Algoritmer for Max Sum Problemet

Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

I segmentet ovenfor er summen

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

I segmentet ovenfor er summen

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

Spørgsmål: Hvilket segment har størst sum?

Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

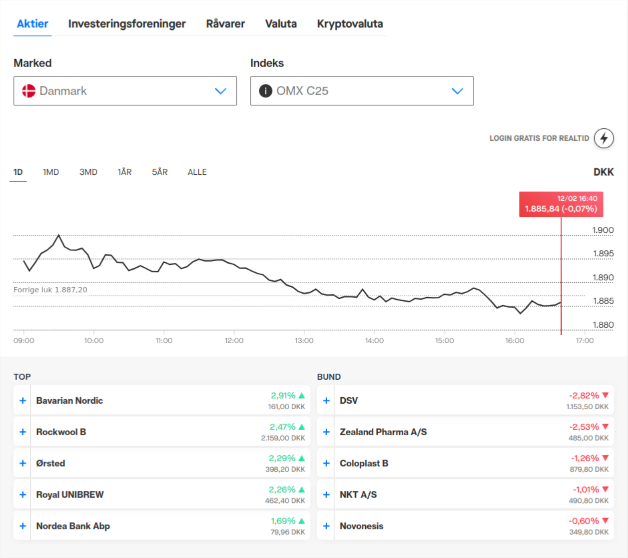
I segmentet ovenfor er summen

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

Spørgsmål: Hvilket segment har størst sum?

$\boxed{\text{Et simpelt og fundamentalt problem}}$

Mere motivation for MaxSum problemet: aktieanalyse



(Fra www.euroinvestor.dk)

Aktieanalyse

Vi har data af følgende type:

Aktie for Firma X:

2023.02.20	2023.02.21	2023.02.22	2023.02.23	2023.02.24	2023.02.25	2023.02.26
$+2\%$	-3%	$+8\%$	-1%	-3%	$+3\%$	$+11\%$

Spørgsmål: I hvilken periode har det været bedst at eje aktien?

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

$$1000 \cdot 1.03 \cdot 0.98 \ (= 1009.40) \text{ kr.}$$

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

$$1000 \cdot 1.03 \cdot 0.98 \; (= 1009.40) \text{ kr.}$$

2023.02.20	2023.02.21	2023.02.22	2023.02.23	2023.02.24	2023.02.25	2023.02.26
$+2\%$	-3%	$+8\%$	-1%	-3%	$+3\%$	$+11\%$

I perioden ovenfor har aktien forandret sig med en faktor

$$0.97 \cdot 1.08 \cdot 0.99 \cdot 0.97 \cdot 1.03$$

Aktieanalyse

2023.02.20	2023.02.21	2023.02.22	2023.02.23	2023.02.24	2023.02.25	2023.02.26
$+2\%$	-3%	$+8\%$	-1%	-3%	$+3\%$	$+11\%$

Spørgsmål: I hvilken periode har det været bedst at eje aktien?

$$\Downarrow$$

1.02	0.97	1.08	0.99	0.97	1.03	1.11

Spørgsmål: Hvilket segment har størst produkt?

Fra maximum produkt til maximum sum

Logaritmer er voksende funktioner. Så

$$0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99 \leq 0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01$$

hvis og kun hvis

$$\log(0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99) \leq \log(0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01)$$

Fra maximum produkt til maximum sum

Logaritmer er voksende funktioner. Så

$$0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99 \leq 0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01$$

hvis og kun hvis

$$\log(0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99) \leq \log(0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01)$$

Da $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$, gælder ovenstående hvis og kun hvis

$$\log(0.94) + \log(1.05) + \log(0.99) \leq \log(0.96) + \log(1.03) + \log(1.01)$$

Fra maximum produkt til maximum sum

Så segmentet, der har størst produkt i dette array:

1.02	0.97	1.08	0.99	0.97	1.03	1.11

er det samme som segmentet der har størst sum i dette array:

log 1.02	log 0.97	log 1.08	log 0.99	log 0.97	log 1.03	log 1.11

0.0286	-0.0439	0.1110	-0.0145	-0.0439	0.0426	0.1506

Algoritmer for MaxSum

Vi skal finde summen for alle segmenter:

			i							j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

Algoritmer for MaxSum

Vi skal finde summen for alle segmenter:

			i							j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

Naturlig algoritme ud fra definitionen:

For alle i og for alle $j \geq i$, lav summen fra i til og med j.

			i				k			j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

Første algoritme for MaxSum

```
MaxSum1(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        for j = i to n − 1
            sum = 0
            for k = i to j
                sum += A[k]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

			i				k			j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

Første algoritme for MaxSum

```
MAXSUM1(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        for j = i to n − 1
            sum = 0
            for k = i to j
                sum += A[k]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

			i				k			j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

Korrekt? Følger af definition af problem.

Første algoritme for MaxSum

```
MaxSum1(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        for j = i to n − 1
            sum = 0
            for k = i to j
                sum += A[k]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

			i				k			j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

Korrekt? Følger af definition af problem. Køretid?

Første algoritme for MaxSum

```
MaxSum1(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        for j = i to n − 1
            sum = 0
            for k = i to j
                sum += A[k]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

			i				k			j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

Korrekt? Følger af definition af problem. Køretid? $\Theta(n^3)$, med samme argument som for Algoritme 3 fra asymptotisk analyse eksemplerne (de har helt samme struktur).

Observation

$$(-4)+5+3+(-1)+2+(-6)+0=(-1)$$

$$\Downarrow$$

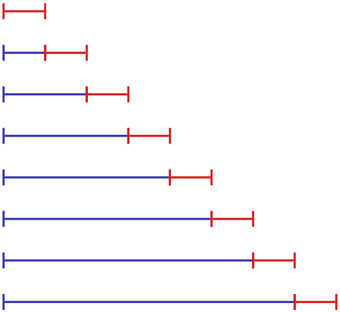
$$(-4)+5+3+(-1)+2+(-6)+0+8=(-1)+8=7$$

			i						$j-1$	j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4

Idé til forbedret algoritme

Algoritme: For hvert i, beregn summer for stigende j med én ny addition per sum.

			i							j					
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4



Anden algoritme for MaxSum

```
MaxSum2(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        sum = 0
        for j = i to n − 1
            sum += A[j]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

Anden algoritme for MaxSum

```
MaxSum2(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        sum = 0
        for j = i to n − 1
            sum += A[j]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

Anden algoritme for MaxSum

$\textsc{MaxSum2}(n)$
    maxSoFar $= 0$
    for $i = 0$ **to** $n - 1$
        sum $= 0$
        for $j = i$ **to** $n - 1$
            sum $+= A[j]$
            maxSoFar $=$ max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

Køretid?

Anden algoritme for MaxSum

```
MaxSum2(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        sum = 0
        for j = i to n − 1
            sum += A[j]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

Køretid? $\Theta(n^2)$, med ca. samme argument som for Algoritme 2 fra asymptotisk analyse eksemplerne.

Ny observation

$$x_1 \leq x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 + 2 \leq x_2 + 2$$

Ny observation

$$x_1 \leq x_2$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 + 2 \leq x_2 + 2$$

Heraf følger:

$$\max\{x_1 + 2, x_2 + 2, \ldots, x_i + 2\} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} + 2$$

Ny observation

$$x_1 \leq x_2$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 + 2 \leq x_2 + 2$$

Heraf følger:

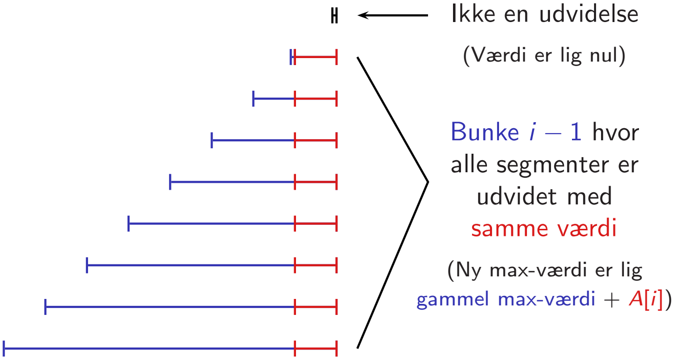
$$\max\{x_1 + 2, x_2 + 2, \ldots, x_i + 2\} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} + 2$$

Idé: Kan vi kigge på segmenter i bunker, således at den nye bunke er lig den gamle bunke med alle segmenter udvidet med den samme værdi?

Idé til forbedret algoritme

Lad bunke i være alle segmenter, som ender ved $A[i]$('s højre kant). Så er bunke i det samme som bunke $i-1$ med alle segmenter udvidet med den samme værdi, plus det tomme segment:

							$i-1$	i							
6	-1	2	-4	5	3	-1	2	-6	0	8	12	-4	6	8	4



Tredie algoritme for MaxSum

```
MaxSum3(n)
    maxSoFar = 0
    maxEndingHere = 0
    for i = 0 to n − 1
        maxEndingHere = max(maxEndingHere + A[i], 0)
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);
    return maxSoFar
```

Tredie algoritme for MaxSum

```
MaxSum3(n)
    maxSoFar = 0
    maxEndingHere = 0
    for i = 0 to n − 1
        maxEndingHere = max(maxEndingHere + A[i], 0)
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det i, hvor segmentet ender).

Tredie algoritme for MaxSum

```
MaxSum3(n)
    maxSoFar = 0
    maxEndingHere = 0
    for i = 0 to n − 1
        maxEndingHere = max(maxEndingHere + A[i], 0)
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det i, hvor segmentet ender).

Køretid?

Tredie algoritme for MaxSum

```
MaxSum3(n)
    maxSoFar = 0
    maxEndingHere = 0
    for i = 0 to n − 1
        maxEndingHere = max(maxEndingHere + A[i], 0)
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det i, hvor segmentet ender).

Køretid? Der er n iterationer, som hver tager $\Theta(1)$ tid. Det giver alt i alt $\Theta(n)$.