Contents

Appunti di Algebra e Geometria

Marco Zanchin

September 2022

1 Insiemi

Un insieme è una **collezione di oggetti**. Esso può essere descritto tramite due notazioni.

- modalità **estensionale**, ovvero descrivere l'insieme per esteso.
- modalità **intensionale**, ovvero descrivere l'insieme tramite proprietà.

Proprietà

- Non conta l'ordine degli elementi
- Non contano le ripetizioni degli elementi

Rule 1.1 – Insieme vuoto

L'insieme senza elementi si dice **insieme vuoto**, esso viene utilizzato in casi di proprietà non soddisfatte (l'insieme degli numeri dispari multipli di 2). Si denota con Ø

Rule 1.2 – Singleton

Un insieme **con un solo elemento** si chiama singleton, o singoletto.

1.1 La notazione estensionale

si elencano gli elementi (*che devono essere finiti*)

$$\text{A} = \{1, 2, 4, 6, 12, 8 \dots\}$$

1.2 La notazione intensionale

descrive l'insieme tramite proprietà che accomuna gli elementi presenti in esso.

$$\text{P} = \{0, 2, 4, 6, 8 \dots\} \text{ Notazione poco precisa}$$

$$\text{P} = \{x \in B \mid Q(x)\}$$

1.3 L'inclusione

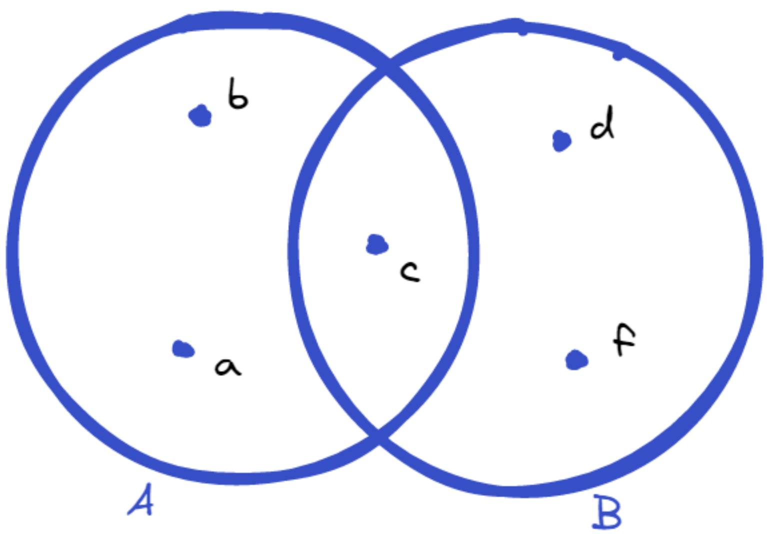
L'insieme X è incluso in y $X \subseteq Y$ Se ogni elemento di x appartiene a y.

$$\forall x \in X, X \in Y$$

1.4 I diagrammi di Venn

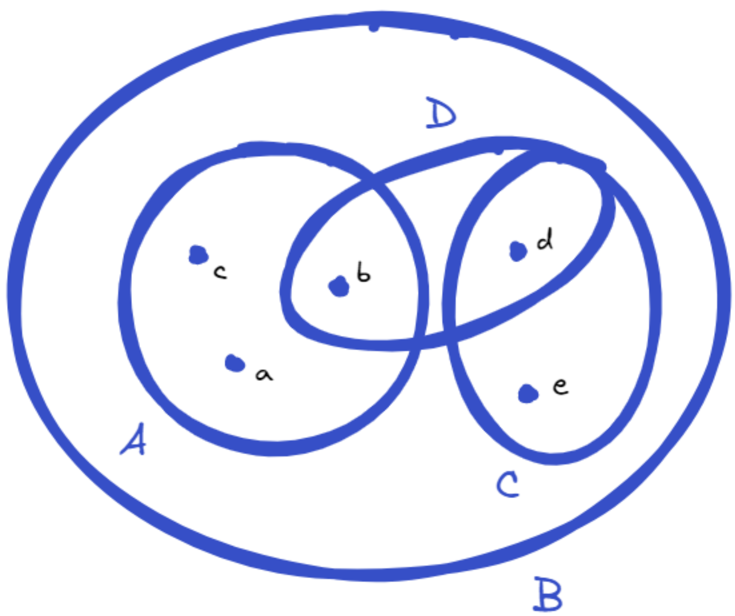
Un diagramma di Venn è un diagramma che mostra tutte le possibili relazioni logiche tra una collezione finita di insiemi differenti.

- A = $\{a, b, c\}$
- B = $\{c, d, f\}$



$A \not\subseteq B$, $B \not\subseteq A$

- A = $\{a, b, c\}$
- B = $\{a, b, c, d, e\}$
- C = $\{d, e\}$
- D = $\{b, d\}$



- $A \subseteq B$
- $C \subseteq B$
- $D \subseteq B$
- $A \nsubseteq B$
- $D \nsubseteq A$
- $D \nsubseteq C$

Rule 1.3 – Insiemi uguali

Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$ allora $Y = X$

Proprietà

- $X \subseteq X$ Ogni insieme è sottoinsieme di sè stesso
- $\emptyset \subseteq X$ per ogni x. $\emptyset$ è un sottoinsieme di ogni insieme.

1.5 Insiemi numerici

- **Numeri naturali:** $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

- Numeri interi: $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

- Numeri razionali: $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{n}{m} \mid n, m, \in \mathbb{Z}\}$$

- Numeri reali: $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{ \begin{array}{c}\text{Numeri con parte decimale infinita e non periodica} \\ (\pi, \sqrt{2}) \dots \end{array} \}$$

1.6 I sottoinsiemi

Rule 1.4 – cardinalità

La cardinalità di un insieme è il numero di elementi presenti in esso, si indica con $|insieme|$
$|\emptyset| = 0$

$$\text{A} = \{a, b\},\ |A| = 2$$

Scrivo tutti i **sottoinsiemi** di a:

- $\{a\} \subseteq \{a, b\}$
- $\{b\} \subseteq \{a, b\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$
- $\{\emptyset\} \subseteq \{a, b\}$

A ha **4** sottoinsiemi.

$$\text{B} = \{a, b, c\},\ |B| = 3$$

B ha **8** sottoinsiemi.

Rule 1.1 – Regola

Se $|X| = n$ allora X possiederà 2^n sottoinsiemi

Rule 1.5 – Insieme delle parti

Si indica con $P(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X, Chiamato **insieme delle parti**. Esso avrà un numero pari a 2 elevato al numero di elementi nell'insieme di partenza.

Esempio:

A $= \{a, b\}$

$$P(A) = \{\ \emptyset, \{\text{a}\}, \{\text{b}\}, \{\text{a,b}\}\}$$

$$|A| = 2\ |P(A)| = 2^2 = 4$$

$P(A)$ è un **sottoinsieme**. Quanti **sottoinsiemi** ha?

$$|P(A)| = 4 \text{ quindi } |P(P(A))| = 2^4$$

Elenco i sottoinsiemi di $P(A)$, ovvero $P(P(A))$

- $\emptyset \subseteq \{a, b\}$
- $\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \subseteq \{a, b\}$
- $\{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}\{\{b\}, \{a\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\}, \subseteq \{a, b\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \{\{b\}, \{a\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}, \{a, b\}\} \subseteq \{a, b\}$
- $\{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Esercizi December 2, 2022–

Scrivere l'insieme dei sottoinsiemi di

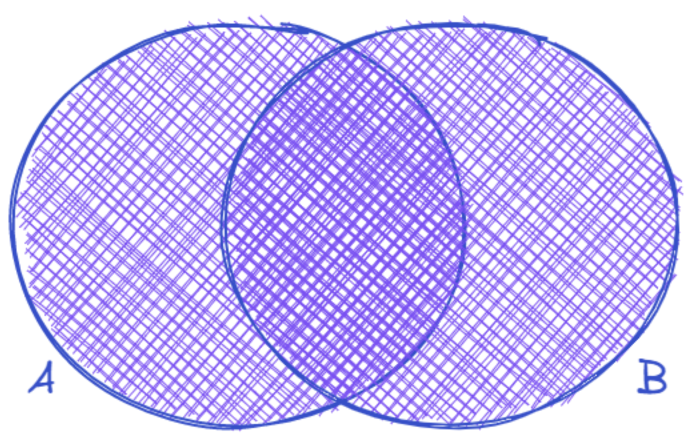
- A1 $= \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$
- A2 $= \{\{1\}, 2\}$
- A3 $= \{a, 1, \{a, 1\}\}$
- A4 $= \{a, b, c, d, e\}$

1.7 Unione e intersezione

Unione

Rule 1.2 – Unione

Dati due insiemi A e B, l' insieme unione di A e B 'e l'insieme degli elementi che appartengono ad A oppure a B.
$A \cup B = \{X \mid X \in A \ OR \ X \in B\}$



Esempio:

$$\text{A} = \{1, a, Alice\} \ \text{B} = \{1, \{1\}, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, a, Alice, \{1\}, 3\}$$

Rappresentazione tramite tabella:

	$X \in A$	$X \notin A$
$X \in B$	$X \in A \cup B$	$X \in A \cup B$
$X \notin B$	$X \in A \cup B$	$X \notin A \cup B$

L'unica situazione in cui x non appartiene all'unione è quando **x non appartiene ne ad A ne a B**.

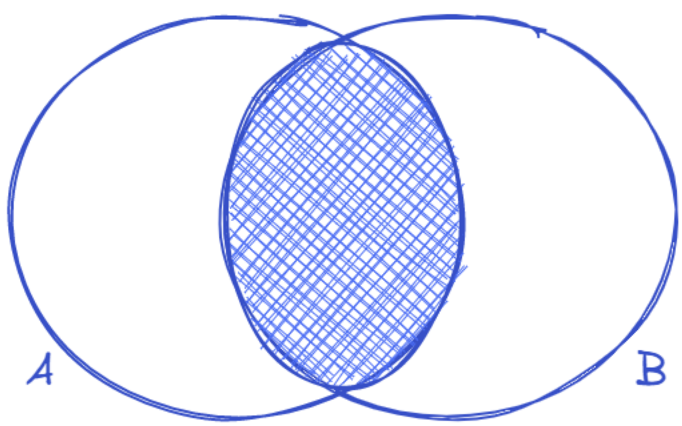
Rule 1.6 – Principio di inclusione-esclusione

$A \cup B = \mid A \mid \; + \mid B \mid - (A \cup B)$

Intersezione

Rule 1.3 – Intersezione

Dati due insiemi A e B, l' insieme intersezione di A e B 'e l'insieme degli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B.
$A \cap B = \{X \mid X \in A \; AND \; X \in B\}$



Esempio:

$$\text{A} = \{1, a, Alice\} \ \text{B} = \{1, \{1\}, 3\}$$

$$A \cup B = \{1\}$$

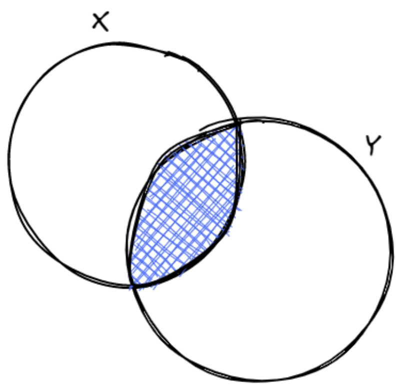
Rappresentazione tramite tabella:

	$X \in A$	$X \notin A$
$X \in B$	$X \in A \cap B$	$X \notin A \cap B$
$X \notin B$	$X \notin A \cap B$	$X \notin A \cap B$

L'unica situazione in cui x appartiene all'intersezione è quando **x non appartiene sia ad A che a B**.

Proprietà degli operatori logici

- $X \cup \emptyset = X$
- $X \cap \emptyset = \emptyset$
- $X \cup (X \cap Y) = X$



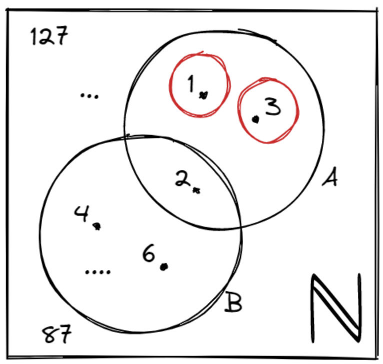
- Proprietà commutativa:
  - $X \cup Y = Y \cup X$
  - $X \cap Y = Y \cap Z$

1.8 Inclusione e implicazione

A = $\{1,2,3\}$ B = $\{n \in \mathbb{N} \mid$ n è pari $\}$
Implicazione:

A $\subseteq B$?

$A \subseteq B$	$n \in A$	$n \notin A$
$n \in B$	ok	ok
$n \notin B$	contro esempio	ok



Un inseme A non è incluso in un altro insieme B $a \not\subseteq B$ se esiste almeno un **controesempio**. Cioè $x \in A$ ma $x \notin B$

$$A \subseteq B \ \forall x \ x \in A \rightarrow x \in B$$

$$A \not\subseteq B \ \exists x \ x \in A \rightarrow x \notin B$$

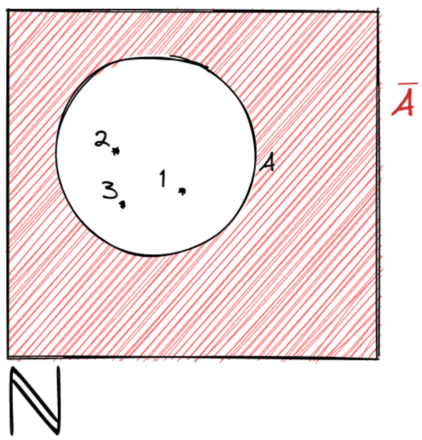
Nella seconda formula abbiamo la ricetta del controesempio $\exists x$. Basta un solo elemento per negare l'implicazione.

Una frase universale **negata** diventa esistenziale.
Tutti gli alberi perdono le foglie: basta trovare **un** albero che non perda le foglie per avere un controesempio.

1.9 La negazione: NOT o Complemento

- Complemento assoluto:
  Si riferisce ad un **insieme universo**. (Quando parlo di numeri, l'insieme di tutti i numeri)
  A = $\{1, 2, 3\}$, $A \subseteq \mathbb{N}$

  $$\overline{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$$

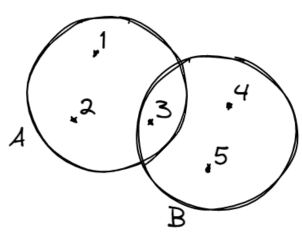
  Il **complemento assoluto di A** sono **tutti i numeri** non presenti in esso

- Complemento relativo:
  Si riferisce a due insiemi

  $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$
  Tutti i numeri che appartengono ad A tali che NON appartengono a B

  $A - B = A - (A \cap B)$
  Proprietà

  - A - Ø= A
  - A-B $\neq$ B-A

  A-B = $\{1, 2\}$
  B-A = $\{4, 5\}$

– ∅- A = ∅

$$\boxed{(A \cup B) - (A \cap B) = (A - (A \cap B) \cup (B - (A \cap B))}$$

1.10 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano di A × B è l'insieme di tutte le coppie (x, y) dove x è un elemento di A e y è un elemento di B.

$$A \times Y = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$$

• **Esempio:** prodotto cartesiano di due insiemi

1. X = $\{a, b, c\}$
2. Y= $\{1, 2\}$

$$\text{X} \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Rule 1.7 – Coppia

L'insieme {a, {a, b}} è chiamato coppia e viene di solito denotato con (a, b). Quindi **la coppia (a, b) è diversa dalla coppia (b, a)**, dato che l'insieme {a, {a, b}} è diverso dall'insieme {b, {a, b}}.

Una coppia (a, b) è quindi una sequenza di due elementi che sono la prima componente a e la seconda componente b, e non useremo la definizione come insieme.

Secondo il **principio della moltiplicazione** Se A è un insieme di x oggetti e B un insieme di y oggetti, allora l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ contiene $x \times y$ elementi.
• **Esempio:** principio della moltiplicazione

1. X = $\{a, b, c\}$
2. Y= $\{1\}$

$$\text{X} \times Y = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$$

Infatti $\mid X \times Y \mid = \mid X \mid \times \mid Y \mid = 3 \times 1 = 3$

1.11 Gli insiemi e la logica matematica

Per approfondire questo paragrafo è importante capire la nozione di ***notazione intensionale*** *(pagina 2)*
Scriviamo:

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

Per indicare tutti gli elementi x di X che **soddisfano la proprietà P**. Ad esempio, se P è la proprietà di essere multiplo di 3, allora scriviamo $\{x \in N \mid P(x)\}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali che sono multipli di 3.

$P(x)$ è una frase che deve essere necessariamente **vera o falsa**, deve avere quindi un valore di verità oggettivo. è chiamata **proposizione o asserzione**.
se P è la propietà di essere un numero naturale multiplo di 4, allora P(1) (1 è un numero naturale multiplo di 4) è una proposizione falsa e P(8) (8 è un numero naturale multiplo di 4) è una proposizione vera.

1.11.1 Connettivi logici

Con le proposizioni si possono eseguire delle operazioni, utilizzando i cosiddetti **connettivi logici** tra cui:

- La negazione $\neg$ (NOT)
- La congiunzione $\wedge$(AND)
- La disgiunzione $\vee$ (OR)

Se P e Q sono proprietà, allora $\neg$ P(x), P(x) $\wedge$ Q(x) e P(x) $\vee$ Q(x) sono nuove proposizioni i cui valori di verità dipendono da quelli di P(x) e Q(x) e sono descritti attraverso tabelle chiamate tavole di verità.

- **Negazione di una proposizione**
  Sia P una proprietà, allora la negazione di $P(x)$, che si indica con $\neg P(x)$ e si legge "not $P(x)$"

$P(X)$	$\neg P(X)$
V	F
F	V

Se $A = \{x \in X \mid P(x)\}$

allora $\overline{A} = \{x \in X \mid \neg P(x)\}$

- **Congiunzione di due proposizioni**
  Date le proprietà P e Q, la congiunzione di$P(X)$ e $Q(x)$, che si indica con $P(x) \wedge Q(x)$ e si legge **"P(x) AND Q(x)"**, è la proposizione che è vera se $P(x)$ e $Q(x)$ sono contemporaneamente vere ed è falsa in ogni altro caso.

$P(X)$	$Q(X)$	$P(x) \wedge Q(x)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Se

  - $A = \{x \in X \mid P(x)\}$
  - $B = \{x \in X \mid Q(x)\}$

allora $A \cap B = \{x \in X \mid P(x) \wedge Q(x)\}$

- **Disgiunzione di due proposizioni**
  Date le proprietà P e Q, la congiunzione di$P(X)$ e $Q(x)$, che si indica con $P(x) \vee Q(x)$ e si legge **"P(x) OR Q(x)"**, è la proposizione che'e vera se almeno una delle due proposizioni 'e vera ed 'e falsa se entrambe le proposizioni sono false.

$P(X)$	$Q(X)$	$P(x) \vee Q(x)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se

- $A = \{x \in X \mid P(x)\}$
- $B = \{x \in X \mid Q(x)\}$

allora $A \cup B = \{x \in X \mid P(x) \vee Q(x)\}$

- **Implicazione**
  Date le proprietà P e Q, l'implicazione di$P(X)$ e $Q(x)$, che si indica con $P(x) \to Q(x)$ e si legge **"se P(x) allora Q(x)"**, è la proposizione che è falsa se $P(x)$ è vera e $Q(x)$ falsa ed è vera in tutti gli altri casi.

Rule 1.8 – Implicazione

L'implicazione è un legame tra proposizioni che mette in relazione i valori di verità di due proposizioni matematiche.

$P(X)$	$Q(X)$	$P(x) \to Q(x)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

- p: piove
- q: la strada è bagnata
- $p \to q$: se piove la strada è bagnata.

Con un espressione del genere $p \rightarrow q$ si orriene un nesso causa-effetto tra p e q, cioè se si verifica la causa p *(piove)* allora segue l'effetto q *(la strada è bagnata)*

Quando si verifica la prima causa **p** deve **necessariamente** verificarsi l'effetto **q** quindi se la prima proposizione è vera ma la seconda è falsa allora l'implicazione è falsa.

Infine nel caso in cui la causa **p** sia falsa, nulla può dire sull'effetto **q**. Nel nostro esempio la strada può essere bagnata anche dopo una notte di umidità, quindi **anche se non piove**. quindi in corrispondenza della falsità di **p**, l'implicazione **è comunque vera**.

- **Contronominale**
A partire dalla tavola di verit'a dell'implicazione, ci possiamo accorgere che **dire che P implica Q equivale a dire che la negazione di Q implica la negazione di P**
Esempio:

consideriamo l'aula dove facciamo lezione e l'affermazione
"se una persona in aula ha meno di 20 anni allora è uno studente."

Se indico con V la proprietà avere meno di 20 anni e con S la proprietà essere uno studente allora l'espressione precedente si pu'o formalizzare in questo modo:
per ogni x in quest'aula, $V(x) \to S(x)$
Questa affermazione equivale a dire che: per ogni x in quest'aula, $\neg V(x) \to \neg S(x)$
cio'e che se una persona in quest'aula non 'e uno studente allora non pu'o avere meno di 20 anni.

Le due espressioni sono equivalenti e la seconda si chiama **contronominale** della prima

- **Equivalenza**
Altre volte gli enunciati hanno una forma del tipo:

vale P se e solo se vale Q.

Questo tipo di affermazione corrisponde in realt'a a due fatti: P implica Q e Q implica P. Si dice anche in questo caso che P e Q sono equivalenti.

- **Quantificatori**
Siano X un insieme e P una proprietà. L'espressione $\exists x P(x)$ indica che esiste almeno un elemento x di X per cui P(x) è vera.

Il simbolo $\exists$ si chiama **quantificatore esistenziale**. Viene interpretato come "esiste" o "c'è almeno un"

L'espressione $\forall x P(x)$, invece, indica che P(x) è vera per tutti gli x di X.

Il simbolo $\forall$ si chiama **quantificatore universale**. Viene interpretato come "dato qualsiasi elemento" o "per ogni elemento"

• Esempio:
Se $X = NeP(x)$ è la proprietà di essere un numero pari, allora l'espressione $\exists x P(x)$ è vera, dato che è vero che esiste un numero pari, mentre l'espressione

$\forall x P(x)$ è falsa perchè non è vero che tutti i numeri sono pari.

In modo pi'u formale possiamo scrivere nel seguente modo le proprietà:

$$\neg(\forall x P(x)) = \exists x \neg P(x)$$

Questo punto suggerisce che in matematica, per dimostrare che una proprietà P su un certo insieme X non è valida, basta esibire un controesempio, ovvero basta trovare un elemento $x \in X$ per cui P(x) risulta falsa.

Per dimostrare che una proprietà è valida su un insieme X, bisogna provare che P(x) è vera per ogni $x \in X$. Verificare che ciasun elemento di X soddifa la proprietà P risulta dispendioso se l'insieme X è molto grande e impossibile se X è infinito. Di conseguenza, bisogna ricorrere a una dimostrazione generale attraverso diversi metodi come il principio di induzione e la dimostrazione per assurdo.

$$\neg(\exists x P(x)) = \forall x \neg P(x)$$

1.12 Relazioni

Dati gli insiemi **A** e **B** una **relazione** tra i due insiemi è un sottoinsieme del **prodotto cartesiano** $A \times B$

$$R \subseteq A \times B$$

Se $(a, b) \in R$

aRb "a ha una relazione con b"

Quante relazioni ci sono tra due insiemi?

Una relazione è un **sottoinsieme** del prodotto cartesiano, dunque:

$$| A \times B | = | A | \times | B | = 6$$

$$| P(A \times B) | = 2^{|A| \times |B|} = 2^6$$

Tra le relazioni si trova:

- $\emptyset \subseteq A \times B$ (Insieme **vuoto**)
- $A \times B \subseteq A \times B$ (Insieme **totale**)

Relazioni tra due insiemi

$$R \subseteq A \times B$$
Dove R è un insieme di coppie

Esempio:
$A = \{a, b, c, d, e\}$
$B =$ Iniseme delle parole italiane

$$R = \{(x, y) \mid x \text{ è una lettera in A che è presente nella parola } y \in B\}$$
$$R \subseteq A \times B$$

a **R** cane, $(a, cane) \in R$
a **R** gatto, $(a, gatto) \in R$

1.12.1 Le tabelle di adiacenza

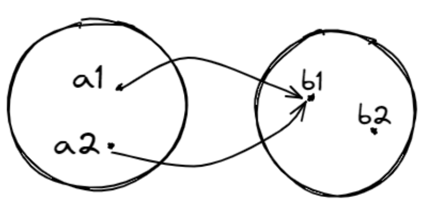
Se A e B sono insiemi finiti, una relazione $R \subseteq AB$ può essere rappresentata da una tabella a doppia entrata con:

- Le righe corrispondenti agli elementi di A
- Le colonne corrispondenti agli elementi di B
- un segno nelle celle corrispondenti alle coppie che appartengono alla relazione.

a/b	$b1$	$b2$	$\dots$	bn
$a1$	V			
$a2$				V
$\dots$				
an				

1.12.2 Diagrammi di Venn

$R \subseteq A \times B$ Se $(a_1, b_1) \in R$ allora unisco a1 e b1 tramite una freccia.

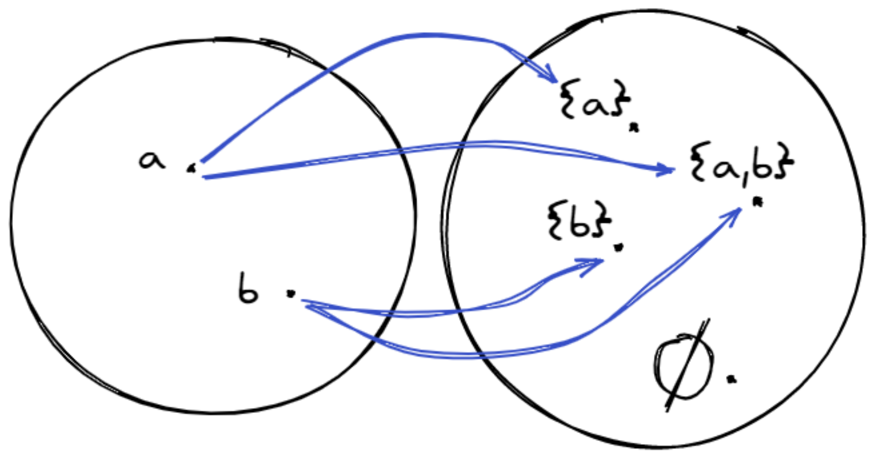


$$(a_2, b_1) \in R$$
$$(a_2, b_2) \notin R$$

Esempio: $A = \{a, b\}$, $B = P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$$R = \{(a, B) \mid a \in B\} \subseteq A \times B$$
$$R = \{(a, \{a\}), (a, \{a, b\}), (b, \{b\}), (b, \{a, b\})\}$$

$A/P(A)$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
a		V	V	
b			V	V



1.12.3 Relazioni binarie

Una relazione binaria R di A è un sottoinsieme di $A \times A$

$$R \subseteq A \times A$$

1.12.4 Relazioni riflessive

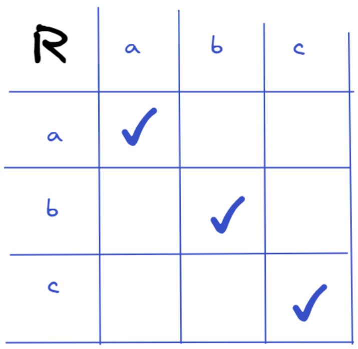
Una relazione binaria si dice **riflessiva** se $\forall x \in A$ xRx.
Ovvero se ogni elemento è in relazione con se stesso.

La relazione su A seguente:

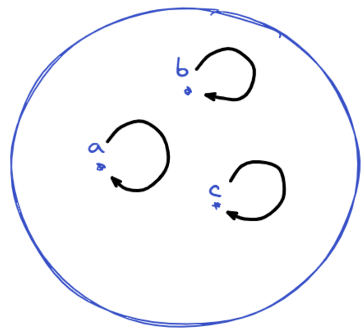
$$R = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

forma una **diagonale** se rappresentata in una tabella delle adiacenze.

$$A = \{a, b, c\}$$
$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$



(a) Tabella delle adiacenze



(b) Diagramma di Eulero Venn

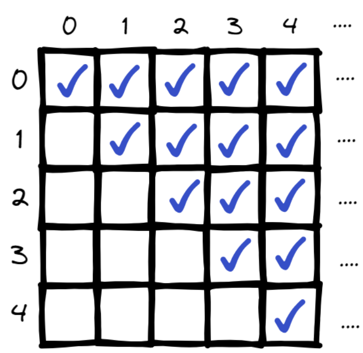
Ogni elemento è in relazione con sè stesso

Una relazione binaria su A si dice **riflessiva** se

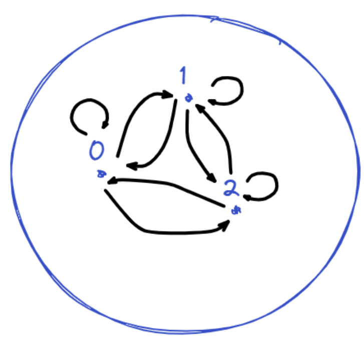
$$\forall x \in A \;\; x\mathcal{R}x$$

Ossia **se e solo se ogni elemento è in relazione con sè stesso**.
Quindi R **non è riflessiva** se esiste $x \in A$ tale che $x \notin x$ (controesempio)

Esempio:
$A = \mathbb{N} \leq 0$
$R = \{(n, m) \mid n \leq m\}$



(a) Tabella delle adiacenze



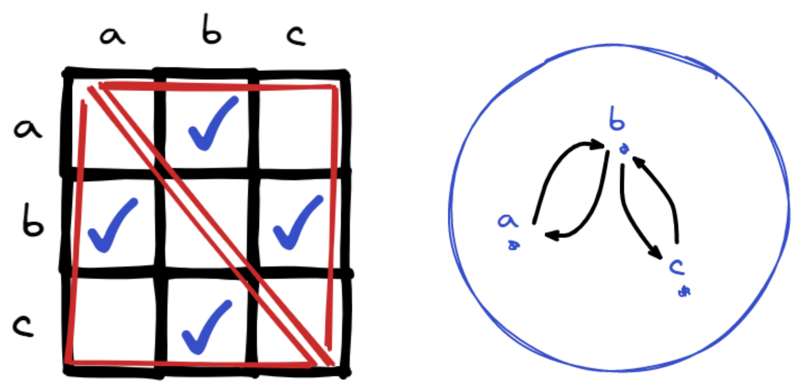
(b) Diagramma di Eulero Venn, (Rappresentiamo solo i primi 3 elementi.)

1.12.5 Relazioni simmetriche

- Una relazione R su A si dice **simmetrica** se per $\forall x, y \in A$ se $x\mathcal{R}y$ allora $y\mathcal{R}x$
- Per far sì che una relazione **non sia simmetrica** basta che esistano $x, y \in A$ tali che $x\mathcal{R}y$ ma $y\not\mathcal{R}x$

Esempio:

$$A = \{a, b, c\}$$
$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$$



(a) Tabella delle adiacenze

(b) Diagramma di Eulero Venn, (banalmente troviamo una freccia di "ritorno" quando ne esiste una di "andata".)

2 Combinatoria

Il calcolo combinatorio studia i raggruppamenti che si possono ottenere con un dato numero di oggetti disposti su un dato numero di posti.

Teniamo a mente le seguenti proprietà:

- $| X \cup Y |=| X | + | Y | - | X \cap Y |$
- $| X \times Y |=| X | \cdot | Y |$
- $P(x) = 2^{|x|}$

• Esempio: se A = B
$A \times A = \{(a_1, a_2 \mid a_1, a_2 \in A\}$
a = $\{1, 2, 3\}$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

2.1 Coefficiente binomiale

Il **coefficiente binomiale** è usato per calcolare le **combinazioni**.

Rule 2.1 – Combinazioni

sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è diverso dal numero di posti e non conta l'ordine con cui si dispongono. Le combinazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

Sottoinsiemi di A di 2 elementi: $A = \{1, 2, 3\}$
{1,2}, {1,3}, {2,3}

- 3 sottoinsiemi di 2 elementi
- 3 sottoinsiemi di 1 elemento
- 1 sottoinsieme di 0 elementi
- 1 sottoinsieme di 3 elementi

Rule 2.2 – Coefficiente binomiale

Se **A** ha **n** elementi allora per contare i sottoinsiemi di **k** elementi si usa questa formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dove $n!$ è il **fattoriale** di n, ovvero il prodotto dei numeri interi positivi minori o uguali a tale numero.

Esempio:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3 \cdot 2}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot \cancel{4}^{1}} = 10$$

Vuol dire che ci sono 10 sottoinsiemi formati da 3 elementi a partire da un insieme di 5 elementi.

Formula generale:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = P(a)$$

2.2 Le disposizioni

sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è diverso dal numero di posti e **conta l'ordine con cui si dispongono**. Le disposizioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

2.2.1 Disposizioni con ripetizioni

Rule 2.3 – Disposizione con ripetizioni

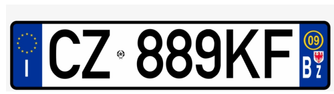
Una disposizione con ripetizioni di k elementi scelti tra n è una **k-upla** di elementi appartenenti ad un insieme di cardinalità n
$d^1_{n,k}$ è il numero di disposizioni **con ripetizioni**

$$d^1_{n,k} = n^k$$

Esempio: *quante targhe con **2 lettere** - **3 cifre** - **2 lettere** posso scrivere*?

$d^1_{10,3} = \mid \{0, ..., 9\} \times \{0, ..., 9\} \times \{0, ..., 9\} \mid = 10^3 = 1000$
In questo modo ho ottenuto il numero di disposizioni di **3 cifre codificate con numeri da 0 a 9.**

$d^1_{26,2} = 26 \cdot 26$
In questo modo ho ottenuto il numero di disposizioni di **2 cifre codificate con lettere dell'alfabeto.**



Rispondiamo alla domanda iniziale con il seguente calcolo:

$$26^2 \cdot 1000 \cdot 26^2 = 26^4 \cdot 1000$$

2.2.2 Disposizioni semplici

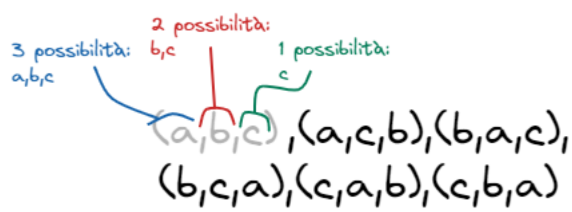
Rule 2.4 – Disposizione semplice

Sono oggetti scelti tra n k-tuple **senza ripetizioni**.

Coppie senza ripetizioni di A: $A = \{a, b, c\}$

$(a, b), (b, c), (b, a), (b, c)(c, a), (c, b)$

triple senza ripetizioni di A:



Formula generale:

$$d_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

Esempio: n = 3, k=2. n-k+1 = 2

$$d_{5,3} = 5 \cdot (5-1) = 5 \cdot 4 = 20$$

$\frac{5!}{3!} = 20$

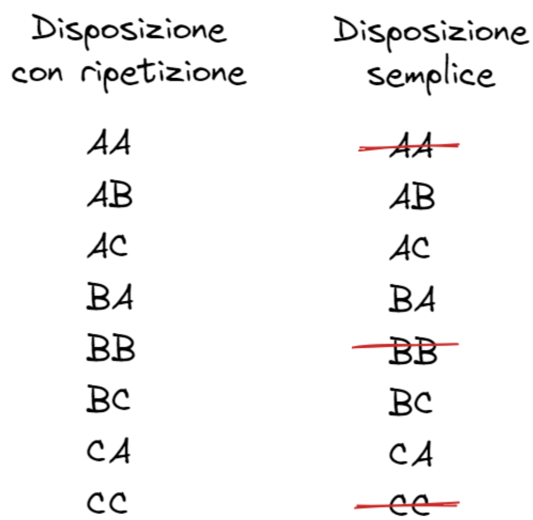
Seconda formula:

$$d_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio: Quanti numeri posso scrivere nel range 0-100 accertandomi che essi abbiano tutte le cifre differenti?

$$d_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 720$$

2.3 Differenza tra disposizioni semplici e con ripetizione



2.4 Esercizi con combinazioni e permutazioni

• Esercizio 1

Quante stringhe da due caratteri possiamo fomare con le seguenti lettere?
a, b, c, d
Combinazioni: l'ordine **non importa**: $AB = BA$.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = 6$$

Disposizioni: l'ordine **conta**: $AB \neq BA$.

$$d_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

♣ ♣ ♣

• Esercizio 2

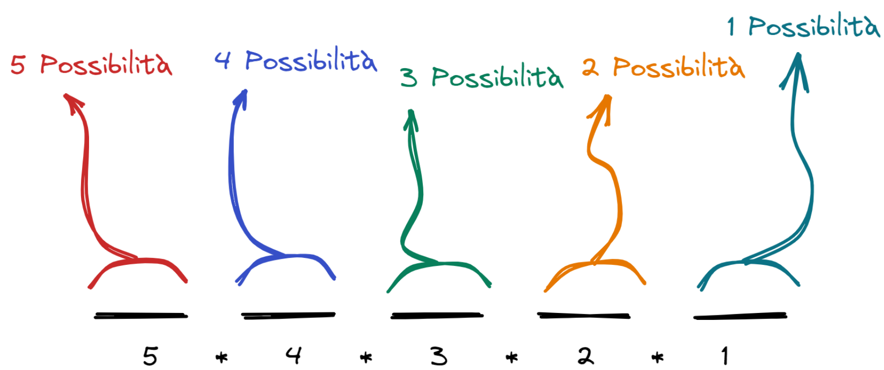
In quanti modi puoi disporre 3 libri su una mensola da un gruppo di 7?
L'ordine conta oppure no? L'ordine conta, sono **disposizioni**

$$d_{7,3} = \frac{7!}{4!} = 210$$

♣ ♣ ♣

• Esercizio 3

In quanti modi puoi disporre 5 libri su una mensola?



$$d_{5,5} = \frac{5!}{\color{red}{0!}} = \frac{5!}{1} = 120$$

♣ ♣ ♣

• Esercizio 4

Quanti gruppi da 4 si possono creare da una squadra di 12 scienziati?
In questo caso l'ordine non conta

$$\{Anna, John, Mark, Lucas\} = \{John, Lucas, Mark, Anna\}$$

Perciò si parla di **combinazioni**

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!(8!)} = 495$$

♣ ♣ ♣

• Esercizio 5

In quanti modi possiamo disporre le lettere nella parola ALABAMA?

$$\frac{Letterenellaparola!}{Lettereripetute!} = \frac{7!}{4!} = 210$$

2.5 Dimostrazione per induzione

L'induzione matematica è una tecnica di dimostrazione. È usata essenzialmente per provare che una tesi $p(n)$ sia verificata per ogni numero naturale $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

L'induzione matematica prova che possiamo salire quanto vogliamo su una scala, provando che possiamo arrampicarci sul primo gradino e da qualsiasi piolo possiamo arrampicarci su quello dopo.
– Donald Knuth, *Concrete Mathematics*

Tesi: Provare che $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ dove $S(n)$ è la somma di tutti i numeri interi compresi tra 1 e n inclusi.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Passo base

per $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(\cancel{2})}{\cancel{2}}$$

La tesi è dunque verificata per $n = 1$
Ipotesi

$$\sum_{k=1}^{t} k = \frac{t(t+1)}{2}$$

Ora dobbiamo provare che questo assuma la veridicità della tesi per ogni $n + 1$

$$S(n+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1)$$

Assumiamo di avere già una formula per la serie di interi che va da 1 a k.

$$\sum_{k=1}^{t+1} k = \frac{t(t+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} \text{ per } k = k+1$$