TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

PAR

M. NICOLAS

chapitre 1

GROUPES D'HOMOTOPIE

chapitre 2

REVÊTEMENTS

CHAPITRE 3

HOMOLOGIE SINGULIÈRE

3.1 Objets simpliciaux

Définition 3.1.1. La catégorie simpliciale $\mathsf{\Delta}$ est la restriction de la catégorie des ensembles ordonnés aux objets $[n] := \{0, \dots, n\}$ (pour $n \in \mathbf{N}$).

COFACES, ETC

Exemple 3.1.2. On a un foncteur naturel $\Delta \colon \mathsf{\Delta} \to \mathsf{Top}$, défini par :

— pour tout n, $\Delta([n])$ est le n-simplexe standard :

$$\Delta^n := \operatorname{conv}(e_0, \dots, e_n) \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$$

où (e_i) désigne la base euclidienne canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$.

— si f est un morphisme $[n] \to [m]$, alors $\Delta(f)$ est l'unique application affine $\Delta^n \to \Delta^m$ qui envoie chaque e_i sur $e_{f(i)}$.

Définition 3.1.3. Un objet simplicial X d'une catégorie C est un foncteur :

$$X \colon \mathsf{\Delta}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$$

Autrement dit, c'est la donnée d'objets X_n de C pour tout n, et TODO

3.1.4. À un module simplicial S, on associe un complexe de chaînes :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S([n]) \xrightarrow{\partial} S([n-1]) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} S([0]) \longrightarrow 0$$

où l'opérateur bord $\partial \colon S([n]) \to S([n-1])$ est :

$$\partial := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i S(d_i)$$

3.2 Homologie et cohomologie

Soit (B, b_0) un espace topologique délaçable pointé.

Définition 3.2.1. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$, la i-ième face de Δ^n est l'unique application affine $\partial_i^n \colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ vérifiant $\partial_i^n(e_0, \dots, e_{n-1}) = (e_0, \dots, \hat{e_i}, \dots, e_n)$.

Soit X un espace topologique muni d'une application $f \colon X \to B$.

Définition 3.2.2. Un n-simplexe singulier de X est une application $\Delta^n \to X$.

3.2.3. Si $n \geq 0$, le groupe des n-chaînes singulières de X f-marquées dans B est le groupe abélien libre :

$$C_n^{(f)}(X; B) := \bigoplus_{(\sigma,\gamma)} \mathbf{Z}$$

où la somme porte sur l'ensemble des n-simplexes singuliers σ de X marqués par un chemin γ de B reliant b_0 à $f \circ \sigma(c_n)$. (c_n est BARYCENTRE) Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit $C_n(X;B)$ au lieu de $C_n^{(f)}(X;B)$.

On définit un opérateur ($\mathbf{Z}[\pi]$-linéaire)

$$\partial \colon C_n^{(f)}(X;B) \longrightarrow C_{n-1}^{(f)}(X;B)$$

par :

$$\partial(\sigma,\gamma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \partial_i^n, \gamma \cdot (f \circ \sigma \circ \alpha_i))$$

où α_i désigne n'importe quel chemin de Δ^n reliant c_n à $\partial_i^n(c_{n-1})$ (pour tout $0 \leq i \leq n$). On vérifie que $\partial^2 = 0$.

3.3 Fonctorialité

3.4 Excision

CHAPITRE 4

CW-COMPLEXES

4.1 Définition et premiers exemples

4.2 Homologie cellulaire

4.3 Théorie des obstructions