Universidade de São Paulo
EESC

SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II
Prof. Marcelo Areias Trindade

Prática 2 - Aproximação de integrais

Aluno: Marcus Vinícius Costa Reis (12549384)

08/06/2022

1 Problema

Um veículo se desloca com trajetória circular de raio $r = 100\,m$. Considerando que ele inicia o movimento com velocidade inicial de $v_0 = (10 + 0.1N)\,m/s$ e acelera com $a_t = (4 - 0.01s^2)\,m/s^2$ (onde $N = 84 \Rightarrow v_0 = 18.4\,m/s$):

- Determine o módulo da velocidade do veículo desenvolvida ao longo da trajetória $v(s)$, faça um gráfico (v vs s), e calcule a velocidade alcançada depois de percorrer $20\,m$.
- Determine o módulo da aceleração do veículo ao longo da trajetória $a(s)$, faça um gráfico (a vs s), e calcule a aceleração alcançada depois de percorrer $20\,m$.
- Usando um método numérico de aproximação de integrais, determine o tempo necessário para o veículo percorrer $20\,m$.

1.1 Formulações

Em primeira instância, tendo em vista a dinâmica do problema em questão, vale relembrar alguns princípios da cinemática escalar, os quais auxiliarão nas determinações requeridas.

Tem-se que o módulo da velocidade v de um ponto material em uma dada trajetória correponde à taxa de variação da posição s em função do tempo t:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{1}$$

A seu turno, o módulo da aceleração tangencial a_t, responsável por alterar o módulo de v, é dada por:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \tag{2}$$

Comparando as eq. 1 e 2:

$$\frac{1}{v}\,ds = \frac{1}{a_t}\,dv \iff a_t\,ds = v\,dv$$

$$\iff \int a_t(s)\,ds = \int v\,dv \tag{3}$$

Desse modo, se a aceleração tangencial é conhecida como função da posição, consegue-se encontrar v em função de s.

Da eq. 1 ainda é possível obter:

$$dt = \frac{1}{v}\,ds \iff$$

$$\int dt = \int \frac{1}{v(s)}\,ds \tag{4}$$

Portanto, de forma análoga, obtém-se o tempo em função da posição se é conhecida a expressão de v em função de s.

Vale ainda ressaltar que o problema em questão anlisa um movimento circular. Sendo assim, há também uma componente normal a_n da aceleração, a qual é dada por:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \tag{5}$$

O módulo da aceleração do ponto material é, por conseguinte, composição das duas componentes:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{6}$$

Pode-se, agora, partir para as determinações desejadas.

1.2 Resultados

1.2.1 Velocidade

Utilizando-se a eq. 3, juntamente com as informações $a_t(s) = (4 - 0.01s^2)\,m/s^2$ e $v_0 = 18.4\,m/s$, obteve-se:

$$\int_0^s (4 - 0.01s^2)\,ds = \int_{18.4}^{v(s)} v\,dv$$

$$\Longrightarrow \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{18.4}^{v(s)} = \left[4s - \frac{0.01}{3}s^3\right]_0^s \Longrightarrow v^2(s) = 8s - \frac{0.02}{3}s^3 + 18.4^2$$

$$\Longleftrightarrow v(s) = \sqrt{338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3} \quad (m/s) \tag{7}$$

Avaliando a expressão anterior em $s = 20\,m$:

$$v_{20} = v(20) = 21.1\,m/s$$

1.2.2 Aceleração

Com a eq. 5 e o dado $r = 100\,m$, pôde-se encontrar a expressão para a aceleração normal:

$$a_n(s) = \frac{v^2(s)}{r} = \frac{1}{100}\left(338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3\right) \quad (m/s^2) \tag{8}$$

Utilizando-se da eq. 6 e da expressão dada para $a_t(s)$, chegou-se ao módulo da aceleração da partícula:

$$a(s) = \sqrt{a_t^2(s) + a_n^2(s)} \Longrightarrow a(s) = \sqrt{(4 - 0.01s^2)^2 + \left[\frac{1}{100}\left(338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3\right)\right]^2}$$

$$\Longleftrightarrow a(s) = 1.5 \times 10^4[s^6 + (2.01 \times 10^4)s^4 + (-1.01568 \times 10^5)s^3 + (-1.656 \times 10^7)s^2 +$$
$$+ (1.21882 \times 10^8)s + 6.17901 \times 10^9] \quad (m/s^2)$$

Avaliando a expressão anterior em $s = 20\,m$:

$$a_{20} = a(20) = 4.4523\,m/s^2$$

1.2.3 Tempo

Por meio da eq. 4, bem como da expressão 7, chegou-se à relação para o tempo t_{20} decorrido após a partícula ter percorrido $20\,m$:

$$t_{20} = \int_0^{t_{20}} dt = \int_0^{20} \frac{1}{v(s)}\,ds \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow t_{20} = \int_0^{20} \frac{1}{\sqrt{338.56 + 8s - \dfrac{0.02}{3}s^3}}\,ds = \int_0^{20} \left(338.56 + 8s - \frac{0.02}{3}s^3\right)^{-\frac{1}{2}} ds$$

Como é possível perceber, a integral anterior não é de trivial resolução. Nesse sentido, optou-se pelo emprego de algumas ferramentas computacionais proporcionadas pelo software *Octave*, no intuito de solucioná-la.