ITESO
Universidad Jesuita
de Guadalajara

Ingeniería en Seguridad Informática y Redes

Ingeniería en Sistemas Computacionales

Algoritmos de Solución Numérica

Problema de Integración relativo a mi profesión

IS727272 - Marco Ricardo Cordero Hernández

SI727576 - Edgar Guzmán Claustro

Jal., 17 de octubre de 2023

Índice

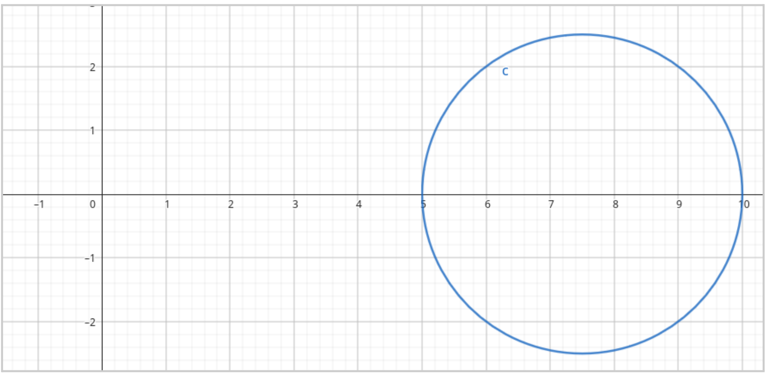
Contexto

Después de haber comprendido y manipulado el manejo de derivadas pertenecientes al dominio del cálculo diferencial a través de la herramienta por defecto del curso, *Matlab* (The MathWorks Inc., 2023), similar a la trayectoria común del estudio del cálculo, es momento de dar el paso al análisis superficial de integrales perteneciente al cálculo homónimo. Para este propósito, se propone el desarrollo y resolución de un posible problema encontrado dentro de dos áreas en común de la ingeniería, o, en su defecto, su aplicación.

Si hasta este momento del documento actual se ha hecho revisión detallada de *todo* su contenido, se podrá recordar que los autores del mismo desarrollan sus estudios en dos ingenierías: seguridad informática y redes; y sistemas computacionales. Ambas ramas de las ciencias computacionales aplicadas requieren de mucha investigación y lectura exhaustiva en contenidos que en su mayoría han pasado a ser digitales, da la casualidad de que un gran ejemplo de lo mencionado es este trabajo, ya que para navegar a través de sus contenidos sería necesario un equipo capaz de mostrarlos, popularmente una computadora tradicional o un dispositivo móvil. Si se opta por la primera opción, existen también al menos dos métodos para desplazarse a través de las páginas virtuales: desplazamiento con teclado a través de cursores y *desplazamiento a través de la rueda del mouse*. Aquellos usuarios que cuenten con una interfaz gráfica para sus labores cotidianas usualmente elegirán la segunda opción, y aunque parezca mundano, hay toda una línea de ingeniería aplicada para hacer posible esta función que la mayoría da por hecha. Aún así, el aspecto físico no se exime de este tópico, ya que el diseño de la propia rueda del ratón debe realizarse.

Con lo último mencionado, y asegurando la relevancia del ejercicio a realizar, a continuación se mostrará un posible proceso de diseño auxiliado a través de dos potentes herramientas, siendo estas la aplicación del cálculo integral y la manipulación de la ya mencionada herramienta Matlab. Para esto, primero se propone la siguiente circunferencia junto con su gráfica:

$$(x - 7.5)^2 + y^2 = 6.25$$



Los valores presentes han sido seleccionados deliberadamente para atender a la ecuación de la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, de forma que con un radio de 2.5 unidades se obtendría un diámetro de 5 unidades. El desplazamiento a la derecha en x también es intencional, ya que lo que se desea obtener es un *sólido de revolución*, es decir, un objeto tridimensional con un volumen determinado de unidades arbitrarias; por ende, al rotar la circunferencia presentada al rededor del eje y (x = 0), se obtendría un sólido similar a un *toroide*.

Una vez que se ha comprendido el trasfondo de paso actual, lo siguiente que debe realizarse es una transformación de la ecuación presente, ya que en su estado original, el subsecuente proceso de integración sería considerablemente más complejo. Para eliminar esta problemática intermedia, se hará un despeje de x de forma que se obtenga una función.

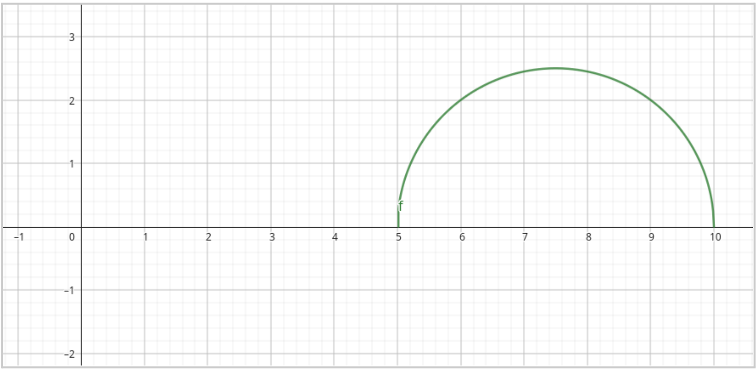
$$(x - 7.5)^2 + y^2 = 6.25 \rightarrow y^2 = 6.25 - (x - 7.5)^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{6.25 - (x - 7.5)^2}$$

$$\therefore f(x) = \pm\sqrt{6.25 - (x - 7.5)^2}$$

Una vez que se obtenido la función despejada, se tomará la parte superior de la circunferencia, lo cual presenta la ecuación y gráfica siguientes:

$$f(x) = \sqrt{6.25 - (x - 7.5)^2}$$

$$f(5) = 0,\ f(10) = 0$$



Con los recursos presentes, el siguiente paso es obtener el volumen del sólido de revolución previamente mencionado. Para esto, la técnica conocida como *método de los cascarones cilíndricos* (Stewart, 2012) será empleada, la cual define:

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

La evaluación de esta integral dará una parte del volumen, en concreto, el de la parte inferior, por lo que el resultado tendrá que ser duplicado.

Para obtener un valor numérico, se utilizarán las funciones *integral* e *int* para demostrar múltiples caminos para obtener un mismo resultado dentro de Matlab. Esto puede corroborarse en la siguiente sección del documento.

Resultados

Código

```
% Restablecer entorno
clear, clc

% Función a utilizar
syms x;                            % Variable simbólica
f = sqrt(6.25 - (x - 7.5)^2);      % Función de segundo grado
r = 5;                             % Raíz izquierda de la función
A1 = @(f) 2 * pi * x * f;          % Auxiliar para revolución
A2 = @(x) 2 * pi .* x .* sqrt(6.25 - (x - 7.5).^2); % Auxiliar demostrativo

fprintf('Función a integrar: %s\n\tdesde a ≈ %f hasta b ≈ %f\n\n', ...
   A1(f), r, r*2);

% Integral
vol1 = int(A1(f), x, r, r*2);      % Evaluación de la integral
vol2 = integral(A2, r, r*2);       % Evaluación de la integral
fprintf('Primer método\nResultado ≈ %fu³\nVolumen total ≈ %fu³\n\n', ...
   vol1, vol1*2);                  % Mostrar resultado
fprintf('Segundo método\nResultado ≈ %fu³\nVolumen total ≈ %fu³\n', ...
   vol2, vol2*2);                  % Mostrar resultado

% Gráfica del sólido
figure('name', strcat('Visualización de ', string(A1(f))), ...
   'NumberTitle','off');           % Título de ventana

% Ajustes para gráfica aproximada (toroide)
u = linspace(0, 2*pi - eps);       % Conjunto de puntos
v = linspace(0, 2*pi - eps);       % Auxiliar para malla

[u,v] = meshgrid(u,v);             % Generar malla del sólido
X = (2*r + r*cos(v)).*cos(u) ;     % Dimensiones para x
Y = (2*r + r*cos(v)).*sin(u) ;     % Dimensiones para y
Z  = r/2*sin(v);                   % Dimensiones para z
surf(X, Y, Z);                     % Generar sólido

title('Sólido resultante');        % Título de la gráfica
shading flat; colormap sky;        % Cambiar aspecto de la gráfica
axis equal;                        % Mostrar sólido simétricamente
xlabel x; ylabel y; zlabel z;      % Mostrar etiquetas de los ejes
```

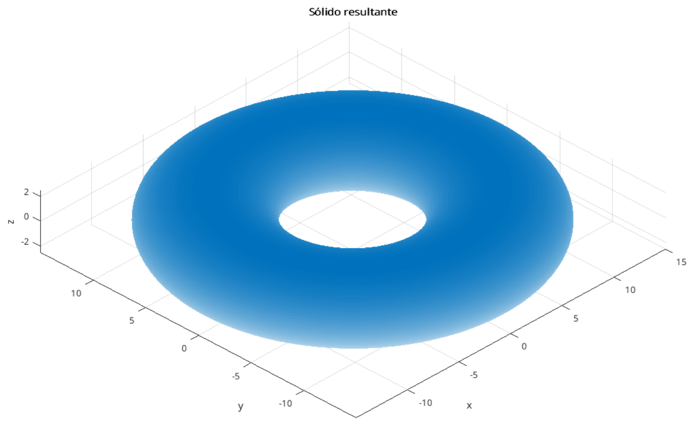
Resultados

Command Window

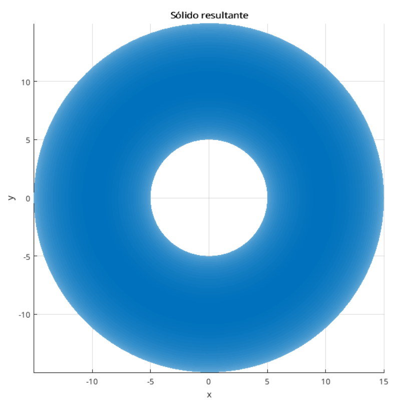
```
Función a integrar: 2*x*pi*(25/4 - (x - 15/2)^2)^(1/2)
        desde a ≈ 5.000000 hasta b ≈ 10.000000

Primer método
Resultado ≈ 462.637706u³
Volumen total ≈ 925.275413u³

Segundo método
Resultado ≈ 462.637706u³
Volumen total ≈ 925.275413u³
```

Gráfica

Vista isométrica



Vista cenital



Comprobación de sección transversal

Nota: El sólido mostrado tiene un radio exterior de 10 unidades para mejor visualización.

Conclusiones

Guzmán Claustro, Edgar

El desafío más significativo dentro de este entregable fue pensar en algún problema que tuviera relevancia dentro de los dos ámbitos de estudio (Ing. en Sistemas Computacionales con Ing. en Seguridad Informática y Redes). El ejemplo de esta aplicación presentada se vuelve bastante desarrollado cuando lo vemos desde esta perspectiva, sin embargo para un usuario común y corriente puede convertirse en algo sin relevancia.

Considero que este ejercicio revivió esos conocimientos de integración adquiridos durante los primeros semestres de mi desarrollo académico y profesional, aquellos conocimientos que aprendí y nunca volví a usar hasta el día de hoy. Aunque no se realizó el cálculo de forma "manual", las bases del desarrollo vuelven a la vida al plantear un problema de dicha índole.

Finalizando y como ya antes había mencionado, el desarrollo de este problema (a mi consideración) fue bastante extenso y hasta complejo, dejando ver todo el potencial que tiene el lenguaje y las capacidades con las que cuenta para el desarrollo y resolución de problemas de integración.

Cordero Hernández, Marco R.

Sin duda alguna, la parte más complicada de este ejercicio fue encontrar un problema con el cual asimilar ambas carreras y vincularlo con el cálculo integral. Tal vez parezca burdo o innecesario el planteamiento presentado en el desarrollo anterior, sin embargo, y como ya se mencionaba en el contexto inicial, es una parte muy relevante que juega un papel vital en millones de personas, día con día.

En muchas ocasiones aprendemos conceptos y usamos herramientas con el simple fin de satisfacer un requerimiento institucional para obtener calificaciones vacías que no reflejan nada, pero, cuando los conceptos se traducen a la práctica y posteriormente a producciones reales, la teoría base de un desarrollo resulta verdaderamente necesaria. Lamentablemente, muchas áreas del estudio se quedan exactamente ahí, en el simple estudio de fórmulas vanas e incomprensibles, y por parte personal del estudiante, no se explora más allá del examen o la tarea, sino que se deja de lado el campo de las ciencias aplicadas. La otra parte del caso es lo complejo y monótono con la que la enseñanza dota a las aplicaciones de (en este caso) las matemáticas, porque en un momento en donde se revisa y se aprende acerca de integrales simples, al otro ya se está obteniendo el volumen de un mundano sólido que no tiene mayor significado, pero, si el proceso del aprendizaje se hiciera más interesante y a ese sólido se le viera como los neumáticos de un automóvil de siguiente generación o algo tan sencillo como la rueda del mouse, el panorama educativo podría cambiar drásticamente.

Finalmente, volviendo a la realización per se de este ejercicio, aunque fue complejo, resultó interesante y enriquecedor el planteamiento del problema y su muy facilitada resolución a través de Matlab. Sin lugar a duda, el nuevo conocimiento adquirido será de mucha utilidad en el resto del curso y los siguientes métodos numéricos a analizar.

Bibliografía

The MathWorks Inc. (2023). MATLAB version: 9.14.0 (R2023a), Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. https://www.mathworks.com.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7a. ed. --.). México D.F.: Cengage Learning.