Fondations

Marcus Nicolas

Chapitre 1

Classes et ensembles

1.1 Axiomatique NBG

1.1.1. La méthode axiomatique consiste à faire reposer un édifice mathématique sur un nombre restreint de propositions tenues pour vraies, appelées *axiomes*. Le système axiomatique sur lequel nous nous baserons dans la suite de ce cours se nomme système von Neumann–Bernays–Gödel, ou, de manière plus concise, système NBG.

Les objets dont traite cette théorie sont appelées des *classes*, liées les unes par rapport aux autres par les relations d'égalité et d'appartenance, notées $=$ et $\in$. Étant données deux classes x et y, on dit que :

— « x égale y » si $x = y$;

— « x est un élément de y », ou que « x appartient à y », si $x \in y$.

1.1.2. *Ensembles* — Si x est un objet de la théorie et y une variable qui n'apparaît pas x (ce sera toujours sous-entendu dans des cas similaires par la suite), on abrège en $\boldsymbol{V}(x)$ la formule :

$$\exists y,\ x \in y$$

On dit que x est un *ensemble* si $\boldsymbol{V}(x)$, sinon la classe x est dite *propre*.

Axiome 1.1.3. *La relation d'égalité vérifie :*

1. $\forall x,\ x = x$
2. $\forall x,\ \forall y,\ x = y \Rightarrow y = x$
3. $\forall x,\ \forall y,\ \forall z,\ (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$
4. $\forall x,\ \forall y,\ x = y \Rightarrow \forall z,\ (x \in z \Leftrightarrow y \in z)$

Remarque. L'axiome 1.1.3 semble effectivement correspondre à l'idée que l'on se fait de l'égalité. Le deuxième point est par exemple illustré par la langue : on a en effet tendance à dire « x et y sont égales » et non pas « x égale y », or dans cette formulation x et y jouent un rôle symétrique.

1.1.4. *Relation d'inclusion* — Étant données deux classes x et y, on abrège la formule :

$$\forall z,\ z \in x \Rightarrow z \in y$$

par $x \subseteq y$. Lorsqu'elle est vraie, on dit que « x est contenue dans y ».

Axiome 1.1.5 (extensionnalité)**.** $\forall x,\ \forall y,\ x = y \Leftrightarrow (x \subseteq y \wedge y \subseteq x)$

1.1.6. L'axiome d'extensionnalité signifie que deux classes sont égales si et seulement si elles ont les mêmes éléments : l'égalité est entièrement déterminée par l'appartenance. Plus pragmatiquement, c'est cette axiome qui justifie le principe de la preuve de l'égalité par double inclusion.

Axiome 1.1.7 (paire)**.**

$$\forall x,\ \forall y,\ (\boldsymbol{V}(x) \wedge \boldsymbol{V}(y)) \Rightarrow \exists p,\ (\forall z,\ z \in p \Leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

1.1.8. *Paires et couples* — Étant donnés deux ensembles x et y, l'axiome de la paire garantit l'existence – unique par extensionnalité – d'une classe dont les éléments sont exactement x et y. C'est ce que l'on appelle la *paire* de x et y, notée $\{x, y\}$. Dans le cas où $x = y$, on parle du *singleton* de x et on le note $\{x\}$.

Il découle immédiatement de l'axiome d'extensionnalité que $\{y, x\}$ n'est autre que $\{x, y\}$, mais il se trouve que dans de nombreuses situations il est commode d'avoir une construction qui garde en mémoire les données de x, y mais également de l'ordre dans lequel sont fournis les arguments x et y.

On définit pour cela :

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

L'objet (x, y) est appelé *couple* de x et y.

Proposition 1.1.9. *Si x, x', y et y' sont quatre ensembles, alors :*

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$$

Démonstration. OUI MA PREUVE □

Axiome 1.1.10 (réunion)**.** $\forall x,\ \exists y,\ \forall z,\ z \in y \Leftrightarrow (\exists w,\ z \in w \wedge w \in x)$

Axiome 1.1.11 (puissance)**.** $\forall x,\ \exists y,\ \forall z,\ z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x$

Axiome 1.1.12 (infini)**.** $\exists I,\ \exists x,\ \wedge (\forall x,\ x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I)$

Axiome 1.1.13 (fondation)**.** $\forall x \in \mathbf{V},\ x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in x,\ x \cap y \neq \varnothing)$

1.2 Arithmétique ordinale

Chapitre 2

Langage des catégories