

Universidade de São Paulo
EESC

SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II
Prof. Marcelo Areias Trindade

Prática 2 - Aproximação de integrais

Aluno: Marcus Vinícius Costa Reis (12549384)

08/06/2022

Contents

1	Problema	3
2	Formulações	3
3	Resultados	4
3.1	Velocidade	4
3.2	Aceleração	4
3.3	Tempo	4
3.3.1	Função <i>trapz</i>	6
3.3.2	Função <i>quad</i>	6
3.3.3	Algumas breves comparações	7
4	Gráficos	7
5	Scripts	9
6	Conclusões	10

1 Problema

Um veículo se desloca com trajetória circular de raio $r = 100\text{ m}$. Considerando que ele inicia o movimento com velocidade inicial de $v_0 = (10 + 0.1N)\text{ m/s}$ e acelera com $a_t = (4 - 0.01s^2)\text{ m/s}^2$ (onde $N = 84 \Rightarrow v_0 = 18.4\text{ m/s}$):

- Determine o módulo da velocidade do veículo desenvolvida ao longo da trajetória $v(s)$, faça um gráfico (v vs s), e calcule a velocidade alcançada depois de percorrer 20 m .
- Determine o módulo da aceleração do veículo ao longo da trajetória $a(s)$, faça um gráfico (a vs s), e calcule a aceleração alcançada depois de percorrer 20 m .
- Usando um método numérico de aproximação de integrais, determine o tempo necessário para o veículo percorrer 20 m .

2 Formulações

Em primeira instância, tendo em vista a dinâmica do problema em questão, vale relembrar alguns princípios da cinemática escalar, os quais auxiliarão nas determinações requeridas.

Tem-se que o módulo da velocidade v de um ponto material em uma dada trajetória corresponde à taxa de variação da posição s em função do tempo t :

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

A seu turno, o módulo da aceleração tangencial a_t , responsável por alterar o módulo de v , é dada por:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

Comparando as eq. 1 e 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} ds &= \frac{1}{a_t} dv \iff a_t ds = v dv \\ \iff \int a_t(s) ds &= \int v dv \end{aligned} \quad (3)$$

Desse modo, se a aceleração tangencial é conhecida como função da posição, consegue-se encontrar v em função de s .

Da eq. 1 ainda é possível obter:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{v} ds \iff \\ \int dt &= \int \frac{1}{v(s)} ds \end{aligned} \quad (4)$$

Portanto, de forma análoga, obtém-se o tempo em função da posição se é conhecida a expressão de v em função de s .

Vale ainda ressaltar que o problema em questão analisa um movimento circular. Sendo assim, há também uma componente normal a_n da aceleração, a qual é dada por:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (5)$$

O módulo da aceleração do ponto material é, por conseguinte, composição das duas componentes:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (6)$$

Pode-se, agora, partir para as determinações desejadas.

3 Resultados

3.1 Velocidade

Utilizando-se a eq. 3, juntamente com as informações $a_t(s) = (4 - 0.01s^2) m/s^2$ e $v_0 = 18.4 m/s$, obteve-se:

$$\begin{aligned} \int_0^s (4 - 0.01s^2) ds &= \int_{18.4}^{v(s)} v dv \\ \Rightarrow \left[\frac{1}{2}v^2 \right]_{18.4}^{v(s)} &= \left[4s - \frac{0.01}{3}s^3 \right]_0^s \Rightarrow v^2(s) = 8s - \frac{0.02}{3}s^3 + 18.4^2 \\ \Leftrightarrow v(s) &= \sqrt{338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3} \quad (m/s) \end{aligned} \quad (7)$$

Avaliando a expressão anterior em $s = 20 m$:

$$v_{20} = v(20) = 21.1 m/s$$

3.2 Aceleração

Com a eq. 5 e o dado $r = 100 m$, pôde-se encontrar a expressão para a aceleração normal:

$$a_n(s) = \frac{v^2(s)}{r} = \frac{1}{100} \left(338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3 \right) \quad (m/s^2) \quad (8)$$

Utilizando-se da eq. 6 e da expressão dada para $a_t(s)$, chegou-se ao módulo da aceleração da partícula:

$$\begin{aligned} a(s) = \sqrt{a_t^2(s) + a_n^2(s)} &\Rightarrow a(s) = \sqrt{(4 - 0.01s^2)^2 + \left[\frac{1}{100} \left(338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3 \right) \right]^2} \\ \Leftrightarrow a(s) &= 1.5 \times 10^4 [s^6 + (2.01 \times 10^4)s^4 + (-1.01568 \times 10^5)s^3 + (-1.656 \times 10^7)s^2 + \\ &\quad + (1.21882 \times 10^8)s + 6.17901 \times 10^9] \quad (m/s^2) \end{aligned}$$

Avaliando a expressão anterior em $s = 20 m$:

$$a_{20} = a(20) = 4.4523 m/s^2$$

3.3 Tempo

Por meio da eq. 4, bem como da expressão 7, chegou-se à relação para o tempo t_{20} decorrido após a partícula ter percorrido $20 m$:

$$t_{20} = \int_0^{t_{20}} dt = \int_0^{20} \frac{1}{v(s)} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{20} = \int_0^{20} \frac{1}{\sqrt{338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3}} ds = \int_0^{20} \left(338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3 \right)^{-\frac{1}{2}} ds$$

Como é possível perceber, a integral anterior não é de trivial resolução. Nesse sentido, optou-se pelo emprego de algumas ferramentas computacionais proporcionadas pelo software *Octave*, no intuito de aproximar seu resultado por meio de métodos numéricos.

Antes, porém, acreditou-se ser pertinente a visualização gráfica da área sob o gráfico da curva relativa ao integrando ($1/v(s)$), de modo a possibilitar a obtenção de uma noção sobre o valor procurado. Tal empreitada é mostrada no Gráfico 1.

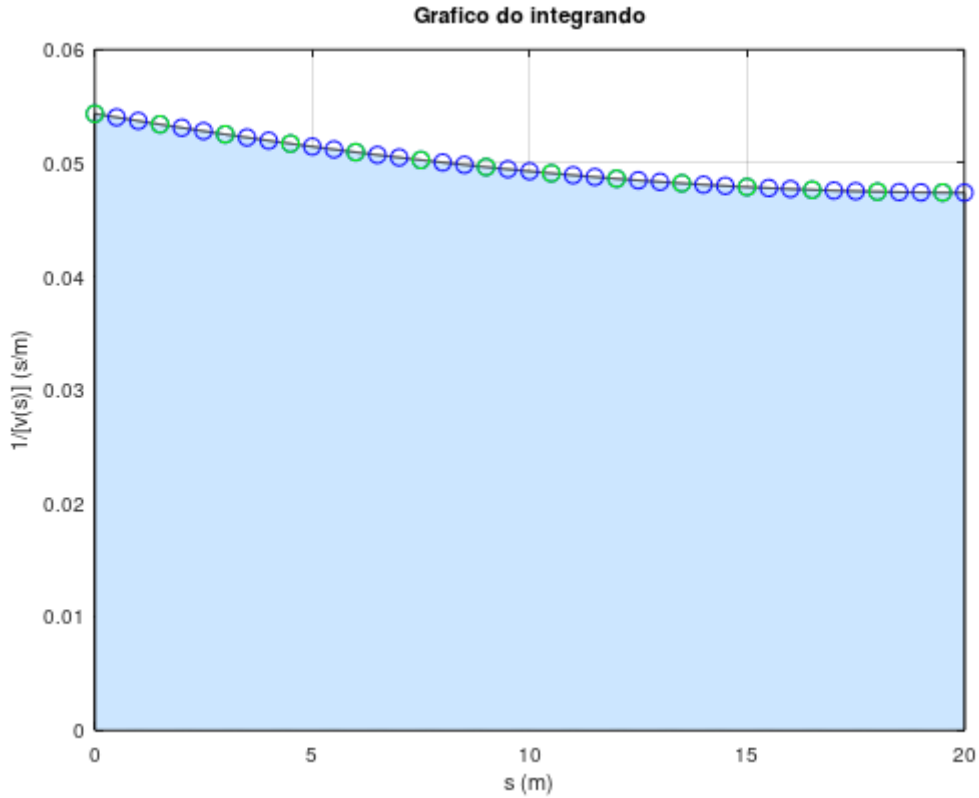


Figure 1: Gráfico 1: Área sob a curva do integrando

Por uma análise meramente visual da área A obtida, pode-se fazer uma primeira aproximação para seu valor. É possível notar que a área em questão pode ser aproximada por um retângulo de base 20 e altura 0.05. Haveria uma subestimação aproximadamente no trecho $[0, 10]$ e uma superestimação no trecho subsequente $(10, 20]$. No entanto, visualmente essas flutuações parecem se cancelar. Sendo assim, o retângulo mencionado parece uma boa aproximação inicial.

Logo:

$$A_{inicial} \approx 20 \cdot 0.05 = 1$$

Mas, a área A representa o tempo t_{20} decorrido.

Portanto:

$$t_{20} \approx 1 \text{ s}$$

3.3.1 Função *trapz*

A princípio, optou-se pela utilização do método *trapz* do *Octave*, que aproxima a área cujo valor se deseja obter por meio de trapézios. O método depende da discretização escolhida. Sendo assim, realizou-se três discretizações distintas para fins de comparação de resultados, as quais são mostradas no Gráfico 1, uma em preto, outra em círculos azuis, e outra em círculos verdes:

- Discretização em *preto*: $s_1 = [0 : .1/50 : 20]$
- Discretização em *azul*: $s_2 = [0 : .5 : 20]$
- Discretização em *verde*: $s_3 = [0 : 1.5 : 20]$

Desse modo, aplicando as discretizações ao método *trapz*, chegou-se aos valores de t_{20}^i respectivos às discretizações s_i , $i = 1, 2, 3$:

$$t_{20}^3 = 0.9725 \text{ s}, \quad t_{20}^2 = 0.9961 \text{ s}, \quad t_{20}^1 = 0.9961 \text{ s}$$

O comando utilizado no prompt do *Octave* foi $t_{20}^i = \text{trapz}(s_i, y_i)$, onde $y_i = 1/v(s_i)$, para cada $i = 1, 2, 3$.

Obviamente, as variáveis foram declaradas de modo a estar de acordo com a sintaxe do software.

Analisando os resultados, vê-se que, para a precisão escolhida, os valores de t_{20}^2 e t_{20}^1 foram idênticos, apontando para a convergência para o valor apresentado. Mesmo a discretização mais grossa, s_3 , não produziu um resultado discrepante; pelo contrário, foi bem próximo ao das outras discretizações mais finas.

Essa proximidade de resultados pode ser justificada pela suavidade da curva acima da área calculada, como constatado no Gráfico 1. Outrossim, a aproximação inicial $t_{20} \approx 1$ chegou muito próxima de 0.9961.

3.3.2 Função *quad*

No intuito de obter uma comparação entre os métodos, além de ter outra via para a obtenção do valor de t_{20} , optou-se por utilizar, também, o método *quad* do *Octave*. Tal método se utiliza da regra de Simpson para aproximar o valor da integral com uma precisão de 10^{-6} por *default*.

Optou-se por realizar o comando no prompt do *Octave* e utilizar a declaração de uma *anonymous function*. As linhas de código utilizadas foram as seguintes:

- `>> integ = @(s) (-(0.02/3) * s.^3 + 8 * s + 338.56).^(-1/2);`
- `>> quad(integ, 0, 20)`

O retorno foi $ans = 0.9961$. Assim:

$$t_{20}^{quad} = 0.9961 \text{ s}$$

3.3.3 Algumas breves comparações

No intuito de comparar o resultado mais preciso dentre os obtidos pelo uso da *trapz*, t_{20}^1 e o valor t_{20}^{quad} obtido a partir da função *quad*, formatou-se os mesmos com o comando *format long*.

Obteve-se:

$$t_{20}^1 = 0.996082859579149, \quad t_{20}^{quad} = 0.996082859365112$$

Calculando a diferença relativa entre eles:

$$\frac{|t_{20}^{quad} - t_{20}^1|}{|t_{20}^{quad}|} \cdot 100 \approx 2 \times 10^{-8} \%$$

Pela ínfima diferença, é válido assumir o valor

$$t_{20} = 0.99608286 \text{ s}$$

como a solução para o problema.

Pode-se, agora, verificar o erro da aproximação visual inicial:

$$\frac{|t_{20} - t_{20}^{approx}|}{|t_{20}|} \cdot 100 \approx 4 \times 10^{-1} \%$$

É possível dizer, então, que, nesse caso, a aproximação visual foi bastante confiável.

4 Gráficos

Nessa seção, são apresentados os gráficos da velocidade e da aceleração desenvolvida pela partícula.

Algo interessante a ser notado é que v_{20} corresponde ao máximo de velocidade no trecho analisado, o que pode ser comprovado quando se observa

$$\frac{dv(s)}{dt} = a_t(s) = 4 - 0.01s^2 = 0 \iff s = \pm\sqrt{400} = \pm 20 \text{ m}$$

A seu turno, a_{20} corresponde a um mínimo de aceleração, já que $a_t(20) = 0$, e, portanto, a contribuição para o módulo de $a(s)$ provém unicamente de $a_n(s)$.

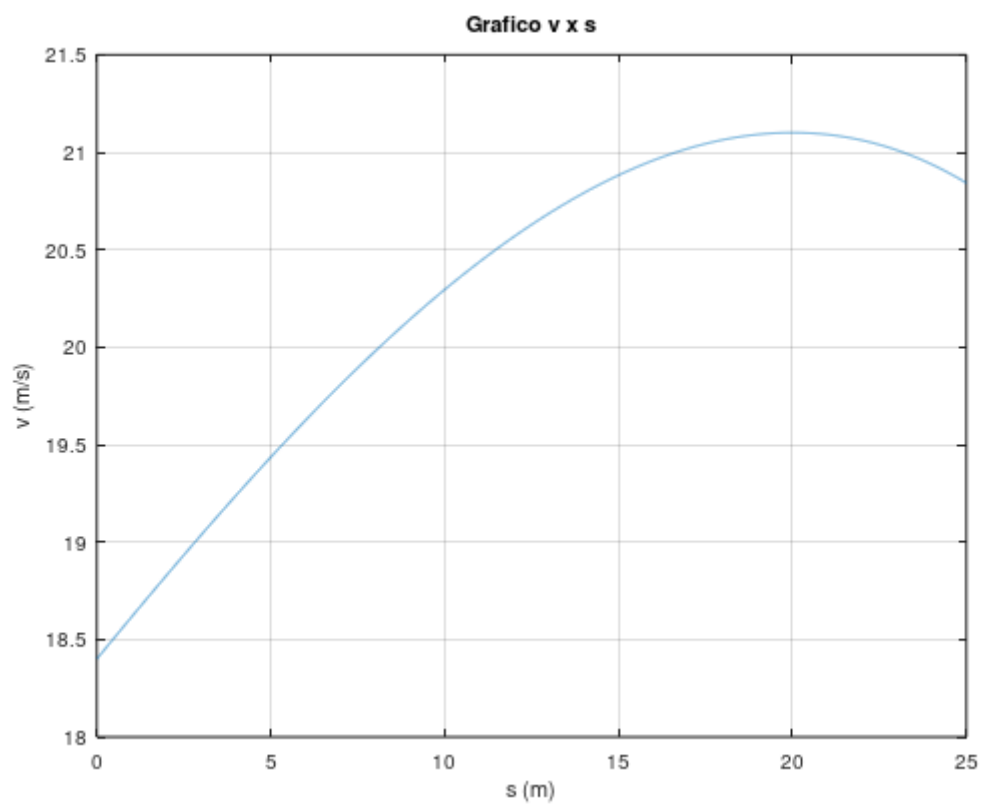


Figure 2: Gráfico 2: curva da velocidade $v(s)$

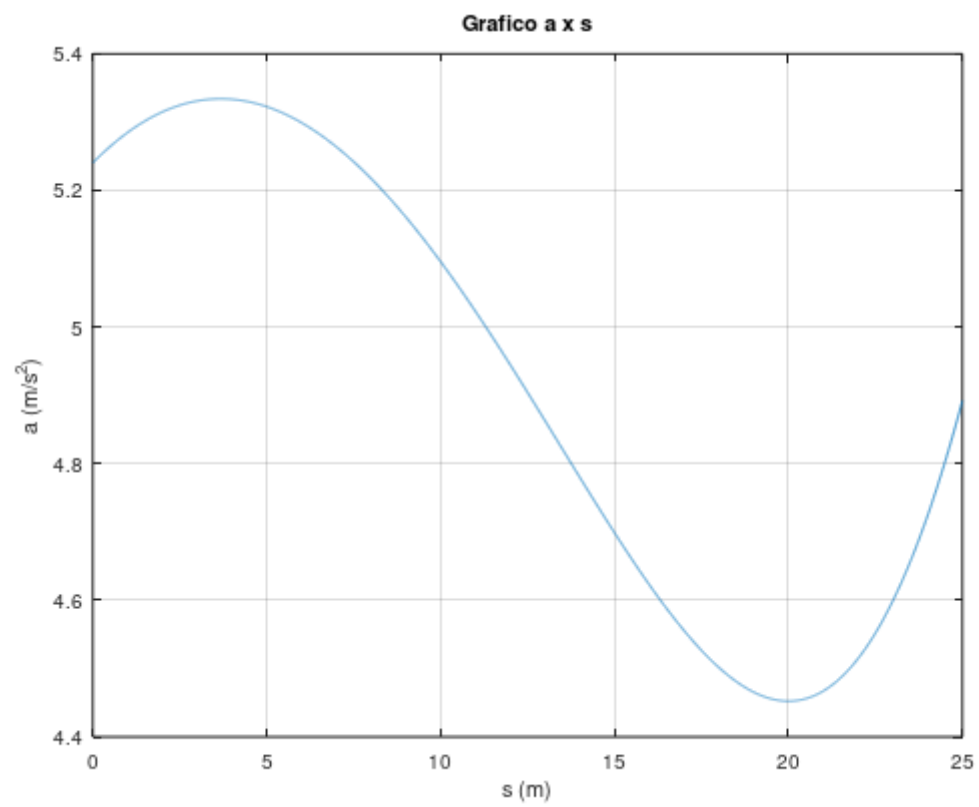


Figure 3: Gráfico 3: curva da aceleração $a(s)$

5 Scripts

A seguir, encontram-se os scripts em *Octave* utilizados para a construção dos gráficos e para o cálculo dos valores da velocidade e da aceleração na posição $s = 20\text{ m}$.

```
Janela de Comandos
>> display('velocidade em s = 20m')
velocidade em s = 20m
>> s = 20
s = 20
>> v20 = sqrt(-(0.02/3)*s^3 + 8*s + 338.56)
v20 = 21.100
>>
```

Figure 4: Cálculo de v_{20}

```
Janela de Comandos
>> display('Grafico v x s')
Grafico v x s
>> s = 0:0.01:25;
>> v = (-(0.02/3)*s.^3 + 8*s + 338.56).^(1/2);
>> plot(s,v)
>> title('Grafico v x s')
>> xlabel('s (m)')
>> ylabel('v (m/s)')
>> |
```

Figure 5: Construção do Gráfico 2

```
Janela de Comandos
Grafico a x s
>> s = 0:0.01:25;
>> an = (-(0.02/3)*s.^3 + 8*s + 338.56)/100;
>> at = 4 - 0.01*s.^2;
>> a = (an.^2 + at.^2).^(1/2);
>> plot(s,a)
>> title('Grafico a x s')
>> xlabel('s (m)')
>> ylabel('a (m/s^2)')
>>
```

Figure 6: Construção do Gráfico 3

```
Janela de Comandos
aceleracao em s = 20m
>> s = 20
s = 20
>> an = (-(0.02/3)*s^3 + 8*s + 338.56)/100;
>> at = 4 - 0.01*s^2;
>> a20 = sqrt(an^2 + at^2)
a20 = 4.4523
>>
```

Figure 7: Cálculo de a_{20}

```

Janela de Comandos
Visualizacao grafica do integrando
>> s1 = [0:.1/50:20]; y1 = (-(0.02/3)*s1.^3 + 8*s1 + 338.56).^(-1/2);
>> s2 = [0:.5:20]; y2 = (-(0.02/3)*s2.^3 + 8*s2 + 338.56).^(-1/2);
>> s3 = [0:1.5:20]; y3 = (-(0.02/3)*s3.^3 + 8*s3 + 338.56).^(-1/2);
>> ha = area(s1,y1); set(ha,'facecolor',[.8 .9 1])
>> hold on
>> plot(s1,y1,'k-',s2,y2,'bo',s3,y3,'go')
>> title('Grafico do integrando')
>> xlabel('s (m)')
>> ylabel('1/[v(s)] (s/m)')
>> |

```

Figure 8: Construção do Gráfico 1

6 Conclusões

Em primeiro lugar, é possível afirmar que uma análise minimamente razoável do problema proposto pôde ser executada, de modo que as formulações matemáticas puderam ir ao encontro dos princípios físicos envolvidos na dinâmica do problema, possibilitando a determinação de valores confiáveis para as grandezas solicitadas.

Outrossim, a alternativa de análise numérica encontrada para solucionar a integral a que se chegou no contexto da determinação do valor de tempo decorrido mostrou-se robusta e pôde, inclusive, confirmar a aproximação visual inicial.

Por fim, não se pode deixar de destacar o papel primordial dos recursos computacionais oferecidos pelo software *Octave* nas construções e determinações realizadas.