1
Un peu de géométrie convexe

1.1 Faces d'un ensemble convexe

1.1.1. *Convexité.* — On rappelle, étant donné un espace affine A sur $\mathbf{R}$, qu'une partie $C \subseteq A$ est dite *convexe* lorsque le segment $[x, y]$ est contenu dans C pour tout couple (x, y) de points de C. La *dimension* de C, notée $\dim C$, est alors la dimension de son enveloppe affine $\operatorname{aff} C$. L'intérieur et la frontière de C sont toujours considérés relativement à l'espace topologique $\operatorname{aff} C$.

Remarque 1.1.2 Un convexe non vide est d'intérieur non vide.

Théorème 1.1.3 — Carathéodory

Tout point de l'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace affine de dimension d est barycentre de $d+1$ points de A.

Démonstration

Étant donné $y \in \operatorname{conv} A$, il existe un entier r minimal, des réels positifs λ_i et des points x_i de A vérifiant :

$$y = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$$

Si $r \geq d+1$, alors la famille $x_0, \ldots, x_r$ n'est pas affinement indépendante. Autrement dit, il existe des réels $\mu_0, \ldots, \mu_r$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=0}^{r} \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{r} \mu_i = 0$$

On peut supposer avoir $\mu_r > 0$ et $\lambda_r/\mu_r < \lambda_i/\mu_i$ pour tout i tel que $\mu_i > 0$. Alors :

$$x_j = -\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\mu_i}{\mu_r} x_i \quad \text{puis} \quad y = \sum_{i=0}^{r-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \right) x_i$$

et on vérifie immédiatement que :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \right) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i < r,\ \lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \geq 0$$

C'est absurde car r est supposé minimal, donc $r \leq d$.

On travaille implicitement dans le reste de chapitre dans un espace affine euclidien ambiant E.

Définition 1.1.4

> Soit K un convexe fermé. Une *face exposée* de K est une partie de K vide ou de la forme $H \cap K$ avec H hyperplan d'appui de K dans aff K.
>
> L'ensemble des faces exposées de K est noté $\mathscr{F}_{\text{exp}}(K)$.
> Ses éléments maximaux pour la relation d'inclusion forment l'ensemble $\overline{\mathscr{F}}(K)$.

1.1.5. *Premières propriétés.* — Si $F = H \cap K$ est face exposée non vide d'un convexe fermé K, alors aff $F \subseteq H$ puis aff $F \cap K \subseteq H \cap K = F$. L'inclusion réciproque étant évidente, il vient que :

$$F = \operatorname{aff} F \cap K$$

et c'est vrai également dans le cas où F est vide.

En particulier, si $F \subseteq F'$ sont deux faces exposées de K de même dimension, alors $F = F'$. Cela assure par exemple que l'ensemble $\mathscr{F}_{\text{exp}}(K)$ est inductif.

Proposition 1.1.6

> *Étant donné un convexe fermé K :*
>
> *(1) Les éléments de $\mathscr{F}_{\text{exp}}(K)$ sont des parties convexes fermées de ∂K.*
>
> *(2) L'ensemble $\mathscr{F}_{\text{exp}}(K)$ est stable par intersections finies non vides.*

—— *Démonstration* ——

(1) Clair.

(2) Soient $F_1, \ldots, F_m \in \mathscr{F}_{\text{exp}}(K)$. On note :

$$F = \bigcap_{i=1}^{m} F_i$$

Si F est vide alors il n'y a rien à faire. Sinon on fixe $a \in F$. Il existe alors pour tout i un vecteur non nul u_i tel que, si H_i désigne l'hyperplan d'équation $\langle x - a, u_i \rangle = 0$:

$$F_i = H_i \cap K \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \langle x - a, u_i \rangle \leq 0$$

Le vecteur $u = \sum_i u_i$ est non nul, car si $b \in \operatorname{int} K$ alors $\langle b - a, u \rangle < 0$.
Finalement, si H désigne l'hyperplan d'équation $\langle x, u \rangle = 0$:

$$F = H \cap K \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \langle x, u \rangle \leq 0$$

et H est un hyperplan d'appui de K en a, d'où $F \in \mathscr{F}_{\text{exp}}(K)$.

On fixe dans la suite un convexe fermé K.

Proposition 1.1.7

> *Si K n'est pas réduit à un point, alors $\partial K = \bigcup \overline{\mathscr{F}}(K)$.*

Démonstration

Si K est vide, il n'y a rien à faire. Sinon, le théorème de séparation des convexes assure que tout point de la frontière de K appartient à une face exposée, et le lemme de Zorn permet de conclure.

Remarque 1.1.8 Si $C' \in \mathscr{F}_{\exp}(C)$ et $C'' \in \mathscr{F}_{\exp}(C')$, on n'a pas nécessairement $C'' \in \mathscr{F}_{\exp}(C)$.
REGARDER LE CONVEXE SUIVANT DANS $\mathbf{R}^2$, POINTS EXTREMAUX $\neq$ POINTS EXPOSÉS.

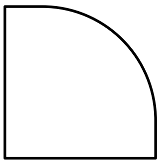

Figure 1.1

La remarque précédente justifie la définition suivante :

Définition 1.1.9

> Une *face* de K est une partie F de K telle qu'il existe une suite de convexes fermés :
>
> $$K = F_0 \supseteq \ldots \supseteq F_k = F$$
>
> telle que $F_i \in \mathscr{F}_{\exp}\left(F_{i-1}\right)$ pour $1 \leq i \leq k$.
>
> On désigne par $\mathscr{F}(K)$ l'ensemble des faces de K.

Remarque 1.1.10 L'ensemble des faces propres maximales de K est exactement $\overline{\mathscr{F}}(K)$.

Proposition 1.1.11

> *Si F est une face de K, alors les faces de F sont les faces de K contenues dans F.*

Démonstration

Il suffit de traiter le cas où F est une face exposée de K.
Étant donnée une face F' de K contenue dans F, on considère une suite $K = F'_0 \supseteq \ldots \supseteq F'_k = F'$ telle que $F'_i \in \mathscr{F}_{\exp}\left(F'_{i-1}\right)$ pour tout i. Si F'_i s'écrit $F'_{i-1} \cap H$ avec H hyperplan d'appui F'_{i-1}, alors :

$$F \cap F'_i = \left(F \cap F'_{i-1}\right) \cap H$$

et H est un hyperplan d'appui de $F \cap F'_{i-1}$. Ainsi $F \cap F'_i \in \mathscr{F}_{\exp}(F \cap F'_{i-1})$, et c'est évidemment aussi le cas si F'_i est vide. La suite :

$$F = F \cap F'_0 \supseteq \ldots \supseteq F \cap F'_k = F'$$

montre finalement que F' est une face de F.

Proposition 1.1.12

> *Si F est une face de K, alors* $\operatorname{ext} F = F \cap \operatorname{ext} K$.

—— *Démonstration* ——

On peut supposer que F est une face exposée non vide, et on écrit dans ce cas $F = H \cap K$ avec H hyperplan d'appui de K. Étant donné $a \in \operatorname{ext} F$, il existe un vecteur u non nul tel que :

$$H = \{ \, x \mid \langle x - a, u \rangle = 0 \, \} \quad \text{et} \quad \forall x \in K, \ \langle x - a, u \rangle \leq 0$$

Supposons qu'il existe $0 < \lambda < 1$ et deux points distincts x et y de K tels que $a = \lambda x + (1 - \lambda) y$. Alors :

$$\lambda \langle x - a, u \rangle + (1 - \lambda) \langle y - a, u \rangle = 0$$

ce qui impose que x et y appartiennent à F. C'est absurde, d'où :

$$\operatorname{ext} F \subseteq F \cap \operatorname{ext} K$$

et l'inclusion réciproque est immédiate.

Corollaire 1.1.13

> *Les points extrémaux de K sont exactement les faces singletons.*

—— *Démonstration* ——

Soit $\{x\}$ une face singleton de K.

1.2 Polytopes convexes

Définition 1.2.1

> Un *polytope convexe* est un convexe non vide qui est intersection finie de demi-espaces fermés dans son enveloppe affine.
> Les 0-faces et 1-faces d'un polytope sont respectivement appelés *sommets* et *arêtes*.

1.2.2. Étant donné un polytope convexe K, on fixe une famille minimale de demi-espaces fermés $D_1, \ldots, D_r$ de aff K vérifiant :

$$K = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$

et on écrit :

$$D_i = \left\{ x \;\middle|\; \langle x - a, u_i \rangle \leq \theta_i \right\} \quad \text{et} \quad F_i = \partial D_i \cap K$$

pour tout $1 \leq i \leq r$.

1.2.2.1. Finalement :

$$\partial K = \bigcup_{i=1}^{r} F_i$$

1.2.2.2. ALORS $\overline{\mathscr{F}}(K) = \left\{F_1, \ldots, F_r\right\}$.

1.2.2.3. Finalement, étant donné un indice $1 \leq i \leq r$, tout élément de $\overline{\mathscr{F}}\left(F_i\right)$ est intersection de deux éléments de $\overline{\mathscr{F}}(K)$.

Proposition 1.2.3

> *Une face propre de K est intersection finie d'éléments de $\overline{\mathscr{F}}(K)$.*

—— *Démonstration* ——

On raisonne par récurrence sur la dimension d de K :

- si K est réduit à un point, alors l'énoncé est vide.
- si $d \geq 1$, ALORS

On déduit immédiatement de ce qui précède :

Théorème 1.2.4

> *Si K est un polytope convexe, alors les faces exposées de K sont exactement ses faces propres et sont en nombre fini.*

1.2.5. DIGRESSION, ORGANISER LES PROPS SUIVANTES

Proposition 1.2.6

Soit K un polytope convexe.
Si $D_1, \ldots, D_r$ sont des demi-espaces fermés de l'espace E ambiant tels que :

$$K = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$

En notant $F_i = \partial D_i \cap K$ pour tout $1 \leq i \leq r$, les faces de K sont alors exactement les intersections dans K d'un nombre fini de F_i.

—— *Démonstration* ——

Corollaire 1.2.7

Si K_1 et K_2 sont deux polytopes convexes, alors :

$$\mathscr{F}(K_1 \cap K_2) = \{ F_1 \cap F_2 \mid (F_1, F_2) \in \mathscr{F}(K_1) \times \mathscr{F}(K_2) \}$$

—— *Démonstration* ——

On peut écrire dans E :

$$K_1 = \bigcap_{i=1}^{r} D_i \quad \text{et} \quad K_2 = \bigcap_{i=r+1}^{r+s} D_i$$

où les D_i sont des demi-espaces fermés. Alors :

$$K_1 \cap K_2 = \bigcap_{i=1}^{r+s} D_i$$

et la (PROP PRECEDENTE) permet de conclure.

1.3 Cellules linéaires

Définition 1.3.1

Une *cellule linéaire* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

1.3.2. DISCUTER UN PEU

Lemme 1.3.3

Si K est une cellule, alors tout point d'une k-face de K appartient à l'enveloppe convexe de $k+1$ points extrémaux de K.

—— *Démonstration* ——

Le résultat suivant est fondamental :

Théorème 1.3.4

Les cellules sont exactement les polytopes bornés.

—— *Démonstration* ——

Définition 1.3.5

Un *complexe* est un ensemble localement fini Δ de cellules tel que :

(i) si K_1 et K_2 sont deux cellules distinctes de Δ alors $\operatorname{int} K_1$ et $\operatorname{int} K_2$ sont disjoints ;

(ii) si $K \in \Delta$, alors ∂K est réunion de cellules de Δ.

Un *sous-complexe* de Δ est un complexe $\Sigma \subseteq \Delta$.

1.4 Simplexes et complexes simpliciaux

Définition 1.4.1

Un *simplexe* est une cellule dont les points extrémaux sont affinement indépendants.

METTRE LA REMARQUE

Définition 1.4.2

Un *complexe simplicial* de $\mathbf{R}^d$ est un ensemble localement fini Δ de simplexes tel que :

(i) chaque face d'un simplexe de Δ est dans Δ ;

(ii) l'intersection de deux simplexes de Δ est une face commune aux deux.

Un *sous-complexe* de Δ est un complexe simplicial $\Sigma \subseteq \Delta$.

METTRE L'EXEMPLE

Définition 1.4.3

Si Δ est un complexe simplicial, on définit la réalisation géométrique de Δ comme étant l'espace topologique :

$$|\Delta| = \bigcup \Delta$$

Une *triangulation* d'un espace topologique X est alors la donnée d'un complexe simplicial Δ et d'un homéomorphisme $X \simeq |\Delta|$.

Définition 1.4.4

Soit Δ un complexe simplicial.
Une *subdivision* de Δ est un complexe simplicial Σ tel que :

$$|\Sigma| = |\Delta|$$

et dont chaque simplexe est inclus dans un simplexe de Δ.

Théorème 1.4.5

Deux complexes simpliciaux qui réalisent le même polyèdre (A DEFINIR) possèdent une subdivision commune.

Démonstration

Soient Δ_1 et Δ_2 deux complexes simpliciaux de $\mathbf{R}^d$ tels que :

$$\left|\Delta_1\right| = \left|\Delta_2\right|$$

On va construire une suite croissante $\left(\Sigma_k\right)_{k\leq d}$ de complexes vérifiant pour tout k :

(i) $\dim \Sigma_k \leq k$

(ii) si $\sigma_1 \in \Delta_1$ et $\sigma_2 \in \Delta_2$ sont d'intersection k-dimensionnelle :

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \bigcup_{\substack{\sigma\in\Sigma_k \\ \sigma\subseteq\sigma_1\cap\sigma_2}} \sigma$$

(iii) $\left|\Sigma_k\right| = \bigcup_{\dim\left(\sigma_1\cap\sigma_2\right)\leq k} \left(\sigma_1 \cap \sigma_2\right)$

On pose naturellement :

$$\Sigma_0 = \left\{ \sigma_1 \cap \sigma_2 \;\middle|\; \dim\left(\sigma_1 \cap \sigma_2\right) = 0 \right\}$$

L'ensemble $\Delta_1 \cup \Delta_2$ étant localement fini, c'est également le cas de Σ_0. Étant constitué de simplexes réduits à des points, il s'agit d'un complexe simplicial.

Supposons maintenant avoir construit le complexe Σ_{k-1}.
Étant donnés des simplexes $\sigma_1 \in \Delta_1$ et $\sigma_2 \in \Delta_2$ tels que $\dim\left(\sigma_1 \cap \sigma_2\right) = k$, on note b l'isobarycentre de la cellule $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et :

$$F\left(\sigma_1, \sigma_2\right) = \left\{ \sigma \in \Sigma_{k-1} \;\middle|\; \sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2 \right\}$$

On commence par remarquer, Σ_{k-1} étant localement fini et $\sigma_1 \cap \sigma_2$ compact, que l'ensemble $F\left(\sigma_1, \sigma_2\right)$ est fini.

Assertion 1 *Chaque simplexe de $F\left(\sigma_1, \sigma_2\right)$ est contenu dans une face propre de $\sigma_1 \cap \sigma_2$.*

—— *Démonstration* ——

Soit $\sigma \in F\big(\sigma_1, \sigma_2\big)$. D'après le (COROLLAIRE 1.14), on a :

$$\big(\sigma_1 \cap \sigma_2\big) \cap \big|\Sigma_{k-1}\big| \subseteq \bigcup \mathscr{F}_{\exp}\big(\sigma_1 \cap \sigma_2\big)$$

d'où $\sigma \subseteq \bigcup \mathscr{F}_{\exp}\big(\sigma_1 \cap \sigma_2\big)$. Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\operatorname{aff}\sigma$, alors :

$$0 < \lambda(\sigma) \leq \sum_{\omega} \lambda(\omega \cap \operatorname{aff}\sigma)$$

et il existe une face propre ω de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ telle que $\lambda(\omega \cap \operatorname{aff}\sigma) > 0$. Par égalité des dimensions :

$$\begin{aligned} \operatorname{aff}\sigma &= \operatorname{aff}(\omega \cap \operatorname{aff}\sigma) \\ &\subseteq \operatorname{aff}\omega \cap \operatorname{aff}\sigma \\ &\subseteq \operatorname{aff}\omega \end{aligned}$$

Finalement $\sigma \subseteq \operatorname{aff}\omega \cap \big(\sigma_1 \cap \sigma_2\big) = \omega$.

Assertion 2 *Si $\sigma = [\, a_0, \ldots, a_r \,]$ est un simplexe de $F\big(\sigma_1, \sigma_2\big)$, alors $\tau = [\, b, a_0, \ldots, a_r \,]$ est un simplexe inclus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau \cap \big|\Sigma_{k-1}\big| = \sigma$.*

—— *Démonstration* ——

Étant donné H un hyperplan d'appui de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ dans $\operatorname{aff}\big(\sigma_1 \cap \sigma_2\big)$, on écrit :

$$H = \{\ x \ \mid\ \langle x, u\rangle = \theta\ \} \quad \text{et} \quad \forall x \in \big(\sigma_1 \cap \sigma_2\big),\ \langle x, u\rangle \leq \theta$$

avec u un vecteur non nul et θ un réel. Un argument de dimension montre l'existence d'un sommet de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ hors de H, d'où $\langle b, u\rangle < \theta$ et $b \notin H$ (A CORRIGER).

1.4.6. *Subdivision cristalline.* — □

2
Homologie simpliciale

2.1 Triangulation des variétés

Oui mais non