Universidade de São Paulo
EESC

SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II
Prof. Marcelo Areias Trindade

Prática 4 - Aproximação numérica de EDOs de 1ª ordem

Aluno: Marcus Vinícius Costa Reis (12549384)

30/06/2022

Contents

1 Problema **3**

2 Formulações **3**

3 Resultados **4**

4 Gráficos **5**

4.1 v vs t 5
4.2 r vs θ 6
4.3 r vs t 7
4.4 θ vs t 8
4.5 $\dot{\theta}$ vs θ 9
4.6 $\dot{\theta}$ vs t 10
4.7 $\dot{r}$ vs t 11
4.8 $\dot{r}$ vs θ 12

5 Scripts **12**

5.1 Integração numérica 12
5.2 Funções de evolução 12
5.3 Gráficos de evolução 14
5.4 Obtenção de resultados 15

6 Conclusões **15**

1 Problema

- Dada a trajetória a ser executada por um corpo, conhecida em coordenadas polares $r(\theta) = 20(3 - 2\cos(\theta))\, cm$, encontrar a velocidade angular $\dot{\theta}$ a ser imposta para que o corpo execute o movimento com velocidade $v(t) = 0.05(100 + N)(100 - t)\, mm/s$, sendo N formado pelos dois últimos algarismos do Número USP do aluno.

  Nesse caso, $N = 84 \Rightarrow v(t) = 0.05(184)(100 - t) = 9.2(100 - t)\, mm/s$, ou

  $$v(t) = 9.2 \times 10^{-1}\,(100 - t)\, cm/s$$

- Usando um algoritmo de integração numérica, calcule a evolução do deslocamento angular $\theta(t)$ ao longo de ao menos três voltas completas
- Determine também a evolução do deslocamento radial $r(t)$
- Apresente as evoluções em gráficos (θ vs t, r vs t, $\dot{\theta}$ vs t, $\dot{r}$ vs t, r vs θ, v vs t)
- Usando a aproximação numérica, determine também quanto tempo é necessário para a execução de três voltas completas

2 Formulações

Em primeira instância, tem-se que o vetor velocidade de um corpo que executa uma trajetória descrita, como a do problema, em coordenadas polares, pode ser expresso por:

$$\vec{v}(t) = v_r(t)\vec{u}_r + v_\theta(t)\vec{u}_\theta\,,\ \text{onde}$$

$$v_r(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \dot{r}(t) \quad \text{e} \quad v_\theta(t) = r(t)\frac{d\theta(t)}{dt} = r(t)\dot{\theta}(t)$$

De forma compacta: $\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta$, com $v_r = \dot{r}$ e $v_\theta = r\dot{\theta}$.
Para o problema em questão, derivou-se $r(\theta)$ em função de θ para se obter

$$\dot{r}(\theta) = 40\sin\theta\, d\theta/dt$$

Assim,

$$v_r = 40\sin\theta\, d\theta/dt \ \text{ e } \ v_\theta = 20(3 - 2\cos\theta)\, d\theta/dt$$

Sabe-se que o módulo de $\vec{v}$ é dado por

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_r^2(t) + v_\theta^2(t)} \Longrightarrow v^2(t) = v_r^2(t) + v_\theta^2(t)$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
v^2(t) &= (40\sin\theta\, d\theta/dt)^2 + [20(3 - 2\cos\theta)\, d\theta/dt]^2 \\
&= 1600\sin^2\theta(d\theta/dt)^2 + 400(9 - 12\cos\theta + 4\cos^2\theta)(d\theta/dt)^2 \\
&= (1600\sin^2\theta + 3600 - 4800\cos\theta + 1600\cos^2\theta)(d\theta/dt)^2 \\
&= [1600(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 3600 - 4800\cos\theta](d\theta/dt)^2 \\
&= (5200 - 4800\cos\theta)(d\theta/dt)^2 \\
&= 400(13 - 12\cos\theta)(d\theta/dt)^2
\end{aligned}$$

No entanto, o corpo deve executar a trajetória com velocidade

$$v(t) = 9.2 \times 10^{-1}\,(100 - t)\,cm/s$$

Assim,

$$400(13 - 12\cos\theta)(d\theta/dt)^2 = [9.2 \times 10^{-1}\,(100 - t)]^2$$
$$\iff \frac{d\theta}{dt} = \frac{9.2 \times 10^{-1}\,(100 - t)}{20\sqrt{13 - 12\cos\theta}} \tag{1}$$

Tem-se, dessa maneira, que $d\theta/dt$ se apresenta como uma função de t e θ, ou seja,

$$\frac{d\theta}{dt} = \psi(\theta, t)$$

Pode-se, ainda, notar que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v(t)}{20\sqrt{13 - 12\cos\theta}}$$

Portanto, $d\theta/dt$ pode também ser entendida como uma função de θ e $v(t)$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi(\theta, v(t))$$

Por meio da expressão 1, pôde-se utilizar um algoritmo de integração numérica interno ao MATLAB para obter a evolução do deslocamento angular $\theta(t)$ da partícula, e consequentemente determinar as outras evoluções desejadas. Tais empreitadas serão melhor detalhadas na seção dos Resultados.

3 Resultados

Principiando pela determinação da evolução do deslocamento angular, utilizou-se do método interno ao MATLAB *ode45* para obter o vetor de valores de $\theta(t)$, conhecido o vetor tempo passado como argumento. O script utilizado é mostrado na seção *Scripts*.

Vale ressaltar que, a princípio, não era conhecido o tempo decorrido após três voltas completas. Sendo assim, utilizou-se um intervalo de teste:

$$t = [0 : 0.02 : 25]$$

Em seguida, a partir do uso do método *find*, encontrou-se a primeira posição no vetor $\theta(t)$ a partir da qual já se havia percorrido três voltas, ou seja, $6\pi\,rad$. O elemento de posição correspondente no vetor tempo é aproximadamente o tempo de três voltas. Novamente, os comandos utilizados são mostrados na seção *Scripts*.

Assim, foi possível determinar também as evoluções de $r(t)$, $\dot{r}(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ em função do tempo. Os gráficos puderam também ser construídos.

Com a discretização utilizada, chegou-se, por meio da função *find* à seguinte aproximação para o tempo t_3 decorrido após 3 voltas:

$$t_3 = 15.5200\,s$$

Sendo assim, percorreu-se as três voltas dentro do intervalo de teste utilizado. Por tal razão, manteve-se o intervalo para a criação dos gráficos de evolução.

A seu turno, o passo de tempo de $0.02\,s$ foi mantido após o retorno do valor de $\theta(t_3)$ obtido por meio da posição encontrada pelo método *find*

$$\theta(t_3) = 18.8633\ rad\,,$$

e sua comparação com o valor exato $6\pi = 18.8496\ rad$, de forma que

$$\frac{|\theta(t_3) - 6\pi|}{|\theta(t_3)|} \cdot 100 = 0.073\,\%$$

Por fim, o valor obtido para $r(t_3)$ foi de

$$r(t_3) = 20.0038\,cm\,,$$

bem próximo ao valor exato $r(\theta = 6\pi) = 20\,cm$.

4 Gráficos

Na presente seção, são mostrados os gráficos concernentes a algumas evoluções relacionadas ao movimento descrito pela partícula.

4.1 v vs t

O gráfico de v vs t é uma simples reta decrescente, descrita pela expressão já mencionada:

$$v(t) = 9.2 \times 10^{-1}\,(100 - t)\,cm/s$$

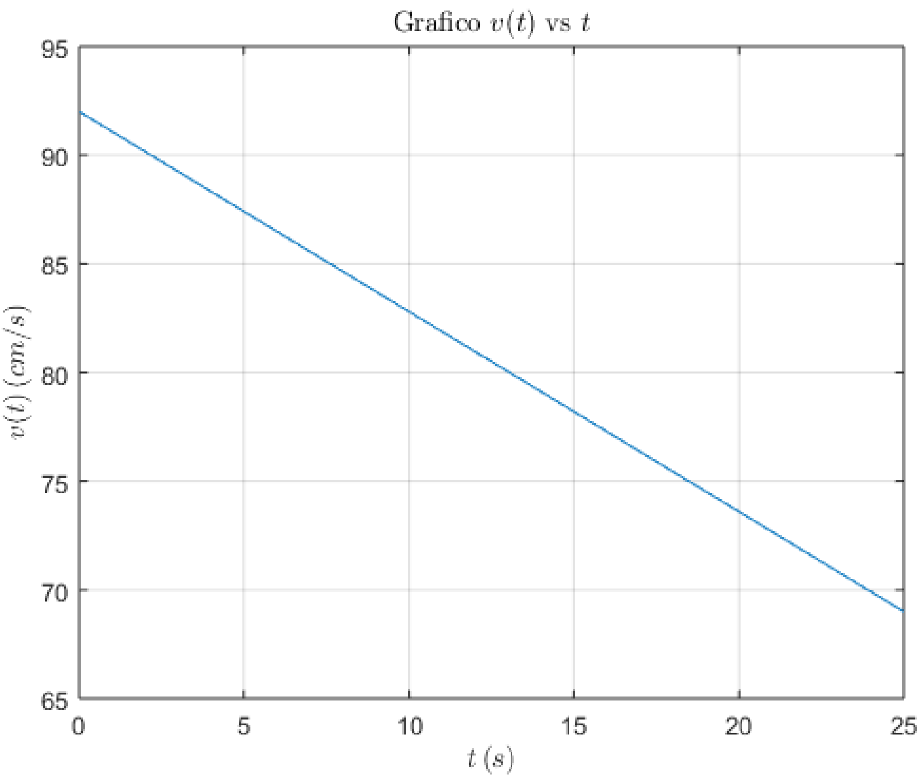

Figure 1: Gráfico 1: v vs t

4.2 r vs θ

O gráfico de r vs θ está diretamente relacionado com a trajetória descrita pelo corpo, cuja equação

$$r(\theta) = 20(3 - 2\cos(\theta))\,cm$$

mostra a periodicidade retratada no gráfico. Vale destacar que r é sempre positivo, já que representa uma distância, sendo esta medida da origem ao ponto onde se encontra o corpo.

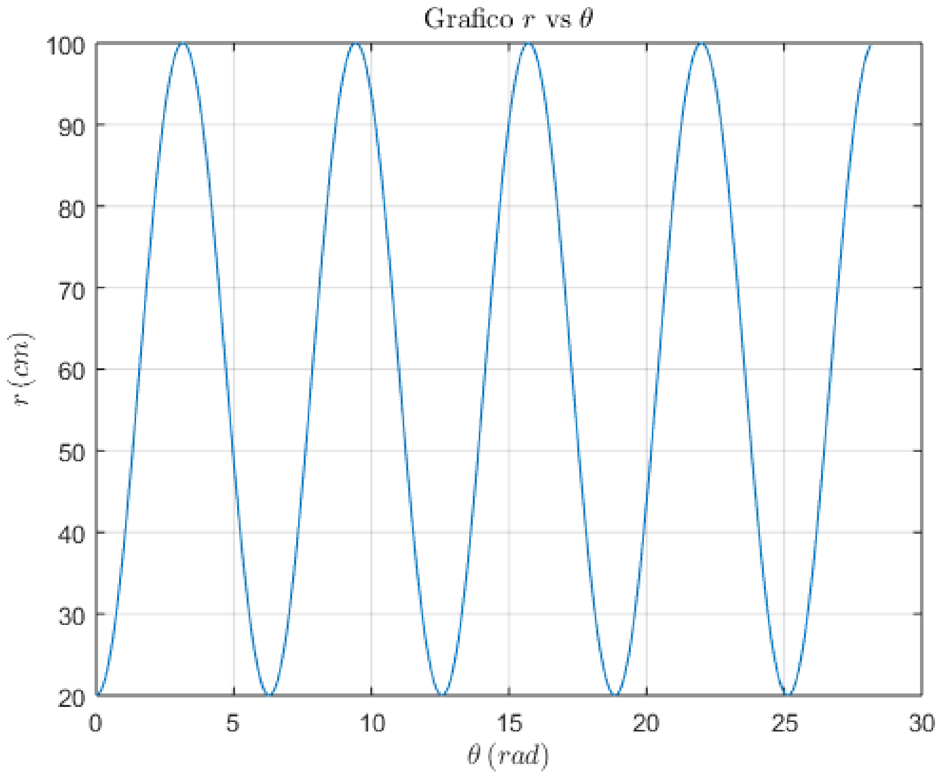

Figure 2: Gráfico 2: r vs θ

4.3 r vs t

O gráfico em questão é muito semelhante ao anterior, e a diferença segue da relação entre θ e t.

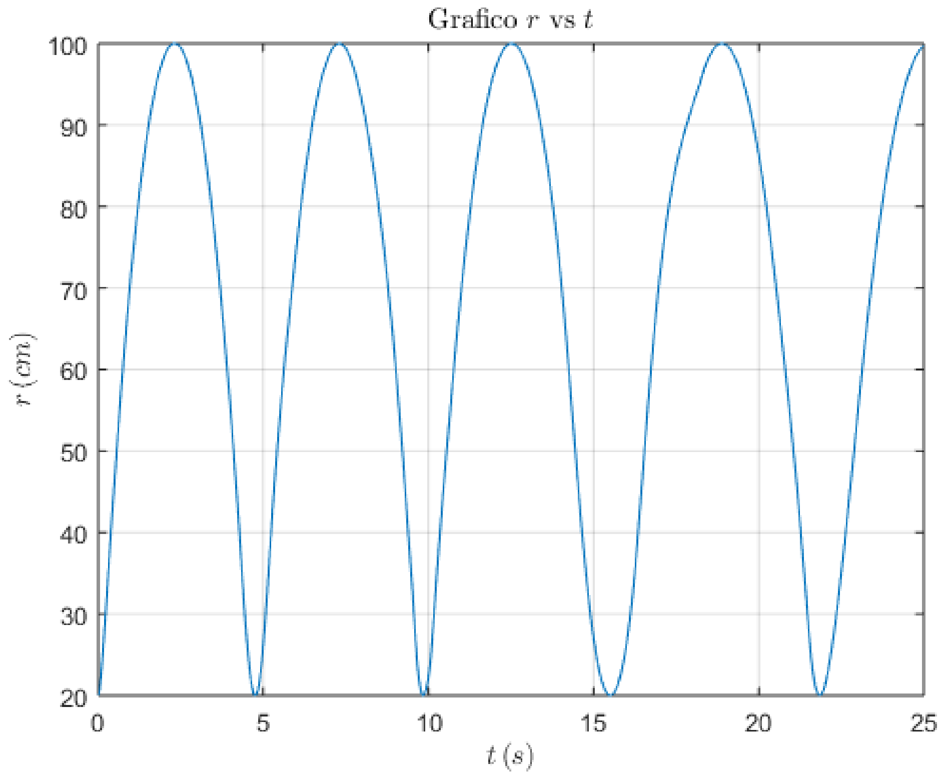

Figure 3: Gráfico 3: r vs t

4.4 θ vs t

O gráfico θ vs t é a representação direta da solução de integração numérica obtida através do MATLAB. Claramente a relação não é linear, o que pode ser previsto observando que θ aparece como argumento do cos na Equação 1.

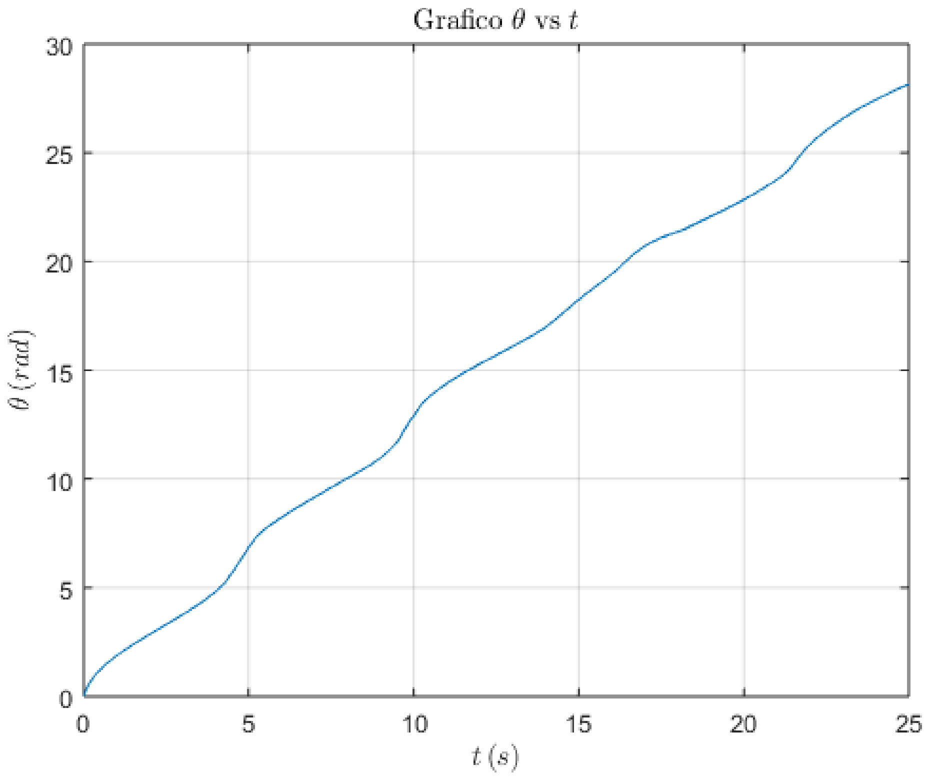

Figure 4: Gráfico 4: θ vs t

4.5 $\dot{\theta}$ vs θ

O que é válido destacar nesse gráfico é a diminuição da altura dos picos conforme θ tem sua progressão, o que está de acordo com o comportamento decrescente do módulo da velocidade da partícula.

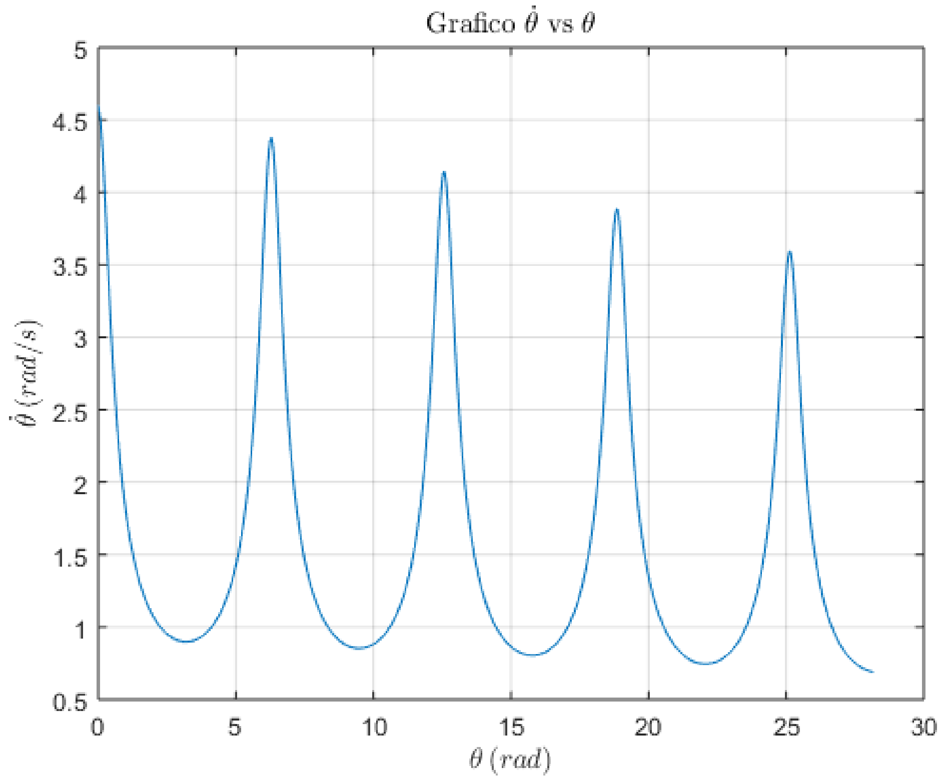

Figure 5: Gráfico 5: $\dot{\theta}$ vs θ

4.6 $\dot{\theta}$ vs t

Análogo ao anterior.

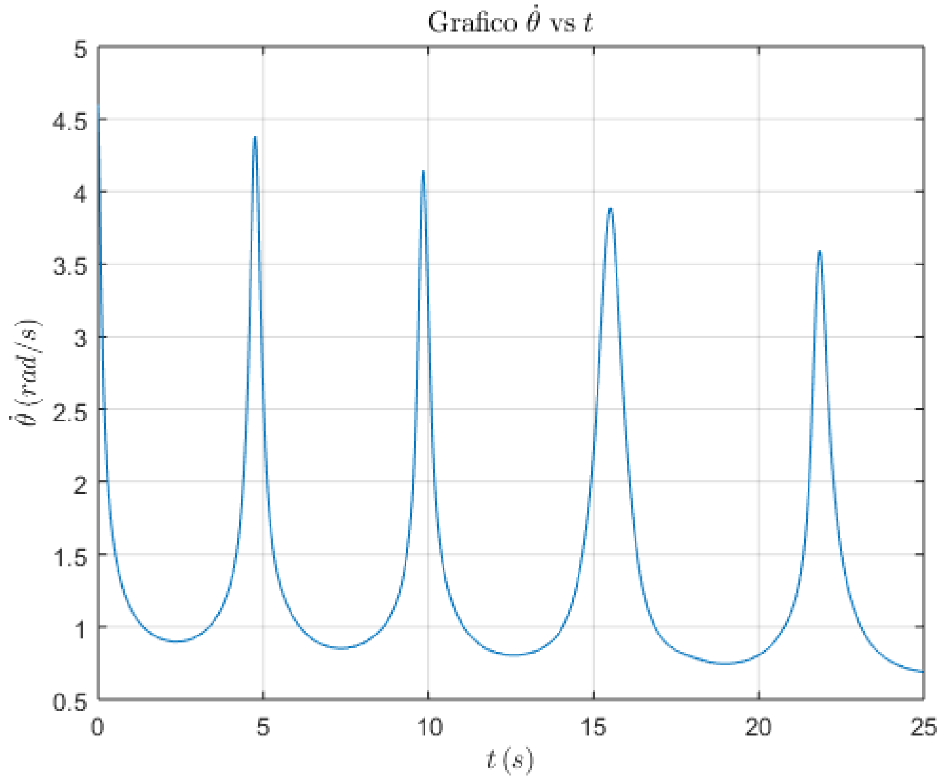

Figure 6: Gráfico 6: $\dot{\theta}$ vs t

4.7 $\dot{r}$ vs t

O gráfico em questão estabelece o comportamento da velocidade radial, que se relaciona indiretamente com o formato da trajetória. É válido destacar a espécie de curva de onda formada, que alterna entre valores positivos e negativos, o que é explicado pela simetria da trajetória em relação ao eixo-x, de modo que em metade do percurso o raio cresce, enquanto na outra metade, decresce.

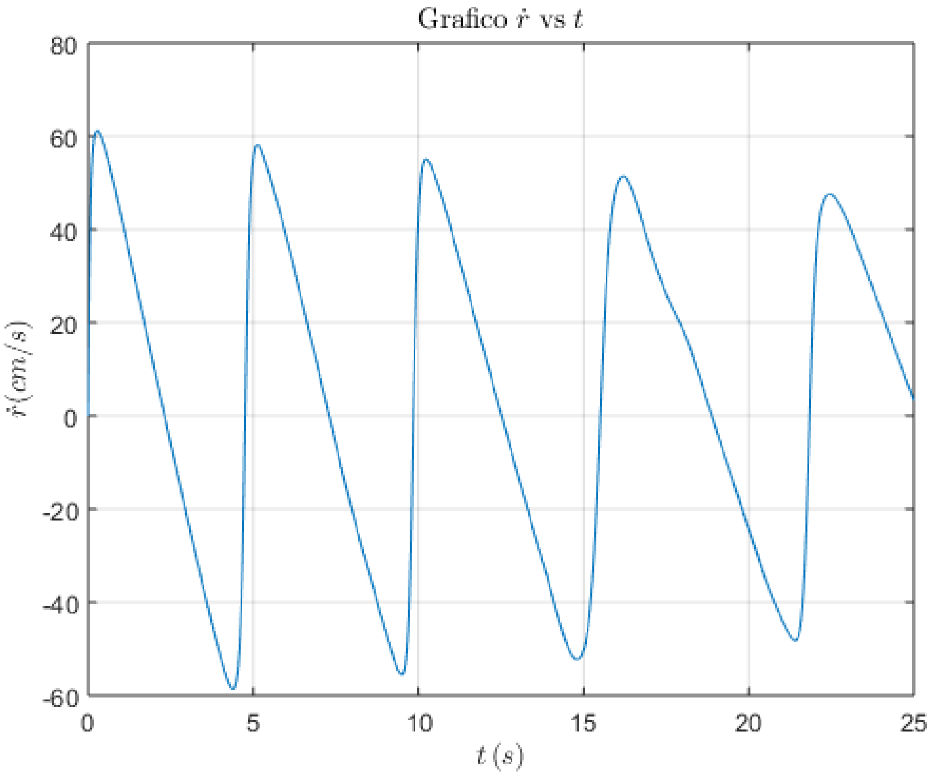

Figure 7: Gráfico 7: $\dot{r}$ vs t

4.8 $\dot{r}$ vs θ

Análogo ao anterior, com uma curva mais suave.

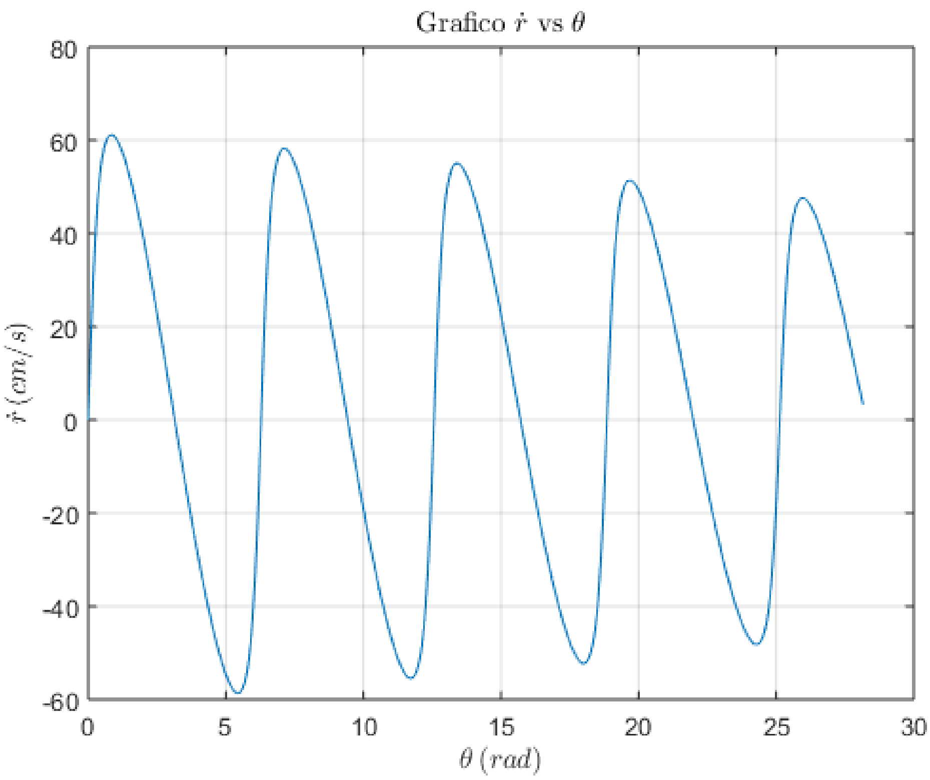

Figure 8: Gráfico 8: $\dot{r}$ vs θ

5 Scripts

Nessa seção, apresentam-se os scripts utilizados para a obtenção das evoluções e seus gráficos.

5.1 Integração numérica

```
function [t,s] = ang_desloc
    ti = 0; dt = 0.02; tf = 25;
    [t,s] = ode45(@(t,s) ang_vel(t,s),[ti:dt:tf],[0]);

```

Listing 1: integração numérica; *ang_desloc* é declarada em separado

Obs.: [0] representa a condição inicial para θ ($\theta(t=0)=0$).

5.2 Funções de evolução

```
function dsdt = ang_vel(t,s)
    dsdt = 0.92*(100-t)./(20*(13-12*cos(s)).^(1/2));

```

Listing 2: derivada de theta como função de theta e t

```
function r = rad_desloc (t,dt,vs)
kf = t(end)/dt + 1;
    for k = 1:kf
        r(k) = 20*(3-2*cos(vs(k)));
    end

```

Listing 3: deslocamento radial

```
function drdt = rdot(t,dt,vs,ds)
kf = t(end)/dt + 1;
    for k = 1:kf
        drdt(k) = 40*sin(vs(k))*ds(k);
    end

```

Listing 4: velocidade radial

```
function v = vel (t,dt)
kf = t(end)/dt + 1;
    for k = 1:kf
        v(k) = 0.92*(100 - t(k));
    end

```

Listing 5: módulo da velocidade

5.3 Gráficos de evolução

```
% Script utilizado para graficar as evolucoes desejadas

% Integracao numerica para obter evolucao de theta(t)
[t,theta] = ang_desloc;
dt = t(2) - t(1);  % passo

% Chamando as funcoes para obter theta', r, r', v
v = vel(t,dt);
r = rad_desloc(t,dt,theta);
theta_pt = ang_vel(t,theta);
r_pt = rdot(t,dt,theta,theta_pt);

% Construcao dos graficos de evolucao
i = 'Interpreter'; l = 'latex';

figure(1)  % v x t
plot(t,v), grid
title('Grafico $v(t)$ vs $t$',i,l)
xlabel('$t \,(s)$',i,l), ylabel('$v(t) \,(cm/s)$',i,l)

figure(2)  % r x theta
plot(r,theta), grid
title('Grafico $r$ vs $\theta$',i,l)
xlabel('$\theta \,(rad)$',i,l), ylabel('$r \,(cm)$',i,l)

figure(3)  % theta vs t
plot(t,theta), grid
title('Grafico $\theta$ vs $t$',i,l)
xlabel('$t \,(s)$',i,l), ylabel('$\theta \,(rad)$',i,l)

figure(4)  % r x t
plot(t,r), grid
title('Grafico $r$ vs $t$',i,l)
xlabel('$t \,(s)$',i,l), ylabel('$r \,(cm)$',i,l)

figure(5)  % theta_pt vs t
plot(t,theta_pt), grid
title('Grafico $\dot \theta$ vs $t$',i,l)
xlabel('$t \,(s)$',i,l), ylabel('$\dot \theta \,(rad/s)$',i,l)

figure(6)  % r_pt vs t
plot(t,r_pt), grid
title('Grafico $\dot r$ vs $t$',i,l)
xlabel('$t \,(s)$',i,l), ylabel('$\dot r (cm/s)$',i,l)

figure(7)  % theta_pt vs theta
plot(theta,theta_pt), grid
title('Grafico $\dot \theta$ vs $\theta$',i,l)
xlabel('$\theta \,(rad)$',i,l), ylabel('$\dot \theta \,(rad/s)$',i,l)
```

Listing 6: construção dos gráficos de evolução

5.4 Obtenção de resultados

```
>> [t,theta] = ang_desloc;
>> vpos = find(theta > 6*pi);
>> pos = vpos(1)
>> pos == 777

>> t(777)
>> t == 15.5200

>> theta(777)
>> ans == 18.8633

>> r = rad_desloc(t,dt,theta);
>> r(777)
>> r == 20.0038

```

Listing 7: sequência de comandos utilizados para obtenção de certos resultados; e seus retornos

6 Conclusões

Em primeira análise, pode-se dizer que foi realizado um estudo minimamente razoável do problema proposto, de modo que se obtiveram resultados e comportamentos condizentes com a trajetória desenvolvida pelo corpo em questão.

Ademais, a aproximação de integração numérica da qual se fez uso proporcionou resultados plausíveis e confiáveis.

Por fim, deve-se destacar o papel essencial associado ao MATLAB, seus métodos e funcionalidades, nas construções e determinações realizadas.