

# FONDATIONS

Marcus Nicolas



# Chapitre 1

## Métamathématique

Ce chapitre a pour objectif de réglementer aussi formellement que possible la pratique mathématique. Évidemment, il nous est impossible d'être aussi rigoureux FINIR, DIRE QU'ON EST DANS LE METALANGAGE. POUR CELA ON SE LIMITE A DES MANIPULATIONS ALGORITHMIQUES SUR DES STRUCTURES FINIES  $\rightarrow$  TOUT CE CHAPITRE EST IMPLEMENTABLE SUR UNE MACHINE.

Tous les symboles relatifs au métalangage seront dans la suite typographiés en gras. Typiquement, les symboles  $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots$  désignent les entiers positifs du métalangage.

### 1.1 Syntaxe

**1.1.1.** On appelle *symbole logique* les signes  $\neg, \vee, \wedge, \exists$ .

**1.1.2.** Un *langage* est la donnée :

- d'une liste finie de *symboles de relations*  $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$  munis de leur *arité*, contenant le *symbole d'égalité*  $=$  d'arité 2 ;
- d'une infinité de *symboles de variables*  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ <sup>1</sup>.

Dans cette description, il est bien sûr supposé implicitement que les collections des symboles logiques, de relations et de variables sont disjointes. Considérées simultanément, elles forment ce que l'on appelle les *symboles* du langage.

On fixe dans la suite un langage  $\mathfrak{L}$ . Une *expression* de  $\mathfrak{L}$  est un arbre enraciné dont chaque nœud est étiqueté par un symbole de  $\mathfrak{L}$  ou par une référence à un autre nœud. Graphiquement, on représentera les référence d'un nœud à un autre par une flèche pointillée. Les expressions seront désignées dans la suite par des lettres grecques.

**TODO :** Il n'est pas commode de représenter un arbre à chaque fois, dans la pratique courante on les écrira en ligne (?) avec des parenthèses

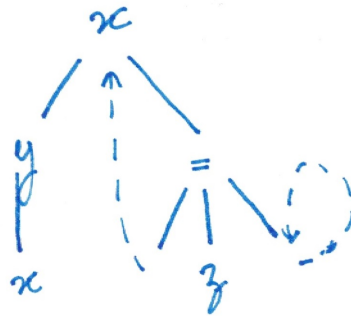
---

1. Dans notre cas, ce seront des lettres latines et grecques suivies d'un nombre arbitraire de primes, par exemple  $x$  ou  $\alpha''$ .

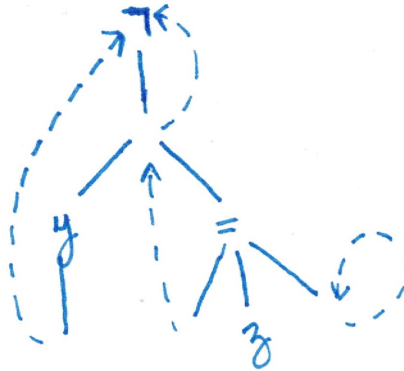
**1.1.3. Substitution** — Étant données  $\alpha$  et  $\xi$  deux expressions et  $x$  une variable, l'écriture  $\xi[x \leftarrow \alpha]$  désigne l'expression obtenue en remplaçant dans  $\xi$  toutes les feuilles étiquetées par  $x$  par l'arbre  $\alpha$ .

**1.1.4.** Étant donnés  $s$  un symbole de  $\mathfrak{L}$ ,  $x$  une variable de  $\mathfrak{L}$  et  $\xi$  une expression de  $\mathfrak{L}$ , on désigne par  $(sx)\xi$  l'expression obtenue en rajoutant à  $\xi$  une racine étiquetée par  $s$ , et remplaçant chaque étiquette  $x$  par une référence à cette nouvelle racine.

**Exemple 1.1.5.** Si  $\xi$  désigne l'expression



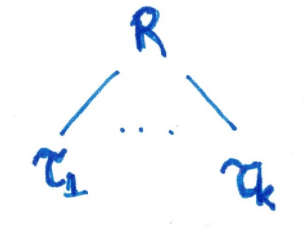
alors  $(\neg x)\xi$  est :



**TODO : UTILISER TIKZ**

**1.1.6.** Les *formules* et les *termes* de  $\mathfrak{L}$  sont définis récursivement de la façon suivante (à refaire, **TODO**) :

- si  $R$  est un symbole de relation d'arité  $k$  et si  $\tau_1, \dots, \tau_k$  sont des termes, alors l'expression :



est une formule, dite *atomique*, notée  $R(\tau_1, \dots, \tau_k)$ ;

— si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des formules, alors les expressions :



aussi, respectivement désignées par  $\neg\varphi$  et  $\varphi \vee \psi$ ;

— si  $\varphi$  est une formule et si  $x$  est une variable alors  $(\exists x)\varphi$  aussi.

et :

— les variables sont des termes ;

— si  $\varphi$  est une formule et si  $x$  est une variable, alors  $(\iota x)\varphi$  est un terme.

## 1.2 Démonstrations et théorèmes

## 1.3 Relation d'égalité



# Chapitre 2

## Classes et ensembles

### 2.1 Axiomatique NBG

**2.1.1.** La méthode axiomatique consiste à faire reposer un édifice mathématique sur un nombre restreint de propositions tenues pour vraies, appelées *axiomes*. Le système axiomatique sur lequel nous nous baserons dans la suite de ce cours se nomme système von Neumann–Bernays–Gödel, ou, de manière plus concise, système NBG.

Les objets dont traite cette théorie sont appelées des *classes*, liées les unes par rapport aux autres par les relations d'égalité et d'appartenance, notées  $=$  et  $\in$ . Étant données deux classes  $x$  et  $y$ , on dit que :

- «  $x$  égale  $y$  » si  $x = y$  ;
- «  $x$  est un élément de  $y$  », ou que «  $x$  appartient à  $y$  », si  $x \in y$ .

**2.1.2. Ensembles** — Si  $x$  est une classe – c'est-à-dire un terme du langage – et  $y$  une variable qui n'apparaît pas  $x$  (ce sera toujours sous-entendu dans des cas similaires par la suite), on abrège en  $V(x)$  la formule :

$$\exists y, x \in y$$

On dit que  $x$  est un *ensemble* si  $V(x)$ , sinon la classe  $x$  est dite *propre*.

**Axiome 2.1.3.** La relation d'égalité vérifie :

1.  $\forall x, x = x$
2.  $\forall x, \forall y, x = y \Rightarrow y = x$
3.  $\forall x, \forall y, \forall z, (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$
4.  $\forall x, \forall y, x = y \Rightarrow \forall z, (x \in z \Leftrightarrow y \in z)$

*Remarque.* L'axiome 2.1.3 semble effectivement correspondre à l'idée que l'on se fait de l'égalité. Le deuxième point est par exemple illustré par la langue : on a en effet tendance à dire «  $x$  et  $y$  sont égales » et non pas «  $x$  égale  $y$  », or dans cette formulation  $x$  et  $y$  jouent un rôle symétrique.

**2.1.4. Relation d'inclusion** — Étant données deux classes  $x$  et  $y$ , on abrège la formule :

$$\forall z, z \in x \Rightarrow z \in y$$

par  $x \subseteq y$ . Lorsqu'elle est vraie, on dit que «  $x$  est contenue dans  $y$  ».

**Axiome 2.1.5** (extensionnalité).  $\forall x, \forall y, x = y \Leftrightarrow (x \subseteq y \wedge y \subseteq x)$

**2.1.6.** Une implication de l'axiome d'extensionnalité justifie le principe de la preuve de l'égalité par double inclusion : deux classes sont égales si signifie que deux classes sont égales si et seulement si elles ont les mêmes éléments : l'égalité est entièrement déterminée par l'appartenance. Plus pragmatiquement, c'est cette axiome qui justifie le principe de la preuve de l'égalité par double inclusion.

L'autre implication mérite également que l'on s'y penche. Si  $x, y$  et  $z$  sont des classes, elle s'écrit :

$$x = y \Rightarrow (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

L'axiome 2.1.3 donne aussi :

$$x = y \Rightarrow (x \in z \Leftrightarrow y \in z) \quad \text{et} \quad x = y \Rightarrow (x = z \Leftrightarrow y = z)$$

On se convainc qu'alors :

$$x = y \Rightarrow (\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(y))$$

pour tout formule  $\Phi$  de la théorie. Ce n'est évidemment pas une démonstration rigoureuse, mais un énoncé du métalangage. Cependant on ne prendra pas la peine de le justifier dans chaque cas particulier, car la preuve s'en déduira à chaque fois de ce que nous avons établi plus haut.

**Métathéorème 2.1.7.** *Si  $\Phi$  est une formule dans laquelle les variables  $x$  et  $y$  n'apparaissent pas, alors :*

$$x = y \Rightarrow (\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(y))$$

*est un théorème. Autrement dit, deux objets égaux sont indiscernables.*

*Justification.* fdzss

□

**Axiome 2.1.8** (paire).

$$\forall x, \forall y, (\mathbf{V}(x) \wedge \mathbf{V}(y)) \Rightarrow \exists p, (\forall z, z \in p \Leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

**2.1.9. Paires et couples** — Étant donnés deux ensembles  $x$  et  $y$ , l'axiome de la paire garantit l'existence – unique par extensionnalité – d'une classe dont les éléments sont exactement  $x$  et  $y$ . C'est ce que l'on appelle la *paire*



de  $x$  et  $y$ , notée  $\{x, y\}$ . Dans le cas où  $x = y$ , on parle du *singleton* de  $x$  et on le note  $\{x\}$ .

Il découle immédiatement de l'axiome d'extensionnalité que  $\{y, x\}$  n'est autre que  $\{x, y\}$ , mais il se trouve que dans de nombreuses situations il est commode d'avoir une construction qui garde en mémoire les données de  $x$ ,  $y$  mais également de l'ordre dans lequel sont fournis les arguments  $x$  et  $y$ .

On définit pour cela :

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

L'objet  $(x, y)$  est appelé *couple* de  $x$  et  $y$ .

**Proposition 2.1.10.** *Si  $x$ ,  $x'$ ,  $y$  et  $y'$  sont quatre ensembles, alors :*

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$$

*Démonstration.* OUI MA PREUVE

□

**Axiome 2.1.11.** *OUI OUI EXISTENCE DE CLASSES*

**Axiome 2.1.12** (réunion).

$$\forall x \in \mathbf{V}, \exists y \in \mathbf{V}, \forall z, z \in y \Leftrightarrow (\exists w, z \in w \wedge w \in x)$$

**Axiome 2.1.13** (puissance).

$$\forall x \in \mathbf{V}, \exists y \in \mathbf{V}, \forall z, z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x$$

**Axiome 2.1.14** (infini).  $\exists I, \emptyset \in I \wedge (\forall x, x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I)$

**Axiome 2.1.15** (fondation).  $\forall x \in \mathbf{V}, x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y \in x, x \cap y \neq \emptyset)$

## 2.2 Arithmétique ordinale



## Chapitre 3

### Langage des catégories