

Universidade de São Paulo
EESC

SEM0530 - Problemas de Engenharia Mecatrônica II
Prof. Marcelo Areias Trindade

Prática 5 - Aproximação numérica de EDOs de 2^a ordem

Aluno: Marcus Vinícius Costa Reis (12549384)

10/07/2022

Contents

1	Problema	3
2	Formulações	4
2.1	Aceleração angular	4
2.2	As equações diferenciais	4
2.3	Outras análises relevantes	5
3	Resultados	5
4	Gráficos	6
4.1	Deslocamento angular <i>vs</i> tempo	6
4.2	Velocidade angular <i>vs</i> tempo	6
4.3	Velocidade angular <i>vs</i> deslocamento angular	7
4.4	Gráfico comparativo	8
4.5	Evolução da frequência	9
4.6	Evolução da tração	10
5	Scripts	10
5.1	Sistema de EDOs	10
5.2	Integração numérica	11
5.3	Determinação das voltas completas	11
5.4	Tração no cabo	12
6	Conclusões	12

1 Problema

- Dado o pêndulo simples, deseja-se determinar a evolução do deslocamento angular $\theta(t)$ ao longo de um dado intervalo de tempo para dadas condições iniciais
- Considere que o cabo é rígido porém com massa desprezível e comprimento constante $r = (1 + N/100) m$, sendo N formado pelos dois últimos algarismos do Número USP do aluno.

Nesse caso, $N = 84$, que implica

$$r = (1 + 84/100) m = 1.84 m$$

- Considere que $m = 1 kg$ e que o amortecimento (dissipação) é representado por um momento em relação ao pino ($M = cr^2\dot{\theta}$, com $c = 0.5 Ns/mrad$)
- Usando integração numérica, determine a evolução do deslocamento angular $\theta(t)$ sendo que ele parte da posição vertical ($\theta(0) = 0$) com velocidade angular ($\dot{\theta}(0) = 15 rad/s$)
- Apresente as evoluções em gráficos (θ vs t , $\dot{\theta}$ vs t , $\dot{\theta}$ vs θ)
- Usando a aproximação numérica, determine também quantas voltas completas o pêndulo executa antes de parar (outros parâmetros relevantes poderiam também ser extraídos, como por exemplo a evolução da tração no cabo, frequência de oscilação)

2 Formulações

2.1 Aceleração angular

Em primeira análise, pode-se fazer um estudo de uma posição genérica do pêndulo associado ao problema em questão, na qual o cabo está deslocado de um ângulo θ da vertical.

Em busca da aceleração angular do sistema, faz-se possível chegar a uma relação de duas maneiras: compreendendo a dinâmica envolvida na direção tangencial do movimento ou observando o somatório de momentos.

Para o primeiro modo, tem-se:

$$\sum F_t = ma_t = mr\ddot{\theta},$$

onde a_t representa a aceleração tangencial do movimento.

Para a resultante de forças, tem-se uma contribuição do peso do objeto e outra do momento dissipativo. No entanto, deve-se chegar a uma força que seja capaz de gerar tal momento. Para tal:

$$M = f_M r \implies cr^2\dot{\theta} = f_M r \iff f_M = cr\dot{\theta}$$

Vale ressaltar que tal força atua no sentido contrário ao eixo tangencial, já que tende a retardar o movimento.

Desse modo:

$$\begin{aligned}\sum F_t &= -f_M - W_t \implies \\ mr\ddot{\theta} &= -cr\dot{\theta} - mg \sin \theta \iff \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{r} \sin \theta - \frac{c}{m} \dot{\theta}\end{aligned}\tag{1}$$

Como dito, pode-se, também, chegar à Equação 1 a partir do somatório de momentos. Estabelecendo o somatório de momentos em relação ao ponto O (onde o pêndulo é fixo):

$$\sum M_O = I_O \ddot{\theta},$$

onde $I_O = mr^2$ é o momento de inércia do objeto em relação a O . Mas,

$$\sum M_O = -M - W_t r, \text{ o que implica:}$$

$$\begin{aligned}I_O \ddot{\theta} = mr^2 \ddot{\theta} &= -cr^2 \dot{\theta} - mg \sin \theta r \iff \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{r} \sin \theta - \frac{c}{m} \dot{\theta},\end{aligned}$$

que é a própria Equação 1.

2.2 As equações diferenciais

A Equação 1 se mostra da forma $\ddot{\theta}(t) = g(\theta(t), \dot{\theta}(t))$, uma equação diferencial de segunda ordem não linear. Convém, nesse sentido, transformar o problema em um sistema de EDOs de 1ª ordem, no intuito de facilitar a utilização de algum algoritmo de integração numérica para a solução.

Definamos então

$$\dot{\theta} = \varphi \implies \dot{\varphi} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta - \frac{c}{m} \varphi$$

Assim, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \varphi \\ \dot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \theta - \frac{c}{m} \varphi \end{cases}, \quad \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 15 \text{ rad/s} \quad (2)$$

Assim, é possível utilizar algum método de integração numérica para obter a solução do sistema, a matriz solução definida por

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix},$$

e, conseqüentemente, obter a evolução do deslocamento angular $\theta(t)$.

2.3 Outras análises relevantes

Pode-se, ainda, realizar uma análise da dinâmica associada à direção normal do movimento, e determinar, assim, a evolução da tração T_r no cabo do pêndulo.

Estabelecendo o somatório de forças na direção normal:

$$\begin{aligned} \sum F_n = ma_n = m(\dot{\theta})^2 r = T_r - W_n &\implies \\ m(\dot{\theta})^2 r = T_r - mg \cos \theta &\iff \end{aligned}$$

$$T_r = m(\dot{\theta}^2 r + g \cos \theta) \quad (3)$$

De posse da matriz solução $\Psi(t)$, é possível utilizar os valores obtidos para a velocidade angular φ e determinar a evolução da frequência f de oscilação, utilizando-se a relação

$$f = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (4)$$

Por fim, é ainda possível notar que, tendo a velocidade angular um valor inicial elevado, não se deve descartar a possibilidade do pêndulo executar alguma(s) volta(s) completa(s) antes de começar, de fato, a oscilar em torno da posição vertical.

3 Resultados

Principiando pela solução do sistema em (2), fez-se uso do método de integração numérica *ode45* do MATLAB, obtendo-se a matriz Ψ necessária para a determinação da evolução de $\theta(t)$ e para a construção dos gráficos e das análises subsequentes.

Passou-se para a função uma espécie de vetor associado ao sistema em (2) e declarou-se as condições iniciais do PVI. O intervalo de integração foi inicialmente colocado arbitrariamente, começando em $t_i = 0$ e terminando em $t_f = 50 \text{ s}$. Após a geração do gráfico de θ vs t , percebeu-se que a utilização de $t_f = 20 \text{ s}$ seria mais adequada para uma melhor visualização do comportamento de cada evolução.

Quanto às evoluções da tração e da frequência de oscilação, foram obtidas a partir da evolução de $\theta(t)$.

Para a análise do movimento anterior à oscilação de fato, utilizou-se um algoritmo que será melhor detalhado na seção *Scripts*. Obteve-se que o pêndulo completou 4 voltas antes de iniciar as oscilações em torno da vertical.

4 Gráficos

4.1 Deslocamento angular *vs* tempo

O gráfico em questão permite algumas análises relevantes. Primeiro, observa-se um trecho da curva, aproximadamente nos 4 primeiros segundos, no qual o deslocamento é estritamente crescente. Tem-se, em seguida, um comportamento oscilatório. Tal fato retrata justamente a etapa anterior às oscilações, quando o pêndulo executa as 4 voltas completas já mencionadas.

É possível fazer uma estimativa visual do deslocamento anterior à oscilação. Nota-se que na etapa de oscilação, a curva converge para o valor de 25 rad . Sendo assim, considerando esse valor percorrido no primeiro trecho, tem-se $n = 25/2\pi = 3.98 \approx 4 \text{ voltas}$.

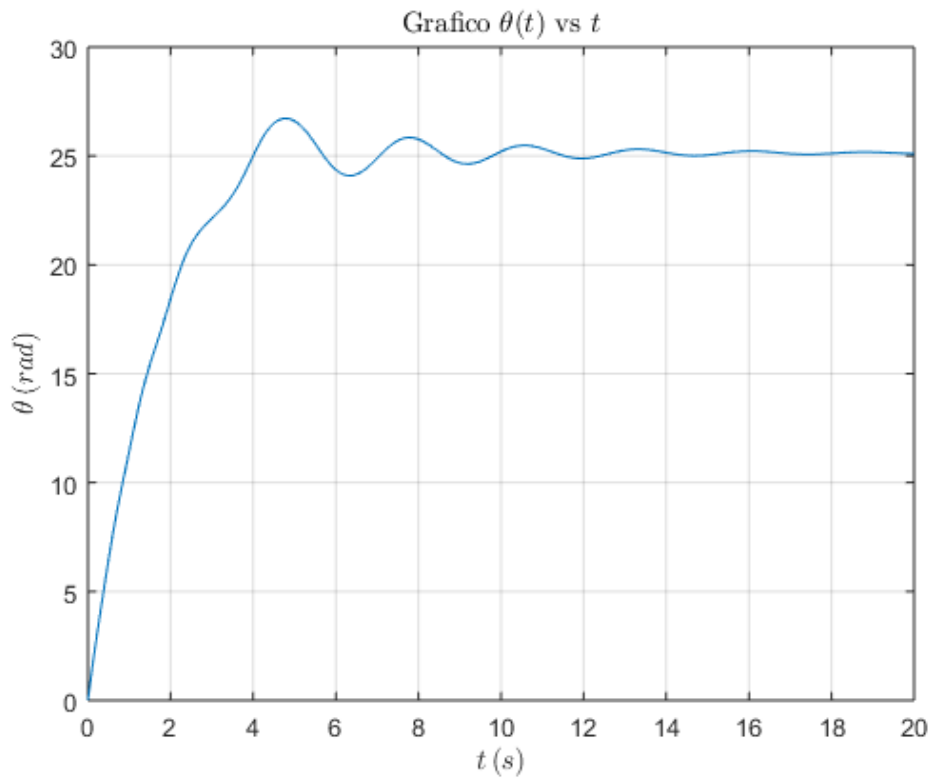


Figure 1: Gráfico 1: deslocamento angular

4.2 Velocidade angular *vs* tempo

Nesse gráfico, observa-se que a velocidade angular assume valores negativos próximo aos 5 primeiros segundos do movimento. Isso representa o fato de que, enquanto o pêndulo não oscila, a velocidade tangencial apresenta sempre sentido positivo em relação à direção tangencial.

Por fim, é claro que, quando $t \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$.

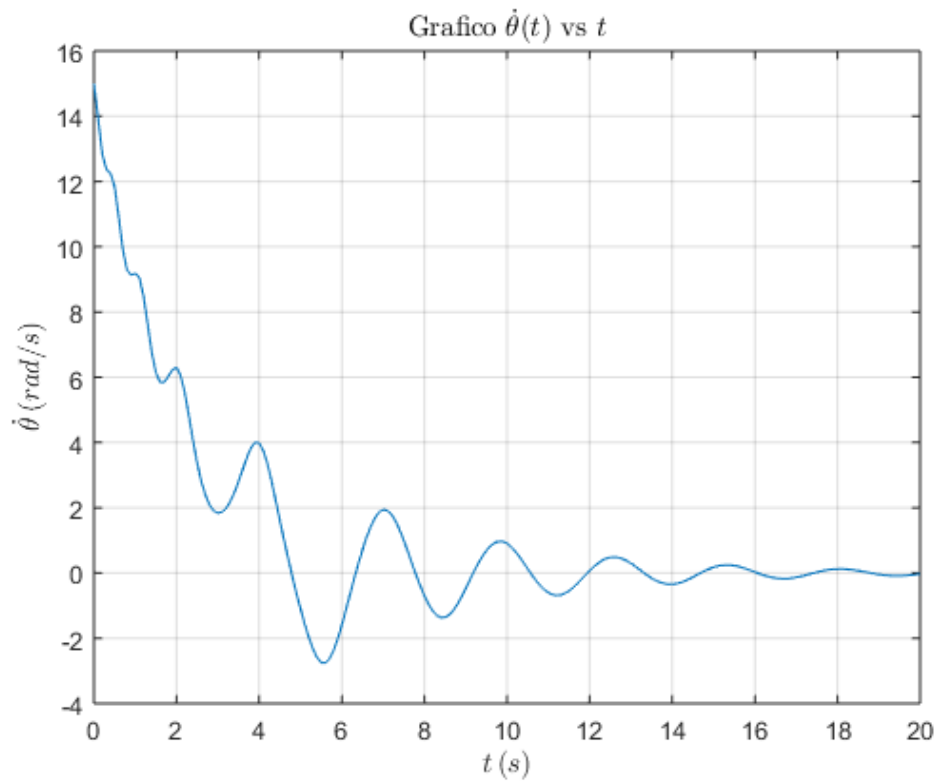


Figure 2: Gráfico 2: velocidade angular

4.3 Velocidade angular *vs* deslocamento angular

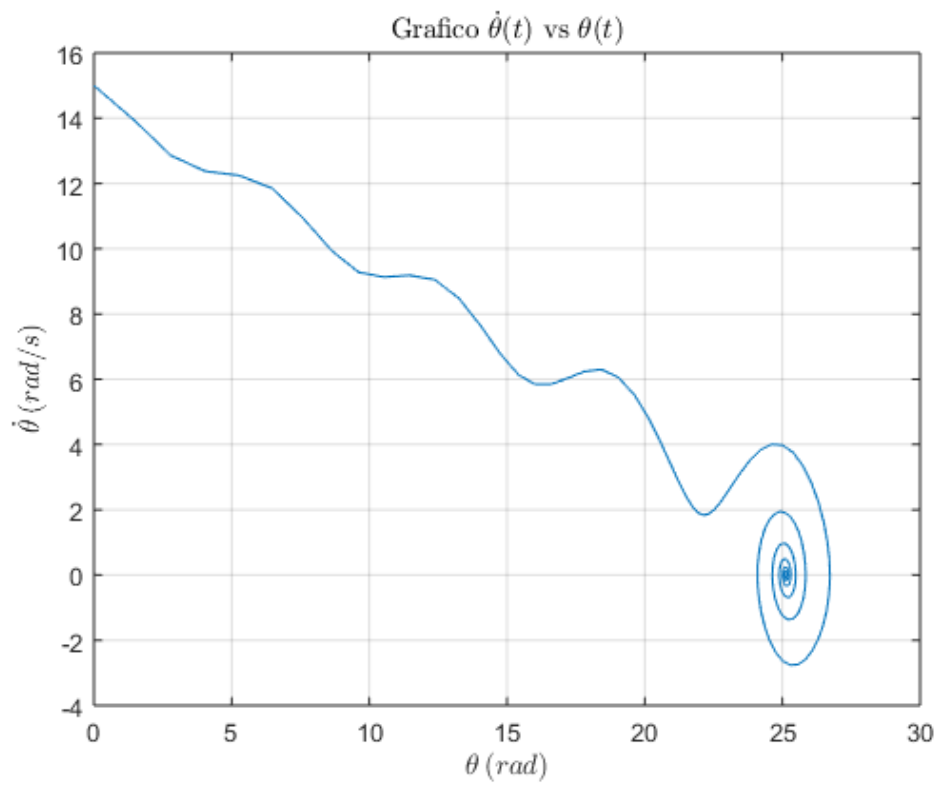


Figure 3: Gráfico 3: velocidade angular em função do deslocamento angular

4.4 Gráfico comparativo

Com as duas curvas plotadas na mesma figura, fica fácil notar a correspondência entre o trecho pré-oscilatório e oscilatório, bem como a convergência a um valor fixo.

Tem-se que o instante para o qual a velocidade angular assume o valor 0 pela primeira vez corresponde ao máximo global da curva de deslocamento. Isso é evidente, pois a partir desse momento o pêndulo passa a oscilar.

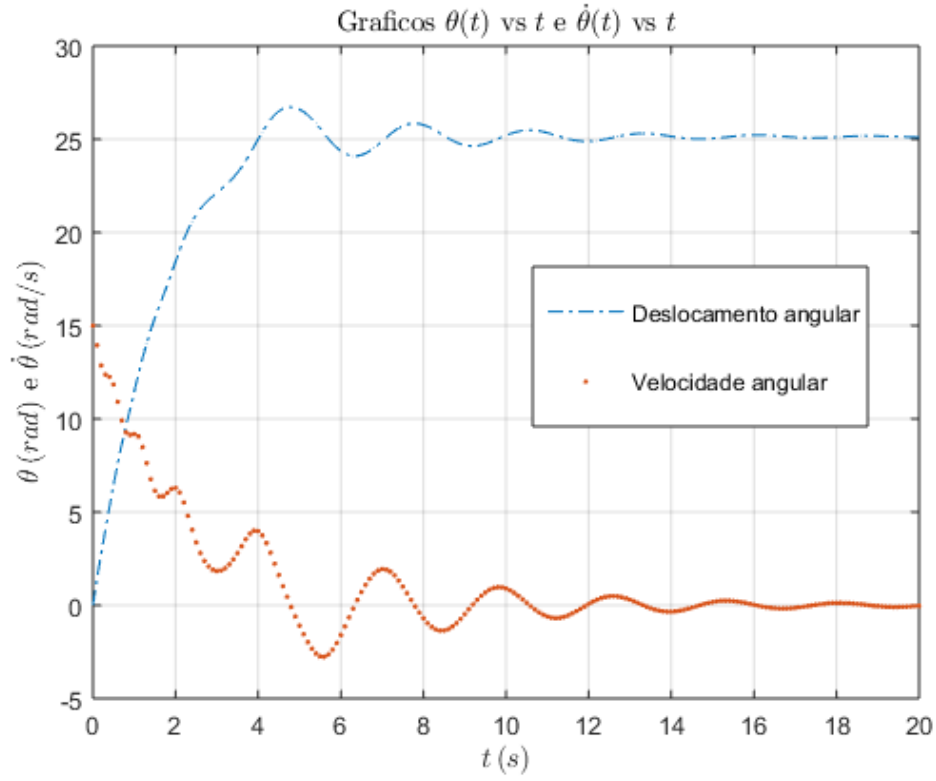


Figure 4: Gráfico 4: *plot* comparativo entre deslocamento e velocidade angulares, em função do tempo

4.5 Evolução da frequência

Plotou-se o gráfico em questão iniciando do instante de tempo aproximado para o qual o pêndulo começa a oscilar, já que antes disso não há sentido compreender uma frequência de oscilação.

E é óbvio que quando $t \rightarrow 0$, $f \rightarrow 0$, já que $\varphi \rightarrow 0$.

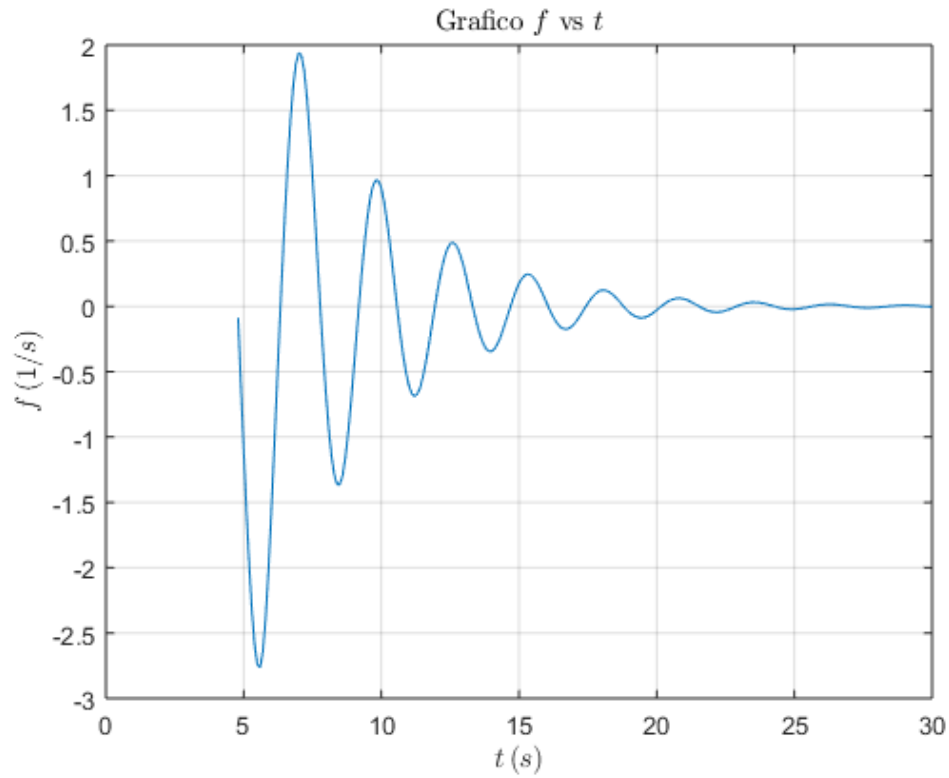


Figure 5: Gráfico 5: frequência de oscilação

4.6 Evolução da tração

Aqui, fica evidente que o cabo é mais solicitado nos primeiros instantes do movimento, quando a velocidade angular ainda é elevada.

Conforme $t \rightarrow \infty$, tem-se que a tração tende a um valor fixo, sendo este o próprio peso do objeto ($W = mg = (1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9.81 \text{ N}$).

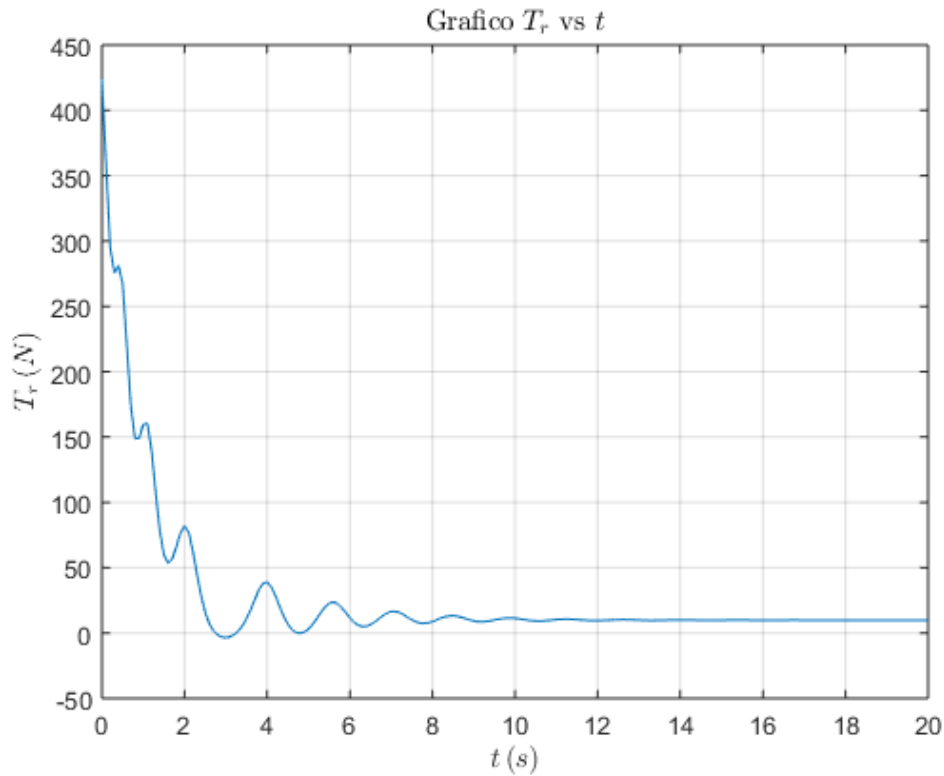


Figure 6: Gráfico 6: tração no cabo

5 Scripts

5.1 Sistema de EDOs

Aqui se prepara o sistema em (2), declarando uma função que retorna uma matriz Ψ' , a qual abriga as derivadas de $\theta(t)$ e $\varphi(t)$.

```
1 % Preparacao do sistema de EDOs de 1a ordem
2 function dps = odepsi(t,psi)
3     g = 9.81; r = 1.84; c = 0.5; m = 1;
4     dps = zeros(2,1);
5     dps(1) = psi(2);
6     dps(2) = -(g/r)*sin(psi(1))-(c/m)*psi(2);
7
8
```

Listing 1: preparação do sistema de EDOs

5.2 Integração numérica

Utilizando-se o método *ode45*, obtém-se a matriz que foi denominada *theta*, correspondente à matriz Ψ , a qual é formada pelos vetores $\theta(t)$ e $\varphi(t)$.

O intervalo de integração utilizado foi $[0 : 0.1 : 20]$, e o vetor de condições iniciais, $[\theta(0) \ \dot{\theta}(0)] = [0 \ 15]$.

```
1 % Integracao numerica do sistema de EDOs de 1a ordem
2 function [t,theta] = odetheta
3     ti = 0; dt = 0.1; tf = 20;
4     [t,theta] = ode45(@ (t,theta) odepsi(t,theta),[ti:dt:tf],[0 15]);
5
6 % Construcão dos graficos
7
8 i = 'Interpreter'; l = 'latex';
9
10 figure(1) % theta vs t
11 plot(t,theta(:,1)), grid
12 title('Grafico $\theta(t)$ vs $t$',i,l)
13 xlabel('$t \, ,(s)$',i,l), ylabel('$\theta \, ,(rad)$',i,l)
14
15 figure(2) % dot theta vs t
16 plot(t,theta(:,2)), grid
17 title('Grafico $\dot{\theta}(t)$ vs $t$',i,l)
18 xlabel('$t \, ,(s)$',i,l), ylabel('$\dot{\theta} \, ,(rad/s)$',i,l)
19
20 figure(3) % dot theta vs theta
21 plot(theta(:,1),theta(:,2)), grid
22 title('Grafico $\dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$',i,l)
23 xlabel('$\theta \, ,(rad)$',i,l), ylabel('$\dot{\theta} \, ,(rad/s)$',i,l)
24
25 figure(4) % theta vs t e dot theta vs t
26 plot(t,theta(:,1),'-.',t,theta(:,2),'-'); grid
27 title('Graficos $\theta(t)$ vs $t$ e $\dot{\theta}(t)$ vs $t$',i,l)
28 legend({'Deslocamento angular','Velocidade angular'],'Position',[0.65
29     0.45 0.1 0.2])
30 xlabel('$t \, ,(s)$',i,l)
31 ylabel('$\theta \, ,(rad)$ e $\dot{\theta} \, ,(rad/s)$',i,l)
32
```

Listing 2: integração numérica e construção dos gráficos de evolução

5.3 Determinação das voltas completas

O algoritmo criado baseia-se basicamente na ideia discutida na subseção 4.4, segundo a qual o movimento oscilatório tem início após o instante no qual a velocidade angular assume valor nulo pela primeira vez.

Sendo assim, encontra-se a posição do vetor $theta(:,2)$ (valores de $\varphi(t)$) para o qual isso ocorre e determina-se o valor correspondente no vetor $theta(:,1)$ (valores de $\theta(t)$).

Em seguida, o número n de voltas é determinado como segue:

$$n = \lfloor \theta(t^*)/2\pi \rfloor ,$$

onde t^* é o instante para o qual as oscilações começam, e a função piso arredonda o quociente $\theta(t^*)/2\pi$ para o inteiro anterior mais próximo.

```

1 function osci
2 [t,theta] = odetheta;
3 tam = length(theta(:,1));
4 prod = 1;
5 for k = 1:tam
6     prod = prod*theta(k,2);
7     if prod < 0
8         pos = k;
9         break
10    end
11    prod = theta(k,2);
12 end
13
14 d = theta(pos,1); % deslocamento apos as voltas completas
15 voltas = floor(d/(2*pi)) % voltas completas
16
17 dotheta = theta(pos:tam,2); % Preparacao do grafico
18 T = t(pos:tam); % de evolucao da frequencia
19
20 i = 'Interpreter'; l = 'latex';
21 figure(5)
22 plot(T,dtheta), grid
23 title('Grafico $f$ vs $t$',i,l)
24 xlabel('$t \, ,(s)$',i,l), ylabel('$f \, ,(1/s)$',i,l)
25
26

```

Listing 3: script utilizado para a determinação do número de voltas completas anteriores à etapa de oscilação

5.4 Tração no cabo

```

1 function tracao
2 [t,theta] = odetheta;
3 m = 1; r = 1.84; g = 9.81;
4 Tr = m*((theta(:,2).^2)*r + g*cos(theta(:,1)));
5
6 i = 'Interpreter'; l = 'latex';
7 figure(6) % Grafico de tracao vs t
8 plot(t,Tr), grid
9 title('Grafico $T_r$ vs $t$',i,l)
10 xlabel('$t \, ,(s)$',i,l), ylabel('$T_r \, ,(N)$',i,l)
11
12

```

Listing 4: evolução da tração no cabo

6 Conclusões

É possível dizer que foi feita uma análise minimamente razoável do problema proposto, de maneira que se pôde obter resultados coerentes com o que se esperava e se suspeitava acerca do movimento do pêndulo em questão.

Por fim, é notório o importante papel desenvolvido pelo MATLAB na construção e determinação dos resultados.