\Omega$  tramite  $f$  sono relativamente compatte in  $\Omega$ ; oppure,*
- *esiste un unico punto di  $\partial\Omega$  tale che le iterate di  $f$  convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Per dimostrarlo usando la Gromov-iperbolicità, è prima necessario mostrare che  $(\Omega, k_\Omega)$  è Gromov-iperbolico. Citiamo l'articolo di Balogh e Bonk in cui si trova la dimostrazione.

**Teorema 1.2.26.** (*Balogh, Bonk, [BB, Theorem 1.4]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  con  $n \geq 2$  un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso; allora  $(\Omega, k_\Omega)$  è Gromov-iperbolico. Inoltre, il bordo iperbolico  $\partial_G \Omega$  può essere identificato con il bordo euclideo  $\partial \Omega$ , cioè sono identificati come spazi topologici.

Serve anche un Teorema dovuto a Karlsson.

**Teorema 1.2.27.** (*Karlsson, [Ka, Corollary 3.7]*) Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico proprio, cioè in cui ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto, tale che

- (i) è un aperto denso di uno spazio topologico  $\overline{X}$  compatto e di Hausdorff la cui topologia di sottospazio coincide con la topologia di spazio metrico. Inoltre, dati  $x \in X$  e  $x_n$  una successione in  $X$  che converge a un punto di  $\overline{X} \setminus X$ , si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, x_n) = +\infty$ ;
- (ii) date  $x_n$  e  $y_n$  due successioni convergenti a due punti distinti di  $\overline{X} \setminus X$  e  $z \in X$ , si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, z), d(y_n, z)\} = +\infty$ .

Sia  $\phi : X \rightarrow X$  una semicontraZIONE. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- le orbite dei punti di  $X$  tramite  $\phi$  sono limitate;
- esiste un unico punto di  $\overline{X} \setminus X$  a cui convergono tutte le orbite di  $\phi$ .

L'ipotesi (ii) del Teorema 1.2.27 è sempre verificata dagli spazi Gromov-iperbolici, mentre segue dal Teorema 1.2.26 che la (i) è vera per i domini limitati e strettamente pseudoconvessi; per [G, Paragraph 3.3], sono anche propri. Usando anche il teorema di Montel, si ottiene così il Teorema 1.2.25.

Tuttavia, come già anticipato nell'introduzione, quello che noi andremo a vedere è un risultato che vale anche per domini con bordo non necessariamente regolare. L'ipotesi di tipo geometrico che andremo ad utilizzare è il concetto di visibilità, di cui discuteremo anche il rapporto con la Gromov-iperbolicità.

## 2 Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per varietà taut con visibilità

### 2.1 Il concetto di visibilità

Nella sezione 1 abbiamo visto come l’ipotesi di varietà taut ci permette di dire, se le orbite di una certa funzione non sono relativamente compatte, che la successione delle iterate è compattamente divergente.

Per ottenere un teorema di tipo “Wolff-Denjoy”, nel caso in cui le iterate siano compattamente divergenti dobbiamo dire due cose: che le iterate convergono uniformemente sui compatti a una funzione a valori nel bordo euclideo, e che in realtà tale funzione è una costante.

La convergenza al bordo uniforme sui compatti è data dal Corollario 1.2.3, supponendo che la varietà sia una sottovarietà limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Per dire che la funzione limite è costante, invece, ci serviranno delle ipotesi aggiuntive di tipo geometrico: la condizione di visibilità per le simil-geodetiche.

**Definizione 2.1.1.** Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica; fissiamo  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa \geq 0$ . Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo; una curva  $\sigma : I \rightarrow X$  è detta una  $(\lambda, \kappa)$ -*simil-geodetica* se

1. per ogni  $s, t \in I$  si ha

$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - \kappa \leq k_X(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \lambda|t - s| + \kappa; \quad (16)$$

2.  $\sigma$  è assolutamente continua (quindi  $\sigma'(t)$  esiste per quasi ogni  $t \in I$ ) e per quasi ogni  $t \in I$  si ha

$$K_X(\sigma(t); \sigma'(t)) \leq \lambda. \quad (17)$$

**Definizione 2.1.2.** Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ , e fissiamo  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa \geq 0$ . Diciamo che  $X$  è  $(\lambda, \kappa)$ -*visibile* se

1. ogni due punti distinti di  $X$  possono essere collegati da una  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti  $p, q \in \partial X$  con  $p \neq q$ , esistono in  $\overline{X}$  due intorni  $V$  e  $W$ , di  $p$  e  $q$  rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto  $K$  di  $X$  tali che ogni  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica in  $X$  che collega un punto di  $V$  a un punto di  $W$  interseca  $K$ .

**Osservazione 2.1.3.** Nel caso di un dominio limitato con bordo regolare, l’ipotesi di essere strettamente pseudoconvesso permetteva di concludere la condizione geometrica di Gromov-iperbolicità. Inoltre, in tal caso il dominio è proprio e completo (si veda [G, Paragraph 3.3]); dunque, ricordando l’Osservazione 1.1.18, per il teorema di Hopf-Rinow ([BH, Part I, Proposition 3.7]) è uno spazio geodetico, cioè ogni coppia di punti è collegata da una geodetica. Si può dimostrare che gli spazi Gromov-iperbolici, propri e geodetici sono visibili sia per le geodetiche che per le simil-geodetiche: per le prime si può ragionare come



in [BNT, Proposition 2.5], usando il fatto che per ogni coppia di punti distinti di  $\partial_G X$  esistono due loro intorni disgiunti in  $X \cup \partial_G X$  (si veda [BH, Part III, Chapter H, Lemma 3.6]); per le seconde, segue da [BH, Part III, Chapter H, Theorem 1.7].

Tuttavia, nella sezione 3 vedremo esempi di domini che sono visibili per le simil-geodetiche ma che non sono Gromov-iperbolici. Segue dunque che i risultati che andremo a dimostrare sono, in un certo senso, più generali. In particolare, il Teorema 1.2.25 sarà un corollario del teorema che dimostreremo.

Le simil-geodetiche sono delle curve che, a meno di costanti moltiplicative e additive, si comportano come le geodetiche, cioè come le curve che minimizzano la lunghezza. Quello che chiediamo, euristicamente, nella Definizione 2.1.2 è che, se vogliamo andare da un punto a un altro del bordo con tali curve, allora non possiamo stare arbitrariamente vicini al bordo, ma siamo costretti a “piegarci” verso l’interno; in pratica, stiamo chiedendo che ci sia una sorta di curvatura negativa.

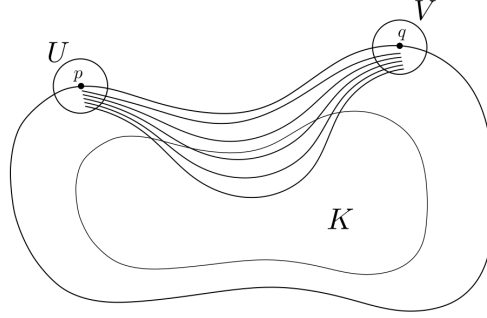


Figura 1: il caso, da noi escluso, in cui le simil-geodetiche da  $U$  a  $V$  fuggono dai compatti di  $X$

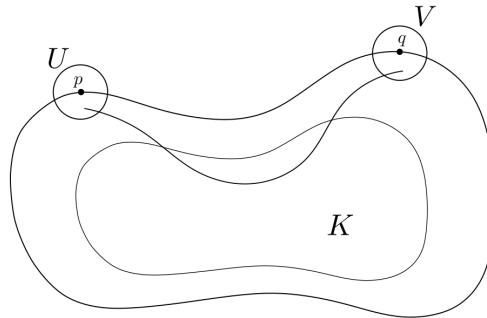


Figura 2: sotto ipotesi di visibilità, le simil-geodetiche da  $U$  a  $V$  devono curvare verso l’interno per intersecare un compatto  $K$

**Esempio 2.1.4.** Il dominio  $\Omega$  definito nell'Esempio 1.2.24 è  $(\lambda, \kappa)$ -visible per ogni  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa \geq 0$ . Per vederlo, fissiamo  $\lambda$  e  $\kappa$  e consideriamo due casi:

- (i) uno dei due punti è l'origine. Allora basta prendere come compatto un qualsiasi insieme della forma  $\{r \leq |z| \leq R\}$  con  $0 < r < R < 1$  e i due intorno aperti sufficientemente piccoli;
- (ii) i due punti sono entrambi sulla sfera unitaria. Per [NTT, Proposition 6] è facile vedere che, se la palla unitaria è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile, allora  $\Omega$  soddisfa la condizione voluta anche in questo caso. Ma la palla unitaria è limitata, ed è facile vedere che è strettamente pseudoconvessa; quindi, per l'Osservazione 2.1.3, è  $(\lambda, \kappa)$ -visibile, come voluto.

Perciò, l'ipotesi che la varietà sia taut è necessaria per ottenere un teorema di tipo “Wolff-Denjoy”, anche con la condizione di visibilità.

## 2.2 Risultati tecnici preparatori

Prima di andare a vedere il teorema di tipo “Wolff-Denjoy”, dobbiamo mostrare diversi risultati preliminari. Visto che andremo a dimostrare la versione del teorema che si trova in [CMS], tali risultati sono per la maggior parte dimostrati, e il resto citati, nel suddetto articolo.

Cominciamo con delle stime dal basso e dall'alto per la metrica di Kobayashi, che permettono anche di ottenere la lipschitzianità delle simil-geodetiche.

**Lemma 2.2.1.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa di  $\mathbb{C}^d$ . Se un sottoinsieme compatto  $K \subseteq X$  è contenuto nel polidisco di una carta di  $X$ , allora esiste una costante  $C = C(K) > 0$  tale che  $K_X(z; Z) \leq C\|Z\|$  per ogni  $z \in K$  e  $Z \in T_z X$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $n = \dim X$  e  $D = \mathbb{D}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}$  il polidisco che contiene  $K$ . Applicando la Proposizione 1.1.11 all'inclusione e passando in coordinate, per ogni  $z \in K$  e  $Z \in T_z X$  si ha che

$$K_X(z; Z) \leq K_D(z; Z) \leq \max_{j=1, \dots, n} \frac{r_j |Z_j|}{r_j^2 - |z_j|^2}.$$

Per ottenere la seconda disuguaglianza, ragioniamo al seguente modo: a meno di riscalare tutto per una costante, possiamo supporre che il membro destro sia uguale a 1 (se fosse 0, avremmo  $Z = 0$  e la tesi sarebbe immediata). Consideriamo adesso la funzione  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, D)$  che manda  $\zeta \in \mathbb{D}$  nell'elemento di  $D$  che ha come  $j$ -esima coordinata  $\frac{r_j \alpha_j \zeta + z_j}{1 + \bar{z}_j \alpha_j \zeta / r_j}$ , dove  $\alpha_j = \frac{r_j Z_j}{r_j^2 - |z_j|^2}$ ; allora  $f(0) = z$  e si ha che  $Df(0) \cdot 1 = Z$  e la disuguaglianza discende dalla definizione di  $K_D$ . Poiché, per compattezza di  $K$ , la quantità  $r_j^2 - |z_j|^2$  è limitata dal basso da una costante positiva per  $j = 1, \dots, n$ , la tesi segue facilmente.  $\square$

**Proposizione 2.2.2.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Allora*

- (1) *esiste  $c > 0$  tale che  $c\|Z\| \leq K_X(z; Z)$  per ogni  $z \in X$  e  $Z \in T_z X$ ;*
- (2) *per ogni compatto  $K \subseteq X$ , esiste una costante  $C = C(K) > 0$  tale che  $K_X(z; Z) \leq C\|Z\|$  per ogni  $z \in X$  e  $Z \in T_z X$ .*

*Dimostrazione.* (1) Supponiamo per assurdo che esistano  $z_j \in X$  e  $Z_j \in T_{z_j} X$ , con  $Z_j \neq 0$ , tali che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} K_X(z_j; Z_j)/\|Z_j\| \rightarrow 0$ . Senza perdita di generalità possiamo supporre  $\|Z_j\| = 1$  per ogni  $j$ . Per definizione di  $K_X$ , esistono delle funzioni  $f_j \in \text{Hol}(\mathbb{D}, X)$  e dei  $v_j \in \mathbb{C}$  tali che  $f_j(0) = z_j$  e

$$|v_j| \leq K_X(z_j; Z_j) + 1/j \quad \text{e} \quad d(f_j)_0(v_j) = Z_j.$$

Segue che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|d(f_j)_0(1)\| \geq \lim_{j \rightarrow +\infty} 1/|v_j| = +\infty$ . A meno di sotto-successioni e di riordinare le coordinate, possiamo supporre che siano le prime componenti dei vettori  $d(f_j)_0(1)$  a tendere a  $+\infty$ . Chiamiamo  $g_j$  la prima componente di  $f_j$ , cosicché  $g'_j$  è la prima componente di  $d(f_j)_0(1)$ . Le  $g_j$  sono le composizioni delle  $f_j$  con un embedding e una proiezione, dunque sono olomorfe; inoltre, poiché  $X$  è limitata, sono equilimitate. Esiste quindi un  $r > 0$  tale che  $g_j \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}_r)$  per ogni  $j$ . Adesso, noi sappiamo che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} |g'_j(0)| = +\infty$ ;

basta allora applicare il lemma di Schwarz a  $\frac{g_j - g_j(0)}{2r}$  con  $j$  sufficientemente grande per ottenere una contraddizione.

(2) Per ogni  $z \in K$ , scegliamo un polidisco  $U_z$  centrato in  $z$  e contenuto in una carta di  $X$ ; sia  $U'_z \subseteq U_z$  un altro polidisco, nella stessa carta, centrato in  $z$  e relativamente compatto in  $U_z$  per ogni  $z \in K$ . Dato che  $K$  è compatto, esistono  $z_1, \dots, z_l$  tali che  $K \subseteq \bigcup_{j=1}^l U'_{z_j}$ . Allora, poiché  $\overline{U'_{z_j}}$  è un sottoinsieme compatto di  $U_{z_j}$  per  $j = 1, \dots, l$ , per il Lemma 2.2.1 abbiamo

$$K_X(z, Z) \leq C_i \|Z\|$$

per ogni  $z \in U'_{z_j}$  e  $Z \in T_z X$ , dove  $C_i > 0$  è una costante che dipende dal compatto  $\overline{U'_{z_j}}$ . Basta allora porre  $C(K) = \max_{j=1, \dots, l} \{C_j\}$ .  $\square$

**Corollario 2.2.3.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Allora esiste  $c > 0$  tale che  $c\|z - w\| \leq k_X(z, w)$  per ogni  $z, w \in X$ .*

*Dimostrazione.* Per il Teorema 1.2.9 ci basta mostrare che  $c\|z - w\| \leq l_X(\gamma)$  per ogni curva  $C^1$  a tratti  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(a) = z$  e  $\gamma(b) = w$ . Prendendo

$c > 0$  dato dal punto (1) della Proposizione 2.2.2, abbiamo che

$$\begin{aligned} l_X(\gamma) &= \int_a^b K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) dt \geq \int_a^b c \|\gamma'(t)\| dt \\ &\geq c \left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\| = c \|z - w\|, \end{aligned}$$

come voluto.  $\square$

**Proposizione 2.2.4.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Per ogni  $\lambda \geq 1$  esiste una costante  $C = C(\lambda) > 0$  tale che ogni  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica è  $C$ -lipschitziana rispetto alla distanza euclidea.*

*Dimostrazione.* Ogni  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica  $\sigma : I \rightarrow X$  è, per definizione, assolutamente continua rispetto alla distanza euclidea. Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, per ogni  $s, t \in I$  abbiamo che

$$\sigma(t) = \sigma(s) + \int_s^t \sigma'(r) dr.$$

Per il punto (1) della Proposizione 2.2.2, esiste una costante  $c > 0$  tale che  $c\|Z\| \leq K_X(z; Z)$  per ogni  $z \in X$  e  $Z \in T_z X$ , e per definizione di  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica  $K_X(\sigma(t); \sigma'(t)) \leq \lambda$  per quasi ogni  $t \in I$ . Dunque  $\|\sigma'(t)\| \leq \lambda/c$  per quasi ogni  $t \in I$ , da cui

$$\|\sigma(t) - \sigma(s)\| = \left\| \int_s^t \sigma'(r) dr \right\| \leq \int_s^t \|\sigma'(r)\| dr \leq \frac{\lambda}{c} |t - s|,$$

cioè  $\sigma$  è  $\lambda/c$ -lipschitziana rispetto alla distanza euclidea.  $\square$

Il seguente Lemma è un fatto tecnico che ci servirà tra poco.

**Lemma 2.2.5.** *Siano  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$  e  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  una curva assolutamente continua. Se*

$$l_X(\sigma) \leq k_X(\sigma(a), \sigma(b)) + \kappa,$$

*allora, per ogni  $a \leq s \leq t \leq b$ , si ha*

$$l_X(\sigma|_{[s, t]}) \leq k_X(\sigma(s), \sigma(t)) + \kappa.$$

*Dimostrazione.* Siano  $s$  e  $t$  come sopra. Allora

$$l_X(\sigma|_{[s, t]}) = l_X(\sigma) - l_X(\sigma|_{[a, s]}) - l_X(\sigma|_{[t, b]}).$$

Usando la nostra ipotesi e il punto (ii) del Teorema 1.2.9, troviamo

$$l_X(\sigma|_{[s, t]}) \leq k_X(\sigma(a), \sigma(b)) + \kappa - k_X(\sigma(a), \sigma(s)) - k_X(\sigma(t), \sigma(b));$$

applicando la disuguaglianza triangolare, si ottiene la tesi.  $\square$

Quello che vogliamo mostrare adesso è che le sottovarietà complesse, connesse e limitate di  $\mathbb{C}^d$  sono anche connesse per archi simil-geodetici.

**Teorema 2.2.6.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Per ogni  $z, w \in X$  e ogni  $\kappa > 0$  esiste una  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  tale che  $\sigma(a) = z$  e  $\sigma(b) = w$ .*

*Dimostrazione.* Per il punto (i) del Teorema 1.2.9, a meno di riparametrizzare esiste una curva  $C^1$  a tratti  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$  e

$$l_X(\gamma) < k_X(z, w) + \kappa;$$

inoltre, a meno di perturbare di poco la curva, possiamo assumere che sia  $C^1$  e che  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Consideriamo la funzione  $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  data da

$$f(t) = \int_0^t K_X(\gamma(r); \gamma'(r)) \, dr.$$

Poiché  $\gamma([0, 1])$  è compatto in  $X$ , per i punti (1) e (2) della Proposizione 2.2.2 esiste  $C > 0$  tale che

$$\frac{1}{C} \|\gamma'(t)\| \leq K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) \leq C \|\gamma'(t)\| \text{ per ogni } t \in [0, 1].$$

Dato che  $\|\gamma'(t)\| > 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$  e  $\gamma'$  è continua, esistono  $A, B > 0$  tali che  $A \leq \|\gamma'(t)\| \leq B$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Dunque  $f$  è una funzione bilipschitziana e, di conseguenza, strettamente crescente. Chiamiamo  $g : [0, l_X(\gamma)] \rightarrow [0, 1]$  l'inversa di  $f$ . Vogliamo dire che la curva  $\sigma = \gamma \circ g : [0, l_X(\gamma)] \rightarrow X$  è una  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica; sostanzialmente,  $\sigma$  è la riparametrizzazione per lunghezza d'arco di  $\gamma$ .

Poiché  $g$  è bilipschitziana (perché lo è la sua inversa) e  $\gamma$  è  $C^1$ , abbiamo che  $\sigma$  è lipschitziana, quindi è assolutamente continua; allora, per i  $t$  per i quali  $g'(t)$  esiste, si ha  $\sigma'(t) = \gamma'(g(t))g'(t)$ . Inoltre, per tali  $t$  anche  $f'(g(t))$  esiste ed è non-nullo, e  $g'(t) = 1/f'(g(t)) > 0$ . Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha che  $f'$  esiste per quasi ogni  $s \in [0, 1]$  e  $f'(s) = K_X(\gamma(s); \gamma'(s))$ . Siccome  $g$  è bilipschitziana, la preimmagine degli  $s \in [0, 1]$  per cui  $f'(s)$  esiste è un sottoinsieme di  $[0, l_X(\gamma)]$  di misura piena. Visto che  $\gamma'(s) \neq 0$  per ogni  $s \in [0, 1]$ , otteniamo che

$$g'(t) = \frac{1}{K_X(\gamma(g(t)); \gamma'(g(t)))}$$

per quasi ogni  $t \in [0, l_X(\gamma)]$ . Per tali  $t$  si ha che

$$K_X(\sigma(t); \sigma'(t)) = K_X(\gamma(g(t)); \gamma'(g(t))g'(t)) = 1;$$

quindi  $l_X(\sigma) = l_X(\gamma) \leq k_X(z, w) + \kappa$ . Per il Lemma 2.2.5 si ha, per ogni  $0 \leq s \leq t \leq l_X(\gamma)$ , che

$$|t - s| = l_X(\sigma|_{[s, t]}) \leq k_X(\sigma(s), \sigma(t)) + \kappa.$$

Dato che  $\sigma$  è assolutamente continua, per il punto (ii) del Teorema 1.2.9 abbiamo anche che

$$k_X(\sigma(s), \sigma(t)) \leq l_X(\sigma|_{[s,t]}) = |s - t|$$

per ogni  $0 \leq s \leq t \leq l_X(\gamma)$ . Segue dunque che  $\sigma$  è una  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica.  $\square$

Adesso ci servirà un Lemma quasi ovvio.

**Lemma 2.2.7.** *Sia  $X$  una varietà Kobayashi-iperbolica. Se  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  è una  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica per qualche  $\kappa > 0$ , allora per ogni  $t \in [a, b]$  si ha*

$$k_X(\sigma(a), \sigma(t)) + k_X(\sigma(t), \sigma(b)) \leq k_X(\sigma(a), \sigma(b)) + 3\kappa.$$

*Dimostrazione.* È un'immediata conseguenza della definizione di  $(1, \kappa)$ -simil-geodetica.  $\square$

Il seguente Lemma, invece, ci servirà per la prossima dimostrazione. È un risultato sulla convergenza puntuale, mentre più avanti ne vedremo uno sulla convergenza uniforme sui compatti per varietà  $(1, \kappa_0)$ -visibili per qualche  $\kappa_0 > 0$ .

**Lemma 2.2.8.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ , e sia  $F \in \text{Hol}(X, X)$ . Dati una funzione strettamente crescente  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $z \in X$ , se l'insieme dei punti limite della successione  $\{F^{\mu(j)}(z)\}_{j \in \mathbb{N}}$  consiste in un solo punto  $\xi$  allora  $\lim_{j \rightarrow +\infty} F^{\mu(j)}(z) \rightarrow \xi$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che non valga la tesi. Allora esistono un  $\varepsilon > 0$  e una sottosuccessione  $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tali che  $\|F^{\mu(j_n)}(z) - \xi\| \geq \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per limitatezza di  $X$ , a meno di prendere un'ulteriore sottosuccessione possiamo supporre che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^{\mu(j_n)}(z) \rightarrow \xi'$ . Per ipotesi dev'essere  $\xi' = \xi$ , in contraddizione con il fatto che  $\|F^{\mu(j_n)}(z) - \xi\| \geq \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Quello che andremo ora a dimostrare è uno dei fatti cruciali per ottenere il teorema di tipo “Wolff-Denjoy”. Esso afferma che, sotto condizioni di visibilità per le simil-geodetiche, le sottosuccessioni di iterate di una funzione olomorfa che “tendono a infinito” convergono tutte, puntualmente, a un unico punto del bordo.

**Proposizione 2.2.9.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Supponiamo che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile. Data una funzione  $F \in \text{Hol}(X, X)$ , esiste  $\xi \in \partial X$  tale che per ogni funzione  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strettamente crescente per cui esiste  $x_0 \in X$  tale che*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu(j)}(x_0), x_0) = +\infty \quad (18)$$

si ha

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F^{\nu(j)}(z) = \xi \quad (19)$$

per ogni  $z \in X$ .

*Dimostrazione.* Se  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} k_X(F^n(x_0), x_0) < +\infty$  l'affermazione è vera a vuoto per ogni  $\xi \in \partial X$ . Altrimenti, possiamo prendere una funzione strettamente crescente  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che

- si ha  $k_X(F^{\nu(j)}(x_0), x_0) \geq k_X(F^k(x_0), x_0)$  per ogni  $j \in \mathbb{N}$  e per ogni  $k \leq (\nu \circ \tau)(j)$ ;
- la successione  $\{F^{\nu(j)}(x_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge a un certo  $\xi \in \partial X$ .

Infatti, definendo induttivamente  $l_0 = 0$  e  $l_n$  come il minimo numero naturale  $h > l_{n-1}$  tale che  $k_X(F^h(x_0), x_0) \geq \max\{n, k_X(F^{l_{n-1}}(x_0), x_0)\}$ , abbiamo  $k_X(F^{l_n}(x_0), x_0) \geq k_X(F^k(x_0), x_0)$  per ogni  $n$  e per ogni  $k \leq l_n$ ; inoltre, abbiamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_X(F^{l_n}(x_0), x_0) = +\infty$ . Per limitatezza di  $X$ , esiste un'ulteriore sottosuccessione  $l_{n_j}$  tale che  $F^{l_{n_j}}(x_0)$  converge a un certo  $\xi \in \overline{X}$ , e in realtà  $\xi \in \partial X$  visto che la distanza di Kobayashi da  $x_0$  tende a  $+\infty$ ; basta allora porre  $\nu(j) = l_{n_j}$ .

Vogliamo ora mostrare la seguente asserzione.

Siano  $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{m'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e  $z_0, z'_0 \in X$  tali che:

- (1) per ogni  $j \in \mathbb{N}$  si ha  $m_j \geq m'_j$ ;
- (2) per ogni  $j \in \mathbb{N}$  e  $k \leq m_j$  si ha  $k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) \geq k_X(F^k(z_0), z_0)$ ;
- (3) si ha  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) = \lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{m'_j}(z'_0), z_0) = +\infty$ ;
- (4) le successioni  $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergono, rispettivamente, a  $\zeta$  e  $\zeta'$  in  $\partial X$ ;

allora  $\zeta = \zeta'$ .

Supponiamo per assurdo che  $\zeta \neq \zeta'$ . Grazie al Teorema 2.2.6 possiamo scegliere, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , una  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica  $\sigma_j : [0, T_j] \rightarrow X$  tale che  $\sigma_j(0) = F^{m_j}(z_0)$  e  $\sigma_j(T_j) = F^{m'_j}(z'_0)$ . Adesso, dato che abbiamo assunto che  $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergano a due punti di  $\partial X$  distinti e  $X$  ha la visibilità rispetto alle  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetiche, esistono una costante  $0 < R < +\infty$  e, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , un  $t_j \in [0, T_j]$  tali che  $k_X(z_0, \sigma_j(t_j)) < R$ . Per il Lemma 2.2.7 si ha dunque che

$$\begin{aligned} k_X(F^{m_j}(z_0), F^{m'_j}(z'_0)) &\geq k_X(F^{m_j}(z_0), \sigma_j(t_j)) + k_X(\sigma_j(t_j), F^{m'_j}(z'_0)) - 3\kappa_0 \\ &\geq k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) - k_X(z_0, \sigma_j(t_j)) \\ &\quad + k_X(F^{m'_j}(z'_0), z_0) - k_X(z_0, \sigma_j(t_j)) - 3\kappa_0 \\ &\geq k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) + k_X(F^{m'_j}(z'_0), z_0) - 3\kappa_0 - 2R; \end{aligned} \quad (20)$$

d'altra parte, abbiamo anche che

$$\begin{aligned}
k_X(F^{m_j}(z_0), F^{m'_j}(z'_0)) &\leq k_X(F^{m_j-m'_j}(z_0), z'_0) \\
&\leq k_X(F^{m_j-m'_j}(z_0), z_0) + k_X(z_0, z'_0) \\
&\leq k_X(F^{m_j}(z_0), z_0) + k_X(z_0, z'_0),
\end{aligned} \tag{21}$$

dove per la prima e la terza disuguaglianza abbiamo usato, rispettivamente, le condizioni (1) e (2) sulle successioni  $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{m'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ; nella prima, abbiamo anche usato che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a  $k_X$ . Concatenando la (20) e la (21) e riarrangiando i termini, otteniamo

$$k_X(F^{m'_j}(z'_0), z_0) \leq k_X(z_0, z'_0) + 3\kappa_0 + 2R,$$

che è in contraddizione con la condizione (3).

Adesso che l'asserzione è stata dimostrata, possiamo concludere la dimostrazione. Usando la disuguaglianza triangolare e il fatto che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a  $k_X$ , troviamo che

$$k_X(F^{\mu(j)}(z), z') \geq k_X(F^{\mu(j)}(x_0), x_0) - k_X(x_0, z) - k_X(z', x_0);$$

segue che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu(j)}(z), z') = +\infty$  per ogni  $z, z' \in X$ .

Fissiamo ora uno  $z \in X$ , e prendiamo  $\xi'$  punto limite di  $\{F^{\mu(j)}(z)\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Allora deve esistere una funzione strettamente crescente  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} F^{(\mu \circ \tau)(j)}(z) = \xi'$ ; inoltre, poiché  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu(j)}(z), z) = +\infty$ , dev'essere  $\xi' \in \partial X$ . Scegliamo una funzione strettamente crescente  $\tau' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che  $\nu \circ \tau' \geq \mu \circ \tau$  e applichiamo l'asserzione dimostrata sopra alle successioni  $m_j = (\nu \circ \tau')(j)$ ,  $m'_j = (\mu \circ \tau)(j)$  e ai punti  $z_0 = x_0$ ,  $z'_0 = z$ , per i quali si verificano facilmente le condizioni (1), (2), (3) e (4). Troviamo così  $\xi' = \xi$  e si conclude grazie al Lemma 2.2.8.  $\square$

Anche il seguente teorema ci aiuterà nella nostra dimostrazione. Esso afferma che, sotto condizioni di visibilità per le simil-geodetiche, le successioni di funzioni olomorfe che convergono uniformemente sui compatti di  $X$  devono necessariamente convergere a una costante.

**Teorema 2.2.10.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Supponiamo che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile. Consideriamo una successione  $\{F_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Hol}(X, X)$  che converge uniformemente sui compatti di  $X$  a una  $\psi \in \text{Hol}(X, \mathbb{C}^d)$  con  $\psi(X) \subseteq \partial X$ . Allora  $\psi$  è costante.*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che  $\psi$  non sia costante. Allora, dati  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , la restrizione di  $\psi$  a  $B_X(x, \varepsilon)$ , la palla aperta rispetto alla distanza di Kobayashi di centro  $x$  e raggio  $\varepsilon$ , non è costante. Infatti, tale palla è un aperto di  $X$ , e se  $\psi$  fosse costante su di essa lo sarebbe su tutta  $X$  per il



principio di identità delle funzioni olomorfe, poiché  $X$  è connessa. Questa, però, sarebbe una contraddizione alla nostra assunzione.

Fissiamo  $x_0 \in X$  e poniamo  $\varepsilon_0 = \kappa_0/3$ . Per quanto detto, deve esistere un  $x_1 \in B_X(x_0, \varepsilon_0)$  tale che  $\{F_\nu(x_0)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{F_\nu(x_1)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergono, rispettivamente, a  $\xi$  e  $\eta$ , con  $\xi, \eta \in \partial X$  e  $\xi \neq \eta$ . Consideriamo adesso una  $(1, \kappa_0/3)$ -simil-geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(a) = x_0$  e  $\gamma(b) = x_1$ , che esiste per il Teorema 2.2.6; da (16) nella definizione si ha che

$$|a - b| - \kappa_0/3 \leq k_X(x_0, x_1) \Rightarrow |a - b| \leq k_X(x_0, x_1) + \kappa_0/3 \leq 2\kappa_0/3.$$

Per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ , definiamo  $\sigma_\nu : [a, b] \rightarrow X$  come  $\sigma_\nu = F_\nu \circ \gamma$ . Mostriamo che  $\sigma_\nu$  è una  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Per ogni  $s, t \in [a, b]$  si ha

$$\begin{aligned} k_X(\sigma_\nu(s), \sigma_\nu(t)) &= k_X(F_\nu(\gamma(s)), F_\nu(\gamma(t))) \\ &\leq k_X(\gamma(s), \gamma(t)) \leq |s - t| + \kappa_0/3 \leq |s - t| + \kappa_0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto alla distanza di Kobayashi e, dato che  $\gamma$  è una  $(1, \kappa_0/3)$ -simil-geodetica, la (16). Inoltre, si ha che  $|s - t| - \kappa_0 \leq |a - b| - \kappa_0 \leq -\kappa_0/3 < 0$  per ogni  $s, t \in [a, b]$ ; dunque

$$|s - t| - \kappa_0 \leq k_X(\sigma_\nu(s), \sigma_\nu(t)) \leq |s - t| + \kappa_0. \quad (22)$$

Infine, per ogni  $t$  si ha

$$\begin{aligned} K_X(\sigma_\nu(t); \sigma'_\nu(t)) &= K_X(F_\nu(\gamma(t)); d(F_\nu)_{\gamma(t)}(\gamma'(t))) \\ &\leq K_X(\gamma(t); \gamma'(t)) \leq 1, \end{aligned} \quad (23)$$

dove abbiamo usato che le funzioni olomorfe non aumentano la metrica di Kobayashi e, visto che  $\gamma$  è una  $(1, \kappa_0/3)$ -simil-geodetica, la (17). Si ha anche che la curva  $\sigma_\nu$  è assolutamente continua per ogni  $\nu$ , poiché composizione di  $\gamma$ , che è assolutamente continua per definizione di  $(1, \kappa_0/3)$ -simil-geodetica, e  $F_\nu$ , che è olomorfa e dunque lipschitziana sul compatto  $\gamma([a, b])$ . Grazie alla (22) e alla (23), possiamo concludere che  $\sigma_\nu$  è una  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica per ogni  $\nu$ .

Adesso, poiché  $\{F_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sui compatti di  $X$  a una funzione olomorfa  $\psi$  a valori in  $\partial X$ , ne consegue che per ogni compatto  $K \subseteq X$  esiste un  $\nu(K) \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $\nu \geq \nu(K)$ , si ha  $\sigma_\nu([a, b]) \cap K = \emptyset$ . Ma così troviamo una contraddizione, perché  $X$  è  $(1, \kappa_0)$ -visibile.  $\square$

Concludiamo la questa sottosezione con l'analogo del Lemma 2.2.8 per la convergenza uniforme sui compatti.

**Lemma 2.2.11.** *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Supponiamo che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile. Consideriamo una  $F \in \text{Hol}(X, X)$  tale che la successione delle iterate di  $F$  è compattamente divergente, e supponiamo che esistano un compatto  $K$  di  $X$ , una funzione strettamente crescente  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $\xi \in \partial X$  tali che la successione  $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converga alla costante  $\xi$  uniformemente su  $K$ ; allora converge alla costante  $\xi$  uniformemente su tutti i compatti di  $X$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che non valga la tesi; allora esistono un compatto  $H \subseteq X$ , un  $\varepsilon > 0$ , una successione di numeri naturali  $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e una successione  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $z_n \in H$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $\|F^{\mu(j_n)}(z_n) - \xi\| \geq \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Applicando il Corollario 1.2.3, troviamo una sottosuccessione  $\{j_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  tale che la successione  $\{F^{\mu(j_{n_m})}\}_{m \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sui compatti di  $X$  a una funzione olomorfa  $\tilde{F} : X \rightarrow \mathbb{C}^d$  con  $\tilde{F}(X) \subseteq \bar{X}$ . Poiché la successione delle iterate di  $F$  è compattamente divergente, dev'essere  $\tilde{F}(X) \subseteq \partial X$ ; allora per il Teorema 2.2.10  $\tilde{F}$  è costante. Siccome su  $K$  la successione  $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge alla costante  $\xi$ , la funzione  $\tilde{F}$  dev'essere proprio tale costante; ma per costruzione la convergenza non può essere uniforme sul compatto  $H$ , assurdo.  $\square$

### 2.3 Il teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

Andiamo adesso ad enunciare e dimostrare la versione più generale di un teorema di tipo Wolff-Denjoy per varietà Kobayashi-iperboliche. Riportiamo la dimostrazione data in [CMS], ma notiamo che la strategia e le tecniche impiegate sono sostanzialmente riprese da [BZ1] e [BM]. Ognuno di questi articoli ha generalizzato il risultato ottenuto nel precedente.

**Teorema 2.3.1.** (*[CMS, Theorem 1.15]*) *Sia  $X$  una sottovarietà complessa, connessa e limitata di  $\mathbb{C}^d$ . Supponiamo che  $X$  sia taut e che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $X$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile.*

*Sia  $F : X \rightarrow X$  una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di  $X$  tramite  $F$  sono relativamente compatte in  $X$ ; oppure,*
- *esiste un unico punto di  $\partial X$  tale che la successione delle iterate di  $F$  converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è taut, per il Teorema 1.2.23 o l'orbita di  $z$  tramite  $F$  è relativamente compatta per ogni  $z \in X$ , oppure la successione delle iterate  $\{F^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è compattamente divergente. Supponiamo che le orbite di  $F$  non siano relativamente compatte in  $X$ ; allora la successione delle iterate di  $F$  è compattamente divergente.

Consideriamo una sottosuccessione di  $\{F^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  che converge uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa  $\tilde{F} : X \rightarrow \mathbb{C}^d$  con  $\tilde{F}(X) \subseteq \bar{X}$ . Poiché le iterate di  $F$  sono compattamente divergenti, si deve avere che  $\tilde{F}(X) \subseteq \partial X$ . Allora, per il Teorema 2.2.10, troviamo che  $\tilde{F}$  è costante. Identifichiamo quindi

$$\Gamma := \overline{\{F^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}} \setminus \{F^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$$

come un insieme di punti di  $\partial X$ , dove la chiusura è intesa rispetto alla topologia compatta-aperta. Supponiamo, per assurdo, che  $\Gamma$  contenga almeno due punti.

Caso 1: esiste (e quindi per ogni)  $o \in X$  tale che

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} k_X(F^\nu(o), o) = +\infty.$$

Possiamo dunque scegliere una sottosuccessione  $\{\nu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tale che:

- (1) per ogni  $j \in \mathbb{N}$  e  $k \leq \nu_j$  si ha  $k_X(F^k(o), o) \leq k_X(F^{\nu_j}(o), o)$ ;
- (2)  $\{F^{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\xi \in \partial X$ .

Adesso, poiché abbiamo assunto che  $\Gamma$  contenga almeno due elementi, esiste una sottosuccessione  $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tale che  $\{F^{\mu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\eta \in \partial X$  con  $\eta \neq \xi$ . Segue immediatamente dalla Proposizione 2.2.9 che non possiamo avere  $\limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu_j}(o), o) = +\infty$ . Perciò dev'essere

$\limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu_j}(o), o) < +\infty$ ; notiamo che se  $X$  fosse  $k_X$ -completa, allora per il Lemma 1.2.16 avremmo subito un assurdo. Altrimenti, si ha

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu_h}(o), F^{\mu_j}(o)) \\ & \geq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \left( k_X(F^{\nu_h}(o), o) - k_X(F^{\mu_j}(o), o) \right) = +\infty. \end{aligned} \tag{24}$$

Consideriamo ora un  $l \in \mathbb{N}$ . Poiché la successione  $\{F^{\mu_j - l}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sul compatto  $\{F^l(o)\}$  a  $\eta$ , per il Lemma 2.2.11 converge, uniformemente su tutti i compatti di  $X$ , a  $\eta$ .

Poniamo

$$M_l := \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\mu_j - l}(o), o);$$

afferriamo che

$$\limsup_{l \rightarrow +\infty} M_l < +\infty.$$

Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esiste una sottosuccessione  $\{l_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tale che  $M_{l_m} > m$  per ogni  $m$ . Per definizione di  $M_l$  e per quanto appena trovato sulla successione  $\{F^{\mu_j - l}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , abbiamo quindi che esiste una sottosottosuccessione  $\{j_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tale che:

- (1)  $\|F^{\mu_{j_m} - l_m}(o) - \eta\| < 1/m$ ;
- (2)  $k_X(F^{\mu_{j_m} - l_m}(o), o) > m$ .

Per la Proposizione 2.2.9 deve dunque essere  $\eta = \xi$ , contraddizione. Perciò segue che  $\limsup_{l \rightarrow +\infty} M_l < +\infty$ . Allora

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu_h}(o), F^{\mu_j}(o)) \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(o, F^{\mu_j - \nu_h}(o)) = \limsup_{h \rightarrow +\infty} M_{\nu_h} < +\infty, \end{aligned}$$

in contraddizione con la (24); questo conclude il Caso 1.

Caso 2: esiste (e quindi per ogni)  $o \in X$  tale che

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} k_X(F^\nu(o), o) < +\infty.$$

Ricordiamo che abbiamo assunto che esistano due punti distinti  $\xi, \eta \in \Gamma$ . Poiché  $X$  è  $(1, \kappa_0)$ -visibile, esistono  $V_\xi, V_\eta$  intorno in  $\mathbb{C}^d$  rispettivamente di  $\xi$  e di  $\eta$ , con  $\overline{V}_\xi \cap \overline{V}_\eta = \emptyset$ , e un compatto  $K$  di  $X$  tali che ogni  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica in  $X$  che collega un punto di  $V_\xi$  a un punto di  $V_\eta$  interseca  $K$ . Adesso definiamo, per  $\delta > 0$  arbitrario, la funzione  $G_\delta : K \times K \rightarrow [0, +\infty)$  data da

$$G_\delta(x_1, x_2) := \inf\{k_X(F^m(x_1), x_2) \mid m \in \mathbb{N}, \|F^m(x_1) - \xi\| < \delta\}.$$

Notiamo che  $G_\delta$  è ben definita per ogni  $\delta > 0$  (basta considerare la sottosuccessione delle iterate di  $F$  che converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ ) e che  $G_{\delta_1}(x_1, x_2) \geq G_{\delta_2}(x_1, x_2)$  per ogni  $x_1, x_2 \in K$  e  $\delta_1 \leq \delta_2$ . Vogliamo dire che, in questo caso, si ha

$$\sup_{\delta > 0, x_1, x_2 \in K} G_\delta(x_1, x_2) < +\infty.$$

Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esistono una successione di reali positivi  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e due successioni  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $K$  tali che  $G_{\delta_n}(x'_n, x''_n) \geq n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Possiamo inoltre supporre che le successioni  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergano, rispettivamente, a  $\delta_0 \geq 0$  e  $x_1, x_2 \in K$ . Sia  $\{\nu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una sottosuccessione di  $\mathbb{N}$  tale che  $\{F^{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\xi$ . Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $j(n) \in \mathbb{N}$  tale che si ha  $\sup_{x \in K} \|F^{\nu_j}(x) - \xi\| < \delta_n$  per ogni  $j \geq j(n)$ . In particolare, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $\|F^{\nu_{j(n)}}(x'_n) - \xi\| < \delta_n$ . Segue che

$$n \leq G_{\delta_n}(x'_n, x''_n) \leq k_X(F^{\nu_{j(n)}}(x'_n), x''_n);$$

da ciò discende facilmente che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu_{j(n)}}(x_1), x_1) = +\infty$ , in contraddizione con l'ipotesi del Caso 2.

Abbiamo dunque che, per ogni  $x_1, x_2 \in K$ , è ben definita la funzione data da

$$G(x_1, x_2) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} G_\delta(x_1, x_2);$$

definiamo inoltre

$$\varepsilon := \liminf_{z \rightarrow \eta} \inf_{y \in K} k_X(z, y).$$

Per il Corollario 2.2.3 abbiamo che  $k_X(z, y) \geq c\|z - y\|$ , e quest'ultima quantità è sempre maggiore di una costante positiva per  $z$  sufficientemente vicino al bordo e di conseguenza lontano dal compatto  $K$ ; quindi  $\varepsilon > 0$ . Scegliamo ora due punti  $q_1, q_2 \in K$  tali che

$$G(q_1, q_2) < \inf_{x_1, x_2 \in K} G(x_1, x_2) + \varepsilon.$$

Inoltre, dalla definizione di  $G_\delta$  abbiamo che, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $\|F^m(q_1) - \xi\| < 1/j$  e  $G_{1/j}(q_1, q_2) \leq k_X(F^m(q_1), q_2) \leq G_{1/j}(q_1, q_2) + 1/j$ . Possiamo dunque trovare una funzione strettamente crescente  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che per ogni  $j \in \mathbb{N}$  si ha

$$\|F^{\nu(j)}(q_1) - \xi\| < 1/j \quad \text{e} \quad G_{1/j}(q_1, q_2) \leq k_X(F^{\nu(j)}(q_1), q_2) \leq G_{1/j}(q_1, q_2) + 1/j.$$

Poiché  $\{F^{\nu(j)}(q_1)\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$ , per il Lemma 2.2.11 la successione  $\{F^{\nu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\xi$ . Da come è stata scelta  $\nu$ , abbiamo anche che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)}(q_1), q_2) = G(q_1, q_2)$ .

Fissiamo adesso una funzione strettamente crescente  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che la successione  $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\eta$ . Dato un compatto  $K \subseteq X$ , anche  $F^{\mu(j)}(K)$  è compatto, in quanto immagine continua di un compatto; allora, poiché la successione  $\{F^{\nu(h)}\}_{h \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ , per ogni  $j \in \mathbb{N}$  fissato troviamo che la successione  $\{F^{\nu(h)+\mu(j)}\}_{h \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ . Ciò implica, considerando un'eshaustione di  $X$  in compatti, che esiste una funzione strettamente crescente  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che la successione  $\{F^{(\nu \circ \tau)(j)+\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ . Ricordando le proprietà di  $\nu$ , e a meno di rinominare le funzioni, possiamo dunque dire di avere due funzioni strettamente crescenti  $\nu, \mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tali che:

- (1) le successioni  $\{F^{\nu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{F^{\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergono, uniformemente sui compatti di  $X$ , a  $\xi$  e  $\eta$  rispettivamente;
- (2) la successione  $\{F^{\nu(j)+\mu(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge a  $\xi$  uniformemente sui compatti di  $X$ ;
- (3) si ha  $\lim_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)}(q_1), q_2) = G(q_1, q_2)$ .

Per il Teorema 2.2.6, abbiamo che per ogni  $j \in \mathbb{N}$  esiste una  $(1, 1/j)$ -simil-geodetica  $\sigma_j : [0, T_j] \rightarrow X$  con  $\sigma_j(0) = F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1)$  e  $\sigma_j(T_j) = F^{\mu(j)}(q_2)$ . Dato che  $\{F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1)\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{F^{\mu(j)}(q_2)\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergono, rispettivamente, a  $\xi$  e  $\eta$ , per  $j$  abbastanza grande si ha che  $\sigma_j(0) \in V_\xi$  e  $\sigma_j(T_j) \in V_\eta$ , e  $\sigma_j$  è una  $(1, \kappa_0)$ -simil-geodetica. Dunque  $\sigma_j([0, T_j]) \cap K \neq \emptyset$  per  $j$  abbastanza grande. Per ogni tale  $j$  scegliamo un  $t_j \in [0, T_j]$  tale che  $x_j^* = \sigma_j(t_j) \in K$ . Per compattezza di  $K$ , a meno di passare a una sottosuccessione possiamo supporre che  $x_j^* \rightarrow x^* \in K$  per  $j \rightarrow +\infty$ . Poiché per ogni  $j \in \mathbb{N}$  la curva  $\sigma_j$  è una  $(1, 1/j)$ -simil-geodetica, per il Lemma 2.2.7 troviamo che

$$k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)) \geq k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x_j^*) + k_X(x_j^*, F^{\mu(j)}(q_2)) - 3/j. \quad (25)$$

Adesso, si ha che

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x_j^*) &\geq \liminf_{j \rightarrow +\infty} (k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x^*) - k_X(x^*, x_j^*)) \\ &= \liminf_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x^*) \geq G(q_1, x^*); \end{aligned} \quad (26)$$

inoltre, per definizione di  $\varepsilon$  abbiamo che

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} k_X(x_j^*, F^{\mu(j)}(q_2)) \geq \varepsilon. \quad (27)$$

Mettendo assieme la (25), la (26) e la (27), troviamo che

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)) \geq G(q_1, x^*) + \varepsilon;$$

d'altra parte, abbiamo che

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)) \leq \limsup_{j \rightarrow +\infty} k_X(F^{\nu(j)}(q_1), q_2) = G(q_1, q_2).$$

Dunque si ha che  $G(q_1, q_2) \geq G(q_1, x^*) + \varepsilon$ , in contraddizione con la scelta di  $q_1$  e  $q_2$ .

Poiché sia il Caso 1 che il Caso 2 portano ad una contraddizione, ne consegue che la supposizione che  $\Gamma$  contenga almeno due punti dev'essere sbagliata, da cui segue facilmente la tesi.  $\square$

La dimostrazione del Teorema 1.2.25 è immediata.

**Corollario 2.3.2.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia  $f \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ . Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- le orbite dei punti di  $\Omega$  tramite  $f$  sono relativamente compatte in  $\Omega$ ; oppure,
- esiste un unico punto di  $\partial\Omega$  tale che la successione delle iterate di  $f$  converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.

*Dimostrazione.* Abbiamo già notato, nell'Osservazione 2.1.3, che i domini limitati e strettamente pseudoconvessi di  $\mathbb{C}^n$  sono visibili per le simil-geodetiche. Abbiamo anche visto che sono completi rispetto alla distanza di Kobayashi, dunque per la Proposizione 1.2.17 sono taut. Si conclude applicando il Teorema 2.3.1.  $\square$

Sotto ipotesi di natura topologica si può ottenere qualcosa di più. Il risultato che ci permetterà di fare ciò è il seguente.

**Teorema 2.3.3.** *([A2, Theorem 0.4]) Sia  $X$  una varietà taut e di tipo topologico finito, cioè i gruppi di omologia singolare  $H_j(\Omega; \mathbb{Z})$  hanno rango finito per ogni  $j \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che  $H^j(X; \mathbb{Q}) = 0$  per ogni  $j > 0$ , e consideriamo una funzione  $f \in \text{Hol}(X, X)$ . Allora la successione  $\{f^h\}_{h \in \mathbb{N}}$  non è compattamente divergente se e solo se  $f$  ha un punto periodico in  $X$ , cioè esistono  $x \in X$  e  $h_0 \in \mathbb{N}$  tali che  $f^{h_0}(x) = x$ .*

**Corollario 2.3.4.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato. Supponiamo che  $\Omega$  sia taut e che esista un  $\kappa_0 > 0$  tale che  $\Omega$  sia  $(1, \kappa_0)$ -visibile. Supponiamo inoltre che  $\Omega$  sia di tipo topologico finito e che  $H^j(X; \mathbb{C}) = 0$  per ogni  $1 \leq j \leq n$ .*

Sia  $F : \Omega \longrightarrow \Omega$  una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- le orbite dei punti di  $\Omega$  tramite  $F$  sono relativamente compatte in  $\Omega$ , ed esiste un punto periodico in  $\Omega$  per  $F$ ; oppure,
- esiste un unico punto di  $\partial X$  tale che la successione delle iterate di  $F$  converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.

*Dimostrazione.* Dato che  $\Omega$  è un dominio taut limitato, per [W, Theorem F] è pseudoconvesso. È allora ben noto che  $H^j(\Omega; \mathbb{C}) = 0$  per ogni  $j > n$  (si veda [H, Theorema 4.2.7]). Poiché  $\Omega$  è di tipo topologico finito, per il teorema dei coefficienti universali si ha che

$$\dim_{\mathbb{C}} H^j(\Omega; \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{Q}} H^j(\Omega; \mathbb{Q}) = \text{rank } H_j(\Omega; \mathbb{Z})$$

per ogni  $j \in \mathbb{N}$ . Si verifica allora che  $H^j(X; \mathbb{Q}) = 0$  per ogni  $j \in \mathbb{N}$  dispari. Si conclude facilmente usando il Teorema 2.3.3 e il Teorema 2.3.1.  $\square$

### 3 Esempi di domini con visibilità

Dopo aver dimostrato il Teorema 2.3.1, viene naturale chiedersi: esistono sotto-varietà limitate di  $\mathbb{C}^d$  che possiamo dimostrare essere taut e visibili per le simil-geodetiche, anche senza ipotesi di regolarità (l'esempio che già conosciamo, i domini strettamente pseudoconvessi, hanno regolarità  $C^2$ )?

In questa sezione andremo a vedere tre classi di domini limitati in  $\mathbb{C}^n$  che soddisfano la condizione di visibilità; sono state introdotte, nell'ordine, in [BZ1], [BM] e [CMS]. Costruiremo anche un paio di esempi di domini che appartengono ad alcune di queste classi. Inoltre, i domini della classe introdotta in [BM] sono anche taut, perciò per essi vale automaticamente il Teorema 2.3.1.

Capire come dire che non sono Gromov, aggiungere all'intro della sezione

#### 3.1 Domini Goldilocks

Il primo esempio di una classe di domini di  $\mathbb{C}^n$  con visibilità è quello, introdotto in [BZ1], dei domini Goldilocks. Prima di darne la definizione, introduciamo per un dominio limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  e  $r > 0$  la quantità

$$M_\Omega(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_\Omega(x; v)} \mid \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1 \right\}.$$

La funzione  $M_\Omega$  è monotona crescente, dunque misurabile secondo Lebesgue; inoltre, segue dal punto (1) della Proposizione 2.2.2 che è anche limitata. Perciò ha senso la definizione che stiamo per dare.

**Definizione 3.1.1.** Un dominio limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  è detto *dominio Goldilocks* se:

- (1) esiste (e quindi per ogni)  $\varepsilon > 0$  tale che  $\int_0^\varepsilon \frac{1}{r} M_\Omega(r) dr < +\infty$ ;
- (2) per ogni  $x_0 \in \Omega$  esistono due costanti  $C, \alpha > 0$  (che dipendono da  $x_0$ ) tali che  $k_\Omega(x_0, x) \leq C + \alpha \log \frac{1}{\delta_\Omega(x)}$  per ogni  $x \in \Omega$ .

**Osservazione 3.1.2.** Il nome particolare, domini Goldilocks (Riccioli d'oro, in italiano), è dovuto al fatto che, come la protagonista della fiaba, tali domini evitano due estremi “sgradevoli”: il bordo non ha cuspidi rivolte verso l'esterno né punti in cui il bordo stesso è piatto fino a ordine infinito. Il primo caso è escluso dalla condizione (2) nella definizione. La condizione (1) implica che il dominio è pseudoconvesso ([BZ1, Proposition 2.15]).

Adesso mostriamo che i domini Goldilocks sono visibili per le simil-geodetiche.

**Teorema 3.1.3.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato Goldilocks, e fissiamo  $\lambda \geq 1$  e  $\kappa \geq 0$ . Se  $\xi, \eta \in \partial\Omega$  e  $V_\xi, V_\eta$  sono intorni di  $\xi, \eta$  in  $\mathbb{C}^n$  tali che  $\overline{V}_\xi \cap \overline{V}_\eta = \emptyset$ , allora esiste un compatto  $K \subseteq \Omega$  tale che ogni  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica in  $\Omega$  che collega un punto di  $V_\xi$  a un punto di  $V_\eta$  interseca  $K$ .



*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che un tale compatto non esista. Allora possiamo trovare una successione di  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetiche  $\sigma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \Omega$  tali che  $\sigma_n(a_n) \in V_\xi, \sigma_n(b_n) \in V_\eta$  e  $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \max\{\delta_\Omega(\sigma_n(t)) \mid t \in [a_n, b_n]\}$ . Riparametrizzando, possiamo assumere  $\delta_\Omega(\sigma_n(0)) = \max\{\delta_\Omega(\sigma_n(t)) \mid t \in [a_n, b_n]\}$ . Inoltre, a meno di passare a una sottosuccessione possiamo anche supporre che  $a_n \rightarrow a \in [-\infty, 0], b_n \rightarrow b \in [0, +\infty], \sigma_n(a_n) \rightarrow \xi'$  e  $\sigma_n(b_n) \rightarrow \eta'$ . Sotto le nostre ipotesi, dev'essere  $\xi' \in \bar{V}_\xi \cap \partial\Omega$  e  $\eta' \in \bar{V}_\eta \cap \partial\Omega$ ; dunque  $\xi' \neq \eta'$  perché  $\bar{V}_\xi \cap \bar{V}_\eta = \emptyset$ .

Per la Proposizione 2.2.4 esiste una costante  $C > 0$  tale che ogni  $\sigma_n$  è  $C$ -lipschitziana rispetto alla distanza euclidea. Dunque, applicando il teorema di Ascoli-Arzelà e procedendo con un argomento diagonale, a meno di passare a un'ulteriore sottosuccessione possiamo supporre che  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, uniformemente sui compatti di  $(a, b)$ , a una curva  $\sigma : (a, b) \rightarrow \partial\Omega$ . Notiamo che dev'essere  $a \neq b$ , perché ogni  $\sigma_n$  è  $C$ -lipschitziana e dunque, passando al limite, si ha  $0 < \|\xi' - \eta'\| \leq C|b - a|$ .

Adesso vogliamo mostrare che  $\|\sigma'_n(t)\| \leq \lambda M_\Omega(\delta_\Omega(\sigma_n(t)))$  per quasi ogni  $t \in [a_n, b_n]$ . Se  $\sigma'(t) = 0$  è immediato; altrimenti, dalla definizione di  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica e di  $M_\Omega$  si ha

$$\|\sigma'_n(t)\| \leq \frac{\lambda}{K_\Omega\left(\sigma_n(t); \frac{1}{\|\sigma'_n(t)\|} \sigma'_n(t)\right)} \leq \lambda M_\Omega\left(\delta_\Omega(\sigma_n(t))\right).$$

Mostriamo che  $\sigma$  è costante. Dato che  $\delta_\Omega(\sigma_n(t)) \leq \delta_\Omega(\sigma_n(0))$ , abbiamo che  $M_\Omega(\delta_\Omega(\sigma_n(t))) \leq M_\Omega(\delta_\Omega(\sigma_n(0)))$ ; poiché dalla condizione (1) nella definizione di dominio Goldilocks segue che  $\lim_{r \rightarrow 0^+} M_\Omega(r) = 0$ , si ha che  $M_\Omega(\delta_\Omega(\sigma_n(t)))$  tende a 0 uniformemente in  $t$ . Ma allora, dati  $a < u < w < b$ , troviamo che

$$\begin{aligned} \|\sigma(u) - \sigma(w)\| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(u) - \sigma_n(w)\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_u^w \|\sigma'_n(t)\| dt \leq \lambda \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_u^w M_\Omega(\delta_\Omega(\sigma_n(t))) dt = 0, \end{aligned}$$

per cui  $\sigma$  è costante.

Vogliamo ottenere una contraddizione mostrando anche che  $\sigma$  non è costante. Fissiamo  $x_0 \in \Omega$ ; per la condizione (2) nella definizione di dominio Goldilocks, esistono due costanti  $C, \alpha > 0$  tali che  $k_\Omega(x, x_0) \leq C + \alpha \log \frac{1}{\delta_\Omega(x)}$  per ogni  $x \in \Omega$ . Segue, usando anche la definizione di  $(\lambda, \kappa)$ -simil-geodetica, che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} |t| - \kappa &\leq k_\Omega(\sigma_n(0), \sigma_n(t)) \leq k_\Omega(\sigma_n(0), x_0) + k_\Omega(x_0, \sigma_n(t)) \\ &\leq 2C + \alpha \log \frac{1}{\delta_\Omega(\sigma_n(0)) \delta_\Omega(\sigma_n(t))}; \end{aligned}$$

quindi  $\delta_\Omega(\sigma_n(t)) \leq \sqrt{\delta_\Omega(\sigma_n(0))\delta_\Omega(\sigma_n(t))} \leq Ae^{-B|t|}$ , con  $A = e^{(2C+\kappa)/(2\alpha)}$  e  $B = 1/(2\alpha\lambda)$ . Allora, per la stima trovata sopra su  $\|\sigma'_n(t)\|$ , si ha anche che  $\|\sigma'_n(t)\| \leq \lambda M_\Omega(Ae^{-B|t|})$ .

Osserviamo adesso il seguente fatto: se, data  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  limitata e misurabile secondo Lebesgue, esiste (e dunque per ogni  $\varepsilon > 0$  tale che  $\int_0^\varepsilon \frac{1}{r} f(r) dr < +\infty$ , allora, scrivendo  $r = Ae^{-Bt}$  e usando un cambio di variabile, abbiamo che  $\int_{\frac{1}{B} \log \frac{A}{\varepsilon}}^{+\infty} f(Ae^{-Bt}) dt < +\infty$ , di conseguenza anche  $\int_0^{+\infty} f(Ae^{-Bt}) dt < +\infty$ , per ogni  $A, B > 0$ . Per la condizione (1) nella Definizione 3.1.1, possiamo applicare questo fatto a  $M_\Omega$  usando le costanti  $A$  e  $B$  trovate sopra; ciò ci permette di fissare  $a', b' \in (a, b)$  tali che

$$\|\xi' - \eta'\| > \lambda \int_a^{a'} M_\Omega(Ae^{-B|t|}) dt + \lambda \int_{b'}^b M_\Omega(Ae^{-B|t|}) dt.$$

Allora

$$\begin{aligned} \|\sigma(b') - \sigma(a')\| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(b') - \sigma_n(a')\| \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \|\sigma_n(b_n) - \sigma_n(a_n)\| \right. \\ &\quad \left. - \|\sigma_n(b_n) - \sigma_n(b')\| - \|\sigma_n(a') - \sigma_n(a_n)\| \right] \\ &\geq \|\xi' - \eta'\| - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{b'}^{b_n} \|\sigma'_n(t)\| dt - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{a_n}^{a'} \|\sigma'_n(t)\| dt \\ &\geq \|\xi' - \eta'\| - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_{b'}^{b_n} M_\Omega(Ae^{-B|t|}) dt \\ &\quad - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_{a_n}^{a'} M_\Omega(Ae^{-B|t|}) dt \\ &= \|\xi' - \eta'\| - \lambda \int_{b'}^b M_\Omega(Ae^{-B|t|}) dt - \lambda \int_a^{a'} M_\Omega(Ae^{-B|t|}) dt > 0. \end{aligned}$$

Dunque  $\sigma$  non è costante, e questo ci dà una contraddizione.  $\square$

Un esempio esplicito di domini Goldilocks sono i domini limitati, pseudoconvessi e di tipo finito. Vedremo la definizione di domini di tipo finito e la dimostrazione che, se anche pseudoconvessi, sono domini Goldilocks nella sezione 4.

## 4 Ulteriori risultati

### 4.1 Domini di tipo finito

Vogliamo ora discutere dei domini di tipo finito, che sono un esempio di domini Goldilocks. Iniziamo con la definizione di dominio di tipo finito nel senso di D'Angelo, introdotta in [D'A].

**Definizione 4.1.1.** Dati un aperto  $A \subseteq \mathbb{C}^n$ , una funzione  $g \in C^\infty(A)$  e  $p \in A$ , l'ordine (o la molteplicità) di  $g$  in  $p$  è  $v_p(g)$ , il grado del primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor in  $p$  di  $g - g(p)$ . Se la funzione è a valori in più variabili, si considera il minimo degli ordini di contatto delle componenti.

**Definizione 4.1.2.** Un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  ha bordo  $C^\infty$  se esiste una funzione  $\rho \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$  tale che  $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$  e  $d\rho \neq 0$  in ogni punto di  $\partial\Omega$ .

**Definizione 4.1.3.** Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio con bordo  $C^\infty$  e  $z_0 \in \partial\Omega$ . L'insieme dei *dischi analitici* che toccano il bordo di  $\Omega$  in  $z_0$  e che sono lisci nell'origine è dato da

$$\mathcal{D}_{z_0} = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n) \mid f(0) = z_0 \text{ e } f'(0) \neq 0\}.$$

**Definizione 4.1.4.** Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio con bordo  $C^\infty$  e  $z_0 \in \partial\Omega$ . Il *tipo* di  $z_0$  è dato da

$$\Delta_1(z_0) := \sup_{f \in \mathcal{D}_{z_0}} v_0(\rho \circ f).$$

Il dominio  $\Omega$  si dice *di tipo finito nel senso di D'Angelo* (o più brevemente *di tipo finito*) se  $\Delta_1(z_0) < +\infty$  per ogni  $z_0 \in \partial\Omega$ .

**Osservazione 4.1.5.**

1. Esistono diverse definizioni di dominio di tipo finito, che sono sostanzialmente equivalenti (o quasi) in due variabili o per domini convessi in qualsiasi numero di variabili; negli altri casi, invece, la situazione è più complicata. Noi ci limiteremo al caso di domini di tipo finito nel senso di D'Angelo, poiché è ciò che ci serve per ottenere la stima dal basso sulla metrica di Kobayashi.
2. La condizione  $f'(0) \neq 0$ , cioè che il disco analitico sia liscio, è necessaria. Altrimenti, calcolando un disco analitico in  $z^k$  con  $k > 1$  invece che in  $z$ , otteniamo un altro disco analitico non liscio con ordine di contatto almeno  $k$ ; di conseguenza, tutti i punti e tutti i domini sarebbero di tipo infinito.
3. È naturale supporre, come faremo a breve, la pseudoconvessità del dominio; infatti, si può mostrare ([D'A, Corollary 5.6] con  $p = p_0$ ) che in tal caso il tipo del dominio è almeno 2. I punti strettamente pseudoconvessi sono caratterizzati dall'avere tipo esattamente uguale a 2 ([D'A, Corollary 5.8] e ???).

Manca un'im-  
plicazione

Ci servirà il seguente fatto.

**Teorema 4.1.6.** (*[Ch, Theorem 1]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato. Siano inoltre  $z_0 \in \partial\Omega$  di tipo finito e  $U$  un intorno di  $z_0$  tale che  $\partial\Omega \cap U$  è liscio e pseudoconvesso. Allora esistono un intorno  $V \subseteq U$  di  $z_0$  e due costanti  $c, \varepsilon > 0$  tali che si ha

$$K_\Omega(z; Z) \geq c \frac{\|Z\|}{\delta_\Omega(z)^\varepsilon}$$

per ogni  $z \in \Omega \cap V$  e  $Z \in T_z\Omega$ .

Possiamo allora dimostrare che per i domini limitati, pseudoconvessi e di tipo finito vale la condizione (1) nella definizione di dominio Goldilocks.

**Corollario 4.1.7.** (*[BZ1, Lemma 2.6]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato, pseudoconvesso e di tipo finito. Allora  $\Omega$  soddisfa la condizione (1) nella Definizione 3.1.1.

*Dimostrazione.* Poiché  $\Omega$  è limitato, pseudoconvesso e di tipo finito,  $\partial\Omega$  è compatto e ogni intorno di ogni suo punto soddisfa le ipotesi del Teorema 4.1.6. Possiamo allora trovare un numero finito di aperti  $V_1, \dots, V_N$  che ricoprono  $\partial\Omega$  e delle costanti  $c, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N > 0$  tali che

$$K_\Omega(x; v) \geq c \cdot \delta_\Omega(z)^{-\varepsilon_j}$$

per ogni  $z \in \Omega \cap V_j$  e  $v \in T_z\Omega$  con  $\|v\| = 1$ .

Basta dunque prendere  $s = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\}$  e  $r > 0$  piccolo abbastanza affinché  $r < 1$  e  $\{z \in \Omega \mid \delta_\Omega(z) \leq r\} \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_N$ . Segue che

$$M_\Omega(r) \leq r^s/c$$

con  $s > 0$  per  $r$  sufficientemente piccolo, per cui la condizione (1) nella Definizione 3.1.1 è soddisfatta.  $\square$

Andiamo ora a dimostrare che soddisfano anche la condizione (2). Per questa, servono ipotesi meno stringenti.

**Proposizione 4.1.8.** (*[A1, Theorem 2.3.51]*) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato con bordo  $C^2$ . Allora  $\Omega$  soddisfa la condizione (2) nella Definizione 3.1.1.

*Dimostrazione.* Per [S, Chapter 9, Theorem 20],  $\partial\Omega$  ammette un intorno tubolare  $U_\varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$ , tale che:

- (i) si ha  $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \delta_\Omega(z) < \varepsilon\}$ ;
- (ii) per ogni  $z \in \Omega \cap U_\varepsilon$  esiste un unico punto  $\pi(z) \in \partial\Omega$  con  $\|\pi(z) - z\| = \delta_\Omega(z)$ ;
- (iii) per ogni  $z \in \Omega$ , la fibra  $\pi^{-1}(\pi(z))$  è un sottoinsieme della normale a  $\partial\Omega$  in  $\pi(z)$ ;
- (iv) la mappa  $z \mapsto (\pi(z), \delta_\Omega(z))$  è un omeomorfismo tra  $U_\varepsilon$  e  $\partial\Omega \times (0, \varepsilon)$ .

È facile osservare che, per ogni  $z \in \Omega$  con  $\delta_\Omega(z) = \varepsilon$ , si ha che la palla euclidea di centro  $z$  e raggio  $\varepsilon$  è tutta contenuta in  $\Omega$ . Presi allora  $p, q \in \Omega$  con  $\pi(p) = \pi(q)$  e  $\varepsilon \geq \delta_\Omega(p) \geq \delta_\Omega(q)$ , poniamo  $z_0$  il punto (interno a  $\Omega$ ) della normale a  $\partial\Omega$  in  $\pi(p)$  tale che  $\delta_\Omega(z_0) = \varepsilon$ . Usando la funzione olomorfa  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  tale che  $\varphi(\zeta) = z_0 + \zeta(\pi(p) - z_0)$ , troviamo

$$k_\Omega(p, q) \leq \frac{1}{2} \log \frac{\delta_\Omega(p)}{\delta_\Omega(q)}.$$

Adesso, notiamo che l'insieme  $K = \{z \in \Omega \mid \delta_\Omega(z) \geq \varepsilon\}$  è compatto. Dato  $x_0 \in \Omega$ , basta allora prendere  $\alpha = 1/2$  e  $C = \frac{1}{2} \log \varepsilon + D_{k_\Omega}(x_0, K)$ , dove abbiamo posto  $D_{k_\Omega}(x_0, K) = \max\{k_\Omega(x_0, z) \mid z \in K\}$ . Segue dunque che  $\Omega$  soddisfa la condizione (2) nella Definizione 3.1.1.  $\square$

Usando il Corollario 4.1.7, la Proposizione 4.1.8 e la Proposizione 1.2.19, otteniamo il seguente risultato.

**Corollario 4.1.9.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio limitato, pseudoconvesso e di tipo finito. Allora  $\Omega$  è un dominio Goldilocks e una varietà taut.*

*In particolare, per il Teorema 3.1.3 si ha che  $\Omega$  soddisfa le ipotesi del Teorema 2.3.1.*

## Riferimenti bibliografici

- [A1] M. Abate: **Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds**. Mediterranean Press, Cosenza, 1989 [<http://www.dm.unipi.it/~abate/libri/libriric/libriric.html>]
- [A2] M. Abate: Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*, **18** (1991), no. 2, 167–191
- [A3] M. Abate: A characterization of hyperbolic manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **117** (1993), no. 3, 789–793
- [A4] M. Abate: Dynamics in several complex variables. In **Metrical and dynamical aspects in complex analysis**, Ed. L. Blanc-Centi, Lecture Notes in Mathematics **2195**, Springer, Berlin, 2017, pp. 25–54
- [A5] M. Abate: **Holomorphic Dynamics on Hyperbolic Riemann Surfaces**. De Gruyter, Berlin, 2023
- [B] T. J. Barth: The Kobayashi distance induces the standard topology. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **35** (1972), 439–441
- [BB] Z. M. Balogh, M. Bonk: Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **75** (2000), no. 3, 504–533
- [BH] M. R. Bridson, A. Haefliger: **Metric-Spaces of Non-Positive Curvature**. Springer, Berlin, 1999
- [BM] G. Bharali, A. Maitra: A weak notion of visibility, a family of examples, and Wolff-Denjoy theorems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, **22** (2021), no. 1, 195–240
- [BNT] F. Bracci, N. Nikolov, P. J. Thomas: Visibility of Kobayashi geodesics in convex domains and related properties. *Mathematische Zeitschrift*, **301** (2022), no. 2, 2011–2035
- [BZ1] G. Bharali, A. Zimmer: Goldilocks domains, a weak notion of visibility, and applications. *Advances in Mathematics*, **310** (2017), 377–425
- [Ca] H. Cartan: Sur les rétractions d’une variété. *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, **303** (1986), no. 14, 715

Non sono sicuro del Berlin; Berlin o Leck?

- [Ch] S. Cho: A lower bound on the Kobayashi metric near a point of finite type in  $\mathbb{C}^n$ . *Journal of Geometric Analysis*, **2** (1992), no. 4, 317–325
- [CMS] V. S. Chandel, A. Maitra, A. D. Sarkar: Notions of Visibility with respect to the Kobayashi distance: Comparison and Applications. Preprint, arXiv:2111.00549v1 (2021)
- [D’A] J. P. D’Angelo: Real hypersurfaces, orders of contact, and applications. *Annals of Mathematics. Second Series*, **115** (1982), no. 3, 615–637
- [G] I. Graham: Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in  $\mathbb{C}^n$  with smooth boundary. *Transactions of the American Mathematical Society*, **207** (1975), 219–240
- [H] L. Hörmander: **An Introduction to Complex Analysis in Several Variables**. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1990
- [Ka] A. Karlsson: Non-expanding maps and Busemann functions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **21** (2001), no. 5, 1447–1457
- [Ke] J. L. Kelley: **General Topology**. Springer, New York, 1975
- [Ko1] S. Kobayashi: Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **19** (1967), 460–480
- [Ko2] S. Kobayashi: **Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings: An Introduction (Second Edition)**. World Scientific Publishing, Singapore, 2005
- [Kr] S. G. Krantz: **Function Theory of Several Complex Variables: Second Edition**. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001
- [KR] N. Kerzman, J.-P. Rosay: Fonctions plurisousharmoniques d’exhaustion bornées et domaines taut. *Mathematische Annalen*, **257** (1981), no. 2, 171–184
- [N] R. Narasimhan: **Several Complex Variables**. University of Chicago Press, Chicago, 1971
- [NTT] N. Nikolov, P. J. Thomas, M. Trybula: Gromov (non-)hyperbolicity of certain domains in  $\mathbb{C}^2$ . *Forum Mathematicum*, **28** (2016), no. 4, 783–794

- [Rosa] J.-P. Rosay: Un exemple d'ouvert borné de  $\mathbb{C}^3$  “taut” mais non hyperbolique complet. *Pacific Journal of Mathematics*, **98** (1982), no. 1, 153–156
- [Ross] H. Rossi: Vector fields on analytic spaces. *Annals of Mathematics. Second Series*, **78** (1963), 455–467
- [Roy] H. L. Royden: Remarks on the Kobayashi metric. In **Several Complex Variables II**, Proceedings of the International Mathematical Conference, Lecture Notes in Mathematics **185**, Springer, Berlin, 1971, pp. 125–137
- [S] M. Spivak: **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume I, Third edition**. Publish or Perish, Inc., Houston, 1999
- [V] S. Venturini: Pseudodistances and pseudometrics on real and complex manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta*, **154** (1989), 385–402
- [W] H. Wu: Normal families of holomorphic mappings. *Acta Mathematica*, **119** (1967), 193–233



## Ringraziamenti

Da scrivere alla fine.