Fondations

Marcus Nicolas

Chapitre 1

Classes et ensembles

1.1 Axiomatique NBG

1.1.1. La méthode axiomatique consiste à faire reposer un édifice mathématique sur un nombre restreint de propositions tenues pour vraies, appelées *axiomes*. Le système axiomatique sur lequel nous nous baserons dans la suite de ce cours se nomme système von Neumann–Bernays–Gödel, ou, de manière plus concise, système NBG.

Les objets dont traite cette théorie sont appelées des *classes*, liées les unes par rapport aux autres par les relations d'égalité et d'appartenance, notées $=$ et $\in$. Le premier axiome sert à lier ces deux symboles.

1.1.2. *Relation d'inclusion* — dd

Axiome 1.1.3 (extensionnalité)**.** $\forall x,\ \forall y,\ x = y \Leftrightarrow (x \subseteq y \wedge y \subseteq x)$

Axiome 1.1.4 (réunion)**.** $\forall x,\ \exists y,\ \forall z,\ z \in y \Leftrightarrow (\exists w,\ z \in w \wedge w \in x)$

Axiome 1.1.5 (puissance)**.** $\forall x,\ \exists y,\ \forall z,\ z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x$

Axiome 1.1.6 (infini)**.** $\exists I,\ I \neq \varnothing \wedge (\forall x,\ x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I)$

Axiome 1.1.7 (fondation)**.** $\forall x \in \mathbf{V},\ x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in x,\ x \cap y \neq \varnothing)$

1.2 Arithmétique ordinale