Universidade de São Paulo
EESC

SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II
Prof. Marcelo Areias Trindade

Prática 1 - Zeros de funções

Aluno: Marcus Vinícius Costa Reis (12549384)

18/05/2022

Contents

1 Problema

- Determinar o deslocamento estático (devido ao peso) de uma suspensão automotiva (oblíqua), i.e. encontrar u para o qual o equilíbrio estático é alcançado.
- Deseja-se também calcular e visualizar graficamente como a rigidez efetiva (k_{ef}) varia com u e o valor de rigidez efetiva na proximidade da(s) configuração(ões) de equilíbrio estático.

Dados:

- $d = 0.2\,m$, $L = 0.5\,m$, $k = 10\,kN/m$, $g = 9.81\,m/s^2$
- $M = (180 + N)\,kg$, onde N é formado pelos dois últimos algarismos do N° USP.

  Neste caso, 84. Logo, $M = 264\,kg$.

1.1 Formulações

1.1.1 Parte 1

Em primeira análise, é válido destacar que em decorrência da aplicação da carga W sobre a estrutura, ocorre um deslocamento u vertical para baixo, de modo que a componente vertical da força restauradora proveniente das molas, responsável por balancear a ação da carga, dependa de u.

A Figura 1 mostra uma situação geral, na qual a estrutura se encontra deslocada de u a partir do ponto superior inicial. As molas encontram-se comprimidas de um $\Delta L = L - L_f$, onde L_f é o comprimento das mesmas na situação em questão. Pela geometria, segue que

$$L_f^2 = (h-u)^2 + d^2 = h^2 + d^2 + u^2 - 2hu = L^2 + u(u-2h)$$

$$\implies L_f = \sqrt{L^2 + u(u-2h)} \;\; (1)$$

A Figura 2 mostra o diagrama de equilíbrio estático para o ponto material superior. Adotando-se o eixo y positivo vertical para cima, tem-se para o somatório de forças na vertical:

$$\sum F_y = 0 \implies 2f_m \sin\theta - W = 0$$

$$\iff 2f_m \sin\theta = W \;\; (2)$$

Evidencia-se, também, que $\sin\theta$ é função de u, e segue a relação:

$$\sin\theta = \frac{h-u}{L_f} \iff \sin\theta \overset{(1)}{=} \frac{h-u}{\sqrt{L^2 + u(u-2h)}} \;\; (3)$$

Em seguida, pela Lei de Hooke, tem-se que a força elástica f_m das molas segue a equação:

$$f_m = -k(L_f - L) = k(L - L_f)$$

$$\implies f_m = k\left[L - \sqrt{L^2 + u(u-2h)}\right] \;\; (4)$$

Por meio das equações 1, 2, 3 e 4, chega-se a uma equação envolvendo u:

$$\frac{2k\left[L - \sqrt{L^2 + u(u-2h)}\right](h-u)}{\sqrt{L^2 + u(u-2h)}} = W \;\; (5)$$

Expandindo, tem-se:

$$\frac{2kL(h-u)}{\sqrt{L^2+u(u-2h)}} - 2k(h-u) = W \iff \frac{2kL(h-u)}{\sqrt{L^2+u(u-2h)}} = W + 2k(h-u)$$

Quadrando ambos os membros da equação:

$$\frac{4k^2L^2(h-u)^2}{L^2+u(u-2h)} = W^2 + 4Wk(h-u) + 4k^2(h-u)^2$$

Tendo em vista a forma complicada da expressão anterior e objetivando a possível obtenção de um polinômio, realizou-se a mudança de variável $v(u) = h - u$. Assim:

$$\frac{4k^2L^2v^2}{L^2-(h^2-v^2)} = W^2 + 4Wkv + 4k^2v^2$$

$$\iff 4k^2L^2v^2 = (W^2 + 4Wkv + 4k^2v^2)[L^2-(h^2-v^2)]$$

Expandindo:

$$4k^2L^2v^2 = W^2L^2 + 4WkL^2v + 4k^2L^2v^2 - W^2(h^2-v^2) - 4Wkv(h^2-v^2) - 4k^2v^2(h^2-u^2)$$

Organizando:

$$(4k^2)v^4 + (4Wk)v^3 + (W^2-4k^2h^2)v^2 + [4Wk(l^2-h^2)]v + W^2(l^2-h^2) = 0$$

$$\iff g(v) = (4k^2)v^4 + (4Wk)v^3 + (W^2-4k^2h^2)v^2 + [4Wk(l^2-h^2)]v + W^2(l^2-h^2)$$

Desse modo, chegou-se a um polinômio de grau 4 em v. Após a determinação de suas raízes, pode-se simplesmente retomar a mudança de variável e encontrar os respectivos valores para u.

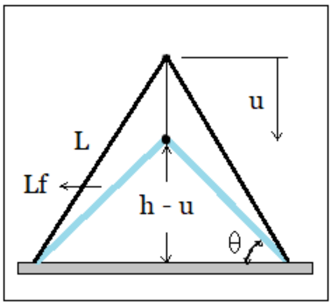

Figure 1: Situação geral (sistema deslocado de u)

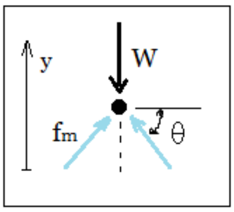

Figure 2: Diagrama de forças para o ponto material

1.1.2 Parte 2

Agora, volta-se o foco para a análise da rigidez efetiva (k_{ef}) do sistema em questão, bem como sua dependência em relação a u.

A ideia baseia-se em encontrar um sistema hipotético equivalente ao original, no qual a carga W seja balanceada por uma força de mola equivalente f_{m_e}, que será dada por

$$f_{m_e} = k_{ef} u \,,$$

onde u é o deslocamento no sistema original.

Sendo assim, f_{m_e} deve ter módulo igual a $2 f_m \sin\theta$, a resultante das forças elásticas na vertical para o caso original. Logo:

$$f_{m_e} = k_{ef} u \Longrightarrow k_{ef} u = 2 f_m \sin\theta$$

$$\Longleftrightarrow k_{ef} \overset{(3),(4)}{=} 2k \frac{\left[L - \sqrt{L^2 + u(u-2h)}\right]}{\sqrt{L^2 + u(u-2h)}} \left(\frac{h}{u} - 1\right) \quad (6)$$

A expressão acima será analisada posteriormente.

1.2 Resultados

1.2.1 Parte 1

A partir do polinômio g de quarto grau em v encontrado antriormente, foi possível colocar seus coeficientes no prompt do software Octave e, por meio do método interno *roots()*, encontrar os valores de v para os quais $g(v) = 0$.

Antes, porém, utilizou-se dos dados numéricos do problema para determinar o polinômio:

$$g(v) = 400v^4 + 103.59v^3 - 77.293v^2 + 4.1437v + 0.2683 \quad (7)$$

Vale ressaltar que foi utilizado $W = Mg = (264\,kg)(9.81\,m/s^2) = 2.5898\,kN$, bem como $h = 0.4583\,m$, obtido a partir da relação $h = (L^2 - d^2)^{1/2}$.

Chegou-se, então, aos seguintes valores para v:

$$v_1 = -0.604\,m\,,\ v_2 = 0.275\,m\,,\ v_3 = 0.108\,m\,,\ v_4 = -0.037\,m$$

De posse da relação de mudança de variável ($v(u) = h-u$), pôde-se isolar u ($u(v) = h-v$) e encontrar, por fim, os possíveis valores para o deslocamento estático do sistema:

$$u_1 = 1.0624\,m\,,\ u_2 = 0.1835\,m\,,\ u_3 = 0.3504\,m\,,\ u_4 = 0.4957\,m$$

Sabe-se, no entanto, que o deslocamento está restrito ao intervalo $(0, h) = (0, 0.4583)$, do ponto superior ao anteparo. Dessa forma, os valores de u para o equilíbrio são apenas u_2 e u_3. Renomeando-os:

$$u_I = 0.1835\,m\,,\ u_{II} = 0.3504\,m$$

1.2.2 Parte 2

Nesta etapa, serão apenas apresentados os valores de rigidez efetiva associados a u_I e u_{II}. O comportamento da função $k_{ef}(u)$ será discutido posteriormente.

Antes, porém, vale reescrever a equação 6 utlizando os valores numéricos das constantes:

$$k_{ef} = \frac{20[0.5 - \sqrt{0.25 + u(u - 0.9165)}](0.4583 - u)}{u\sqrt{0.25 + u(u - 0.9165)}}$$

Assim, chegou-se aos seguintes valores utilizando $u = u_I$ e $u = u_{II}$:

$$k_{ef}^{I} = 14.115\,kN/m\,,\ k_{ef}^{II} = 7.3923\,kN/m$$

1.3 Gráficos

1.3.1 Parte 1

Utilizando-se o Octave, foi possível plotar o gráfico correspondente ao polinômio g.

Escolheu-se um intervalo conveniente no eixo das abcissas para poder abranger as quatro raízes do polinômio. Todavia, o trecho de interesse está compreendido apenas no intervalo $(0, 0.4583)$, cujos extremos correspondem a $u = h = 0.4583$ e $u = 0$, respectivamente.

O Gráfico 1 mostra tal empreitada.

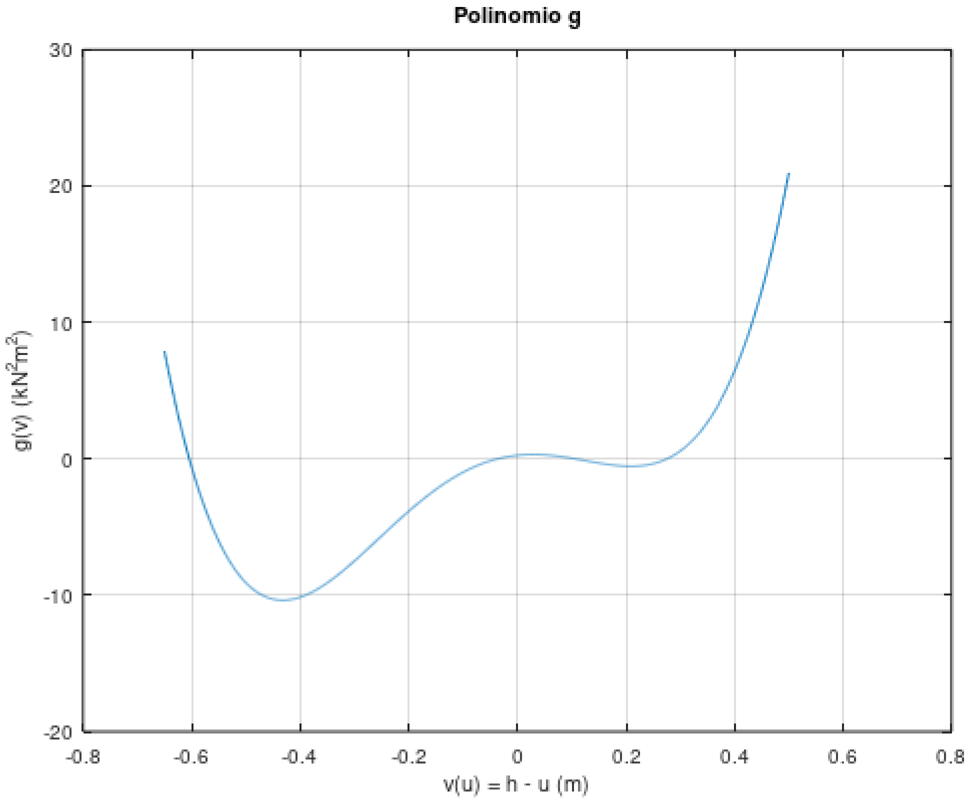

Figure 3: Curva do polinômio g (Gráfico 1)

1.3.2 Parte 2

O foco, no entanto, está na análise do gráfico que representa a curva de rigidez efetiva e sua variação com respeito ao deslocamento estático u. O último pôde ser também gerado por meio do Octave, no qual, novamente, escolheu-se uma região de interesse para destacar.

O resultado de tal ação é mostrado no Gráfico 2.

Faz-se importante, primordialmente, a análise da curva para duas situações, sendo elas: quando o deslocamento u tende a ser nulo $(u \to 0)$ e quando u tende a h $(u \to h)$.

Iniciando pela primeira situação, é válido interpretar seu significado no contexto do problema original. O deslocamento estático em questão ocorre em decorrência da ação da carga W aplicada, como já citado anteriormente. Sendo assim, se u tende a zero, então o sistema tende a uma situação na qual inexiste aplicação de carga. Portanto, a rigidez efetiva será uma equivalência à geometria das molas na situação indeformada.

Pensando em uma circunstância hipotética na qual as molas estivessem ambas na vertical, a rigidez efetiva seria dada por $k_{ef} = 2k$. Todavia, como o ângulo entre as molas e o chão é de aprox. $66.43° = \sin^{-1}(h/L)$, espera-se um valor de k_{ef} próximo de $2k = 20\,kN/m$.

Observando o Gráfico 2, tem-se que a intuição anterior se mostra correta, tendo em vista que o valor de k_{ef} tende a alguma medida entre $16\,kN/m$ e $17\,kN/m$. Vale, ainda, ressaltar, que o ponto exato da curva para o qual $u = 0$ não é definido, já que, pela eq. 6, estaria-se dividindo a expressão por zero. Trata-se de um ponto de descontinuidade removível.

No que diz respeito à segunda situação (quando $u \to h$), entende-se que as molas estariam convergindo para uma circunstância na qual ambas estariam na horizontal. Dessa maneira, não haveria força restauradora atuando na direção vertical, e a rigidez efetiva seria, por conseguinte, nula.

Pelo gráfico, observa-se que $u = 0.4583$ é zero da função, ou seja, $k_{ef}(0.4583) = 0$, cofirmando o que foi discutido.

Uma última análise pertinente concerne ao comportamento da curva quando $u \to -\infty$. Fazendo analogia à situação real, pode-se pensar que o ângulo θ entre as molas e o anteparo estaria crescendo e tendendo a $\pi/2$, de forma que, então, as molas tenderiam a estar dispostas na vertical, e paralelas entre si. Desse modo, depreende-se que k_{ef} seria simplesmente $2k$. De fato, a curva tem uma assíntota horizontal em $k_{ef} = 20\,kN/m$.

Por fim, vale ressaltar que a partir do ponto de deslocamento $u = h = 0.4583\,m$, a curva não possui mais interpretação física, já que teria-se atravessado a linha do anteparo.

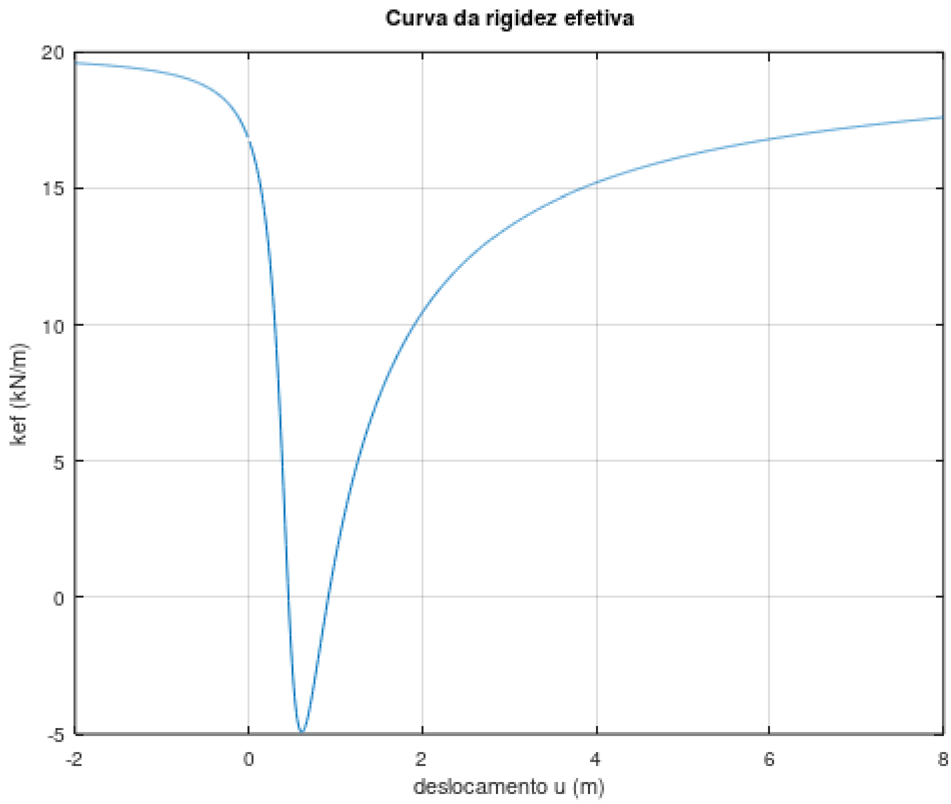

Figure 4: Curva de rigidez efetiva (Gráfico 2)

1.4 Análise do equilíbrio

Como foram encontrados dois valores distintos para o deslocamento estático u que satisfazem o equilíbrio da estrutura, faz-se conveniente analisar a establidade do equilíbrio em cada ponto encontrado.

Para tal, pode-se interpretar o polinômio g como a primeira derivada de uma função primitiva G, que não tem relação com o problema no momento. Fato é, como os valores de v encontrados são raízes de g, faz-se analogia à determinação de máximos e mínimos de funções (nesse caso seria analisada a primitiva G) para se utilizar do teste da segunda derivada e concluir a respeito da estabilidade do equilíbrio.

Desse modo, a função segunda derivada de G é a derivada primeira de g, de modo que se obtém:

$$z(v) = g'(v) \overset{(7)}{=} 1600v^3 + 310.77v^2 - 154.586v + 4.1437$$

Utilizando o Octave, calculou-se o valor de z nos pontos v_2 e v_3 (correspondentes a u_I e u_{II}). Obteve-se:

$$z(v_2) = 18.316 > 0\,, \quad z(v_3) = -6.9075 < 0$$

Dessa forma, conclui-se que o equilíbrio em $u = u_I$ é *estável*, enquanto em $u = u_{II}$, *instável*.

Uma possível explicação sobre esses resultados pode ser obtida quando se observam os valores de k_{ef} em cada situação. Para $u = u_{II}$, o valor da rigidez efetiva é inferior à rigidez de cada mola sozinha. Isso aponta para uma certa instabilidade. Para $u = u_I$, esse valor é quase o dobro.

Ademais, se há uma desestabilização em $u = u_{II}$, o sistema tende a retornar para a posição $u = u_I$, de equilíbrio estável.

1.5 Scripts

As figuras que se seguem mostram os scripts em Octave utilizados para os cálculos anteriores, bem como para a geração dos gráficos.

```
Janela de Comandos
>> display('Polinomio g')
Polinomio g
>> g = [400 103.59 -77.293 4.1437 0.2683]
g =

   400.0000   103.5900   -77.2930     4.1437     0.2683

>> v = roots(g)
v =

  -0.604154
   0.274753
   0.107882
  -0.037456

>> display('Mudanca de variavel')
Mudanca de variavel
>> h = sqrt(0.5^2 - 0.2^2)
h = 0.4583
>> u = h - v
u =

   1.0624
   0.1835
   0.3504
   0.4957

>> |
```

Figure 5: Valores de u

```
Janela de Comandos
>> display('Rigidez efetiva')
Rigidez efetiva
>> u = [0.1835; 0.3504]
u =

    0.1835
    0.3504

>> u1 = u(1)
u1 = 0.1835
>> u2 = u(2)
u2 = 0.3504
>> kef = 20*(0.5 - sqrt(0.25+u1*(u1-0.9165)))*(0.4583 - u1)/(u1*sqrt(0.25+u1*(u1-0.9165)))
kef = 14.115
>> kef = 20*(0.5 - sqrt(0.25+u2*(u2-0.9165)))*(0.4583 - u2)/(u2*sqrt(0.25+u2*(u2-0.9165)))
kef = 7.3923
>> |
```

Figure 6: Valores de k_{ef}

```
Janela de Comandos
>> v = -0.65:0.001:0.5;
>> g = 400*v.^4 + 103.59*v.^3 -77.293*v.^2 + 4.1437*v + 0.2683;
>> plot(v,g)
>> title('Polinomio g')
>> xlabel('v(u) = h - u (m)')
>> ylabel('g(v) (kN^2m^2)')
>> |
```

Figure 7: Plot do polinômio g

```
Janela de Comandos
>> u = -2:0.01:8;
>> kef = 20*(0.5-sqrt(0.25+u.*(u-0.9165))).*(0.4583-u)./(u.*sqrt(0.25+u.*(u-0.9165)));
>> plot(u,kef)
>> title('Curva da rigidez efetiva')
>> xlabel('deslocamento u (m)')
>> ylabel('kef (kN/m)')
>>
```

Figure 8: Plot da curva de rigidez efetiva

```
Janela de Comandos
>> display('Estabilidade do equilibrio')
Estabilidade do equilibrio
>> v2 = 0.274753
v2 = 0.2748
>> v3 = 0.107882
v3 = 0.1079
>> z = 1600*v2^3 + 310.77*v2^2 -154.586*v2 + 4.1437
z = 18.316
>> z = 1600*v3^3 + 310.77*v3^2 -154.586*v3 + 4.1437
z = -6.9075
>>
```

Figure 9: Estabilidade do equilíbrio

2 Conclusões

Em primeira instância, pode-se dizer que foi realizada uma análise minimamente razoável do problema proposto, de forma que se fez possível a determinação de duas configurações de equilíbrio estático para a estrutura envolvida, as quais puderam ser caracterizadas com valores de deslocamento e rigidez efetiva.

O trabalho com as formulações e equações envolvidas foi conduzido de maneira que as soluções se mostraram coerentes com o problema físico, sobretudo quando se observa o comportamento dos gráficos que foram construídos.

Por fim, pode-se afirmar que o uso do Octave como ferramenta computacional auxiliou grandemente na visualização e construção do que foi apresentado anteriormente.