

P2I-7 MODELISATION NUMERIQUE POUR L'INGENIEUR

SUJET N°5

MODULE : MECANIQUE NON-LINEAIRE

Titre : Capteur MEMS résonant pour la mesure de masse de ultra-haute précision

Contact : sebastien.baguet@insa-lyon.fr

Contexte

Les importantes avancées dans la micro-fabrication des M/NEMS (Micro et Nano Electro-Mechanical Systems) de ces dernières années ont apporté des développements conséquents dans la navigation, les télécommunications, les jeux vidéo, etc.

Après les MEMS, l'émergence des NEMS (Nano Electro Mechanical Systems) a ouvert la porte à des gammes entières de nouvelles applications. En effet ces nanosystèmes ayant des dimensions critiques de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres, et donc une masse et une raideur extrêmement réduites, montrent des sensibilités à des perturbations extérieures (ajout de masse, modification de propriétés chimiques, effort extérieur...) inégalées. En grande majorité résonants, les NEMS permettent en particulier de quantifier l'ajout d'une masse en mesurant leur variation de fréquence propre induite.

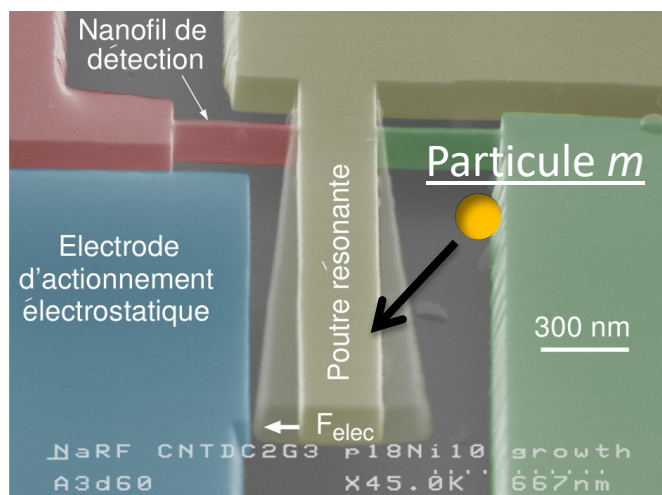


Fig.1 – Nano-poutre encastée-libre avec électrode d'actionnement et nano-fils piezorésistifs de détection (Cliché du CEA-LETI).

Un résonateur est constitué d'une nano-poutre (voir Fig. 1), équipée classiquement d'au moins une électrode pour l'actionnement. Une tension continue V_{dc} fléchit la poutre alors qu'une tension alternative harmonique V_{ac} la sollicite sur sa fréquence fondamentale de flexion. Classiquement il s'agit de faire vibrer le résonateur en flexion sur sa fréquence fondamentale, c-à-d. au maximum d'amplitude. Une perturbation extérieure change la raideur ou la masse du résonateur et donc sa fréquence fondamentale. Plus la taille du résonateur est petite, plus la fréquence fondamentale est grande (de l'ordre de quelques MHz au GHz pour des capteurs NEMS) et plus la sensibilité de ces dispositifs à une perturbation est grande, induisant de meilleures performances.

Objectif

L'objectif de ce projet consiste à dimensionner un capteur MEMS résonant pour obtenir une balance ultrasensible. On utilisera pour cela un modèle simplifié prenant en compte les non-linéarités issues de l'actionnement électrostatique.

Modélisation

Le résonateur est représenté schématiquement dans la figure 2. Il est caractérisé par les grandeurs suivantes :

l : longueur

h : épaisseur

b : largeur (selon l'axe sortant de la page)

d : distance initiale entre la nano-poutre et l'électrode (gap)

$x(t)$: déplacement au bout de la poutre

V_{DC} : Tension constante

V_{AC} : tension alternative

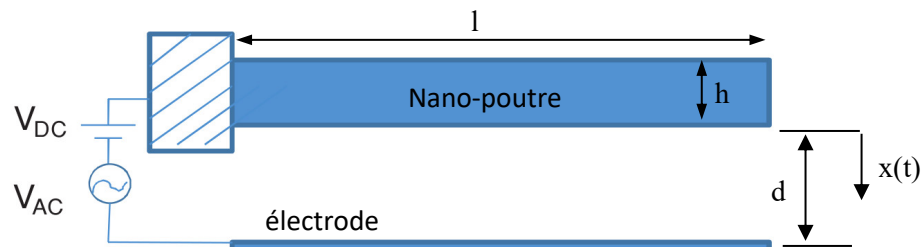


Fig.2 – Représentation schématique de la nano-poutre encastree-libre avec électrode d'actionnement.

Pour faciliter la modélisation et le traitement numérique du problème, on adopte un modèle simplifié de type masse-ressort à 1 ddl excité par les efforts électrostatiques générés par l'électrode, tel que représenté dans la figure 3.

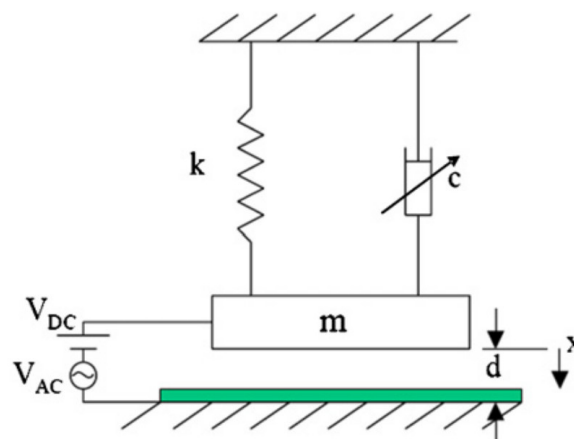


Fig.3 – Modèle simplifié masse-ressort avec électrode d'actionnement.

Pour ce système, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m x'' + c x' + k x = F_e(x, t) \quad (1)$$

où x' représente la dérivée de x par rapport au temps t .

$F_e(x,t)$ est l'effort électrostatique non-linéaire qui s'applique sur la masse m , avec

$$F_e(x,t) = \frac{\varepsilon_0 A}{2} \frac{[V_{dc} + V_{ac} \cos(\omega t)]^2}{(d-x)^2} \quad (2)$$

où

- $\varepsilon_0 = 8.5 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ (Farads par mètre) est la permittivité diélectrique absolue du vide.
- $A = l \times b$ est la surface de la masse en vis-à-vis de l'électrode.
- d est la distance initiale entre la masse et l'électrode (gap)
- $m = \rho A h$ correspond à la masse de la nano-poutre de masse volumique ρ

Adimensionnement

Les variables du problème (le déplacement x et la pulsation ω) ayant des ordres de grandeur très différents, les méthodes numériques utilisées par la suite risquent converger difficilement. Pour pallier ce problème, on procède tout d'abord à un adimensionnement des équations. Pour cela, on introduit tout d'abord un temps adimensionné τ

$$\tau = \omega_0 t \quad (3)$$

où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

est la pulsation propre du système masse-ressort de la figure 3. L'équation (1) devient :

$$\ddot{x} + \xi \dot{x} + x = \frac{\varepsilon_0 A}{2m\omega_0^2} \frac{[V_{dc} + V_{ac} \cos(\Omega \tau)]^2}{(d-x)^2} \quad (5)$$

où \dot{x} représente la dérivée de x par rapport au temps adimensionné τ et avec

$$\xi = \frac{c}{m \omega_0} \quad (6)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (7)$$

On adimensionne ensuite le déplacement en le divisant par le gap d ce qui permet d'introduire la nouvelle variable adimensionnée

$$y = \frac{x}{d} \quad (8)$$

L'équation (5) devient alors

$$\ddot{y} + \xi \dot{y} + y = T \frac{[V_{dc} + V_{ac} \cos(\Omega \tau)]^2}{(1-y)^2} \quad (9)$$

avec

$$T = \frac{\varepsilon_0 A}{2m\omega_0^2 d^3} \quad (10)$$

Ainsi, les deux nouvelles variables du problème sont le déplacement adimensionné y et la pulsation adimensionnée Ω . Etant donné que le déplacement x peut varier entre 0 et d , on a $y \in [0,1]$. De même, puisqu'on va exciter le système autour de sa pulsation propre ω_0 , on a $\Omega \approx 1$. Les deux nouvelles variables sont donc désormais du même ordre de grandeur.

Mesure de masse

On souhaite utiliser le capteur résonnant pour effectuer des mesures de masse. Pour cela, on dépose une masse δm sur la nano-poutre vibrante, c-à-d. sur le système masse ressort simplifié, comme schématisé dans le figure 4.

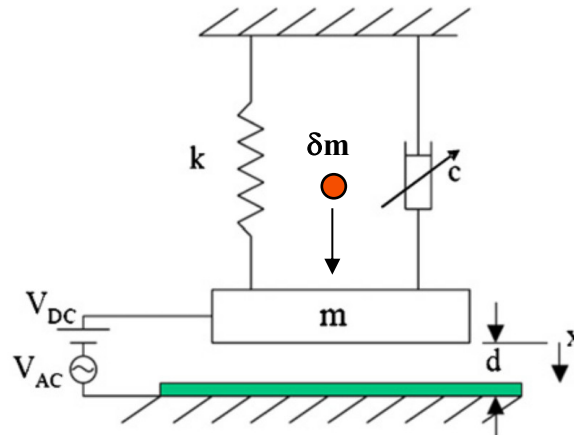


Fig.4 – Modèle simplifié masse-ressort avec masse ajoutée δm .

Avec la masse ajoutée δm , l'équation du mouvement (9) devient

$$\left(1 + \frac{\delta m}{m}\right) \ddot{y} + \xi \dot{y} + y = T \frac{[V_{dc} + V_{ac} \cos(\Omega \tau)]^2}{(1-y)^2} \quad (11)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre non-linéaire car le second membre est une fonction non-linéaire de y .

Pour la rendre compatible avec l'algorithme d'intégration temporelle de Newmark vu en cours, on transforme la non-linéarité à l'aide d'un développement de Taylor poussé jusqu'à l'ordre 3 pour conserver suffisamment de précision :

$$\frac{1}{(1-y)^2} = 1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + O(y^4) \quad (12)$$

En introduisant ce développement dans l'équation (11) et en faisant l'hypothèse que les termes d'excitation paramétriques (en $x^i \cos(\Omega \tau)$) sont négligeables devant l'excitation directe, on obtient finalement

$$\left(1 + \frac{\delta m}{m}\right) \ddot{y} + \xi \dot{y} + (1 - 2TV_{dc}^2)y - (3TV_{dc}^2)y^2 - (4TV_{dc}^2)y^3 = TV_{dc}^2 + 2TV_{dc}V_{ac} \cos(\Omega \tau) \quad (13)$$

Travail à réaliser

- 1) Identifier les termes de masse M , amortissement C et raideur K ainsi que les termes non-linéaires $f_{nl}(y)$ et les efforts extérieurs $p(t)$ afin de mettre l'équation (13) sous la forme vue en cours

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + K y + f_{nl}(y) = p(\tau) \quad (14)$$

- 2) Calculer la dérivée $\partial f_{nl}(y) / \partial y$ des efforts non-linéaires.
- 3) Intégrer les termes identifiés en 1) et la dérivée calculée en 2) dans l'algorithme de Newmark vu en cours pour l'adapter à l'équation (14).
- 4) Le résonateur a les caractéristiques suivantes :
 $l = 250 \times 10^{-6} \text{ m} = 250 \mu\text{m}$ $b = 40 \times 10^{-6} \text{ m} = 40 \mu\text{m}$ $h = 1 \times 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}$ $d = 0.03 \times 10^{-6} \text{ m} = 30 \text{ nm}$
 $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ (masse volumique du silicium)

$$V_{dc}=5V \quad V_{ac}=V_{dc}/10 \quad \varepsilon_0=8.5 \times 10^{-12} F.m^{-1}$$

Fréquence de résonance : $f_0=100MHz=100 \times 10^6 Hz$ (le résonateur oscille 100 millions de fois par seconde !!!)

$$\omega_0=2\pi f_0 (rad.s^{-1})$$

Facteur de qualité : $Q=1000 \quad \xi=1/Q$

Avec ces paramètres, calculer la réponse $y(\tau)$ du résonateur sans masse ajoutée ($\delta m=0$) à la pulsation $\Omega=1$ jusqu'au régime permanent.

On pourra utiliser 50 points par période pour l'intégration temporelle, et intégrer sur 2000 ou 3000 périodes pour être sûr de s'affranchir du régime transitoire.

- 5) Calculer la courbe de réponse (amplitude en régime périodique en fonction de la pulsation, voir cours) du résonateur sans masse ajoutée ($\delta m=0$) sur l'intervalle $\Omega=[0.985-1.005]$. Effectuer pour cela une montée en fréquence suivie d'une descente en fréquence.

En guise de validation, comparer la courbe obtenue aux résultats du fichier `courbe_reponse.txt` qui contient dans la première colonne les pulsations et dans la deuxième colonne les amplitudes de déplacement.

- 6) Calculer la courbe de réponse du résonateur avec masse ajoutée ($\delta m=10^{-13} kg$) sur l'intervalle $\Omega=[0.985-1.005]$.

Mesurer l'écart $\delta\Omega$ entre les sommets des 2 courbes de réponse (pour $\delta m=0$ et $\delta m=10^{-13} kg$). Le convertir en écart fréquentiel physique (non-adimensionné) δf .

- 7) Faire de même pour d'autres valeurs de masse ajoutée : $\delta m=10^{-14} kg$, $\delta m=10^{-15} kg$.

- 8) Dans la pratique, on mesure cet écart fréquentiel, ce qui permet de déduire la valeur de la masse ajoutée sur le capteur résonant. On obtient ainsi une balance de haute précision !

Si on suppose que la résolution fréquentielle du résonateur est de l'ordre de

$$\frac{\delta f}{f_0}=10^{-5}$$

alors le plus petit décalage fréquentiel qu'on peut mesurer vaut $\delta f=10^{-5} f_0$. A quelle masse ajoutée cela correspond-il environ ?

- 9) Lorsque la masse à mesurer devient très faible, l'écart fréquentiel devient lui aussi très faible et quasi impossible à mesurer. On préfère alors utiliser un autre processus de mesure.

Ce processus est décrit dans la figure 5. On va exploiter le caractère non-linéaire de la courbe de réponse, plus particulièrement le fait qu'il existe une ou plusieurs solutions selon la fréquence considérée : plusieurs solutions dans la zone de bi-stabilité (vue en cours sur l'exemple de l'oscillateur de Duffing) et une seule solution en dehors de cette zone.

On se place à une fréquence (pulsation) de fonctionnement fixe Ω_{op} proche du point limite indiqué sur la figure 5. Dans cette configuration, on se trouve dans la zone bistable du résonateur sans masse ajoutée (2 solutions stables A_1 et A_2 possibles sur la courbe rouge). Lorsqu'on ajoute une masse sur le résonateur, la courbe de réponse se décale vers les basses fréquences (courbe bleue). Etant donné que cette nouvelle courbe de réponse avec masse ajoutée ne possède qu'un seul point de fonctionnement B stable à Ω_{op} , on assiste à un brusque saut en amplitude de A_1 vers B.

Démarche :

- On se place à la pulsation de fonctionnement $\Omega_{op}=0.9925$
- On souhaite être sur le point de fonctionnement du bas (point A_1 sur la courbe rouge) lorsqu'il n'y a pas de masse ajoutée sur le résonateur. Pour être sûr d'être sur ce point, il faut choisir les bonnes conditions initiales qui vont mener à cette solution périodique. Tracer les bassins d'attraction (voir cours) des solutions A_1 et A_2 à $\Omega=\Omega_{op}$. On pourra utiliser une grille telle que $y_0 \in [-1,1]$ et $\dot{y}_0 \in [-2,2]$ et les

paramètres d'intégration suivants : 60 points par période pour l'intégration temporelle, et intégrer sur 2500 périodes.

- En déduire un jeu de conditions initiales (en déplacement et vitesse) qui permet d'atteindre le point de fonctionnement A_1 .
- Réaliser l'intégration temporelle pour $\delta m=0$ avec ce jeu de conditions initiales (sur 5000 périodes, de t_{init} à t_{tot}). Tracer le déplacement au cours du temps et vérifier que l'amplitude de la solution périodique correspond bien au point de fonctionnement A_1 visé.
- Ajouter une masse $\delta m=10^{-13} \text{ kg}$ et continuer l'intégration temporelle (de t_{tot} à $2t_{\text{tot}}$) en prenant comme conditions initiales le déplacement et la vitesse au temps final t_{tot} de l'intégration précédente. Tracer le déplacement au cours du temps sur le même graphe que précédemment (avec une autre couleur). Que constate-t-on ?
- Supprimer la masse ajoutée (revenir à $\delta m=0$) et continuer l'intégration temporelle (de $2t_{\text{tot}}$ à $3t_{\text{tot}}$) en prenant comme conditions initiales le déplacement et la vitesse au temps final $2t_{\text{tot}}$ de l'intégration précédente. Tracer le déplacement au cours du temps sur le même graphe que précédemment. Que constate-t-on ?
- Ajouter une masse $\delta m=10^{-14} \text{ kg}$ et continuer l'intégration temporelle (de $3t_{\text{tot}}$ à $4t_{\text{tot}}$) en prenant comme conditions initiales le déplacement et la vitesse au temps final t_{tot} de l'intégration précédente. Tracer le déplacement au cours du temps sur le même graphe que précédemment. Que constate-t-on ?
- On se place maintenant à la pulsation de fonctionnement $\Omega_{op}=0.9928$
- Recommencer les mêmes étapes que précédemment avec $\delta m=0$ puis $\delta m=10^{-14} \text{ kg}$ puis $\delta m=0$ et commenter les résultats obtenus.

Remarque : pour les tracés, on pourra utiliser le temps physique t (en s) plutôt que le temps adimensionné τ pour se rendre compte de la réactivité du capteur (due à la très haute fréquence de fonctionnement).

10) En guise de synthèse, lister quelques avantages et inconvénients des 2 méthodes de détection de masse (décalage en fréquence et saut d'amplitude).

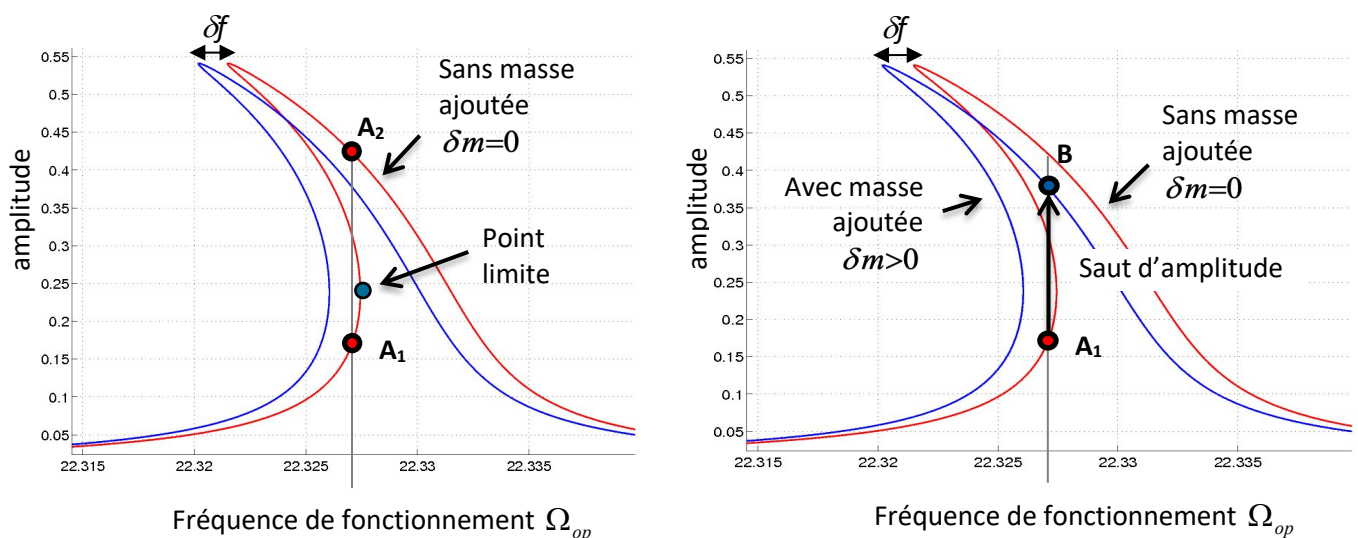


Fig.5 – Principe de détection basé sur les sauts d'amplitude