Teoremi di tipo "Wolff-Denjoy" in più variabili complesse (titolo da rivedere, tanto la copertina va fatta tutta nel dettaglio)

Marco Vergamini Relatore: Marco Abate

Data: si vedrà

Indice

Introduzione

DA SCRIVERE ALLA FINE.

1 Preliminari

1.1 Notazione e definizioni di base

Introduciamo la notazione che useremo:

- scriviamo Ω per indicare un *dominio* di $\mathbb{C}^n$, vale a dire un aperto connesso;
- con *varietà complessa* s'intende una varietà differenziabile reale di dimensione pari con i cambi di carta olomorfi se visti come fra aperti di $\mathbb{C}^n$;
- data X varietà complessa e $x \in X$, indichiamo con $T_x X$ lo spazio tangente a X in x, che nel caso dei domini è canonicamente identificato con $\mathbb{C}^n$;
- dati X, Y spazi topologici, quando parliamo di convergenza nell'insieme $C^0(X, Y)$ delle funzioni continue da X a Y sottintendiamo sempre che si parla della topologia compatta-aperta, che nel caso in cui Y sia uno spazio metrico coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti (potrebbe capitare che commetteremo abusi di terminologia in merito);
- dato X spazio topologico e data $f \in C^0(X, X)$, poniamo induttivamente $f^0 = \mathrm{id}_X$ e $f^{k+1} = f \circ f^k$. Chiamiamo f^k l'*iterata* k-esima di f e, per ogni $x \in X$, l'*orbita* di x tramite f è l'insieme $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$;
- date X, Y varietà complesse, indichiamo con $\mathrm{Hol}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X a Y, con $\mathcal{O}(X)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X in $\mathbb{C}$ e con $\mathrm{Aut}(X)$ l'insieme delle funzioni biolomorfe da X in sé;
- data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, indichiamo con $Df(x)$ il differenziale di f in $x \in X$;
- il disco unitario è $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, mentre $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$ è il polidisco in $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ è il disco di raggio $r > 0$;
- la palla unitaria (euclidea) in $\mathbb{C}^n$ è $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$, dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea, mentre $\mathbb{B}^n_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$ è la palla (euclidea) di raggio $r > 0$;
- dato un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $x \in \mathbb{C}^n$, scriviamo $\delta(x) = \inf_{w \in \partial\Omega} \|x - w\|$ per indicare la distanza euclidea di x dal bordo di Ω;
- ALTRO?

ricordati di cancellare questo item dalla lista quando non servirà più

Ricordiamo cosa sono la metrica e la distanza di Poincaré in $\mathbb{D}$.

Definizione 1.1.1. La *metrica di Poincaré* (o *iperbolica*) su $\mathbb{D}$ è data da

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z; v) = \frac{1}{1 - |z|^2}|v| \tag{1}$$

per ogni $z \in \mathbb{D}$ e $v \in \mathbb{C} \cong T^{\mathbb{C}}_z\mathbb{D}$. La metrica $\lambda_{\mathbb{D}}$ è hermitiana completa con curvatura gaussiana costante uguale a -4.

Definizione 1.1.2. La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) $k_{\mathbb{D}}$ su $\mathbb{D}$ è la forma integrata della metrica di Poincaré. Per fatti noti di geometria iperbolica, è una distanza completa la cui espressione è data da

$$\omega(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|}{1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|} \tag{2}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Oltre ad avere curvatura negativa costante, la metrica e la distanza di Poincaré sono tali che le funzioni olomorfe dal disco unitario in sé sono semicontrazioni rispetto ad esse. Ciò discende dal seguente risultato.

Lemma 1.1.3. *(lemma di Schwarz-Pick) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right| \; e \; \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Per la dimsotrazione si rimanda a [K2, Chapter I, paragraph 1, Theorem 1.1]. Ci tornerà utile anche la versione semplificata.

Lemma 1.1.4. *(lemma di Schwarz) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$.*

Quello che vogliamo fare ora è generalizzare la metrica e la distanza di Poincaré ad una qualsiasi varietà complessa mantenendo queste proprietà, in particolare quella di rendere le funzioni olomorfe delle semicontrazioni. Ci sono vari modi per farlo, noi nello specifico vedremo la (pseudo)metrica e la (pseudo)distanza di Kobayashi, introdotte nel 1967 in [K1].

Definizione 1.1.5. Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$\begin{aligned} K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, Df(0)v = Z\} \end{aligned} \tag{3}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Osservazione 1.1.6. Non possiamo parlare di metrica perché, ad esempio, $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$. Notiamo anche che, data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, allora dalla definizione segue che $K_Y\big(f(x); Df(x)Z\big) \leq K_X(x; Z)$ per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$. Ne consegue, restringendosi a una coordinata opportuna e applicando il lemma di Schwarz, che per le varietà X complesse, embeddate in $\mathbb{C}^d$ e limitate K_X è effettivamente una metrica.

Definiamo adesso la (pseudo)distanza di Kobayashi; più avanti vedremo com'è collegata alla pseudometrica di Kobayashi.

Definizione 1.1.7. Sia X una varietà complessa connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$\begin{aligned} k_X(z, w) = \inf\Bigg\{ \sum_{j=1}^{m} \omega(z_{j-1}, z_j) \mid m \in \mathbb{N}, z_j \in \mathbb{D} \text{ per } j = 0, \ldots, m \text{ tali che} \\ \text{esistono } \varphi_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ con } \varphi_1(z_0) = z, \varphi_m(z_m) = w \text{ e} \\ \varphi_j(z_j) = \varphi_{j+1}(z_j) \text{ per } j = 1, \ldots, m-1 \Bigg\} \end{aligned} \tag{4}$$

per $z, w \in X$.

Osservazione 1.1.8. È facile vedere che k_X è una pseudodistanza, ma in generale non è una distanza, ad esempio perché, come prima, $k_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$; vedremo però più avanti che per i domini limitati è effettivamente una distanza. Inoltre, data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, dalla definizione segue che $k_Y\big(f(x), f(y)\big) \le k_X(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Definizione 1.1.9. Sia X una varietà complessa connessa. Se k_X è una distanza, diremo che X è *Kobayashi-iperbolica.*

Osservazione 1.1.10. Dalla definizione di k_X segue che ogni varietà Kobayashi-iperbolica è uno *spazio di lunghezze* nel senso di [BH, Part I, Paragraph 3, Definition 3.1].

Il seguente risultato per le varietà Kobayashi-iperboliche verrà spesso usato implicitamente.

Proposizione 1.1.11. *(Barth, [B]) Una varietà complessa connessa X è Kobayashi-iperbolica se e solo se k_X induce su X la topologia di varietà.*

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per enunciare i risultati già noti nel caso dei domini regolari.

Definizione 1.1.12. Una funzione continua $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *funzionale di Minkowski* se

(i) $\mu(Z) = 0$ se e solo se $Z = 0$;
(ii) $\mu(\zeta Z) = |\zeta|\mu(Z)$ per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ e $\zeta \in \mathbb{C}$.

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, poniamo $\mu_\Omega(Z) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(Z - w)$.

Definizione 1.1.13. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $u : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *subarmonica* se per ogni $a \in A$, per ogni $r > 0$ tale che $\overline{D(a, r)} \subset A$ e per ogni h continua in $\overline{D(a, r)}$ e armonica in $D(a, r)$, se $h|_{\partial D(a,r)} \ge u|_{\partial D(a,r)}$, allora anche $h|_{D(a,r)} \ge u|_{D(a,r)}$.

Sia $A \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $u : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *plurisubarmonica* se per ogni $a \in A$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ l'applicazione $\zeta \longmapsto u(a + \zeta Z)$ è subarmonica dove definita.

Definizione 1.1.14. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice *(Hartogs) pseudoconvesso* se esiste un funzionale di Minkowski μ tale che $-\log \mu_\Omega$ è plurisubarmonica in Ω.

Ci servirà il seguente risultato per un controesempio.

Teorema 1.1.15. *([Kr, Chapter 5, Paragraph 5.1, Theorem 5.1.2]) Ogni dominio pseudoconvesso è un dominio di olomorfia.*

Nel caso di domini regolari, si può dare una definizione di pseudoconvessità più operativa equivalente.

Definizione 1.1.16. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio con bordo C^2, cioè esiste una funzione $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$.

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è

$$H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z\rangle = 0\}. \tag{5}$$

Diciamo che Ω è *Levi pseudoconvesso* se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n \tag{6}$$

è semidefinita positiva in $H_p\partial\Omega$ per ogni $p \in \partial\Omega$. Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso* se la forma di Levi è definita positiva.

Vale il seguente risultato.

Teorema 1.1.17. *([Kr, Chapter 3, Paragraph 3.3, Theorem 3.3.5]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con bordo C^2. Allora Ω è Levi pseudoconvesso se e solo se è Hartogs pseudoconvesso.*

Nella prossima sottosezione citeremo alcuni risultati sulla geometria dei domini limitati strettamente pseudoconvessi dotati della distanza di Kobayashi. In particolare, vedremo che sono Gromov-iperbolici, il che permette di derivare un teorema di tipo Wolff-Denjoy per questi domini.

Definizione 1.1.18. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati $x, y, w \in X$ il *prodotto di Gromov* tra x e y con punto base w è $(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big)$. Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è *δ-iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se (X, d) è δ-iperbolico per qualche $\delta \geq 0$, diremo che è *Gromov-iperbolico*.

Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* $\partial_G X$ è costruito come classi di equivalenza delle successioni (x_i) che convergono a infinito, cioè tali che $\lim\limits_{i,j\to\infty} (x_i, x_j)_w = \infty$; due tali successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim\limits_{i\to\infty} (x_i, y_i)_w = \infty$. Questa costruzione è indipendente dalla scelta di w.

Osservazione 1.1.19. È possibile mettere una topologia su $X \cup \partial_G X$ che lo rende uno spazio compatto.

Prima di passare a vedere i risultati noti della teoria sulla pseudometrica e la pseudodistanza di Kobayashi e sui domini strettamente pseudoconvessi, introduciamo il concetto di varietà taut, che sarà per noi un'ipotesi importante per i teoremi che andremo a dimostrare: infatti, quest'ipotesi ci darà la dicotomia nella tesi del teorema. Vedremo anche con un esempio l'importanza di tale ipotesi. Prima di dare la definizione, ci servirà un risultato sul comportamento delle funzioni olomorfe dal disco in una varietà Kobayashi-iperbolica.

Proposizione 1.1.20. *([A3, Theorem 1.3]) Sia X una varietà complessa connessa. Allora X è Kobayashi-iperbolica se e solo se* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ *è relativamente compatto in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, dove X^* è la compattificazione di Alexandroff di X.*

Definizione 1.1.21. Una varietà complessa X si dice *taut* se è Kobayashi-iperbolica e ogni funzione nella chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante a ∞.

Per finire, diamo delle definizioni che ci serviranno per parlare del comportamente delle iterate di funzioni olomorfe.

Definizione 1.1.22. Siano X e Y due spazi topologici. Diciamo che una successione $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset C^0(X, Y)$ è *compattamente divergente* se per ogni coppia di compatti $H \subseteq X$ e $K \subseteq Y$ esiste $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(H) \cap K = \varnothing$ per ogni $\nu \geq \nu_0$.

Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ è detta *normale* se ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente.

Definizione 1.1.23. Sia $f \in C^0(X, X)$. Diciamo che $g \in C^0(X, X)$ è una *funzione limite* di f se esiste una sottosuccessione delle iterate di f che converge a g uniformemente sui compatti. Denotiamo con $\Gamma(f)$ l'insieme di tutte le funzioni limite di f.

Definizione 1.1.24. Una *retrazione olomorfa* di una varietà complessa X è una funzione $\rho \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che $\rho^2 = \rho$. L'immagine di una retrazione olomorfa è detta *retratto olomorfo*.

1.2 Risultati noti della teoria

Vediamo ora alcuni risultati noti della teoria che ci saranno utili nelle nostre dimostrazioni. Cominciamo con alcuni teoremi noti dell'analisi complessa in più variabili.

Teorema 1.2.1. *(Weierstrass, [N, Chapter 1, Proposition 5]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sia $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ una successione che converge uniformemente sui compatti a $f \in C^0(\Omega)$; allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Teorema 1.2.2. *(Montel, [N, Chapter 1, Proposition 6]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia uniformemente limitata sui compatti; allora è relativamente compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$.*

Teorema 1.2.3. *(Serre, Ehrenpreis [Kr, Chapter 1, Paragraph 1.2, Theorem 1.2.6]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato, con $n > 1$. Sia K un sottoinsieme compatto di Ω tale che $\Omega \setminus K$ è connesso. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$, allora esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $F|_{\Omega\setminus K} = f$.*

Vediamo adesso l'espressione esplicita per k_X in un paio di casi espliciti, dalla quale discende un'importante conseguenza.

Proposizione 1.2.4. *([A1, Chapter 2.3, Proposition 2.3.4 and Corollary 2.3.7]) Si ha che:*

(i) la distanza di Poincaré e la pseudodistanza di Kobayashi coincidono per $\mathbb{D}$;

(ii) dati $z = (z_1, \ldots, z_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in $\mathbb{D}^n$, si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = \max_{j=1,\ldots,n} \{\omega(z_j, w_j)\}.$$

Dimostrazione. (i) Che $k_{\mathbb{D}} \geq \omega$ segue dal lemma di Schwarz-Pick e dalla disuguaglianza triangolare per la distanza di Poincaré; per avere l'uguaglianza, basta notare che il minimo nella definizione di $k_{\mathbb{D}}$ è effettivamente raggiunto usando l'identità.

(ii) Poiché le proiezioni nelle varie coordinate sono funzioni olomorfe, per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \geq k_{\mathbb{D}}(z_j, w_k) = \omega(z_j, w_j),$$

dove la disuguaglianza segue dall'Osservazione 1.1.8 e l'uguaglianza dal punto (i).

Per mostrare che il minimo è effettivamente raggiunto, notiamo che dall'Osservazione 1.1.8 segue anche che $k_{\mathbb{D}^n}$ e $k_{\mathbb{D}} = \omega$ sono invarianti per biolomorfismo. Componendo quindi con $f_1 \times \cdots \times f_n$ dove $f_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è tale che $f_j(z_j) = 0$, abbiamo che sia $k_{\mathbb{D}^n}(z, w)$ che $\max_{j=1,\ldots,n}\{\omega(z_j, w_j)\}$ rimangono invariati. Possiamo dunque supporre, senza perdita di generalità, $z = 0$. Allora, detto j_0 l'indice per cui $\omega(0, w_{j_0})$ è massimo, si ha che anche $|w_{j_0}|$ è massimo. Consideriamo $\varphi = g_1 \times \cdots \times g_n$ dove $g_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ è l'identità per $j = j_0$ e un'opportuna rotomotetia per $j \neq j_0$, di modo che $g_j(w_{j_0}) = w_j$. Abbiamo così $\varphi(z_{j_0}) = \varphi(0) = 0 = z$ e $\varphi(w_{j_0}) = w$. □

Corollario 1.2.5. *La pseudodistanza di Kobayashi è effettivamente una distanza per i domini limitati.*

Dimostrazione. Discende tutto dalla Proposizione precedente e dall'Osservazione 1.1.8. Innanzitutto, dalla Proposizione abbiamo che $k_{\mathbb{D}^n}$ è effettivamente una distanza; poiché dall'Osservazione sappiamo che k_X è invariante per biolomorfismi, segue che $k_{\mathbb{D}^n_r}$ è una distanza per ogni $r > 0$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è un dominio limitato, esiste $r > 0$ tale che $\Omega \subseteq \mathbb{D}^n_r$. In tal caso, l'inclusione è una funzione olomorfa. Allora, sempre dall'Osservazione, si ha che se $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ allora $0 < k_{\mathbb{D}^n_r}(x, y) \leq k_\Omega(x, y)$. Segue dunque che k_Ω è una distanza, come voluto. □

Osservazione 1.2.6. Con la stessa dimostrazione, si ottiene anche che le sottovarietà di varietà Kobayashi-iperboliche sono Kobayashi-iperboliche. In particolare, le varietà complesse connesse embeddate in $\mathbb{C}^d$ e limitate sono Kobayashi-iperboliche.

Citiamo ora un risultato che lega pseudometrica e pseudodistanza di Kobayashi; per una dimostrazione si rimanda a [R, Theorem 1] e [V, Theorem 3.1].

Teorema 1.2.7. *[CMS, Result 2.1] Sia X una sottovarietà complessa connessa embeddata in $\mathbb{C}^d$. Per ogni $z, w \in X$, abbiamo*

(i) $k_X(z,w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \longrightarrow X$ *è* C^1 *a tratti,* $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$*;*
(ii) $k_X(z,w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \longrightarrow X$ *è assolutamente continua,* $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$.

Qui, $l_X(\gamma) = \displaystyle\int_a^b K_X\big(\gamma(t);\gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t$ *è ben definito in entrambi i casi.*

Adesso vogliamo arrivare a dire che l'ipotesi taut ci permette di ottenere la dicotomia sul comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe. Per farlo, ci servono prima alcuni risultati.

Lemma 1.2.8. *Siano X una varietà Kobayashi-iperbolica, $z_0 \in X$ e $r_1, r_2 > 0$. Allora $B_X\big(B_X(z_0, r_1), r_2\big) = B_X(z_0, r_1 + r_2)$, dove $B_X(x, r)$ è la palla di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$ rispetto alla distanza di Kobayashi e, dato $A \subseteq X$, poniamo $B_X(A, r) = \bigcup_{x \in A} B_X(x, r)$.*

Dimostrazione. L'inclusione $B_X\big(B_X(z_0, r_1), r_2\big) \subseteq B_X(z_0, r_1 + r_2)$ segue dalla disuguaglianza triangolare.

Per l'altra inclusione, consideriamo $z \in B_X(z_0, r_1 + r_2)$ e prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $3\varepsilon = r_1 + r_2 - k_X(z_0, z)$. Adesso, se $k_X(z_0, z) < r_1$ la conclusione è immediata; assumiamo dunque che $k_X(z_0, z) \geq r_1$, allora si ha $r_2 - \varepsilon \geq 0$. Supponiamo che $r_1 \leq \varepsilon$. Allora $k_X(z_0, z) = r_1 + r_2 - 3\varepsilon < r_2$ e anche in questo caso la conclusione segue. Assumiamo quindi anche che $r_1 - \varepsilon > 0$.

Dalla definizione di k_X, esistono $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ e $\zeta_0, \ldots, \zeta_m \in \mathbb{D}$ tali che $\varphi_1(\zeta_0) = z_0$, $\varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j)$ per $j = 1, \ldots, m-1$, $\varphi_m(\zeta_m) = z$ e

$$\sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < r_1 + r_2 - 2\varepsilon.$$

Sia $\mu \leq m$ il più grande intero tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché $r_1 - \varepsilon > 0$. Prendiamo η_μ il punto sulla geodetica congiungente $\zeta_{\mu-1}$ e ζ_μ tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) = r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché $r_1 + r_2 - 2\varepsilon \geq r_1 - \varepsilon$. Prendendo dunque $w = \varphi_\mu(\eta_\mu)$ abbiamo $k_X(z_0, w) < r_1$, inoltre per come è stato scelto η_μ si ha

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) &= \sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^{m} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) + \\ &\quad + \omega(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^{m} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j),\end{aligned}$$

da cui

$$\omega(\eta_\mu, \zeta_\mu) + \sum_{j=\mu+1}^{m} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) = \sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) - (r_1 - \varepsilon) < r_2 - \varepsilon,$$

perciò $k_X(w, z) < r_2$ e di conseguenza $z \in B_X\big(B_X(z_0, r_1), r_2\big)$, come voluto. □

Vogliamo dare una caratterizzazione equivalente all'essere taut per una varietà.

Osservazione 1.2.9. Dalla definizione della compattificazione di Alexandroff, una successione in $C^0(Y, X)$ converge in $C^0(Y, X^*)$ alla funzione costante a ∞ se e solo se è compattamente divergente. Inoltre, se X e Y sono varietà (ma in realtà bastano ipotesi meno stringenti), un sottoinsieme di $C^0(Y, X^*)$ è compatto se e solo se è compatto per successioni.

Corollario 1.2.10. *Una varietà complessa connessa X è taut se e solo se la famiglia* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ *è normale.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia taut e prendiamo una successione $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$. Per la Proposizione 1.1.20, la chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è compatta in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, e per l'Osservazione 1.2 è compatta per successioni. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ che converge, uniformemente sui compatti, a una qualche funzione f. Se $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ abbiamo concluso; altrimenti, poiché X è taut, f è la funzione costante a ∞. Ma, per l'Osservazione , questo significa che $\{f_{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ è compattamente divergente. In ogni caso, possiamo concludere che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è normale.

Supponiamo adesso che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ sia normale. Se f è una funzione nella sua chiusura in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, allora è il limite di una successione in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$. Poiché questa famiglia è normale, possiamo trovare una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente, ma dovrà comunque convergere a f. Allora nel primo caso $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$, mentre nel secondo è la funzione costante a ∞. Dunque X è taut. $\square$

Si può dimostrare qualcosa di più.

Proposizione 1.2.11. *([A1, Theorem 2.1.2]) Sia X una varietà taut. Allora $\mathrm{Hol}(Y, X)$ è una famiglia normale per ogni varietà complessa Y.*

Adesso vogliamo mostrare che tutte le varietà Kobayashi-iperboliche complete sono taut. Per farlo, ci servirà il ben noto teorema di Ascoli-Arzelà.

Teorema 1.2.12. *(Ascoli-Arzelà, [Ke, Chapter 7, Theorem 17]) Sia X uno spazio metrico e Y uno spazio metrico localmente compatto. Allora un famiglia $\mathcal{F} \subseteq C^0(Y, X)$ è relativamente compatta in $C^0(X, Y)$ se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:*

(i) $\mathcal{F}$ è equicontinua;
(ii) l'insieme $\{f(y) \mid f \in \mathcal{F}\}$ è relativamente compatto in X per ogni $y \in Y$.

Proposizione 1.2.13. *Ogni varietà Kobayashi-iperbolica completa è taut.*

Dimostrazione. Sia X una varietà Kobayashi-iperbolica completa, e consideriamo una successione $\{\varphi_\nu\} \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ che non è compattamente divergente; vogliamo mostrare che ammette una sottosuccessione che converge in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$.

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo trovare due compatti $H \subseteq \mathbb{D}$ e $K \subseteq X$ tali che $\varphi_\nu(H) \cap K \neq \varnothing$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Fissiamo $z_0 \in K$ e $\zeta_\nu \in H$ tale che $\varphi_\nu(\zeta_\nu) \in K$, e poniamo $r = \max\{k_X(z, z_0) \mid z \in K\}$. Allora per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$ e $\nu \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$k_X\big(\varphi_\nu(\zeta), z_0\big) \leq k_X\big(\varphi_\nu(\zeta), \varphi_\nu(\zeta_\nu)\big) + k_X\big(\varphi_\nu(\zeta_\nu), z_0\big) \leq k_{\mathbb{D}}(\zeta, \zeta_\nu) + r.$$

Posto $R = \max\{k_X(\zeta, \zeta') \mid \zeta' \in H\}$, abbiamo che la successione $\{\varphi_\nu(\zeta)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è contenuta nella k_X-palla chiusa di centro z_0 e raggio $R+r$, che è compatta perché X è Kobayashi-ierpbolica completa (si veda [A1, Chapter 2, Paragraph 3, Proposition 2.3.17]; si usa il Lemma 1.2.8 e poco altro); di conseguenza, la successione $\{\varphi_\nu(\zeta)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è relativamente compatta in X. Inoltre, poiché X è Kobayashi-ierpbolica, l'intera famiglia $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è equicontinua (è 1-lipschitziana rispetto alla distanza di Kobayashi); dunque, per il teorema di Ascoli-Arzelà, la successione $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è relativamente compatta in $C^0(\mathbb{D}, X)$. In particolare, ammette una sottosuccessione che converge in $C^0(\mathbb{D}, X)$; usando il teorema di Weierstrass, si può dimostrare che il limite appartiene a $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$, da cui la tesi. $\square$

Prima di enunciare il risultato che, data una varietà taut, ci dà la dicotomia che cerchiamo per il comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe, dobbiamo studiarne alcune proprietà.

Lemma 1.2.14. *Sia X una varietà complessa e $\rho \in \mathrm{Hol}(X, X)$ una retrazione olomorfa di X. Allora l'immagine di ρ è una sottovarietà chiusa di X.*

Dimostrazione. Sia $M = \rho(X)$ e consideriamo $z_0 \in M$. Prendiamo un intorno aperto U di z_0 in X che sia contenuto in una carta locale di X in z_0. Allora $V = \rho^{-1}(U) \cap U$ è un intorno aperto di z_0 tale che $\rho(V) \subseteq V$. Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che X sia un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$.

Sia $P = D\rho(z_0) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ e definiamo $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ come

$$\varphi = \mathrm{id} + (2P - \mathrm{id}) \circ (\rho - P).$$

Poiché $D\varphi(z_0) = \mathrm{id}$, la funzione φ definisce una carta locale in un intorno di z_0. Adesso, dato che $P^2 = P$ e $\rho^2 = \rho$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi \circ \rho &= \rho + (2P - \mathrm{id}) \circ \rho^2 - (2P - \mathrm{id}) \circ P \circ \rho \\ &= P \circ \rho = P + P \circ (2P - \mathrm{id}) \circ (\rho - P) = P \circ \varphi. \end{aligned}$$

Allora letta in questa carta ρ diventa lineare, perciò M è una sottovarietà vicino a z_0. Per arbitrarietà di z_0, segue che M è una varietà. È chiusa perché $\rho(X) = \mathrm{Fix}(\rho)$. □

Teorema 1.2.15. *([A4, Theorem 2.1.5]) Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Se la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente, allora esiste un unica retrazione olomorfa $\rho \in \Gamma(f)$ su una sottovarietà M di X tale che ogni funzione limite di f è della forma $h = \gamma \circ \rho$. Chiamiamo tale M la* varietà limite *di f.*

Inoltre, $\varphi = f|_M \in \mathrm{Aut}(M)$ e $\Gamma(f)$ è isomorfo al sottogruppo di $\mathrm{Aut}(M)$ *dato dalla chiusura di $\{\varphi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$.*

Dimostrazione. Poiché la successione delle iterate non è compattamente divergente, esistono due compatti $H, K \subseteq X$ e una sottosuccessione delle iterate tali che l'intersezione di K con l'immagine di H tramite le funzioni della sottosuccessione non è mai vuota. Dato che X è tesa, possiamo estrarre una sotto-sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti o è compattamente divergente; per costruzione non può essere il secondo caso, dunque abbiamo trovato una sottosuccessione $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ che converge uniformemente sui compatti a $h \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Possiamo anche assumere che $p_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$ e $q_\nu = p_\nu - k_\nu$ tendano a $+\infty$ per $\nu \longrightarrow +\infty$. A meno di prendere ulteriori sottosuccessioni, possiamo anche supporre che $\{f^{p_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ e $\{f^{q_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergano uniformemente sui compatti o siano compattamente divergenti (non necessariamente la stessa cosa per entrambe); è facile vedere che i ragionamenti che andremo a fare vanno bene considerando anche eventuali sottosuccessioni, quindi non perdiamo di generalità. Allora

$$\lim_{\nu \longrightarrow +\infty} f^{p_\nu}\big(f^{k_\nu}(z)\big) = \lim_{\nu \longrightarrow +\infty} f^{k_{\nu+1}}(z) = h(z)$$

per ogni $z \in X$; poiché l'orbita di z tramite $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tende a qualcosa, è relativamente compatta, dunque $\{f^{p_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ non può essere compattamente divergente. Allora converge a una $\rho \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che

$$h \circ \rho = \rho \circ h = h. \tag{7}$$

Similmente troviamo che $\{f^{q_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge a una $g \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che

$$g \circ h = h \circ g = \rho. \tag{8}$$

In particolare, $\rho^2 = \rho \circ \rho = g \circ h \circ \rho = g \circ h = \rho$, perciò ρ è una retrazione di X su una sottovarietà M. Dalla (7) abbiamo $h(X) \subseteq M$, inoltre $g \circ \rho = \rho \circ g$, da cui $g(M) \subseteq M$; allora la (8) ci dà $g \circ h|_M = h \circ g|_M = \mathrm{id}_M$. Dunque ponendo $\gamma = h|_M$ otteniamo $h = \gamma \circ \rho$ con $\gamma \in \mathrm{Aut}(M)$. Dobbiamo mostrare che ρ non dipende da h, in particolare non dipende dalla sottosuccessione scelta.

Sia $\{f^{k'_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ un'altra sottosuccessione convergente a $h' \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Ragionando come sopra, possiamo supporre che $s_\nu = k'_\nu - k_\nu$ e $t_\nu = k_{\nu+1} - k'_\nu$ convergano a $+\infty$ per $\nu \longrightarrow +\infty$ e che $\{f^{s_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{f^{t_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergano rispettivamente a $\alpha, \beta \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tali che

$$\alpha \circ h = h \circ \alpha = h' \qquad \text{e} \qquad \beta \circ h' = h' \circ \beta = h. \tag{9}$$

Allora $h(X) = h'(X)$, dunque M non dipende dalla sottosuccessione scelta. Adesso scriviamo $h = \gamma_1 \circ \rho_1, h' = \gamma_2 \circ \rho_2, \alpha = \gamma_3 \circ \rho_3, \beta = \gamma_4 \circ \rho_4$ dove $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ sono delle retrazioni olomorfe di X su M e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathrm{Aut}(M)$. Vogliamo dire che $\rho_1 = \rho_2$. Notiamo che $h \circ h' = h' \circ h$ e $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, che insieme alla (9) ci dà

$$\begin{aligned} \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 &= \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \rho_1, \\ \gamma_3 \circ \gamma_1 \circ \rho_1 = \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 &= \gamma_2 \circ \rho_2, \\ \gamma_4 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 = \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 &= \gamma_1 \circ \rho_1, \\ \gamma_3 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 &= \gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \rho_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Usando la prima equazione in (10) scriviamo ρ_2 in funzione di ρ_1, e sostituendo nella seconda troviamo $\gamma_3 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$. Similmente, usando la prima equazione scriviamo ρ_1 in funzione di ρ_2 e sostituendo nella terza troviamo $\gamma_4 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$. Allora $\gamma_3 = \gamma_4^{-1}$ e la quarta equazione ci dà $\rho_3 = \rho_4$. Usando la seconda e la terza equazione abbiamo quindi

$$\rho_2 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 = \rho_3 = \rho_4 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 = \rho_1,$$

come voluto.

Adesso, dal fatto che $f \circ \rho = \rho \circ f$ segue che $f(M) \subseteq M$. Ponendo $\varphi = f|_M$, se $f^{p_\nu} \longrightarrow \rho$ si ha che $f^{p_\nu+1} \longrightarrow \varphi \circ \rho$, quindi per quanto visto finora segue che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$.

Infine, data $h = \gamma \circ \rho \in \Gamma(f)$, prendiamo due sottosuccessioni $\{f^{p_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergenti rispettivamente a ρ e a h. Come prima, possiamo supporre che $p_\nu - k_\nu \longrightarrow +\infty$ e che $f^{p_\nu - k_\nu} \longrightarrow h_1 = \gamma_1 \circ \rho$ per $\nu \longrightarrow +\infty$. Allora $h \circ h_1 = h_1 \circ h = \rho$, da cui $\gamma_1 = \gamma^{-1}$. Dunque l'applicazione $h = \gamma \circ \rho \longmapsto \gamma$ è l'isomorfismo cercato fra $\Gamma(f)$ e la chiusura di $\{\varphi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Aut}(M)$, e così concludiamo. $\square$

Vediamo finalmente la dicotomia cercata. Nello specifico, la vedremo nella forma di cinque asserzioni equivalenti.

Teorema 1.2.16. *([A2, Theorem 1.1]) Sia X una varietà taut e $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) la successione delle iterate $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non è compattamente divergente;
(ii) la successione delle iterate $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;
(iii) $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(X, X)$;
(iv) l'orbita di z è relativamente compatta in X per ogni $z \in X$;
(v) esiste $z_0 \in X$ la cui orbita è relativamente compatta in X.

Dimostrazione. (v) $\Rightarrow$ (ii). Consideriamo $H = \{z_0\}$ e $K = \overline{\{f^k(z_0) \mid k \in \mathbb{N}\}}$; ovviamente H è compatto, e K lo è per l'ipotesi (v). Allora $f^k(H) \cap K \neq \varnothing$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, dunque $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non può contenere sottosuccessioni compattamente divergenti.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Poiché (X, k_X) è uno spazio metrico, $\mathrm{Hol}(X, X)$ è metrizzabile, prendendo ad esempio la distanza del sup (così facendo, la topologia coincide con quella di sottospazio di $C^0(X, X)$, che è quella che vogliamo). Quindi, se per assurdo $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non fosse relativamente compatta, ammetterebbe una sottosuccessione $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ senza sottosottosuccessioni convergenti. Ma allora, dato che X è tesa, conterrebbe una sottosottosuccessione compattamente divergente, ottenendo così una contraddizione all'ipotesi (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Fissiamo $z \in X$ e consideriamo la funzione $\mathrm{Hol}(X, X) \longrightarrow X$ tale che $f \longmapsto f(z)$. Questa funzione è continua rispetto alla topologia su $\mathrm{Hol}(X, X)$, dunque l'immagine della chiusura di $\{f^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ è compatta perché immagine di un compatto, chiusa perché compatta in uno spazio Hausdorff, e contiene $\{f^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Perciò l'orbita di z è contenuta in un compatto chiuso, quindi è relativamente compatta, come voluto.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Ovvio.

(i) $\Rightarrow$ (v). Sia M la varietà limite di f e poniamo $\varphi = f|_M$. Sappiamo dal Teorema 1.2.15 che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$ e che $\mathrm{id}_M \in \Gamma(\varphi)$. Prendiamo $z_0 \in M$; vogliamo mostrare che $C = \{\varphi^k(z_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è relativamente compatto in M, dunque anche in X dato che M è chiusa. Scegliamo $\varepsilon_0 > 0$ tale che $B_M(z_0, \varepsilon_0)$ è relativamente compatta in M; notiamo che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$ implica che $B_M\big(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0\big) = \varphi^k\big(B_M(z_0, \varepsilon_0)\big)$ è relativamente compatta in M per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dal Lemma 1.2.8 abbiamo che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \subseteq B_M\big(B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8), \varepsilon_0/4\big);$$

per compattezza esistono quindi $w_1, \ldots, w_r \in B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8)$ tali che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C,$$

e possiamo assumere che $B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C \neq \varnothing$ per $j = 1, \ldots, r$. Per ogni $j = 1, \ldots, r$ scegliamo $k_j \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi^{k_j}(z_0) \in B_M(w_j, \varepsilon_0/4)$; allora

$$B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} \left[B_M\big(\varphi^{k_j}(z_0), \varepsilon_0/2\big) \cap C \right]. \tag{11}$$

Dato che $\mathrm{id}_M \in \Gamma(\varphi)$, l'insieme $I = \{k \in \mathbb{N} \mid k_M\big(\varphi^k(z_0), z_0\big) < \varepsilon_0/2\}$ è infinito; dunque possiamo trovare un $k_0 \in I$ tale che $k_0 \geq \max\{1, k_1, \ldots, k_r\}$. Poniamo $K = \bigcup_{k=1}^{k_0} \overline{B_M\big(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0\big)}$; per costruzione, K è compatto, dunque ci basta mostrare che $C \subseteq K$. Prendiamo $h \in I$; dato che l'insieme I è infinito, è sufficiente mostrare che $\varphi^k(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq k \leq h$.

Supponiamo, per assurdo, che esista un minimo $h_0 \in I$ tale che l'insieme $\{\varphi^k(z_0) \mid 0 \leq k \leq k_0\}$ non è contenuto in K. Ovviamente $h_0 > k_0$. Poiché $h_0, k_0 \in I$, abbiamo anche che $k_M\big(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0$. Dunque

$$k_M\big(\varphi^{k_0-j}(z_0), \varphi^{h_0-j}(z_0)\big) = k_M\big(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0$$

per ogni $0 \leq j \leq k_0$. In particolare,

$$\varphi^j(z_0) \in K \tag{12}$$

per ogni $j = h_0 - k_0, \ldots, h_0$ e $\varphi^{h_0-k_0}(z_0) \in B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C$. Per la (11) possiamo trovare $1 \leq l \leq r$ tale che $k_M\big(\varphi^{k_l}(z_0), \varphi^{h_0-k_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0/2$, quindi

$$k_M\big(\varphi^{k_l-j}(z_0), \varphi^{h_0-k_0-j}(z_0)\big) < \varepsilon_0/2 \tag{13}$$

per ogni $0 \leq j \leq \min\{k_l, h_0 - k_0\}$. Adesso, se $k_l \geq h_0 - k_0$ allora, per la (12), la (13) e la definizione di K, abbiamo $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq j \leq h_0$, in contraddizione con la scelta di h_0. Perciò dev'essere $k_l < h_0 - k_0$; poniamo $h_1 = h_0 - k_0 - k_l$. Per la (13) si ha $h_1 \in I$; dunque, essendo $h_1 < h_0$, dev'essere $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq j \leq h_1$. Ma la (12), la (13) e la definizione di K implicano che $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $h_1 \leq j \leq h_0$, dunque anche in questo caso troviamo una contraddizione. □

Il seguente esempio mostra come l'ipotesi che X sia taut è necessaria per ottenere la dicotomia, anche in un caso piuttosto regolare. In realtà, dalla Proposizione 1.1.20 sappiamo che l'essere Kobayashi-iperbolica implica una proprietà di compattezza per le funzioni olomorfe da X in sé. Per definizione, l'essere taut impone che le funzioni limite in $\mathrm{Hol}(X, X)$ siano ancora in $\mathrm{Hol}(X, X)$ oppure siano la costante a infinito; ciò ci dà appunto la dicotomia (orbite relativamente compatte oppure iterate comapttamente divergenti) che esclude i casi misti nel Teorema 1.2.16.

Esempio 1.2.17. Consideriamo $\Omega = \mathbb{B}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ privata dell'origine. Essendo un dominio limitato è Kobayashi-iperbolico, ma non è taut in quanto non è pseudoconvesso (per il Teorema 1.2.3, non è un dominio di olomorfia), e i domini taut diversi da $\mathbb{C}^n$ sono sempre pseudoconvessi (si veda [W, Theorem F]).

Prendiamo come $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$ la funzione $f(z, w) = (z/2, e^{i\theta}w)$. L'orbita di un qualunque punto del tipo $(0, w)$ con $w \neq 0$ è relativamente compatta, mentre l'orbita di un qualunque punto del tipo $(z, 0)$ con $z \neq 0$ tende al punto del bordo $(0, 0)$. Dunque orbite relativamente compatte coesistono con orbite che tendono al bordo, quindi f non è né compattamente divergente né ha tutte le orbite relativamente compatte.

In particolare, le funzioni limite di f non sono né costanti né in $\mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$, e questo è un controesempio, senza l'ipotesi taut, per il risultato di tipo Wolff-Denjoy che vedremo nella prossima sezione.

Per finire, vediamo un risultato di tipo Wolff-Denjoy per domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo C^2), in particolare faremo riferimento a una dimostrazione che sfrutta fatti geometrici quali la Gromov-iperbolicità. Il Teorema, che già era noto ancora prima che venisse mostrata la Gromov-iperbolicità, è il seguente.

Teorema 1.2.18. *(Abate, [A2, Theorem 0.5]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite di f sono relativamente compatte in Ω;*
- *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Per dimostrarlo usando la Gromov-iperbolicità, è prima necessario mostrare che (Ω, k_Ω) è Gromov-iperbolico. Citiamo l'articolo di Balogh e Bonk in cui si trova la dimostrazione.

Teorema 1.2.19. *(Balogh, Bonk [BB, Theorem 1.4]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ con $n \geq 2$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso. Allora (Ω, k_Ω) è proprio, cioè tale che ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto, e Gromov-iperbolico. Inoltre, il bordo iperbolico $\partial_G\Omega$ è identificato con il bordo euclideo $\partial\Omega$.*

Serve anche un Teorema dovuto a Karlsson.

Teorema 1.2.20. *(Karlsson, [Ka, Corollary 3.7]) Sia (X, d) uno spazio metrico proprio tale che*

(i) *è un aperto denso di uno spazio topologico $\overline{X}$ compatto e di Hausdorff la cui topologia di sottospazio coincide con la topologia di spazio metrico. Inoltre, dati $x \in X$ e x_n una successione in X che converge a un punto di $\overline{X} \setminus X$, si ha $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} d(x, x_n) = +\infty$;*

(ii) date x_n e y_n due successioni convergenti a due punti distinti di $\overline{X} \setminus X$ e $z \in X$, si ha $\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, z), d(y_n, z)\} = +\infty$.

Sia $\phi : X \longrightarrow X$ una semicontrazione. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite di ϕ sono limitate;*
- *esiste un unico punto di $\overline{X} \setminus X$ a cui convergono tutte le orbite.*

L'ipotesi (ii) del Teoerema 1.2.20 è sempre verificata dagli spazi Gromov-iperbolici, mentre segue dal Teorema 1.2.19 che la (i) è vera per i domini limitati e strettamente pseudoconvessi. Usando anche il teorema di Montel, si ottiene così il Teorema 1.2.18.

Tuttavia, come già anticipato nell'introduzione, quello che noi andremo a vedere è un risultato che vale anche per domini con bordo non necessariamente regolare. L'ipotesi di tipo geometrico che andremo ad utilizzare è il concetto di visibilità, di cui discuteremo anche il rapporto con la Gromov-iperbolicità.

2 Un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per varietà taut con visibilità

2.1 Il concetto di visibilità

Nella sezione precedente abbiamo visto come l'ipotesi di varietà taut ci permette di dire, se le orbite di una certa funzione non sono relativamente compatte, che la successione delle iterate è compattamente divergente.

Per ottenere un risultato di tipo Wolff-Denjoy, nel caso in cui le iterate siano compattamente divergenti dobbiamo dire due cose: che le iterate convergono uniformemente sui compatti a una funzione a valori nel bordo euclideo, e che in realtà tale funzione è una costante.

Per ottenere la convergenza uniforme al bordo ci basterà supporre che la varietà sia embeddata in un qualche $\mathbb{C}^d$ e limitata, dopodiché si applica il teorema di Montel. Per dire che la funzione è costante, invece, ci serviranno delle ipotesi aggiuntive di tipo geometrico: la condizione di visibilità per le simil-geodetiche.

Definizione 2.1.1. Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se

1. per ogni $s, t \in I$ si ha
$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t-s| + \kappa;$$
2. σ è assolutamente continua (quindi $\sigma'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in I$) e per quasi ogni $t \in I$ si ha
$$K_X\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq \lambda.$$

Definizione 2.1.2. Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X ha la *condizione di visibilità rispetto alle* (λ, κ)-*simil-geodetiche* se

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti $p, q \in \partial X$ con $p \neq q$, esistono in $\mathbb{C}^d$ due intorni V e W di p e q rispettivamente e un compatto K di X tali che: $\overline{V} \cap \overline{W} = \varnothing$; ogni (λ, κ)-simil-geodetica in X che collega un punto di V a un punto di W interseca K.

Nel caso di un dominio limitato con bordo regolare, l'ipotesi di essere strettamente pseudoconvesso permetteva di concludere la condizione geometrica di Gromov-iperbolicità. Inoltre, in tal caso il dominio è proprio e completo (si veda [G, Paragraph 3.3]); dunque per il teorema di Hopf-Rinow ([BH, Part I, Paragraph 3, Proposition 3.7]) è uno spazio geodetico, cioè ogni coppia di punti è collegata da una geodetica. Si può dimostrare che gli spazi Gromov-iperbolici, propri e geodetici soddisfano la condizione di visibilità sia per le geodetiche che per le simil-geodetiche: per la prima si può ragionare come in [BNT, Proposition 2.5] usando il fatto che per ogni coppia di punti distinti di $\partial_G X$ esistono due loro intorni disgiunti in $X \cup \partial_G X$ (si veda [BH, Part III, Chapter H, Paragraph 3, Lemma 3.6]); la seconda segue da [BH, Part III, Chapter H, Paragraph 1, Theorem 1.7].

Tuttavia, nella prossima sezione vedremo esempi di domini che soddisfano la condizione di visibilità per le simil-geodetiche ma che non sono Gromov-iperbolici. Segue dunque che i risultati che andremo a dimostrare sono, in un certo senso, più generali. In particolare, il Teorema 1.2.18 sarà un corollario del teorema che dimostreremo.

Le simil-geodetiche sono delle curve che, a meno di costanti moltiplicative e additive, si comportano come le geodetiche, cioè le curve che minimizzano la lunghezza. Quello che chiediamo, euristicamente, nella Definizione 2.1.2 è che, se vogliamo andare da un punto a un altro del bordo con tali curve, allora non possiamo stare arbitrariamente vicini al bordo, ma siamo costretti a "piegarci" verso l'interno; in pratica, stiamo chiedendo che ci sia una sorta di curvatura negativa.

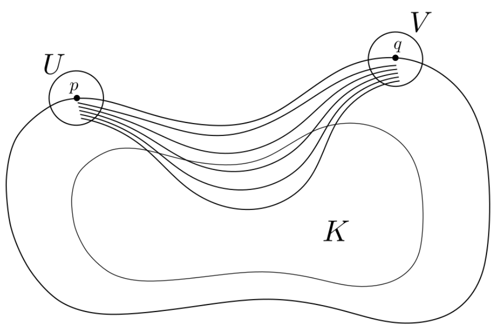

Figura 1: il caso, da noi escluso, in cui le simil-geodetiche da U a V fuggono dai compatti di X

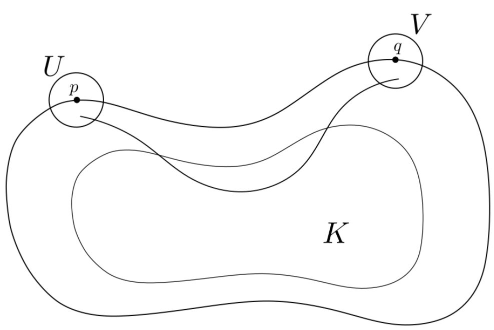

Figura 2: sotto ipotesi di visibilità, le simil-geodetiche da U a V devono curvare verso l'interno per intersecare un compatto K

Fatto 2.1.3. Il dominio Ω definito nell'Esempio 1.2.17 soddisfa la condizione di visibilità per le simil-geodetiche. Per vederlo, consideriamo due casi:

(i) uno dei due punti è l'origine. Allora basta prendere come compatto un qualsiasi insieme della forma $\{r \leq |z| \leq R\}$ con $0 < r < R < 1$ e i due intorni aperti sufficientemente piccoli;

(ii) i due punti sono entrambi sulla sfera unitaria. Per [NTT, Proposition 6] è facile vedere che, se la palla unitaria soddisfa la condizione di visibilità per simil-geodetiche, allora Ω la soddisfa in questo caso. Ma la palla unitaria è limitata ed è facile vedere che è strettamente pseudoconvessa, quindi, per quanto detto sopra, soddisfa la condizione voluta.

Perciò, l'ipotesi che la varietà sia taut è necessaria per ottenere un risultato di tipo Wolff-Denjoy, anche con la condizione di visibilità.

2.2 Risultati tecnici preparatori

Prima di andare a vedere il teorema di tipo Wolff-Denjoy, dobbiamo mostrare diversi risultati preliminari. Visto che andremo a dimostrare la versione del teorema che si trova in [CMS], tali risultati sono per la maggior parte dimostrati, e il resto citati, nel suddetto articolo.

Cominciamo con delle stime dal basso e dall'alto per la metrica di Kobayashi, che permettono anche di ottenere la lipschitzianità delle simil-geodetiche.

Lemma 2.2.1. *Sia X una varietà complessa. Se un sottoinsieme compatto $K \subseteq X$ è contenuto nel polidisco di una carta di X, allora esiste una costante $C = C(K) > 0$ tale che $K_X(z; Z) \leq C\|Z\|$ per ogni $z \in K$ e $Z \in T_zX$.*

Dimostrazione. Sia $n = \dim X$ e $D = \mathbb{D}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}$ il polidisco che contiene K. Applicando l'Osservazione 1.1.6 all'inclusione e passando in coordinate, per ogni $z \in K$ e $Z \in T_zX$ si ha che

$$K_X(z; Z) \leq K_D(z; Z) \leq \max_{j=1,\dots,n} \frac{r_j|Z_j|}{r_j^2 - |z_j|^2}.$$

Per ottenere la seconda disuguaglianza, ragioniamo al seguente modo: a meno di riscalare tutto per una costante, possiamo supporre che il membro destro sia uguale a 1 (se fosse 0, avremmo $Z = 0$ e la tesi sarebbe immediata). Consideriamo adesso la funzione $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, D)$ che manda $\zeta \in \mathbb{D}$ nell'elemento di D che ha come j-esima coordinata $\dfrac{r_j\alpha_j\zeta + z_j}{1 + \bar{z}_j\alpha_j\zeta/r_j}$, dove $\alpha_j = \dfrac{r_jZ_j}{r_j^2 - |z_j|^2}$; allora si ha che $Df(0) \cdot 1 = Z$ e la disuguaglianza discende dalla definizione di K_D.

Poiché, per compattezza di K, la quantità $r_j^2 - |z_j|^2$ è limitata dal basso da una costante positiva per $j = 1, \dots, n$, la tesi segue facilmente. □

Proposizione 2.2.2. *Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata. Allora*

(1) esiste $c > 0$ tale che $c\|Z\| \leq K_X(z; Z)$ per ogni $z \in X$ e $Z \in T_z X$;
(2) per ogni compatto $K \subseteq X$, esiste una costante $C_1 = C_1(K) > 0$ tale che $K_X(z; Z) \leq C_1\|Z\|$ per ogni $z \in X$ e $Z \in T_z X$.

Dimostrazione. (1) Supponiamo per assurdo che esistano $z_j \in X$ e $Z_j \in T_{z_j} X$ tali che $\lim_{j \longrightarrow +\infty} K_X(z_j; Z_j)/\|Z_j\| \longrightarrow 0$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\|Z_j\| = 1$ per ogni j. Per definizione di K_X, esistono delle funzioni $f_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ e dei $v_j \in \mathbb{C}$ tali che $f_j(0) = z_j$ e

$$|v_j| \leq 2K_X(z_j; Z_j) \quad \text{e} \quad Df_j(0)v_j = Z_j.$$

Segue che $\lim_{j \longrightarrow +\infty} \|Df_j(0)\| = \lim_{j \longrightarrow +\infty} 1/|v_j| = +\infty$. A meno di sottosuccessioni e di riordinare le coordinate, possiamo supporre che siano le prime componenti dei vettori $Df_j(0)$ a tendere a $+\infty$. Chiamiamo g_j la prima componente di f_j, cosicché g_j' è la prima componente di Df_j. Le g_j sono le composizioni delle f_j con un embedding e una proiezione, dunque sono olomorfe; inoltre, poiché X è limitata, sono equilimitate. Esiste quindi un $r > 0$ tale che $g_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}_r)$ per ogni j. Adesso, noi sappiamo che $\lim_{j \longrightarrow +\infty} |g_j'(0)| = +\infty$; basta allora applicare il lemma di Schwarz per ottenere una contraddizione.

(2) Per ogni $z \in K$ scegliamo un polidisco U_z centrato in z e contenuno in una carta di X. Sia $U_z' \subseteq U_z$ un altro polidisco, nella stessa carta, centrato in z e relativamente compatto in U_z per ogni $z \in K$. Dato che K è compatto, esistono $z_1, \ldots, z_l$ tali che $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} U_{z_j}'$. Allora, poiché $\overline{U}_{z_j}'$ è un sottoinsieme compatto di U_{z_j} per $j = 1, \ldots, l$, per il Lemma 2.2.1 abbiamo

$$K_X(z, Z) \leq C_i\|Z\|$$

per ogni $z \in U_{z_j}'$ e $Z \in T_z X$, dove $C_i > 0$ è una costante che dipende dal compatto $\overline{U}_{z_j}'$. Basta allora porre $C(K) = \max_{j=1,\ldots,l}\{C_j\}$. $\square$

Proposizione 2.2.3. *Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata. Per ogni $\lambda \geq 1$ esiste una costante $C = C(\lambda) > 0$ tale che ogni (λ, κ)-simil-geodetica è C-lipschitziana rispetto alla distanza euclidea.*

Dimostrazione. Ogni (λ, κ)-simil-geodetica $\sigma : I \longrightarrow X$ è, per definizione, assolutamente continua rispetto alla distanza euclidea. Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale di Lebesgue, per ogni $s, t \in I$ abbiamo che $\sigma(t) = \sigma(s) + \int_s^t \sigma'(r)\,\mathrm{d}r$.

Per il punto (1) della Proposizione 2.2.2, esiste una costante $c > 0$ tale che $c\|Z\| \leq K_X(z; Z)$ per ogni $z \in X$ e $Z \in T_z X$, e per definizione di (λ, κ)-simil-geodetica $K_X\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq \lambda$ per quasi ogni $t \in I$. Dunque $\|\sigma'(t)\| \leq \lambda/c$ per quasi ogni $t \in I$, da cui

$$\|\sigma(t) - \sigma(s)\| = \| \int_s^t \sigma'(r)\,\mathrm{d}r\| \leq \int_s^t \|\sigma'(r)\|\,\mathrm{d}r \leq \frac{\lambda}{c}|t - s|,$$

ciè σ è λ/c-lipschitziana. $\square$

Il seguente Lemma è un fatto tecnico che ci servirà tra poco.

Lemma 2.2.4. *Siano X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata e $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$ una curva assolutamente continua. Se*

$$l_X(\sigma) \leq k_X\big(\sigma(a), \sigma(b)\big) + \kappa$$

allora, per ogni $a \leq s \leq t \leq b$, si ha

$$l_X(\sigma|_{[s,t]}) \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) + \kappa.$$

Dimostrazione. Siano s e t come sopra. Allora

$$l_X(\sigma|_{[s,t]}) = l_X(\sigma) - l_X(\sigma|_{[a,s]}) - l_X(\sigma|_{[t,b]}).$$

Usando la nostra ipotesi e il punto (ii) del Teorema 1.2.7, troviamo

$$l_X(\sigma|_{[s,t]}) \leq k_X\big(\sigma(a), \sigma(b)\big) + \kappa - k_X\big(\sigma(a), \sigma(s)\big) - k_X\big(\sigma(t), \sigma(b)\big).$$

Applicando la disuguaglianza triangolare, si ottiene la tesi. $\square$

Quello che vogliamo mostrare adesso è che le varietà complesse, connesse, embettate in $\mathbb{C}^d$ e limitate sono anche connesse per archi simil-geodetici.

Teorema 2.2.5. *Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata. Per ogni $z, w \in X$ e ogni $\kappa > 0$ esiste una $(1, \kappa)$-simil-geodetica $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$ tale che $\sigma(a) = z$ e $\sigma(b) = w$.*

Dimostrazione. Per il punto (i) del Teorema 1.2.7, a meno di riparametrizzare esiste una curva C^1 a tratti $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ tale che $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$ e

$$l_X(\gamma) < k_X(z, w) + \kappa.$$

Inoltre, a meno di perturbare di poco la curva, possiamo assumere che sia C^1 e che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$. Consideriamo la funzione $f : [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$f(t) = \int_0^t K_X\big(\gamma(r); \gamma'(r)\big)\,\mathrm{d}r.$$

Poiché $\gamma([0,1])$ è compatto in X, per i punti (1) e (2) della Proposizione 2.2.2 esiste $C > 0$ tale che

$$\frac{1}{C}\|\gamma'(t)\| \leq K_X\big(\gamma(t);\gamma'(t)\big) \leq C\|\gamma'(t)\| \text{ per ogni } t \in [0,1].$$

Dato che $\|\gamma'(t)\| > 0$ per ogni $t \in [0,1]$ e γ' è continua, esistono $A, B > 0$ tali che $A \leq \|\gamma'(t) \leq B$ per ogni $t \in [0,1]$. Dunque f è una funzione bilipschitziana e, di conseguenza, strettamente crescente. Chiamiamo $g : [0, l_X(\gamma)] \longrightarrow [0,1]$ l'inversa di f. Il nostro claim è che la curva $\sigma = \gamma \circ g : [0, l_X(\gamma)] \longrightarrow X$ sia una $(1,\kappa)$-simil-geodetica.

Poiché g è bilipschitziana (perché lo è la sua inversa) e γ è C^1, abbiamo che σ è lipschitziana e quindi assolutamente continua. Allora, per i t per i quali $g'(t)$ esiste si ha $\sigma'(t) = \gamma'\big(g(t)\big)\gamma'(t)$. Inoltre, per tali t anche $f'\big(g(t)\big)$ esiste ed è non-nullo, e $g'(t) = 1/f'\big(g(t)\big) > 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale di Lebesgue, si ha che f' esiste per quasi ogni $s \in [0,1]$ e $f'(s) = K_X\big(\gamma(s);\gamma'(s)\big)$. Siccome g è bilipschitziana, la preimmagine degli $s \in [0,1]$ per cui esiste $f'(s)$ è un sottoinsieme di $[0, l_X(\gamma)]$ di misura piena. Visto che $\gamma'(s) \neq 0$ per ogni $s \in [0,1]$, otteniamo che

$$g'(t) = \frac{1}{K_X\Big(\gamma\big(g(t)\big);\gamma'\big(g(t)\big)\Big)}$$

per quasi ogni $t \in [0, l_X(\gamma)]$. Per tali t si ha che

$$K_X\big(\sigma(t);\sigma'(t)\big) = K_X\Big(\gamma\big(g(t)\big);\gamma'\big(g(t)\big)g'(t)\Big) = 1.$$

Quindi $l_X(\sigma) = l_X(\gamma) \leq k_X(z,w) + \kappa$. Per il Lemma 2.2.4 si ha, per ogni $0 \leq s \leq t \leq l_X(\gamma)$, che

$$|t-s| = l_X(\sigma|_{[s,t]}) \leq k_X\big(\sigma(s),\sigma(t)\big) + \kappa.$$

Dato che σ è assolutamente continua, per il punto (ii) del Teorema 1.2.7 abbiamo anche che

$$k_X\big(\sigma(s),\sigma(t)\big) \leq l_X(\sigma|_{[s,t]}) = |s-t|$$

per ogni $0 \leq s \leq t \leq l_X(\gamma)$. Segue dunque che σ è una $(1,\kappa)$-simil-geodetica. □

Adesso ci serve un Lemma quasi ovvio.

Lemma 2.2.6. *Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata. Se $\sigma : [a,b] \longrightarrow X$ è una $(1,\kappa)$-simil-geodetica per qualche $\kappa > 0$, allora per ogni $t \in [a,b]$ si ha*

$$k_X\big(\sigma(a),\sigma(t)\big) + k_X\big(\sigma(t),\sigma(b)\big) \leq k_X\big(\sigma(a),\sigma(b)\big) + 3\kappa.$$

Dimostrazione. È un'immediata conseguenza della definizione di $(1,\kappa)$-simil-geodetica. $\square$

Quello che dimostreremo adesso è uno dei fatti cruciali nella dimostrazione del teorema di tipo Wolff-Denjoy. Afferma che, sotto condizioni di visibilità per le simil-geodetiche, le sottosuccessioni di iterate di una funzione olomorfa che "tendono a infinito" convergono tutte, puntualmente, a un unico punto del bordo.

Proposizione 2.2.7. *Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X soddisfi la condizione di visibilità rispetto alle $(1,\kappa_0)$-simil-geodetiche. Siano $\nu, \mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ due funzioni strettamente crescenti e $F \in \mathrm{Hol}(X,X)$ per cui esiste $x_0 \in X$ tale che*

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) = \lim_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\mu(j)}(x_0), x_0\big) = +\infty.$$

Allora esiste $\xi \in \partial X$ tale che

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} F^{\nu(j)}(z) = \lim_{j \longrightarrow +\infty} F^{\mu(j)}(z) = \xi$$

per ogni $z \in X$.

Dimostrazione. Usando la disuguaglianza triangolare e il fatto che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a k_X, troviamo che

$$\begin{aligned} k_X\big(F^{\nu(j)}(z), z\big) &\geq k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) - 2k_X(x_0, z) \text{ e} \\ k_X\big(F^{\mu(j)}(z), z\big) &\geq k_X\big(F^{\mu(j)}(x_0), x_0\big) - 2k_X(x_0, z). \end{aligned}$$

Segue che $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(z), z\big) = \lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\mu(j)}(z), z\big) = +\infty$ per ogni $z \in X$. Usando l'ipotesi e il fatto che X è limitata in $\mathbb{C}^d$, possiamo trovare una funzione strettamente crescente $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che

- si ha $k_X\big(F^{(\nu\circ\tau)(j)}(x_0), x_0\big) \geq k_X\big(F^k(x_0), x_0\big)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \leq (\nu \circ \tau)(j)$;
- la successione $\{F^{(\nu\circ\tau)(j)}(x_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un certo $\xi \in \partial X$.

Vogliamo ora mostrare la seguente asserzione.

Siano $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e $z_0, z'_0 \in M$ tali che

(1) per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha $m_j \geq m'_j$;
(2) per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k \leq m_j$ si ha $k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) \geq k_X\big(F^k(z_0), z_0\big)$;
(3) si ha $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) = \lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{m'_j}(z'_0), z_0\big) = +\infty$;
(4) le successioni $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergono, rispettivamente, a ζ e ζ' in ∂X;

allora $\zeta = \zeta'$.

Supponiamo per assurdo che $\zeta \neq \zeta'$. Grazie al Teorema 2.2.5 possiamo scegliere, per ogni $j \in \mathbb{N}$, una $(1, \kappa_0)$-simil-geodetica $\sigma_j : [0, T_j] \longrightarrow X$ tale che $\sigma_j(0) = F^{m_j}(z_0)$ e $\sigma_j(T_j) = F^{m'_j}(z'_0)$. Adesso, dato che abbiamo assunto che $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergano a due punti di ∂X distinti e X ha la visibilità rispetto alle $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche, esistono una costante $0 < R < +\infty$ e, per ogni $j \in \mathbb{N}$, un $t_j \in [0, T_j]$ tali che $k_X\big(z_0, \sigma_j(t_j)\big) < R$. Per il Lemma 2.2.6 si ha dunque che

$$\begin{aligned}
k_X\big(F^{m_j}(z_0), F^{m'_j}(z'_0)\big) &\geq k_X\big(F^{m_j}(z_0), \sigma_j(t_j)\big) + k_X\big(\sigma_j(t_j), F^{m'_j}(z'_0)\big) - 3\kappa_0 \\
&\geq k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) - k_X\big(z_0, \sigma_j(t_j)\big) + \\
&+ k_X\big(F^{m'_j}(z'_0), z_0\big) - k_X\big(z_0, \sigma_j(t_j)\big) - 3\kappa_0 \\
&\geq k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) + k_X\big(F^{m'_j}(z'_0), z_0\big) - 3\kappa_0 - 2R.
\end{aligned}$$

D'altra parte, abbiamo anche che

$$\begin{aligned}
k_X\big(F^{m_j}(z_0), F^{m'_j}(z'_0)\big) &\leq k_X\big(F^{m_j - m'_j}(z_0), z'_0\big) \\
&\leq k_X\big(F^{m_j - m'_j}(z_0), z_0\big) + k_X(z_0, z'_0) \\
&\leq k_X\big(F^{m_j}(z_0), z_0\big) + k_X(z_0, z'_0),
\end{aligned}$$

dove per la prima e la terza disuguaglianza abbiamo usato le condizioni (1) e (2) sulle successioni $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$; nella prima, abbiamo anche usato che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a k_X. Mettendo insieme quanto trovato e riarrangiando i termini, otteniamo

$$k_X\big(F^{m'_j}(z'_0), z_0\big) \leq k_X(z_0, z'_0) + 3\kappa_0 + 2R,$$

che è in contraddizione con la condizione (3).

Adesso che l'asserzione è stata dimostrata, possiamo concludere la dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $\lim_{j\longrightarrow+\infty} F^{\nu(j)}(z) = \xi$ per ogni $z \in X$. Fissiamo uno $z \in X$ e prendiamo ξ' punto limite di $\{F^{\nu(j)}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$. Allora esiste una $\tau' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strettamente crescente, tale che $\lim_{j\longrightarrow+\infty} F^{\nu(\tau'(j))}(z) = \xi'$. Scegliamo una $\tilde{\tau} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strettamente crescente, tale che $\nu \circ \tau \circ \tilde{\tau} \geq \nu \circ \tau'$ e applichiamo l'asserzione dimostrata sopra a $m_j = (\nu \circ \tau \circ \tilde{\tau})(j), m'_j = (\nu \circ \tau')(j)$ e $z_0 = x_0, z'_0 = z$. Troviamo così $\xi' = \xi$, da cui segue facilmente che tutta la successione deve tendere a ξ. Ragionando in modo analogo, troviamo che vale lo stesso anche per $\{F^{\mu(j)}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$, come voluto. □

Anche il seguente teorema ci aiuterà nella nostra dimostrazione. Questo afferma che, sotto condizioni di visibilità per le simil-geodetiche, le successioni di funzioni olomorfe che convergono uniformemente sui compatti di X devono necessariamente convergere a una costante.

Teorema 2.2.8. *Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X soddisfi la condizione di visibilità rispetto alle $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche. Sia $\{F_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(X, X)$ una successione che converge uniformemente sui compatti di X a una $\psi \in \mathrm{Hol}(X, \partial X)$. Allora ψ è costante.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che ψ non sia costante. Allora, dati $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, la restrizione di ψ a $B_{k_X}(x, \varepsilon)$, la palla aperta rispetto alla distanza di Kobayashi di centro x e raggio ε, non è costante. Infatti, tale palla è un aperto di X, e se ψ fosse costante su di essa lo sarebbe su tutta X per il principio di identità delle funzioni olomorfe, poiché X è connessa. Questa, però, sarebbe una contraddizione alla nostra assunzione.

Fissiamo $x_0 \in X$ e poniamo $\varepsilon_0 = \kappa_0/3$. Per quanto detto, deve esistere un $x_1 \in B_{k_X}(x_0, \varepsilon_0)$ tale che $\{F_\nu(x_0)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{F_\nu(x_1)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergono rispettivamente a ξ e η, con $\xi, \eta \in \partial X$ e $\xi \neq \eta$. Consideriamo adesso una $(1, \kappa_0/3)$-simil-geodetica $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x_1$, che esiste per il Teorema 2.2.5. Per definizione si ha che

$$|a - b| - \kappa_0/3 \leq k_X(x_0, x_1) \Rightarrow |a - b| \leq k_X(x_0, x_1) + \kappa_0/3 \leq 2\kappa_0/3.$$

Per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ definiamo $\sigma_\nu : [a, b] \longrightarrow X$ come $\sigma_\nu = F_\nu \circ \gamma$. Mostriamo che σ_ν è una $(1, \kappa_0)$-simil-geodetica per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Per ogni $s, t \in [a, b]$ si ha

$$\begin{aligned} k_X\big(\sigma_\nu(s), \sigma_\nu(t)\big) &= k_X\Big(F_\nu\big(\gamma(s)\big), F_\nu\big(\gamma(t)\big)\Big) \\ &\leq k_X\big(\gamma(s), \gamma(t)\big) \leq |s - t| + \kappa_0/3 \leq |s - t| + \kappa_0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto alla distanza di Kobayashi e che γ è una $(1, \kappa_0/3)$-simil-geodetica. Inoltre, si ha che $|s - t| - \kappa_0 \leq |a - b| - \kappa_0 < 0$ per ogni $s, t \in [a, b]$, dunque

$$|s - t| - \kappa_0 \leq k_X\big(\sigma_\nu(s), \sigma_\nu(t)\big) \leq |s - t| + \kappa_0.$$

Infine, per ogni t si ha

$$K_X\big(\sigma_\nu(t); \sigma_\nu'(t)\big) = K_X\Big(F_\nu\big(\gamma(s)\big); DF_\nu\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\Big) \leq K_X\big(\gamma(t); \gamma'(t)\big) \leq 1,$$

dove abbiamo usato che le funzioni olomorfe non aumentano la metrica di Kobayashi e che γ è una $(1, \kappa_0/3)$-simil-geodetica. Adesso, poiché $\{F_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sui compatti di X a una funzione olomorfa ψ a valori in ∂X, ne consegue che per ogni compatto $K \subseteq X$ esiste un $\nu(K) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $\nu \geq \nu(K)$ si ha $\sigma_\nu([a, b]) \cap K = \varnothing$. Anche in questo caso troviamo una contraddizione, poiché X soddisfa la condizione di visibilità rispetto alle $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche. $\square$

2.3 Il teorema di tipo "Wolff-Denjoy"

Andiamo adesso ad enunciare e dimostrare la versione più generale di un teorema di tipo Wolff-Denjoy per varietà Kobayashi-iperboliche. Riportiamo la dimostrazione data in [CMS], ma notiamo che la strategia e le tecniche impiegate sono sostanzialmente riprese da [BZ1] e [BM]. Ognuno di questi articoli ha generalizzato il risultato ottenuto nel precedente.

Teorema 2.3.1. *([CMS, Theorem 1.15]) Sia X una varietà complessa, connessa, embeddata in $\mathbb{C}^d$ e limitata. Supponiamo che X sia taut e che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X soddisfi la condizione di visibilità rispetto alle $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche.*

Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite di F sono relativamente compatte in X;*
- *esiste un unico punto di ∂X tale che le iterate di F convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Dimostrazione. Poiché X è taut, per il Teorema 1.2.16 o l'orbita di z tramite F è relativamente compatta per ogni $z \in X$, oppure la successione delle iterate $\{F^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ è compattamente divergente. Supponiamo che le orbite di F non siano relativamente compatte in X; allora la successione delle iterate di F è compattamente divergente.

Consideriamo una sottosuccessione qualsiasi di $\{F^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. Usando il teorema di Montel, possiamo trovare una sottosottosuccessione che converge uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa $\tilde{F} : X \to \overline{X}$. Infatti, poiché X è limitata allora la sottosuccessione è uniformemente limitata sui compatti; possiamo dunque fissare un ricoprimento numerabile fatto di aperti relativamente compatti contenuti in carte di X ed estrarre, con un procedimento diagonale nel quale si applica il teorema di Montel ad ogni tale carta, una sottosottosuccessione che converga uniformemente sui compatti di ogni carta, in particolare sugli aperti del ricoprimento. Prendendo un'esaustione in compatti di X (ad esempio, le palle chiuse rispetto a k_X) si può concludere facilmente che la convergenza è uniforme su tutti i compatti di X.

Poiché le iterate di F sono compattamente divergenti, si ha che $\tilde{F} \in \mathrm{Hol}(X, \partial X)$. Allora, per il Teorema 2.2.8, troviamo che $\tilde{F}$ è costante. Identifichiamo quindi

$$\Gamma := \overline{\{F^\nu\}}_{\nu\in\mathbb{N}} \setminus \{F^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$$

come un insieme di punti di ∂X, dove la chiusura è intesa rispetto alla topologia compatta-aperta. Supponiamo, per assurdo, che Γ contenga almeno due punti.

Caso 1: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^\nu(o), o\big) = +\infty.$$

Possiamo dunque scegliere una sottosuccessione $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che

(1) per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k \leq \nu_j$ si ha $k_X\big(F^k(o), o\big) \leq k_X\big(F^{\nu_j}(o), o\big)$;
(2) $\{F^{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a $\xi \in \partial X$.

Adesso, poiché abbiamo assunto che Γ contenga almeno due elementi, esiste una sottosuccessione $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\{F^{\mu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a $\eta \in \partial X$ con $\eta \neq \xi$. Segue immediatamente dalla Proposizione 2.2.7 che non possiamo avere $\limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\mu_j}(o), o\big) = +\infty$. Perciò dev'essere $\limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\mu_j}(o), o\big) < +\infty$, quindi

$$\limsup_{h\longrightarrow+\infty}\limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu_h}(o), F^{\mu_j}(o)\big)$$
$$\geq \limsup_{h\longrightarrow+\infty}\limsup_{j\longrightarrow+\infty}\Big(k_X\big(F^{\nu_h}(o), o\big) - k_X\big(F^{\mu_j}(o), o\big)\Big) = +\infty.$$

Fissiamo ora un $l \in \mathbb{N}$. Se applichiamo il Teorema 2.2.8 ad una sottosuccessione arbitraria di $\{F^{\mu_j - l}\}_{j\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente sui compatti di X, dal momento che sul compatto $\{F^l(o)\}$ converge a η otteniamo (usando anche il teorema di Montel) che tutta la sottosuccessione converge, uniformemente sui compatti di X, a η.

Poniamo $M_l = \limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\mu_j - l}(o), o\big)$. Affermiamo che $\limsup_{l\longrightarrow+\infty} M_l < +\infty$. Supponiamo per assurdo che non sia così, allora esiste una sottosuccessione $\{l_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tale che $M_{l_m} > m$ per ogni m. Per definizione di M_l e per quanto appena trovato sulla successione $\{F^{\mu_j - l}\}_{j\in\mathbb{N}}$, abbiamo quindi che esiste una sottosottosuccessione $\{j_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tale che

(1) $\|F^{\mu_{j_m} - l_m}(o) - \eta\| < 1/k$;
(2) $k_X\big(F^{\mu_{j_m} - l_m}(o), o\big) > k$.

Per la Proposizione 2.2.7 deve dunque essere $\eta = \xi$, contraddizione. Perciò segue che $\limsup_{l\longrightarrow+\infty} M_l < +\infty$. Allora

$$\limsup_{h\longrightarrow+\infty}\limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu_h}(o), F^{\mu_j}(o)\big)$$
$$\leq \limsup_{h\longrightarrow+\infty}\limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(o, F^{\mu_j - \nu_h}(o)\big) = \limsup_{h\longrightarrow+\infty} M_{\nu_h} < +\infty,$$

in contraddizione con quanto trovato prima; questo conclude il Caso 1.

Caso 2: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu}(o), o\big) < +\infty.$$

Ricordiamo che abbiamo assunto che esistano due punti distinti $\xi, \eta \in \Gamma$. Poiché X soddisfa la condizione di visibilità rispetto alle $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche, esistono V_ξ, V_η intorni in $\mathbb{C}^d$ rispettivamente di ξ e di η, con $\overline{V}_\xi \cap \overline{V}_\eta = \varnothing$, e un compatto K di X tali che ogni $(1, \kappa_0)$-simil-geodetica in X che collega un punto di V_ξ a un punto di V_η interseca K. Adesso definiamo, per $\delta > 0$ arbitrario, la funzione $G_\delta : K \times K \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$G_\delta(x_1, x_2) = \inf\{k_X\bigl(F^m(x_1), x_2\bigr) \mid m \in \mathbb{N}, \|F^m(x_1) - \xi\| < \delta\}.$$

Notiamo che G_δ è ben definita per ogni $\delta > 0$ (basta considerare la sottosuccessione delle iterate di F che converge a ξ uniformemente sui compatti di X) e che $G_{\delta_1}(x_1, x_2) \geq G_{\delta_2}(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in K$ e $\delta_1 \leq \delta_2$.

Vogliamo dire che, in questo caso, $\sup\limits_{\delta>0, x_1, x_2 \in K} G_\delta(x_1, x_2) < +\infty$. Supponiamo per assurdo che non sia così. Allora esistono una successione di reali positivi $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e due successioni $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ in K tali che $G_{\delta_n}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo supporre che le successioni $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergano, rispettivamente, a $\delta_0 \geq 0$ e $x_1, x_2 \in K$. Poiché $\{F^{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a ξ, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $j(n) \in \mathbb{N}$ tale che si ha $\sup\limits_{x\in K} \|F^{\nu_j}(x) - \xi\| < \delta_n$ per ogni $j \geq j(n)$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\|F^{\nu_{j(n)}}(x_n^{(1)}) - \xi\| < \delta_n$. Segue che

$$n \leq G_{\delta_n}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) \leq k_X\bigl(F^{\nu_{j(n)}}(x_n^{(1)}), x_n^{(2)}\bigr).$$

Da ciò discende facilmente che $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} k_X\bigl(F^{\nu_{j(n)}}(x_1), x_1\bigr) = +\infty$, in contraddizione con l'ipotesi del Caso 2.

Abbiamo dunque che, per ogni $x_1, x_2 \in K$, è ben definita la funzione data da $G(x_1, x_2) = \lim\limits_{\delta\longrightarrow 0^+} G_\delta(x_1, x_2)$. Definiamo inoltre $\varepsilon = \liminf\limits_{z\longrightarrow\eta} \inf\limits_{y\in K} k_X(z, y)$. Mettendo assieme il Teorema 1.2.7 e la Proposizione 2.2.2, otteniamo che k_X è boundata dal basso da una costante per la distanza euclidea; quindi $\varepsilon > 0$. Scegliamo ora due punti $q_1, q_2 \in K$ tali che $G(q_1, q_2) < \inf\limits_{x_1, x_2\in K} G(x_1, x_2) + \varepsilon$. Inoltre, dalla definizione di G_δ abbiamo che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\|F^m(q_1) - \xi\| < 1/j$ e $G_{1/j}(q_1, q_2) \leq k_X\bigl(F^m(q_1), q_2\bigr) \leq G_{1/j}(q_1, q_2) + 1/j$. Possiamo dunque trovare una funzione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|F^{\nu(j)}(q_1) - \xi\| < 1/j \quad \text{e} \quad G_{1/j}(q_1, q_2) \leq k_X\bigl(F^{\nu(j)}(q_1), q_2\bigr) \leq G_{1/j}(q_1, q_2) + 1/j.$$

Poiché $\{F^{\nu(j)}(q_1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a ξ, per il teorema di Montel e il Teorema 2.2.8 esiste una funzione strettamente crescente $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che la successione $\{F^{(\nu\circ\tau)(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a ξ. Da come è stata scelta ν, abbiamo anche che $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\bigl(F^{(\nu\circ\tau)(j)}(q_1), q_2\bigr) = G(q_1, q_2)$. A meno di rinominare le funzioni, possiamo supporre che sia ν a soddisfare le stesse condizioni di $\nu \circ \tau$.

Fissiamo adesso una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a η. Applicando il teorema di Montel e il Teorema 2.2.8 come fatto per il Caso 1, per ogni $j \in \mathbb{N}$ fissato troviamo che la successione $\{F^{\nu(h)+\mu(j)}\}_{h\in\mathbb{N}}$ converge a ξ uniformemente sui compatti di X. Ciò implica che esiste una funzione strettamente crescente $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che la successione $\{F^{(\nu\circ\tau)(j)+\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a ξ uniformemente sui compatti di X. Ricordando le proprietà di ν, e di nuovo a meno di rinominare le funzione, possiamo dunque dire di avere due funzioni strettamente crescenti $\nu, \mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tali che

(1) le successioni $\{F^{\nu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergono, uniformemente sui compatti di X, a ξ e η rispettivamente;
(2) la successione $\{F^{\nu(j)+\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a ξ uniformemente sui compatti di X;
(3) si ha $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(q_1), q_2\big) = G(q_1, q_2)$.

Per il Teorema 2.2.5, abbiamo che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste una $(1, 1/j)$-simil-geodetica $\sigma_j : [0, T_j] \longrightarrow X$ con $\sigma_j(0) = F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1)$ e $\sigma_j(T_j) = F^{\mu(j)}(q_2)$. Dato che $\{F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{\mu(j)}(q_2)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergono, rispettivamente, a ξ e η, per j abbastanza grande si ha che $\sigma_j(0) \in V_\xi$ e $\sigma_j(T_j) \in V_\eta$, e σ_j è una $(1, \kappa_0)$-simil-geodetica. Dunque $\operatorname{Im}\sigma_j \cap K \neq \varnothing$ per j abbastanza grande. Per ogni tale j scegliamo un punto $x_j^* \in \operatorname{Im}\sigma_j \cap K$. Per compattezza di K, a meno di passare a una sottosuccessione possiamo supporre che $x_j^* \longrightarrow x^* \in K$ per $j \longrightarrow +\infty$. Per il Lemma 2.2.6 troviamo che

$$k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)\big) \geq k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x_j^*\big) + k_X\big(x_j^*, F^{\mu(j)}(q_2)\big) - 3/i.$$

Adesso, si ha che

$$\begin{aligned}\liminf_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x_j^*\big) &\geq \liminf_{j\longrightarrow+\infty} \Big(k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x^*\big) - k_X(x^*, x_j^*)\Big)\\ &= \liminf_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), x^*\big) \geq G(q_1, x^*);\end{aligned}$$

inoltre, per definizione di ε abbiamo che

$$\liminf_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(x_j^*, F^{\mu(j)}(q_2)\big) \geq \varepsilon.$$

Mettendo assieme queste tre disuguaglianze, troviamo che

$$\liminf_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)\big) \geq G(q_1, x^*) + \varepsilon.$$

D'altra parte, abbiamo che

$$\limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)\big) \leq \limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(q_1), q_2\big) = G(q_1, q_2).$$

Segue che $G(q_1, q_2) \geq G(q_1, x^*) + \varepsilon$, in contraddizione con la scelta di q_1 e q_2.

Poiché sia il Caso 1 che il Caso 2 portano ad un assurdo, ne consegue che la supposizione che Γ contenga almeno due punti dev'essere sbagliata, da cui la tesi. $\square$

Corollario 2.3.2. *Il Teorema 1.2.18: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso e $f \in \operatorname{Hol}(\Omega, \Omega)$. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite di f sono relativamente compatte in Ω;*
- *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che i domini limitati e strettamente pseudoconvessi di $\mathbb{C}^n$ soddisfano la condizione di visibilità rispetto alle simil-geodetiche. Abbiamo anche visto che sono completi rispetto alla distanza di Kobayashi, dunque per la Proposizione 1.2.13 sono taut. Si conclude applicando il Teorema 2.3.1. $\square$

3 Esempi di domini con visibilità

Dopo aver dimostrato il Teorema 2.3.1, viene naturale chiedersi: esistono sottovarietà limitate di $\mathbb{C}^d$ e taut che soddisfano la condizione di visibilità rispetto alle simil-geodetiche (non banali, come ad esempio i domini strettamente pseudoconvessi, che sono molto regolari)?

In questa sezione andremo a vedere tre classi di domini limitati in $\mathbb{C}^n$ che soddisfano la condizione di visibilità; sono state introdotte, nell'ordine, in [BZ1], [BM] e [CMS]. Costruiremo anche un paio di esempi di domini che appartengono ad alcune di queste classi. Inoltre, i domini della classe introdotta in [BM] sono anche taut, perciò per essi vale automaticamente il Teorema 2.3.1.

Capire come dire che non sono Gromov, aggiungere all'intro della sezione

3.1 Domini Goldilocks

Il primo esempio di una classe di domini di $\mathbb{C}^n$ con visibilità è quello, introdotto in [BZ1], dei domini Goldilocks. Prima di darne la definizione, introduciamo per un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $r > 0$ la quantità

$$M_\Omega(r) := \sup\left\{\frac{1}{K_\Omega(x; v)} \mid \delta_\Omega(x) \leq r, \|v\| = 1\right\}.$$

La funzione $M_\Omega(r)$ è monotona crescente, dunque misurabile secondo Lebesgue; inoltre, segue dal punto (1) della Proposizione 2.2.2 che è anche limitata. Perciò ha senso la definizione che stiamo per dare.

Definizione 3.1.1. Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è detto *dominio Goldilocks* se

(1) esiste (e quindi per ogni) $\varepsilon > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{1}{r} M_\Omega(r)\,\mathrm{d}r < +\infty$;

(2) per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono due costanti $C, \alpha > 0$ (che dipendono da x_0) tali che $k_\Omega(x_0, x) \leq C + \alpha \log \dfrac{1}{\delta_\Omega(x)}$ per ogni $x \in \Omega$.

Osservazione 3.1.2. Il nome particolare, domini Goldilocks, è dovuto al fatto che per tali domini il bordo non ha cuspidi rivolte verso l'esterno né punti in cui il bordo stesso è piatto fino a ordine infinito; il primo caso è escluso dalla condizione (2) nella definizione. La condizione (1) implica che il dominio è pseudoconvesso ([BZ1, Section 2, Paragraph 2.4]).

Adesso mostriamo che i domini Goldilocks soddisfano la condizione di visibilità rispetto alle simil-geodetiche.

Teorema 3.1.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato Goldilocks, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Se $\xi, \eta \in \partial\Omega$ e V_ξ, V_η sono intorni di ξ, η in $\mathbb{C}^n$ tali che $\overline{V}_\xi \cap \overline{V}_\eta = \varnothing$, allora esiste un compatto $K \subseteq \Omega$ tale che ogni (λ, κ)-simil-geodetica in Ω che collega un punto di V_ξ a un punto di V_η interseca K.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che un tale compatto non esista. Allora possiamo trovare una successione di (λ, κ)-simil-geodetiche $\sigma_n : [a_n, b_n] \longrightarrow \Omega$

tali che $\sigma_n(a_n) \in V_\xi, \sigma_n(b_n) \in V_\eta$ e $0 = \lim_{n\to+\infty} \max\{\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big) \mid t \in [a_n, b_n]\}$. Riparametrizzando, possiamo assumere $\delta_\Omega\big(\sigma_n(0)\big) = \max\{\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big) \mid t \in [a_n, b_n]\}$. Inoltre, a meno di passare a una sottosuccessione possiamo anche supporre che $a_n \longrightarrow a \in [-\infty, 0]$, $b_n \longrightarrow b \in [0, +\infty]$, $\sigma_n(a_n) \longrightarrow \xi'$ e $\sigma_n(b_n) \longrightarrow \eta'$. Sotto le nostre ipotesi, dev'essere $\xi' \in \overline{V}_\xi \cap \partial\Omega$ e $\eta' \in \overline{V}_\eta \cap \partial\Omega$, dunque $\xi' \neq \eta'$ perché $\overline{V}_\xi \cap \overline{V}_\eta = \varnothing$.

Per la Proposizione 2.2.3 esiste una costante $C > 0$ tale che ogni σ_n è C-lipschitziana rispetto alla distanza euclidea. Dunque, applicando il teorema di Ascoli-Arzelà e procedendo con un argomento diagonale, a meno di passare a un'ulteriore sottosuccessione possiamo supporre che $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di (a, b), a una curva $\sigma : (a, b) \longrightarrow \partial\Omega$. Notiamo che dev'essere $a \neq b$, perché ogni σ_n è C-lipschitziana e dunque, passando al limite, si ha $0 < \|\xi' - \eta'\| \leq C|b - a|$.

Adesso vogliamo mostrare che $\|\sigma_n'(t)\| \leq \lambda M_\Omega\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big)\Big)$ per quasi ogni $t \in [a_n, b_n]$. Se $\sigma'(t) = 0$ è immediato, altrimenti dalla definzie di (λ, κ)-simil-geodetica e di M_Ω si ha

$$\|\sigma_n'(t)\| \leq \frac{\lambda}{K_\Omega\left(\sigma_n(t); \frac{1}{\|\sigma_n'(t)\|}\sigma_n'(t)\right)} \leq \lambda M_\Omega\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big)\Big).$$

Mostriamo che σ è costante. Dato che $\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big) \leq \delta_\Omega\big(\sigma_n(0)\big)$, abbiamo che $M_\Omega\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big)\Big) \leq M_\Omega\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_n(0)\big)\Big)$, dunque $M_\Omega\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big)\Big)$ tende a 0 uniformemente in t. Ma allora, dati $a < u < w < b$, troviamo che

$$\begin{aligned}\|\sigma(u) - \sigma(w)\| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\sigma_n(u) - \sigma_n(w)\| \\ &\leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_u^w \|\sigma_n'(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_u^w M_\Omega\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t = 0,\end{aligned}$$

dunque σ è costante.

Vogliamo ottenere una contraddizione mostrando anche che σ non è costante. Fissiamo $x_0 \in \Omega$; per la condizione (2) nella definizione di dominio Goldilocks, esistono due costanti $C, \alpha > 0$ tali che $k_\Omega(x, x_0) \leq C + \alpha \log \dfrac{1}{\delta_\Omega(x)}$ per ogni $x \in \Omega$. Segue, usando anche la definizione di (λ, κ)-simil-geodetica, che

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|t| - \kappa \leq k_\Omega\big(\sigma_n(0), \sigma_n(t)\big) &\leq k_\Omega\big(\sigma_n(0), x_0\big) + k_\Omega\big(x_0, \sigma_n(t)\big) \\ &\leq 2C + \alpha \log \frac{1}{\delta_\Omega\big(\sigma_n(0)\big)\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big)}.\end{aligned}$$

Quindi $\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big) \leq \sqrt{\delta_\Omega\big(\sigma_n(0)\big)\delta_\Omega\big(\sigma_n(t)\big)} \leq Ae^{-B|t|}$, con $A = e^{(2C+\kappa)/(2\alpha)}$ e $B = 1/(2\alpha\lambda)$. Allora, per la stima trovata sopra su $\|\sigma_n'(t)\|$, si ha anche che $\|\sigma_n'(t)\| \leq \lambda M_\Omega(Ae^{-B|t|})$.

Osserviamo adesso il seguente fatto: se, data $f : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ limitata e misurabile secondo Lebesgue, esiste (e dunque per ogni) $\varepsilon > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{r} f(r)\,\mathrm{d}r < +\infty$, allora, scrivendo $r = Ae^{-Bt}$ e usando cambio di variabile, abbiamo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(Ae^{-Bt})\,\mathrm{d}t < +\infty$ per ogni $A, B > 0$. Per la condizione (1) nella definizione di dominio Goldilocks, possiamo applicare questo fatto a M_Ω usando le costanti A e B trovate sopra; ciò ci permette di fissare $a', b' \in (a,b)$ tali che

$$\|\xi' - \eta'\| > \lambda \int_a^{a'} M_\Omega(Ae^{-B|t|})\,\mathrm{d}t + \lambda \int_{b'}^{b} M_\Omega(Ae^{-B|t|})\,\mathrm{d}t.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\|\sigma(b') - \sigma(a')\| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\sigma_n(b') - \sigma_n(a')\| \\
&\geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \big(\|\sigma_n(b_n) - \sigma_n(a_n)\| + \\
&- \|\sigma_n(b_n) - \sigma_n(b')\| - \|\sigma_n(a') - \sigma_n(a_n)\|\big) \\
&\geq \|\xi' - \eta'\| - \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_{b'}^{b_n} \|\sigma_n'(t)\|\,\mathrm{d}t - \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_{a_n}^{a'} \|\sigma_n'(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&\geq \|\xi' - \eta'\| - \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \lambda \int_{b'}^{b_n} M_\Omega(Ae^{-B|t|})\,\mathrm{d}t + \\
&- \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \lambda \int_{a_n}^{a'} M_\Omega(Ae^{-B|t|})\,\mathrm{d}t \\
&= \|\xi' - \eta'\| - \lambda \int_{b'}^{b} M_\Omega(Ae^{-B|t|})\,\mathrm{d}t - \lambda \int_a^{a'} M_\Omega(Ae^{-B|t|})\,\mathrm{d}t > 0,
\end{aligned}$$

dunque σ non è costante, e questo ci dà una contraddizione. □

Riferimenti bibliografici

[A1] M. Abate: **Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds**. Mediterranean Press, Cosenza, 1989 [http://www.dm.unipi.it/~abate/libri/libriric/libriric.html]

[A2] M. Abate: Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, **18** (1991), no. 2, 167–191

[A3] M. Abate: A characterization of hyperbolic manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **117** (1993), no. 3, 789–793

[A4] M. Abate: Dynamics in several complex variables. In Metrical and dynamical aspects in complex analysis, Ed. L. Blanc-Centi, Lecture Notes in Mathematics 2195, Springer, Berlin, 2017, pp. 25–54

[B] T. J. Barth: The Kobayashi distance induces the standard topology. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **35** (1972), 439–441

[BB] Z. M. Balogh, M. Bonk: Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **75** (2000), no. 3, 504–533

[BH] M. R. Bridson, A. Haefliger: **Metric-Spaces of Non-Positive Curvature**. Springer, New York, 1999

[BM] G. Bharali, A. Maitra: A weak notion of visibility, a family of examples, and Wolff-Denjoy theorems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, **22** (2021), no. 1, 195–240

[BNT] F. Bracci, N. Nikolov, P. J. Thomas: Visibility of Kobayashi geodesics in convex domains and related properties. Preprint, arXiv:21011.04159v4 (2021)

[BZ1] G. Bharali, A. Zimmer: Goldilocks domains, a weak notion of visibility, and applications. *Advances in Mathematics*, **310** (2017), 377–425

[CMS] V. S. Chandel, A. Maitra, A. D. Sarkar: Notions of Visibility with respect to the Kobayashi distance: Comparison and Applications. Preprint, arXiv:2111.00549v1 (2021)

[G] I. Graham: Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ with smooth boundary. *Transactions of the American Mathematical Society*, **207** (1975), 219–240

[N] R. Narasimhan: **Several Complex Variables**. University of Chicago Press, Chicago, 1971

[NTT] N. Nikolov, P. J. Thomas, M. Trybuła: Gromov (non)hyperbolicity of certain domains in $\mathbb{C}^2$. Preprint, arXiv:1403.7673v2 (2015)

[Ka] A. Karlsson: Non-expanding maps and Busemann functions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **21** (2001), no. 5, 1447–1457

[Ke] J. L. Kelley: **General Topology**. Springer, New York, 1975

[Kr] S. G. Krantz: **Function Theeory of Several Complex Variables: Second Edition**. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001

[K1] S. Kobayashi: Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **19** (1967), 460–480

[K2] S. Kobayashi: **Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings: An Introduction (Second Edition)**. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2005

[R] H. L. Royden: Remarks on the Kobayashi metric. In Several Complex Variables II, Proceedings of the International Mathematical Conference, Lecture Notes in Mathematics **185**, Springer, Berlin, 1971, pp. 125–137

[V] S. Venturini: Pseudodistances and pseudometrics on real and complex manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta*, **154** (1989), 385–402

[W] H. Wu: Normal families of holomorphic mappings. *Acta Mathematica*, **119** (1967), 193–233

Ringraziamenti

Volendo, si possono aggiungere dei ringraziamenti.