

Universidade de São Paulo
EESC

SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II
Prof. Marcelo Areias Trindade

Prática 1 - Zeros de funções

Aluno: Marcus Vinícius Costa Reis (12549384)

18/05/2022

Contents

1	Problema	3
1.1	Formulações	3
1.1.1	Parte 1	3
1.1.2	Parte 2	4
1.2	Resultados	5
1.2.1	Parte 1	5
1.2.2	Parte 2	5
1.3	Scripts	5
1.4	Gráficos	6
1.4.1	Parte 1	6
1.4.2	Parte 2	7
1.5	Análise do equilíbrio	8

1 Problema

- Determinar o deslocamento estático (devido ao peso) de uma suspensão automotiva (oblíqua), i.e. encontrar u para o qual o equilíbrio estático é alcançado.
- Deseja-se também calcular e visualizar graficamente como a rigidez efetiva (k_{ef}) varia com u e o valor de rigidez efetiva na proximidade da(s) configuração(ões) de equilíbrio estático.

Dados:

- $d = 0.2\text{ m}$, $L = 0.5\text{ m}$, $k = 10\text{ kN/m}$, $g = 9.81\text{ m/s}^2$
- $M = (180 + N)\text{ kg}$, onde N é formado pelos dois últimos algarismos do N° USP.
Neste caso, 84. Logo, $M = 264\text{ kg}$.

1.1 Formulações

1.1.1 Parte 1

Em primeira análise, é válido destacar que em decorrência da aplicação da carga W sobre a estrutura, ocorre um deslocamento u vertical para baixo, de modo que a componente vertical da força restauradora proveniente das molas, responsável por balancear a ação da carga, dependa de u .

A Figura 1 mostra uma situação geral, na qual a estrutura se encontra deslocada de u a partir do ponto superior inicial. As molas encontram-se comprimidas de um $\Delta L = L - L_f$, onde L_f é o comprimento das mesmas na situação em questão. Pela geometria, segue que

$$\begin{aligned} L_f^2 &= (h - u)^2 + d^2 = h^2 + d^2 + u^2 - 2hu = L^2 + u(u - 2h) \\ \implies L_f &= \sqrt{L^2 + u(u - 2h)} \quad (1) \end{aligned}$$

A Figura 2 mostra o diagrama de equilíbrio estático para o ponto material superior. Adotando-se o eixo y positivo vertical para cima, tem-se para o somatório de forças na vertical:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \implies 2f_m \sin \theta - W = 0 \\ \iff 2f_m \sin \theta &= W \quad (2) \end{aligned}$$

Evidencia-se, também, que $\sin \theta$ é função de u , e segue a relação:

$$\sin \theta = \frac{h - u}{L_f} \iff \sin \theta \stackrel{(1)}{=} \frac{h - u}{\sqrt{L^2 + u(u - 2h)}} \quad (3)$$

Em seguida, pela Lei de Hooke, tem-se que a força elástica f_m das molas segue a equação:

$$\begin{aligned} f_m &= -k(L_f - L) = k(L - L_f) \\ \implies f_m &= k \left[L - \sqrt{L^2 + u(u - 2h)} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

Por meio das equações 1, 2, 3 e 4, chega-se a uma equação envolvendo u :

$$\frac{2k \left[L - \sqrt{L^2 + u(u - 2h)} \right] (h - u)}{\sqrt{L^2 + u(u - 2h)}} = W \quad (5)$$

Expandindo, tem-se:

$$\frac{2kL(h-u)}{\sqrt{L^2 + u(u-2h)}} - 2k(h-u) = W \iff \frac{2kL(h-u)}{\sqrt{L^2 + u(u-2h)}} = W - 2k(h-u)$$

Quadrando ambos os membros da equação:

$$\frac{4k^2L^2(h-u)^2}{L^2 + u(u-2h)} = W^2 + 4Wk(h-u) + 4k^2(h-u)^2$$

Tendo em vista a forma complicada da expressão anterior e objetivando a possível obtenção de um polinômio, realizou-se a mudança de variável $v(u) = h - u$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{4k^2L^2v^2}{L^2 - (h^2 - v^2)} &= W^2 + 4Wkv + 4k^2v^2 \\ \iff 4k^2L^2v^2 &= (W^2 + 4Wkv + 4k^2v^2)[L^2 - (h^2 - v^2)] \end{aligned}$$

Expandindo:

$$4k^2L^2v^2 = W^2L^2 + 4WkL^2v + 4k^2L^2v^2 - W^2(h^2 - v^2) - 4Wkv(h^2 - v^2) - 4k^2v^2(h^2 - v^2)$$

Organizando:

$$\begin{aligned} (4k^2)v^4 + (4Wk)v^3 + (W^2 - 4k^2h^2)v^2 + [4Wk(l^2 - h^2)]v + W^2(l^2 - h^2) &= 0 \\ \iff g(v) &= (4k^2)v^4 + (4Wk)v^3 + (W^2 - 4k^2h^2)v^2 + [4Wk(l^2 - h^2)]v + W^2(l^2 - h^2) \end{aligned}$$

Desse modo, chegou-se a um polinômio de grau 4 em v . Após a determinação de suas raízes, pode-se simplesmente retomar a mudança de variável e encontrar os respectivos valores para u .

1.1.2 Parte 2

Agora, volta-se o foco para a análise da rigidez efetiva (k_{ef}) do sistema em questão, bem como sua dependência em relação a u .

A ideia baseia-se em encontrar um sistema hipotético equivalente ao original, no qual a carga W seja balanceada por uma força de mola equivalente f_{me} , que será dada por

$$f_{me} = k_{ef}u,$$

onde u é o deslocamento no sistema original.

Sendo assim, f_{me} deve ter módulo igual a $2f_m \sin \theta$, a resultante das forças elásticas na vertical para o caso original. Logo:

$$\begin{aligned} f_{me} = k_{ef}u &\implies k_{ef}u = 2f_m \sin \theta \\ \iff k_{ef} &\stackrel{(3),(4)}{=} 2k \frac{\left[L - \sqrt{L^2 + u(u-2h)} \right]}{\sqrt{L^2 + u(u-2h)}} \left(\frac{h}{u} - 1 \right) \quad (6) \end{aligned}$$

A expressão acima será analisada posteriormente.

1.2 Resultados

1.2.1 Parte 1

A partir do polinômio g de quarto grau em v encontrado anteriormente, foi possível colocar seus coeficientes no prompt do software Octave e, por meio do método interno *roots()*, encontrar os valores de v para os quais $g(v) = 0$.

Antes, porém, utilizou-se dos dados numéricos do problema para determinar o polinômio:

$$g(v) = 400v^4 + 103.59v^3 - 77.293v^2 + 4.1437v + 0.2683 \quad (7)$$

Vale ressaltar que foi utilizado $W = Mg = (264 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 2.5898 \text{ kN}$, bem como $h = 0.4583 \text{ m}$, obtido a partir da relação $h = (L^2 - d^2)^{1/2}$.

Chegou-se, então, aos seguintes valores para v :

$$v_1 = -0.604 \text{ m}, \quad v_2 = 0.275 \text{ m}, \quad v_3 = 0.108 \text{ m}, \quad v_4 = -0.037 \text{ m}$$

De posse da relação de mudança de variável ($v(u) = h - u$), pôde-se isolar u ($u(v) = h - v$) e encontrar, por fim, os possíveis valores para o deslocamento estático do sistema:

$$u_1 = 1.0624 \text{ m}, \quad u_2 = 0.1835 \text{ m}, \quad u_3 = 0.3504 \text{ m}, \quad u_4 = 0.4957 \text{ m}$$

Sabe-se, no entanto, que o deslocamento está restrito ao intervalo $(0, h) = (0, 0.4583)$, do ponto superior ao anteparo. Dessa forma, os valores de u para o equilíbrio são apenas u_2 e u_3 . Renomeando-os:

$$u_I = 0.1835 \text{ m}, \quad u_{II} = 0.3504 \text{ m}$$

1.2.2 Parte 2

Nesta etapa, serão apenas apresentados os valores de rigidez efetiva associados a u_I e u_{II} . O comportamento da função $k_{ef}(u)$ será discutido posteriormente.

Antes, porém, vale reescrever a equação 6 utilizando os valores numéricos das constantes:

$$k_{ef} = \frac{20[0.5 - \sqrt{0.25 + u(u - 0.9165)}](0.4583 - u)}{u\sqrt{0.25 + u(u - 0.9165)}}$$

Assim, chegou-se aos seguintes valores utilizando $u = u_I$ e $u = u_{II}$:

$$k_{ef}^I = 14.115 \text{ kN/m}, \quad k_{ef}^{II} = 7.3923 \text{ kN/m}$$

1.3 Scripts

As figuras 3 e 4 mostram os scripts em Octave utilizados para os cálculos anteriores.

```

Janela de Comandos
>> display('Polinomio g')
Polinomio g
>> g = [400 103.59 -77.293 4.1437 0.2683]
g =

    400.0000    103.5900   -77.2930     4.1437     0.2683

>> v = roots(g)
v =

   -0.604154
    0.274753
    0.107882
   -0.037456

>> display('Mudanca de variavel')
Mudanca de variavel
>> h = sqrt(0.5^2 - 0.2^2)
h = 0.4583
>> u = h - v
u =

    1.0624
    0.1835
    0.3504
    0.4957

>> |

```

Figure 1: Valores de u

```

Janela de Comandos
>> display('Rigidez efetiva')
Rigidez efetiva
>> u = [0.1835; 0.3504]
u =

    0.1835
    0.3504

>> u1 = u(1)
u1 = 0.1835
>> u2 = u(2)
u2 = 0.3504
>> kef = 20*(0.5 - sqrt(0.25+u1*(u1-0.9165)))*(0.4583 - u1)/(u1*sqrt(0.25+u1*(u1-0.9165)))
kef = 14.115
>> kef = 20*(0.5 - sqrt(0.25+u2*(u2-0.9165)))*(0.4583 - u2)/(u2*sqrt(0.25+u2*(u2-0.9165)))
kef = 7.3923
>> |

```

Figure 2: Valores de k_{ef}

1.4 Gráficos

1.4.1 Parte 1

Utilizando-se o Octave, foi possível plotar o gráfico correspondente ao polinômio g .

Escolheu-se um intervalo conveniente no eixo das abcissas para poder abranger as quatro raízes do polinômio. Todavia, o trecho de interesse está compreendido apenas no intervalo $(0, 0.4583)$, cujos extremos correspondem a $u = h = 0.4583$ e $u = 0$, respectivamente.

O Gráfico 1 mostra tal empreitada.

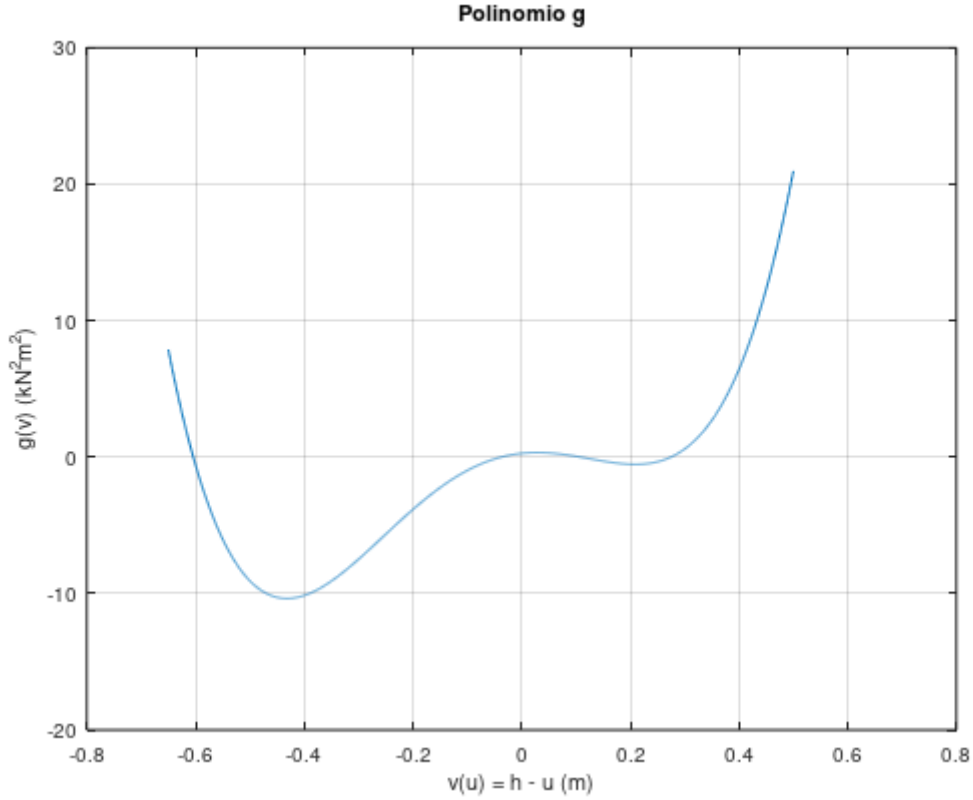


Figure 3: Curva do polinômio g (Gráfico 1)

1.4.2 Parte 2

O foco, no entanto, está na análise do gráfico que representa a curva de rigidez efetiva e sua variação com respeito ao deslocamento estático u . O último pôde ser também gerado por meio do Octave, no qual, novamente, escolheu-se uma região de interesse para destacar.

O resultado de tal ação é mostrado no Gráfico 2.

Faz-se importante, primordialmente, a análise da curva para duas situações, sendo elas: quando o deslocamento u tende a ser nulo ($u \rightarrow 0$) e quando u tende a h ($u \rightarrow h$).

Iniciando pela primeira situação, é válido interpretar seu significado no contexto do problema original. O deslocamento estático em questão ocorre em decorrência da ação da carga W aplicada, como já citado anteriormente. Sendo assim, se u tende a zero, então o sistema tende a uma situação na qual inexistente aplicação de carga. Portanto, a rigidez efetiva será uma equivalência à geometria das molas na situação indeformada.

Pensando em uma circunstância hipotética na qual as molas estivessem ambas na vertical, a rigidez efetiva seria dada por $k_{ef} = 2k$. Todavia, como o ângulo entre as molas e o chão é de aprox. $66.43^\circ = \sin^{-1}(h/L)$, espera-se um valor de k_{ef} próximo de $2k = 20 \text{ kN/m}$.

Observando o Gráfico 2, tem-se que a intuição anterior se mostra correta, tendo em vista que o valor de k_{ef} tende a alguma medida entre 16 kN/m e 17 kN/m . Vale, ainda, ressaltar, que o ponto exato da curva para o qual $u = 0$ não é definido, já que, pela eq. 6, estaria-se dividindo a expressão por zero. Trata-se de um ponto de descontinuidade removível.

No que diz respeito à segunda situação (quando $u \rightarrow h$), entende-se que as molas estariam convergindo para uma circunstância na qual ambas estariam na horizontal. Dessa maneira, não haveria força restauradora atuando na direção vertical, e a rigidez efetiva seria, por conseguinte, nula.

Pelo gráfico, observa-se que $u = 0.4583$ é zero da função, ou seja, $k_{ef}(0.4583) = 0$, confirmando o que foi discutido.

Uma última análise pertinente concerne ao comportamento da curva quando $u \rightarrow -\infty$. Fazendo analogia à situação real, pode-se pensar que o ângulo θ entre as molas e o anteparo estaria crescendo e tendendo a $\pi/2$, de forma que, então, as molas tenderiam a estar dispostas na vertical, e paralelas entre si. Desse modo, depreende-se que k_{ef} seria simplesmente $2k$. De fato, a curva tem uma assíntota horizontal em $k_{ef} = 20 \text{ kN/m}$.

Por fim, vale ressaltar que a partir do ponto de deslocamento $u = h = 0.4583 \text{ m}$, a curva não possui mais interpretação física, já que teria-se atravessado a linha do anteparo.

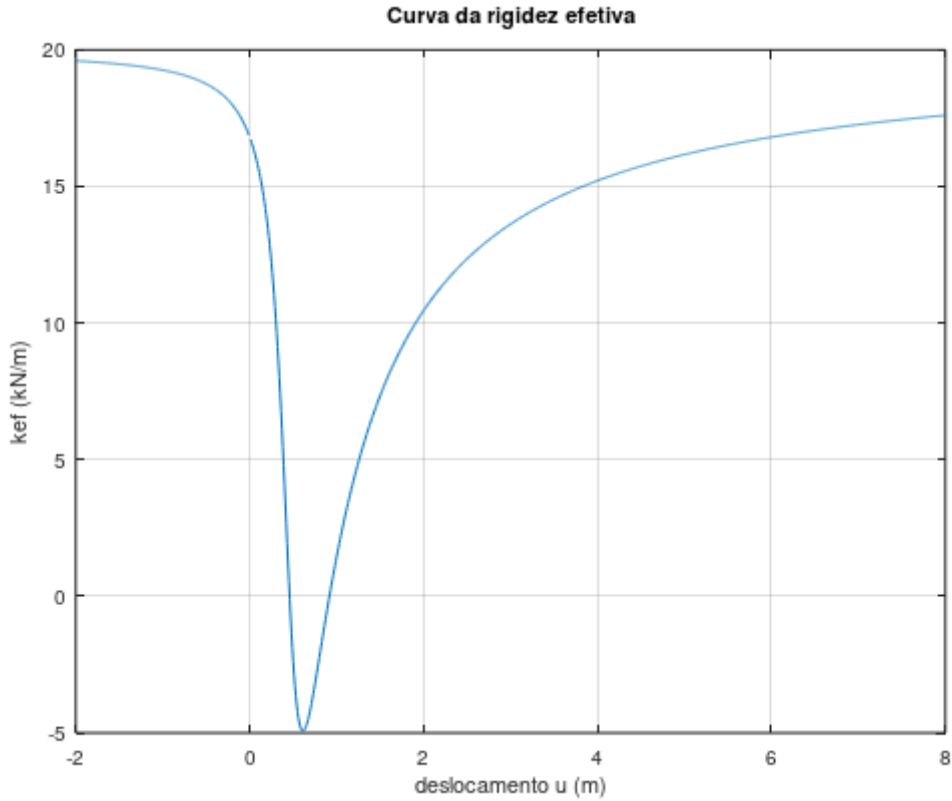


Figure 4: Curva de rigidez efetiva (Gráfico 2)

1.5 Análise do equilíbrio

Como foram encontrados dois valores distintos para o deslocamento estático u que satisfazem o equilíbrio da estrutura, faz-se conveniente analisar a estabilidade do equilíbrio em cada ponto encontrado.

Para tal, pode-se interpretar o polinômio g como a primeira derivada de uma função primitiva G , que não tem relação com o problema no momento. Fato é, como os valores de v encontrados são raízes de g , faz-se analogia à determinação de máximos e mínimos de funções (nesse caso seria analisada a primitiva G) para se utilizar do teste da segunda derivada e concluir a respeito da estabilidade do equilíbrio.

Desse modo, a função segunda derivada de G é a derivada primeira de g , de modo que se obtém:

$$z(v) = g'(v) \stackrel{(7)}{=} 1600v^3 + 310.77v^2 - 154.586v + 4.1437$$

Utilizando o Octave, calculou-se o valor de z nos pontos v_2 e v_3 (correspondentes a u_I e u_{II}). Obteve-se:

$$z(v_2) = 18.316 > 0, \quad z(v_3) = -6.9075 < 0$$

Dessa forma, conclui-se que o equilíbrio em $u = u_I$ é *estável*, enquanto em $u = u_{II}$, é *instável*.

Uma possível explicação sobre esses resultados pode ser obtida quando se observam os valores de k_{ef} em cada situação. Para $u = u_{II}$, o valor da rigidez efetiva é inferior à rigidez de cada mola sozinha. Isso aponta para uma certa instabilidade. Para $u = u_I$, esse valor é quase o dobro.

Ademais, se há uma desestabilização em $u = u_{II}$, o sistema tende a retornar para a posição $u = u_I$, de equilíbrio estável.