Algebra lineare e Matematica Discreta
Appunti - Parte 2

Marco Zanchin

Contents

Chapter 1

Parte due

1.1 Relazioni

1.1.1 Relazioni di equivalenza

Definition 1.1: Relazione di equivalenza

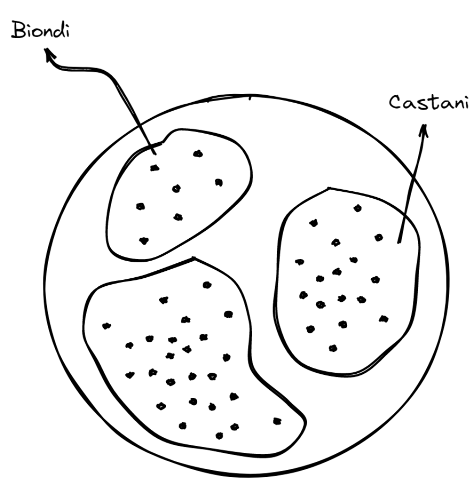
na relazione R su un insieme A è una relazione di equivalenza se R è **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**.

Esempio:

$$A = \text{Studenti in questa aula}$$
$$R = \{(x, y) \mid \text{x e y hanno lo stesso colore di capelli }\}$$

La relazione ha le seguenti proprietà

- **Riflessiva**: ognuno ha lo stesso colore di capelli di se stesso.
- **Simmetrica**: se una persona ha lo stesso colore di un'altra persona, varrà anche il contrario. (se $x\mathbb{R}y$ allora $y\mathbb{R}x$)
- **Transitiva**: se $x\mathbb{R}y$ e $y\mathbb{R}h$ allora $x\mathbb{R}h$



Le relazioni di equivalenza tendono ad accumunare elementi con le stesse proprietà.

Esempio:

$$R = \{(n, m) \mid n + m \text{ è pari } \}$$

La relazione ha le seguenti proprietà

- **Riflessiva**:
$$\forall x \in \mathbf{N},\ nRn\ ?$$
Si, ogni numero se sommato per se stesso da origine a un numero pari.
$$\forall x \in \mathbf{N},\ n + n = 2n$$

- **Simmetrica**:
$$se\ x\mathbb{R}y\ allora\ y\mathbb{R}x?$$
Se $n + m$ è pari, allora $m + n$ è pari?
Si grazie alla **proprietà commutativa**. Cambiando l'ordine dei addendi della addizione, la somma non cambia.

- **Transitiva**:
$$se\ n\mathbb{R}m\ e\ m\mathbb{R}h\ allora\ n\mathbb{R}h\ ?$$
$$(n + m) + (n + h)\ è\ pari$$
$$n + 2m + h = 2a$$
$$n + h = 2a - 2m$$
$$n + h = 2(a - m)\ è\ pari$$

R è una relazione di equivalenza.

scriviamo gli elmenti in relazione con 0

$$0\mathbf{R}2\ 0\mathbf{R}4\ 0\mathbf{R}8\ \ldots \emptyset\mathbf{R}\emptyset$$

Tutti gli elementi pari sono in relazione tra di loro.
Tutti gli elementi dispari sono in relazione tra di loro.
Nessun numero pari è in relazione con uno dispari.

Definition 1.2: Classe di equivalenza

Classe di equivalenza è il nome dato a un sottoinsieme di qualche relazione di equivalenza R, che include tutti gli elementi che sono equivalenti tra loro.

Se R è una relazione di equivalenza allora $\forall x \in A$ considero

$$[x]_R = \{y \in A \mid x\mathbf{R}y\}$$

Classe di equivalenza di x modulo R
$[x]_R \subseteq A$

1.1.2 Insieme quoziente

Definition 1.3: Insieme quoziente

ata una relazione di equivalenza R su A, l'insieme quoziente di A modulo R è l'**insieme di tutte le classi di equivalenza modulo R in A**.

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

$$A/R = \mid A \mid$$

Se e solo se R è la relazione diagonale su A.
Esempio:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\mathbf{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Considero una relazione su $\mathbf{P}(A)$

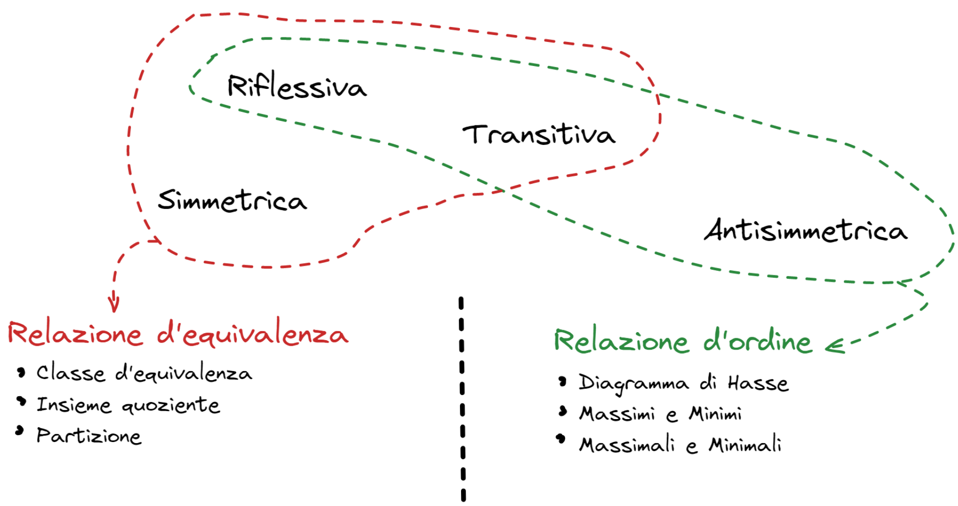
$$R = \{(x, y) \in \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(A) \mid\mid x \mid = \mid y \mid\}$$

$$[\emptyset]_R = \{x \in \mathbf{P}(A) \mid\mid x \mid = 0\} = \{\emptyset\}$$

$$[\{a\}]_R = \{x \in \mathbf{P}(A) \mid\mid x \mid = 1\} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

Chapter 2

Partizioni e Relazioni D'ordine



Definition 2.1: Antisimmetria

Una relazione è antisimmetrica se esistono x e y tali che $x \neq yex$ e xRy e yRx

Se una relazione è

- Riflessiva
- Antisimmetrica
- Transitiva

Allora è una **relazione d'ordine**
Esempio:
$A = \{a, b, c\}$
A^+ insieme delle parole su A
se u è una parola $\in A$ con $\#u$ indico la **lunghezza** di suddetta parola.

Consideriamo $u\mathbf{R}v$ se $\#u \leqslant \#v$

$ab\mathbf{R}abbc$, $abd\mathbf{R}bba$

- **Riflessiva**?
  $\forall u \in A^+ \ \#u \leqslant \#u$
  Ogni parola ha una lunghezza minore o uguale a sè stessa. La relazione è simmetrica.
- **Transitiva**?
  Se $u\mathbf{R}v$ e $v\mathbf{R}h$ allora $u\mathbf{R}h$? Si. è transitiva.

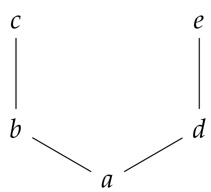
- **Antisimmetrica** ?
  $\#u \leqslant \#v$ e $\#v \leqslant \#u$
  Quindi $\#u = \#v$
  Ma non è detto che u=s
  Di conseguenza R **non è antisimmetrica**.

2.1 Diagramma di Hasse

Il **Diagramma di Hasse** si utilizza per rappresentare relazioni d'ordine in modo che siano comprensibili al lettore. Se R è una relazione d'ordine su A

1. Disegno gli elementi di A in modo che **le relazioni** vadano dal basso verso l'alto
2. Non rappresento la **riflessività**
3. Non rappresento le relazioni che si ricavano **per transitività**

Esempio:
$A = \{a, b, c, d, e\}$
$R = \{(x, x) \mid x \in A\} \cup \{(a, b), (b, c), (a, d), (a, c), (d, e), (a, e)\}$
Dopo aver verificato che sia una relazione d'ordine disegnamo il diagramma di Hasse:



Definition 2.2: copertura

ei diagrammi di Hasse un elemento b **copre** a se $a\mathbf{R}b$ e non esiste c tale che $a\mathbf{R}c$ e $c\mathbf{R}b$.
Nei diagrammi di Hasse si disegnano solo le coperture.

Terminologia

In una relazione d'ordine R su A

$M \in A$ è il **massimo** se per ogni $x \in A$ si ha $x\mathbf{R}M$

$m \in A$ è il **minimo** se per ogni $x \in A$ si ha $m\mathbf{R}x$

$N \in A$ è il **massimale** se non esiste nessun $x \in A$ tale che $N\mathbf{R}x$

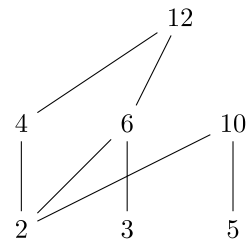
$n \in A$ è il **minimale** se non esiste nessun $x \in A$ tale che $x\mathbf{R}n$

Esempio:
$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}$
Consideriamo **R** come **relazione di divisibilità**.
Elenchiamo le coperture:

- $2\mathbf{R}4$
- $2\mathbf{R}6$
- $2\mathbf{R}10$
- $3\mathbf{R}6$
- $4\mathbf{R}12$
- $5\mathbf{R}10$
- $6\mathbf{R}12$

Notare come non abbiamo scritto $2\mathbf{R}12$, essa non è infatti una relazione diretta essendoci anche $6\mathbf{R}12$, dunque non la scrivo. (vedi **coperture**)

Disegnamo il diagramma di Hasse:



- Non esiste nè massimo ne minimo
- Gli elementi minimali sono 2,3,5
- Gli elementi massimali sono 12 e 10

Esempio:

$A = \{a, b, c\}$
$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

Chapter 3

Funzioni

3.1 Introduzione

Definition 3.1: funzione

Una funzione f tra A e B è una relazione $f \in A \times B$ tale che per ogni $a \in A$ esiste un unico elemento $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ (cioè ogni $a \in A$ è in relazione con un unico $b \in B$).

- L'insieme A è chiamato **dominio** di f.
- L'insieme B è chiamato **codominio** di f.
- b è chiamata **immagine** di a.

3.2 Notazione

Per indicare che f è una funzione **da A a B** si scrive

$$f : A \longrightarrow B$$

oppure

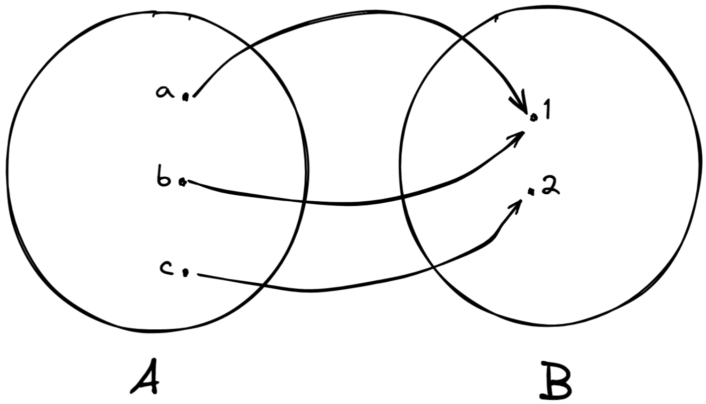
$$f \subseteq A \times B$$

Se $(a, b) \in f$

$$f(a) = b$$

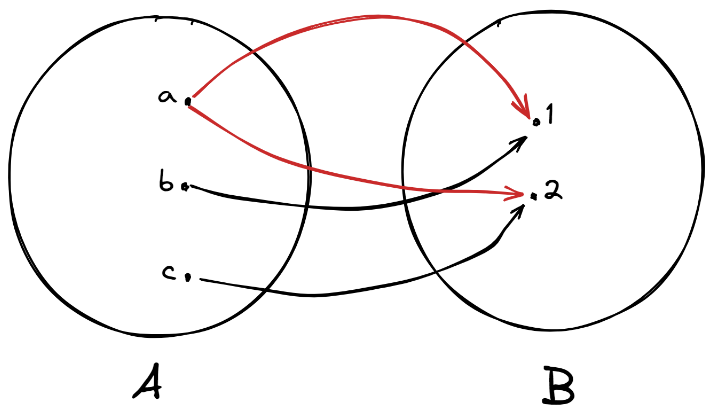
3.3 Primi esempi

$A = \{a, b, c\}$
$B = \{1, 2\}$
$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$



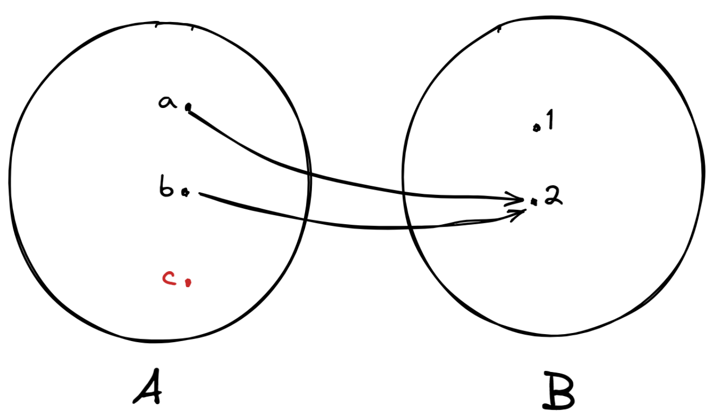
Da ogni elemento di A parte una freccia

$f = \{(a,1),(b,1),(c,2)\}$ è una funzione.



- $\{(a,1),(a,2),(b,1),(c,2)\}$ non è una funzione perché l'elemento a A è in relazione con 2 elementi $\in$ B

-



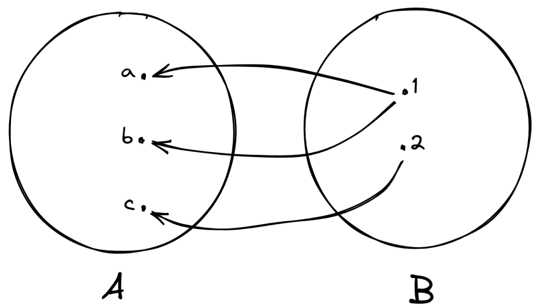
- $\{(a,2),(b,2)\}$ non è una funzione perché l'elemento c A non è in relazione con neussun elemento $\in$ B

3.4 Controimmagini

Se per ogni $x \in A$ $f(x)$ o y è **l'immagine** di x

allora per ogni $y \in B$ $f(x)^{-1}$ è la **controimmagine** di y

$f(x)^{-1} = \{x \in A \mid f(x) = y\}$



$$f(1)^{-1} = \{a, b\}$$
$$f(2)^{-1} = \{c\}$$

3.5 Funzione identica

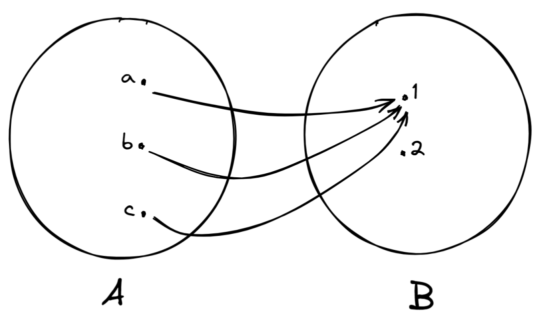
La funzione $f : A \to A$ tale che $f(a) = a$ per ogni $a \in A$ è chiamata **funzione identica** di A. Denotata anche con id_a

$$id_a = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

3.6 Funzione costante

La funzione costante è una funzione in cui tutti gli elementi **hanno la stessa immagine**.

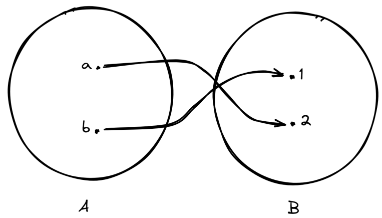
$$f_c : A \to B \text{ tale che } f_c(a) = n \ \forall a \in A$$



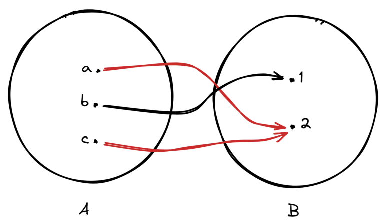
3.7 Funzione iniettiva

Una funzione f è **iniettiva** se $\forall x, y \in A$ con $x \neq y$ si ha che $f(x) \neq f(y)$.
Elementi diversi hanno immagini diverse.

- Questa funzione è iniettiva



- Questa funzione non è iniettiva poichè gli elementi $a, b \in A$ **hanno la stessa immagine** (2).

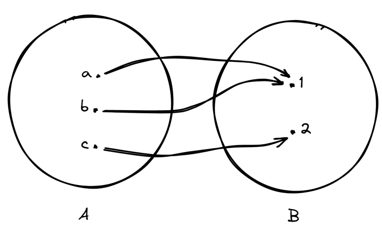


3.8 Funzione suriettiva

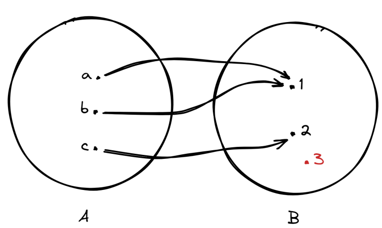
Una funzione $f : A \rightarrow B$ è suriettiva se **ogni** elemento di B (codominio) è immagine di almeno un elemento di A (dominio).

$$\forall y \in B, \;\; \exists x \in A, \;\; f(x) = y$$

- Questa funzione è suriettiva

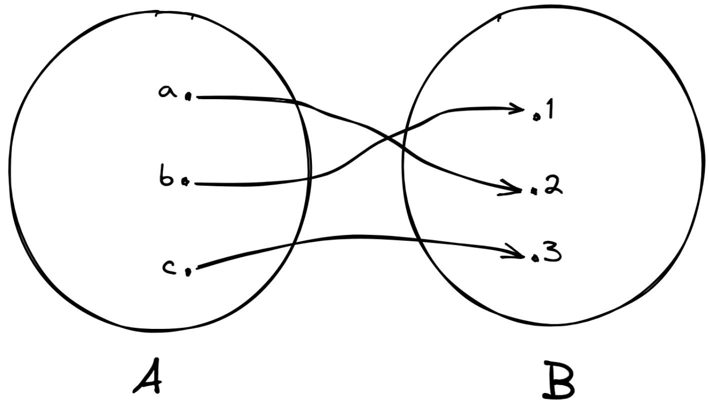


- Questa funzione non è suriettiva poichè l'elemento $3 \in B$ non è immagine di alcun elemento di A.



3.9 Funzione biettiva

Una funzione è **biettiva** o biunivoca se è sia *iniettiva* che *suriettiva*.



3.10 Condizioni di esistenza per funzioni iniettive, suriettive e biettive

Se A e B sono *insiemi finiti*, si ha che:

- se $\mid A \mid > \mid B \mid$ non esistono funzioni **iniettive** da A a B
- se $\mid A \mid < \mid B \mid$ non esistono funzioni **suriettive** da A a B
- se $\mid A \mid \neq \mid B \mid$ non esistono funzioni **biettive** da A a B

Due insiemi A e B si dicono **equipotenti** se esiste una funzione biettiva tra A e B.

3.11 Numero di funzioni esistenti

$A = \{a, b, c\}$
$B = \{1, 2\}$
Abbiamo **8** possibili funzioni.
Non ci sono funzioni iniettive essendo $\mid A \mid > \mid B \mid$ e le uniche funzioni **non suriettive** sono le funzioni costanti $f(1), f(2)$ dove vengono lasciati scoperti rispettivamente l'elemento 2 e 1.

> **Claim 3.11.1**
> Se A e B sono insiemi finiti allora ci sono
> $$\mid B \mid^{|A|}$$
> funzioni di $A \longrightarrow B$
> (dominio elevato al codominio).

$A = \{a, b, c\}$
$B = \{1, 2, 3\}$
In totale ci sono 3^3 funzioni di A in B, di cui solo **6** sono **biettive**.

> **Claim 3.11.2**
> Ci sono $n!$ funzioni biettive tra 2 insiemi di n elementi.
> (Nell' esempio di prima possiamo verificare il ragionamento: 3 possibilità per a $\times$ 2 possibilità per b $\times$ 1 possibilità per c)

Una funzione biettiva è chiamata **permutazione**.

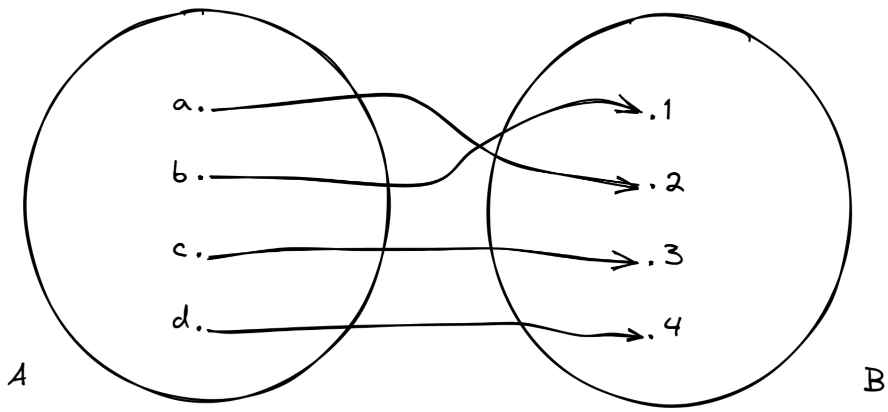
3.12 Funzioni biettive inverse

Se $f : A \longrightarrow B$ è biettiva, allora per ogni $y \in B$

$$f(y)^{-1} = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

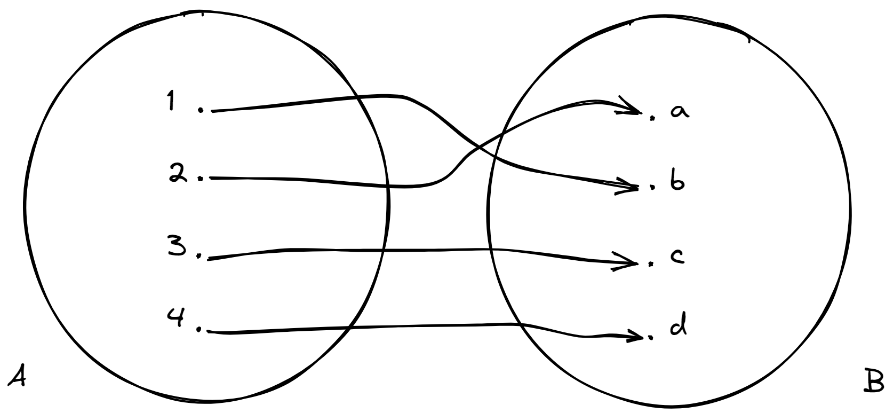
$f(y)^{-1}$ è sempre diversa da Ø (f è suriettiva) ed è sempre un **singleton** (f è iniettiva)

Esempio:

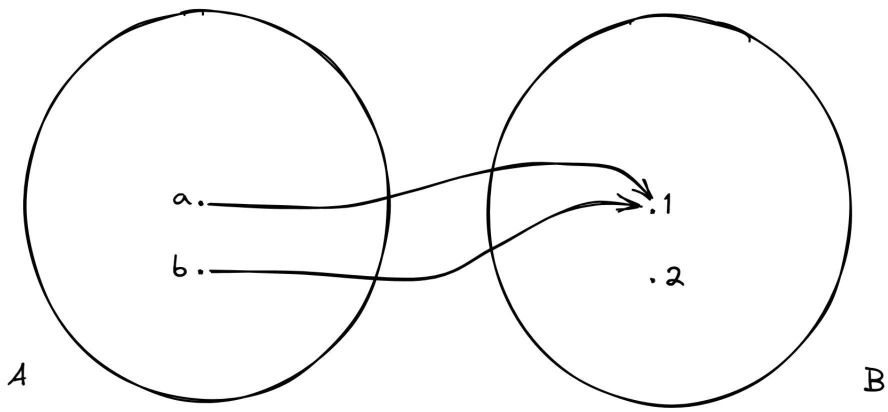


- $f(1)^{-1} = \{b\}$
- $f(2)^{-1} = \{a\}$
- $f(3)^{-1} = \{c\}$
- $f(4)^{-1} = \{d\}$

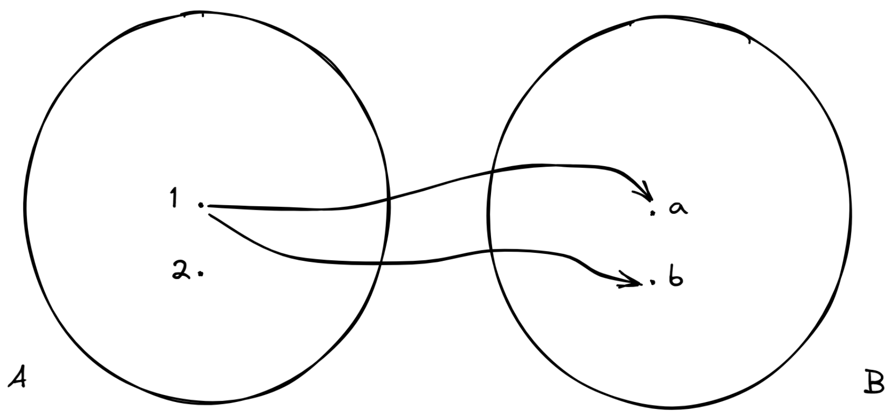
Leggendo le frecce al contrario ottengo una funzione di B in A.



Se la funzione **non è biettiva** non posso fare **la funzione inversa**.
Esempio:
$A = \{a, b\}$
$B = \{1, 2\}$
$f(a) = 1$
$f(b) = 1$

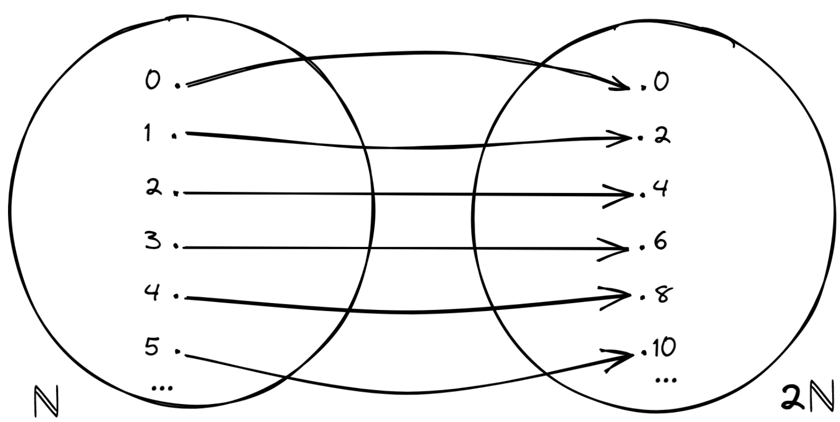


La rappresentazione di seguito non è una funzione, dato che f(2) non ha nessuna immagine.



$$f : n \in \mathbf{N} \to 2n \in 2\mathbf{N}$$

f è **biettiva**



Calcoliamo la funzione inversa:

$$f^{-1} : 2\mathbf{N} \to N$$

$$f^{-1}(2n) = n$$

3.13 Funzioni composte

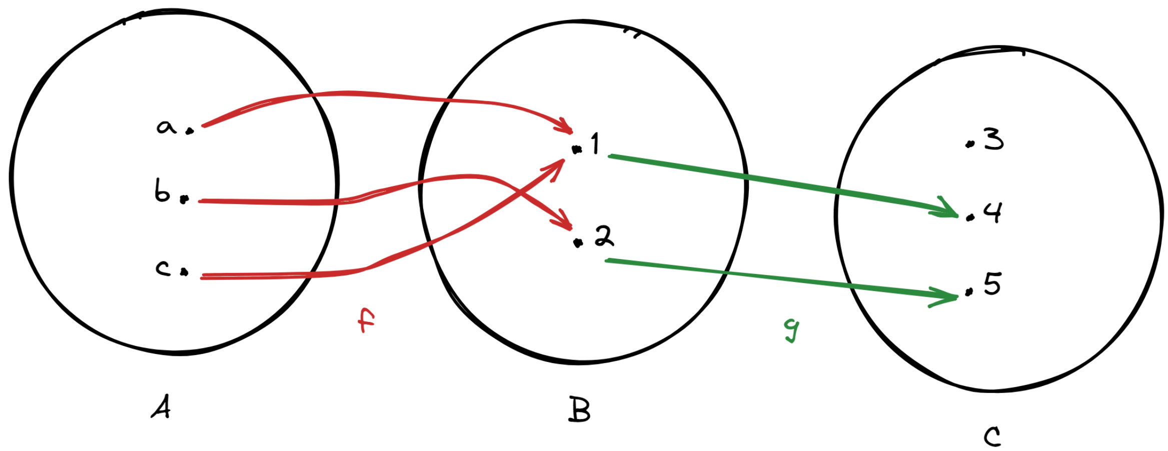
$f : A \to B$
$g : b \to C$

$$g \circ f : A \to C$$

Definition 3.2: Composizione

La **composizione** $g \circ f$ è una funzione tra A e C definita per ogni $x \in A$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



$$g \circ f : A \to C$$

- $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = 4$
- $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = 5$
- $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(1) = 4$

3.14 Composizione e inversione

Data una funzione biettiva $f : A \to B$ e la sua inversa $f^{-1} : B \to A$

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(2) = a$$

- Se $a \in A$, $f^{-1}(f(a)) = a$. Quindi $f^{-1} \circ f = id_a$

id_a è la **funzione identica** $x \in A \to x \in A$

Esempio:

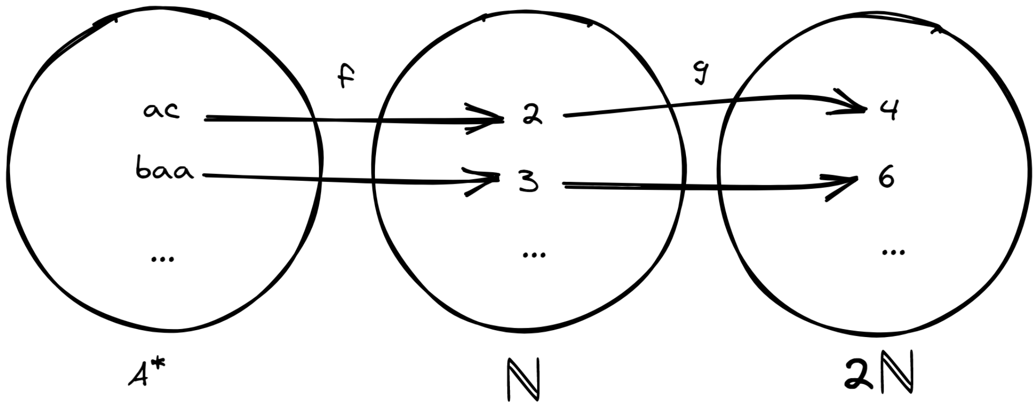
$$f : u \in A^* \to \#u \in \mathbf{N}$$

- $f(aac) = 3$
- $f(bc) = 2$

$$g : n \in \mathbb{N} \to 2n \in 2\mathbb{N}$$

- $g(2) = 4$
- $g(4) = 8$

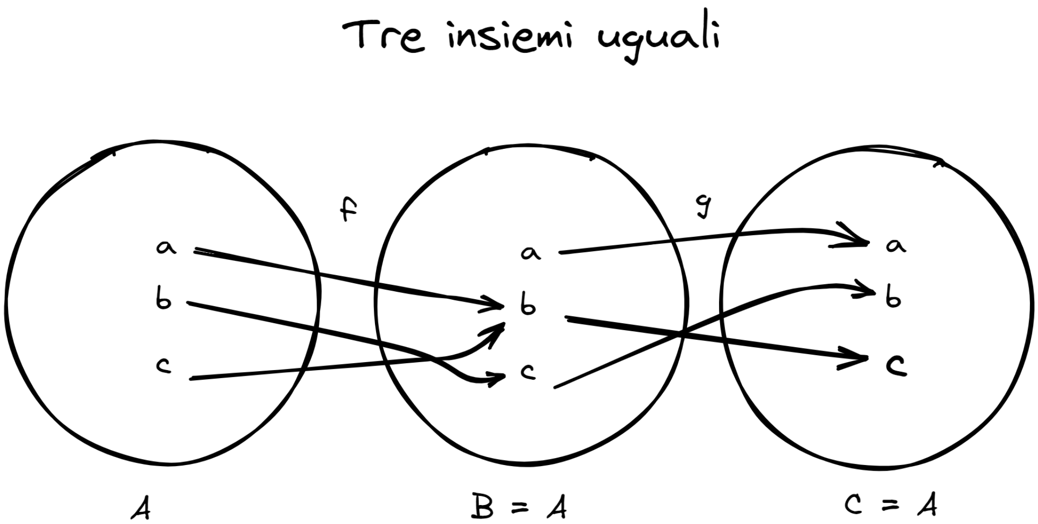
$$g \circ f : A^* \to 2\mathbb{N}$$



$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(1) = 2$$
$$(g \circ f)(u) = g(f(abbc)) = g(4) = 8$$

Esempio:

$$A = B = C = \{a, b, c\}$$



$$f \circ g : A \to A$$

- $a \to c$
- $b \to b$
- $c \to c$

$$g \circ f : A \to A$$

- $a \to b$
- $b \to b$
- $c \to c$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

La composizione non è commutativa.