ALGORITMER

Formålet med denne note er at give en introduktion til:

<u>Algoritmer</u>

- Specifikation f.eks. v.h.a. pseudokode
- Analyse
  - Køretid v.h.a. asymptotisk notation
  - Korrekthed f.eks. v.h.a. invarianter

Dette emne er et uddrag af kurset
DM578: Algoritmer og Datastrukturer
som ligger på 2. semester og undervises af Rolf Fagerberg.

En algoritme er en opskrift på, hvordan et givet problem kan løses.

Mere formelt (fra Computer Science: An Overview af Brookshear, Brylow):

> An algorithm is an ordered set of unambiguous, executable steps that define a terminating proces.

Til at beskrive algoritmer kan det være nyttigt at bruge pseudokode:
„Høj-niveau sprog", hvor man bruger keywords som i programmeringssprog, men og almindelig tekst.

Eks

Søg efter et element, x, i en liste, L

Kan gøres v.h.a. lineær søgning (også kaldet sekventiel søgning):

<u>SequentialSearch</u> (L, x, i)

Hvis $i \leq |L|$

    Hvis $L[i] = x$

        Returner i

    Ellers

        Returner SequentialSearch(L, x, i+1)

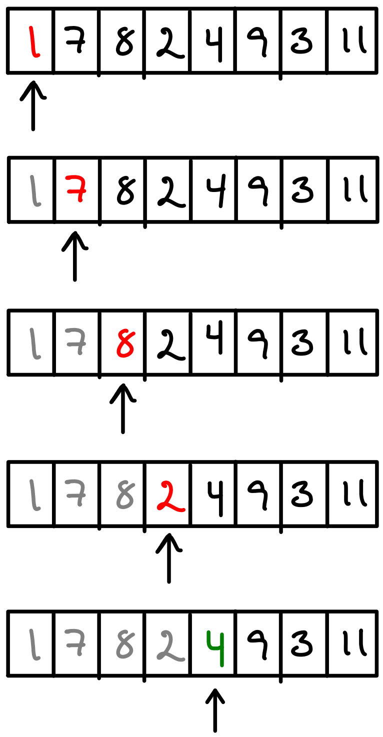
Ellers

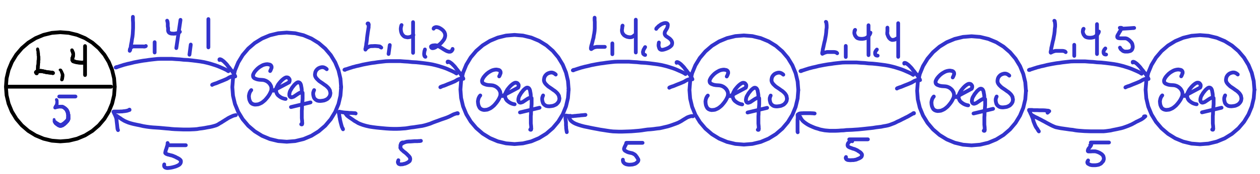
    Returner „Ikke fundet"

Er dette en algoritme?

Ordered, unambiguous, executable, terminating?

Eks: $L = \boxed{1 \mid 7 \mid 8 \mid 2 \mid 4 \mid 9 \mid 3 \mid 11}$, $x = 4$





Hvis x findes på plads i i L, sammenlignes x med samtlige elementer på plads $1, 2, \ldots, i$ i L.
Hvis x ikke findes i L, sammenlignes x med samtlige elementer i L.

Bemærk, at den samlede køretid er proportional med #sammenligninger. Derfor siger vi, at køretiden er $O(n)$.
Med O-notation giver man en øvre grænse for „størrelsesordenen" af køretiden.

Hvis L er sorteret, kan det gøres mere effektivt v.h.a. binær søgning:

Eks:

L =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

, x = 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Sammenlign midterste element med x

x > 8, så vi fortsætter søgningen til højre for 8:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

x < 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

x = 10

BinarySearch (L, x, ℓ, r)

Hvis $\ell \leq r$

    $m := \left\lfloor \frac{\ell + r}{2} \right\rfloor$

    Hvis $L[m] = x$

        Returner m

    Ellers

        Hvis $x < L[m]$

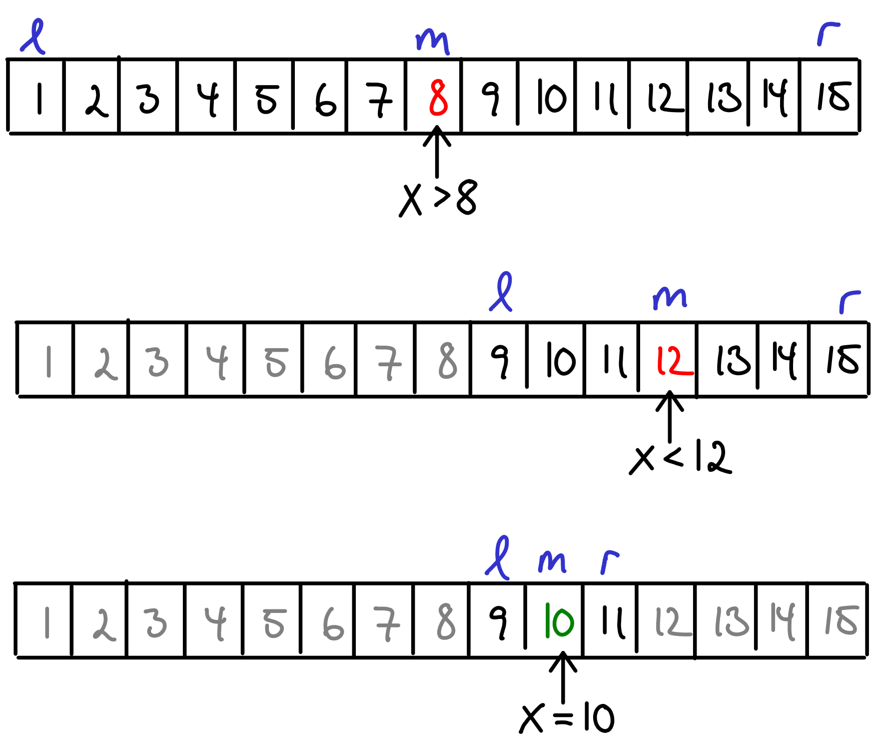
            Returner BinarySearch$(L, x, \ell, m-1)$

        Ellers

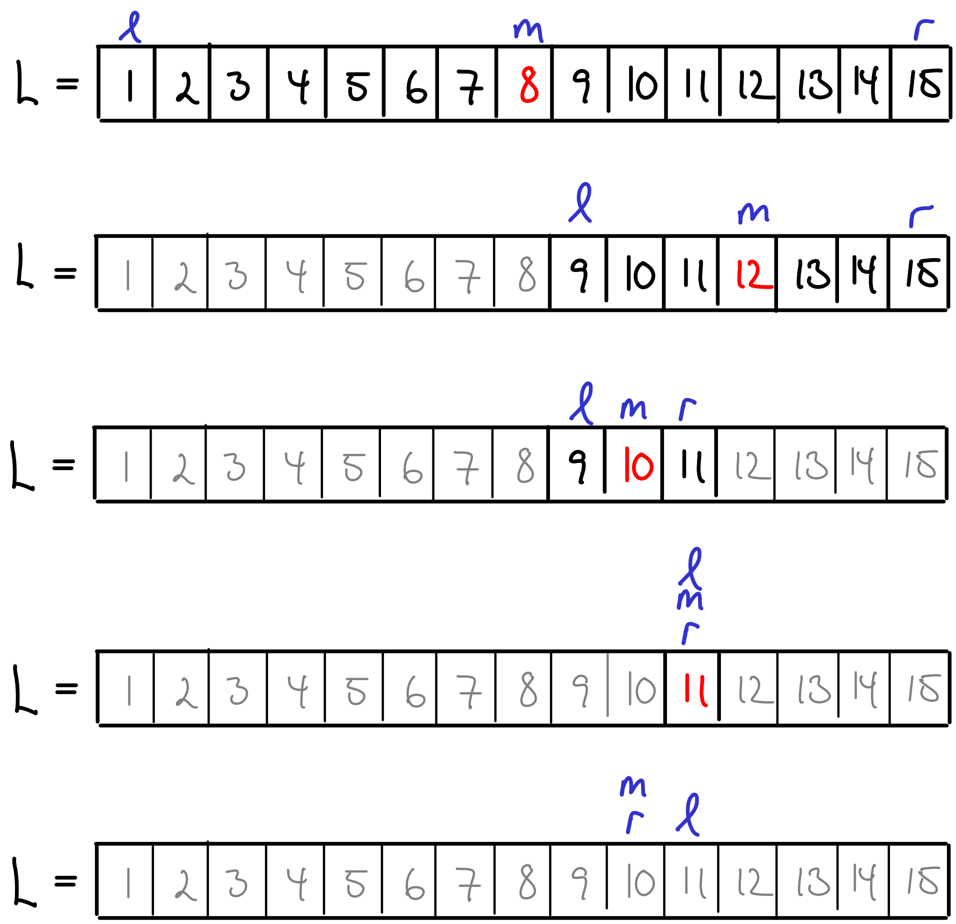
            Returner BinarySearch$(L, x, m+1, r)$

Ellers

    Returner „Ikke fundet"



Eks: L = | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |, $x = 10{,}5$



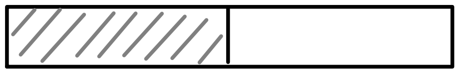
$r < l$ → „Ikke fundet"

I eksemplerne ovenfor sammenlignede vi x med h.h.v. 3 og 4 tal ud af 15.
Bemærk, at 4 sammenligninger er worst-case.

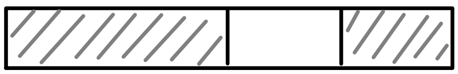
Mere generelt:

Hvor mange tal sammenlignes med x i worst-case, når $|L| = n$?

Efter første sammenligning er der $\leq n/2$ tal tilbage:



Efter anden sammenligning er der $\leq n/4$ tal tilbage:



$\vdots$

Efter i'te sammenligning er der $\leq n/2^i$ tal tilbage.

Den sidste sammenligning foretages senest, når der er 1 element tilbage.
At komme under 1 element kræver $\leq i$ sml., hvor $n/2^i < 1$.

$$\frac{n}{2^i} < 1 \iff$$
$$n < 2^i \iff$$
$$\log_2 n < i \iff$$
$$\lfloor \log_2 n \rfloor \leq i-1 \iff$$
$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leq i$$

D.v.s. binær søgning efter x i en liste med n tal bruger aldrig mere end $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ sammenligninger.
Dermed er køretiden $O(\log n)$.

Bestemmelse af køretid

Vælg en karakteristisk operation, sådan at algoritmens samlede køretid er proportional med den samlede tid brugt på denne operation.

I ovenstående eksempler var den karakteristiske operation sammenligning af to tal.

Lineær søgning laver højst n sammenligninger. Derfor er dens køretid, som nævnt tidligere, $O(n)$. Det ville den også være, hvis algoritmen lavede $n/2$ eller $3n$ sammenligninger i worst-case. Løst sagt betyder $O(n)$ „højst proportional med n" eller „vokser ikke hurtigere end n".

Definition

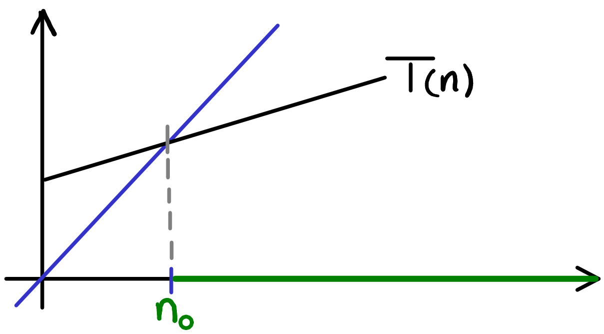
$$T(n) \in O(f(n)) \iff$$

$$\exists k, n_0 : \forall n \geq n_0 : \underbrace{T(n) \leq k \cdot f(n)}_{\iff \frac{T(n)}{f(n)} \leq k}$$

Eks: $f(n) = n$

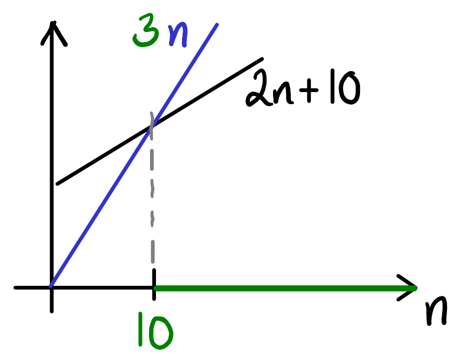
$$T(n) \in O(n) \iff \exists\, k, n_0 : \forall n \geq n_0 : T(n) \leq k \cdot n \quad \text{(per def.)}$$

D.v.s. $T(n) \in O(n)$, hvis grafen for $T(n)$ fra et vist punkt ligger under en ret linje gennem $(0,0)$:



Eks: $2n+10 \in O(n)$, da

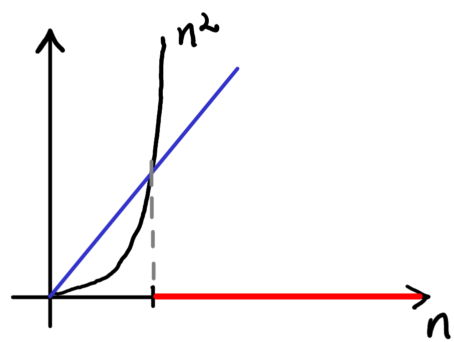
$2n+10 \leq \underset{k}{3}n$, for $n \geq \underset{n_0}{10}$



Eks: $n^2 \notin O(n)$, da

$n^2 \leq k \cdot n \iff n \leq k$

For ethvert valg af k og n_0 findes der et $n \geq n_0$, så $n > k$

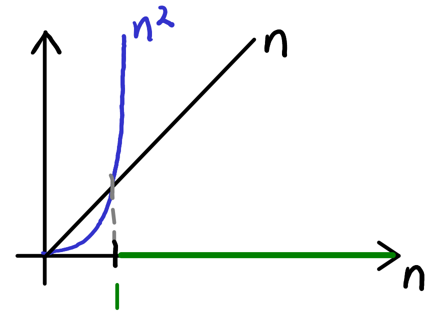


D.v.s.

$$\nexists\, k, n_0 : \forall n \geq n_0 : n^2 \leq k \cdot n$$

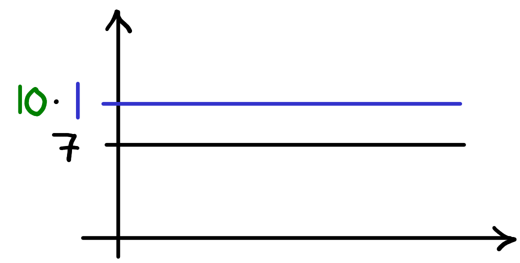
Eks: $n \in O(n^2)$, da

$n \leq n^2$, for $n \geq 1$



Eks: $7 \in O(1)$, da

$7 \leq 10 \cdot 1$, for alle n



Eks: $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \in O(\log n)$, da

$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leq 2 \cdot \log_2 n$, for $n \geq 2$

Bemerk:

$\log_a(n) \in O(\log_b(n))$, hvis $a, b \in O(1)$

fordi:

$$\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}, \quad \text{og}$$

$$a, b \in O(1) \Rightarrow \log_b(a) \in O(1)$$

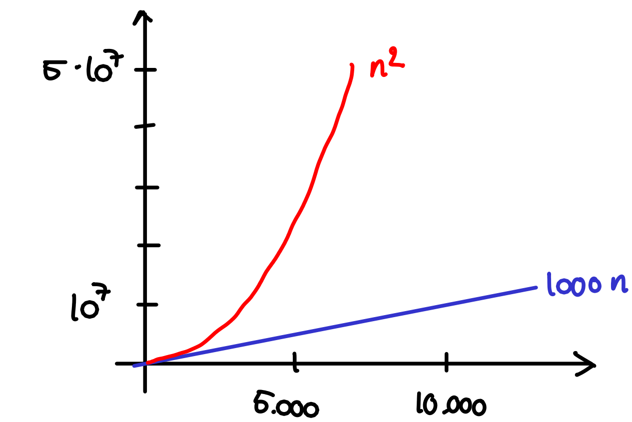
Derfor skriver vi bloot $O(\log n)$ i stedet for $O(\log_2 n)$.

Eks: $a = 2$, $b = 10$.

$$\log_2(n) = \frac{\log_{10}(n)}{\log_{10}(2)} \approx \frac{\log_{10}(n)}{0{,}3} \approx 3{,}3 \cdot \log_{10}(n)$$

Det, der betyder noget, er det mest betydende led, d.v.s. det, der vokser hurtigst.
Man må altid fjerne mindre betydende led samt konstanter, der ganges på det mest betydende led.

Eks:



Hvis n er lille, bekymrer vi os ikke så meget om køretiden, og vælger evt. blot den simpleste algoritme.
Hvis n er stor, er n^2 meget større end $1000\,n$.

Eks: 10^9 operationer i sekundet

#op	$n=100$		$n=10^6$		$n=10^9$	
	#op.	tid	#op	tid	#op.	tid
$\lceil \log_2 n \rceil$	7	7 ns	20	20 ns	30	30 ns
n	100	100 ns	10^6	1 ms	10^9	1 s
n^2	10.000	10 μs	10^{12}	17 min	10^{18}	32 år

$10^9 > 30.000.000 \cdot 30$
D.v.s. om køretiden er $\frac{1}{2}\cdot n$ eller $10\cdot n$ er relativt uvæsentligt. Det, der betyder noget, er, om den er proportional med n eller $\log n$.

Ovenstående tabel angiver, hvor lang tid det tager at løse et problem af en given størrelse.
Nu vender vi det rundt:

Hvor stor en instans kan vi løse v.h.a. en algoritme med en given køretid inden for en given tid?

Vi antager stadig, at der kan udføres 10^9 operationer i sekundet.
Problem-størrelserne, som er fyldt ind i tabellen allerede, er angivet med et betydende ciffer bortset fra størrelserne i nederste række, som er angivet med to betydende cifre.

#op. for input af str. n	1 ms	1 s	1 min	1 døgn	1 år
$\log_2 n$	$10^{301.030}$				
n	10^6	10^9		$9 \cdot 10^{13}$	
$n \log_2 n$	$6 \cdot 10^4$			$2 \cdot 10^{12}$	
n^2	10^3			$9 \cdot 10^6$	
n^3	10^2	10^3		$4 \cdot 10^4$	
2^n	20	30			55

Eksempler på køretider:

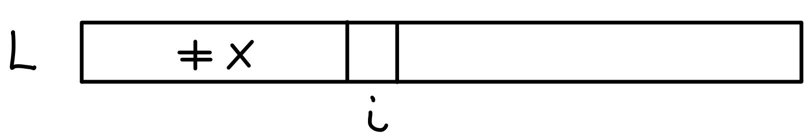
1	konstant	
$\log(n)$	logaritmisk	
n	lineær	
$n \cdot \log(n)$		polynomiel
n^2	kvadratisk	
n^3		
n^{10}		
2^n		eksponentiel
10^n		

Korrekthed

Virker algoritmen, som den skal?
Til at bevise korrekthed af en iterativ eller rekursiv algoritme kan man bruge en invariant.

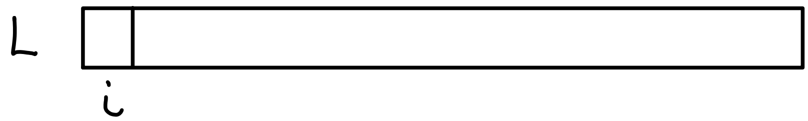
```
SequentialSearch(L, x, i)
*I*
Hvis i ≤ |L|
    Hvis L[i] = x
        Returner i
    Ellers
        Returner SequentialSearch(L, x, i+1)
Ellers
    Returner „Ikke fundet"
```

Invariant I: $x \neq L[j]$, for $1 \le j \le i-1$



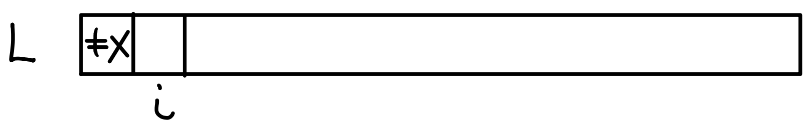
I er opfyldt, hver gang vi kommer til *I*.
Dette kan bevises v.h.a. induktion:

Første gang vi kommer til *I*:



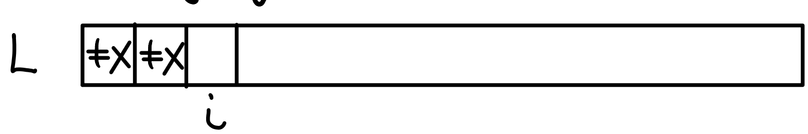
Invarianten siger, at der ikke er nogen elementer før plads i, som er $= x$.
Der er ingen elementer før plads i (da $i=1$), så udsagnet er trivielt opfyldt.
Dette udgør basistilfældet.

Derefter sammenligner vi x med $L[i]$.
Hvis $x \neq L[i]$, inkrementeres i:



D.v.s. anden gang vi kommer til *I*, er I også opfyldt.

Hvis vi igen finder, at $x \neq L[i]$, inkrementeres i endnu en gang:

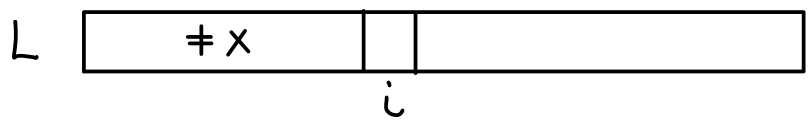


D.v.s. tredje gang vi kommer til *I*, er I også opfyldt.

Og sådan kan vi fortsætte...

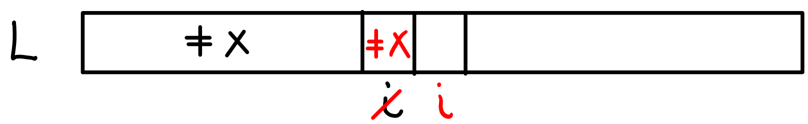
Generelt:

Antag, at I er opfyldt, når vi kommer til *I*:

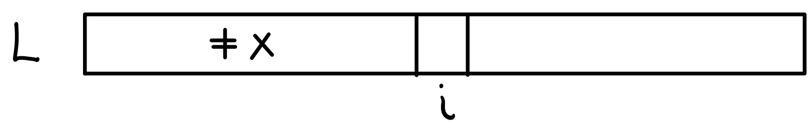


Dette er induktionsantagelsen

Bemærk, at i kun inkrementeres, hvis $x \neq L[i]$:



D.v.s. næste gang vi kommer til *I*, gælder I stadig:



Dette udgør induktionsskridtet.

D.v.s. i induktionsskridtet viser vi:

Hvis I gjaldt sidst, vi var ved *I*,
gælder den også denne gang.

Afslutning:

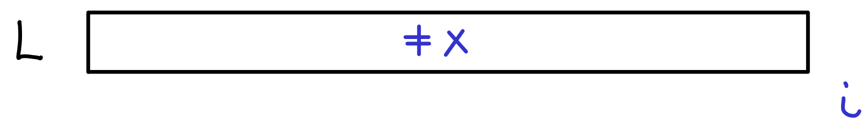
Når vi afslutter sidste rekursive kald, skyldes det en af to ting:

$L[i] = x$:

I dette tilfælde returneres i, og det er korrekt, da x findes på plads i i L.

$i = |L|+1$:

I dette tilfælde returneres „Ikke fundet". Da $i > |L|$, følger det af invarianten, at x ikke findes i L:



D.v.s. også korrekt output i dette tilfælde.

Et korrekthedsbevis v.h.a. en invariant består af følgende dele:

- Opskriv I.

  I skal opfylde to ting:
  - I skal være opfyldt, hver gang vi er ved starten af et kald, d.v.s. I skal være en invariant.
  - I, anvendt ved algoritmens afslutning, skal kunne bruges til at vise, at algoritmens output er korrekt.

- Initialization (= Basistilfælde):

  Bevis, at I gælder første gang

- Maintenance (= Induktionsskridt):

  Bevis, at hvis I var opfyldt sidste gang, er den det også denne gang.

- Termination

  Brug det faktum, at invarianten er opfyldt ved algoritmens afslutning, til at bevise, at output er korrekt.

BinarySearch(L, x, ℓ, r)

$*I*$

Hvis $\ell \leq r$

  $m := \left\lfloor \frac{\ell + r}{2} \right\rfloor$

  Hvis $L[m] = x$

    Returner m

  Ellers

    Hvis $x < L[m]$

      Returner BinarySearch$(L, x, \ell, m-1)$

    Ellers

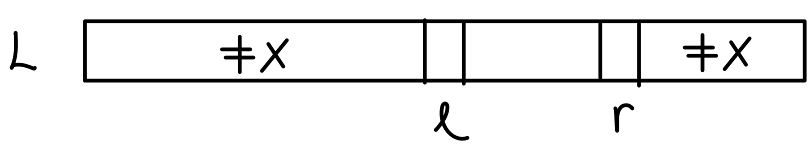
      Returner BinarySearch$(L, x, m+1, r)$

Ellers

  Returner „Ikke fundet"

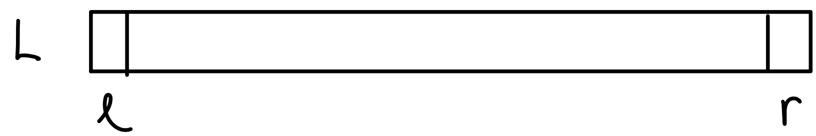
Invariant I:

Hvis x findes i L, findes den i $L[\ell..r]$:



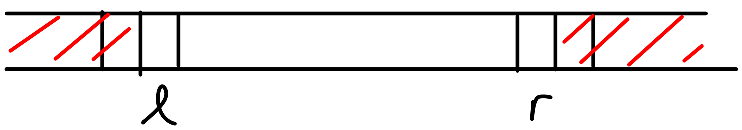
Initialization:

Første gang vi kommer til *I*, er I trivielt sand:



Maintenance:

Antag, at I gjaldt ved starten af forrige kald:

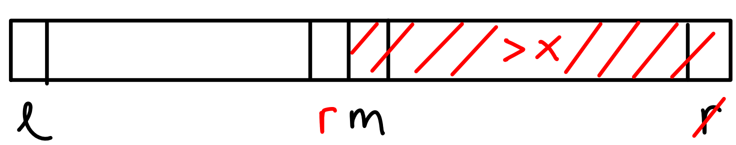


Siden da er der sket en af to ting afhængigt af, om $x < L[m]$ eller $x > L[m]$ i forrige kald

(der gjaldt <u>ikke</u>, at $x = L[m]$, for så var vi ikke fortsat til nuværende kald).

$x < L[m]$:

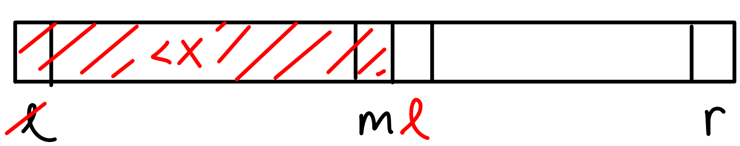
I dette tilfælde opdateres r:



Herefter er I stadig opfyldt

$x > L[m]$:

I dette tilfælde opdateres l:



Herefter er I stadig opfyldt

Termination:

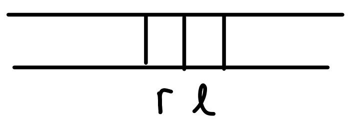
Når sidste kald afsluttes, skyldes det en af to ting:

$L[m] = x$:

I dette tilfælde returneres m, og det er korrekt, da x findes på plads m i L.

$\ell > r$:

I dette tilfælde returneres „Ikke fundet"
Da $\ell > r$, er $L[\ell..r]$ tomt:



Dermed følger det af I, at x ikke findes i L.
D.v.s. også i dette tilfælde korrekt output.

De to algoritmer er rekursive, d.v.s. kalder sig selv.
De kunne også skrives som iterative algoritmer, hvor det meste af arbejdet foregår i en løkke:

<u>SequentialSearchIt</u> (L, x)

$i := 1$

Sålænge $i \leq |L|$ og $L[i] \neq x$

    $i{+}{+}$

Hvis $i \leq |L|$

    Returner i

Ellers

    Returner „Ikke fundet"

<u>BinarySearchIt</u> (L, x)

$\ell := 1, \quad r := |L|, \quad m := \left\lfloor \frac{\ell + r}{2} \right\rfloor$

Sålænge $\ell \leq r$ og $L[m] \neq x$

    Hvis $x < L[m]$

        $r := m - 1$

    Ellers

        $\ell := m + 1$

Hvis $\ell \leq r$

    Returner m

Ellers

    Returner „Ikke fundet"

Korrektheden kan stadig bevises v.h.a. en invariant (som da kaldes en løkke-invariant):

<u>SequentialSearchIt</u> (L, x)

$i := 1$

Sålænge *I* $i \leq |L|$ og $L[i] \neq x$

  $i{+}{+}$

Hvis $i \leq |L|$

  Returner i

Ellers

  Returner „Ikke fundet"

<u>BinarySearchIt</u> (L, x)

$l := 1, \quad r := |L|, \quad m := \left\lfloor \frac{l+r}{2} \right\rfloor$

Sålænge *I* $l \leq r$ og $L[m] \neq x$

  Hvis $x < L[m]$

    $r := m - 1$

  Ellers

    $l := m + 1$

Hvis $l \leq r$

  Returner m

Ellers

  Returner „Ikke fundet"