1
Un peu de géométrie convexe

1.1 Faces d'un ensemble convexe

1.1.1. *Convexité.* — On rappelle, étant donné un espace affine A sur $\mathbf{R}$, qu'une partie $C \subseteq A$ est dite *convexe* lorsque le segment $[x, y]$ est contenu dans C pour tout couple (x, y) de points de C. La *dimension* de C, notée $\dim C$, est alors la dimension de son enveloppe affine $\operatorname{aff} C$. L'intérieur et la frontière de C sont toujours considérés relativement à l'espace topologique $\operatorname{aff} C$.

Remarque 1.1.2 Un convexe non vide est d'intérieur non vide.

Théorème 1.1.3 — Carathéodory

Tout point de l'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace affine de dimension d est barycentre de $d + 1$ points de A.

Démonstration

Étant donné $y \in \operatorname{conv} A$, il existe un entier r minimal, des réels positifs λ_i et des points x_i de A vérifiant :

$$y = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$$

Si $r \geq d + 1$, alors la famille $x_0, \ldots, x_r$ n'est pas affinement indépendante. Autrement dit, il existe des réels $\mu_0, \ldots, \mu_r$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=0}^{r} \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{r} \mu_i = 0$$

On peut supposer avoir $\mu_r > 0$ et $\lambda_r/\mu_r < \lambda_i/\mu_i$ pour tout i tel que $\mu_i > 0$. Alors :

$$x_j = -\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\mu_i}{\mu_r} x_i \quad \text{puis} \quad y = \sum_{i=0}^{r-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \right) x_i$$

et on vérifie immédiatement que :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \right) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i < r,\ \lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \geq 0$$

C'est absurde car r est supposé minimal, donc $r \leq d$.

On travaille implicitement dans le reste de chapitre dans un espace affine euclidien ambiant E.

Définition 1.1.4

> Soit K un convexe fermé. Une *face exposée* de K est une partie de K vide ou de la forme $H \cap K$ avec H hyperplan d'appui de K dans $\operatorname{aff} K$.
>
> L'ensemble des faces exposées de K est noté $\mathscr{F}_{\mathrm{exp}}(K)$.
> Ses éléments maximaux pour la relation d'inclusion forment l'ensemble $\overline{\mathscr{F}}(K)$.

1.1.5. *Premières propriétés.* — Si $F = H \cap K$ est face exposée non vide d'un convexe fermé K, alors $\operatorname{aff} F \subseteq H$ puis $\operatorname{aff} F \cap K \subseteq H \cap K = F$. L'inclusion réciproque étant évidente, il vient que :

$$F = \operatorname{aff} F \cap K$$

et c'est vrai également dans le cas où F est vide.

En particulier, si $F \subseteq F'$ sont deux faces exposées de K de même dimension, alors $F = F'$. Cela assure par exemple que l'ensemble $\mathscr{F}_{\mathrm{exp}}(K)$ est inductif.

Proposition 1.1.6

> Étant donné un convexe fermé K :
>
> (1) Les éléments de $\mathscr{F}_{\mathrm{exp}}(K)$ sont des parties convexes fermées de ∂K.
>
> (2) L'ensemble $\mathscr{F}_{\mathrm{exp}}(K)$ est stable par intersections finies non vides.

Démonstration

(1) Clair.

(2) Soient $F_1, \dots, F_m \in \mathscr{F}_{\mathrm{exp}}(K)$. On note :

$$F = \bigcap_{i=1}^{m} F_i$$

Si F est vide alors il n'y a rien à faire. Sinon on fixe $a \in F$. Il existe alors pour tout i un vecteur non nul u_i tel que, si H_i désigne l'hyperplan d'équation $\langle x - a, u_i \rangle = 0$:

$$F_i = H_i \cap K \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \langle x - a, u_i \rangle \leq 0$$

Le vecteur $u = \sum_i u_i$ est non nul, car si $b \in \operatorname{int} K$ alors $\langle b - a, u \rangle < 0$.
Finalement, si H désigne l'hyperplan d'équation $\langle x, u \rangle = 0$:

$$F = H \cap K \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \langle x, u \rangle \leq 0$$

et H est un hyperplan d'appui de K en a, d'où $F \in \mathscr{F}_{\mathrm{exp}}(K)$.

On fixe dans la suite un convexe fermé K.

Proposition 1.1.7

Si K n'est pas réduit à un point, alors $\partial K = \bigcup \overline{\mathscr{F}}(K)$.

Démonstration

Si K est vide, il n'y a rien à faire. Sinon, le théorème de séparation des convexes assure que tout point de la frontière de K appartient à une face exposée, et le lemme de Zorn permet de conclure.

Remarque 1.1.8 Si $C' \in \mathscr{F}_{\exp}(C)$ et $C'' \in \mathscr{F}_{\exp}(C')$, on n'a pas nécessairement $C'' \in \mathscr{F}_{\exp}(C)$. REGARDER LE CONVEXE SUIVANT DANS $\mathbf{R}^2$, POINTS EXTREMAUX $\neq$ POINTS EXPOSÉS.

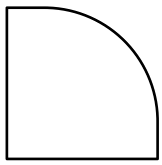

Figure 1.1

La remarque précédente justifie la définition suivante :

Définition 1.1.9

Une *face* de K est une partie F de K telle qu'il existe une suite de convexes fermés :

$$K = F_0 \supseteq \ldots \supseteq F_k = F$$

telle que $F_i \in \mathscr{F}_{\exp}\big(F_{i-1}\big)$ pour $1 \leq i \leq k$.

On désigne par $\mathscr{F}(K)$ l'ensemble des faces de K.

Remarque 1.1.10 La suite vide montre que K est une face de K. L'ensemble des faces propres maximales de K est exactement $\overline{\mathscr{F}}(K)$.

Proposition 1.1.11 — Transitivité

Si F est une face de K, alors les faces de F sont les faces de K contenues dans F.

Démonstration

Il suffit de traiter le cas où F est une face exposée de K.
Étant donnée une face F' de K contenue dans F, on considère une suite $K = F_0' \supseteq \ldots \supseteq F_k' = F'$ telle que $F_i' \in \mathscr{F}_{\exp}\big(F_{i-1}'\big)$ pour tout i. Si F_i' s'écrit $F_{i-1}' \cap H$ avec H hyperplan d'appui F_{i-1}', alors :

$$F \cap F'_i = \left(F \cap F'_{i-1}\right) \cap H$$

et H est un hyperplan d'appui de $F \cap F'_{i-1}$. Ainsi $F \cap F'_i \in \mathscr{F}_{\exp}\left(F \cap F'_{i-1}\right)$, et c'est évidemment aussi le cas si F'_i est vide. La suite :

$$F = F \cap F'_0 \supseteq \ldots \supseteq F \cap F'_k = F'$$

montre finalement que F' est une face de F.

Proposition 1.1.12

> Si F est une face de K, alors $\operatorname{ext} F = F \cap \operatorname{ext} K$.

— *Démonstration* —

On peut supposer que F est une face exposée non vide, et on écrit dans ce cas $F = H \cap K$ avec H hyperplan d'appui de K. Étant donné $a \in \operatorname{ext} F$, il existe un vecteur u non nul tel que :

$$H = \{\ x \ \mid\ \langle x - a, u\rangle = 0\ \} \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \langle x - a, u\rangle \leq 0$$

Supposons qu'il existe $0 < \lambda < 1$ et deux points distincts x et y de K tels que $a = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Alors :

$$\lambda\langle x - a, u\rangle + (1 - \lambda)\langle y - a, u\rangle = 0$$

ce qui impose que x et y appartiennent à F. C'est absurde, d'où :

$$\operatorname{ext} F \subseteq F \cap \operatorname{ext} K$$

et l'inclusion réciproque est immédiate.

Corollaire 1.1.13

> Les points extrémaux de K sont exactement les faces singletons.

— *Démonstration* —

Si $\{x\}$ est une face singleton de K, la proposition 1.1.12 assure que :

$$\begin{aligned} \{x\} \cap \operatorname{ext} K &= \operatorname{ext} \{x\} \\ &= \{x\} \end{aligned}$$

Autrement dit, x est un point extrémal de K.

Réciproquement, considérons x un point extrémal de K. Si K est réduit à un point, alors il n'y a rien à faire. Sinon il existe, en vertu de la proposition 1.1.7, une face propre maximale F de K qui contient x. Le point x est en particulier extrémal dans F et $\dim F < \dim K$. En réitérant ce processus, on finit par montrer que x appartient à une face de K de dimension nulle, ce qui achève la preuve.

1.2 Polytopes convexes

Définition 1.2.1

> Un *polytope convexe* est un convexe non vide qui est intersection finie de demi-espaces fermés dans son enveloppe affine.
> Les 0-faces et 1-faces d'un polytope sont respectivement appelés *sommets* et *arêtes*.

1.2.2. Étant donné un polytope convexe K de dimension non nulle, on fixe une famille minimale de demi-espaces fermés $D_1, \dots, D_r$ de $\operatorname{aff} K$ vérifiant :

$$K = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$

En fixant $a \in \operatorname{int} K$, on peut écrire pour tout $1 \leq i \leq r$:

$$D_i = \left\{ x \;\middle|\; \langle x - a, u_i \rangle \leq \theta_i \right\} \quad \text{et} \quad F_i = \partial D_i \cap K$$

où les u_i sont des vecteurs non nuls et les θ_i des réels strictement positifs.

1.2.2.1. Étant donné un indice $1 \leq i \leq r$, on pose :

$$K_i = \bigcap_{j \neq i} D_j$$

La minimalité de la famille $D_1, \dots, D_r$ implique $K \subset K_i$.
Si $b \in K_i - K$, alors $\langle b - a, u_i \rangle > \theta_i$ et il existe $c \in \,]a, b[\, \subseteq K_i$ tel que :

$$\langle c, u_i \rangle = \theta_i$$

Alors $c \in \partial D_i \cap K_i = F_i$, et ∂D_i est un hyperplan d'appui de K en c.
En particulier F_i est une face exposée de K, et $F_i \subseteq \partial K$ d'après la proposition 1.1.7.

Maintenant, si $x \in K - \bigcup_i F_i$, alors $\langle x - a, u_i \rangle < \theta_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et K est voisinage de x. On en déduit $K - \bigcup_i F_i \subseteq \operatorname{int} K$, d'où $\partial K = K - \operatorname{int} K \subseteq \bigcup_i F_i$.

Finalement :

$$\partial K = \bigcup_{i=1}^{r} F_i$$

1.2.2.2. Si $F \in \mathscr{F}_{\exp}(K)$, alors d'après ce qui précède :

$$F = F \cap \partial K = \bigcup_{i=1}^{r} \big(F \cap F_i \big)$$

Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\operatorname{aff} K$, alors :

$$0 < \lambda(F) \leq \sum_{i=1}^{r} \lambda\big(F \cap F_i\big)$$

et il existe un indice $1 \leq i \leq r$ tel que $\lambda\big(F \cap F_i\big) > 0$. En particulier F et $F \cap F_i$ sont de même dimension, puis $F \cap F_i = F$. Autrement dit $F \subseteq F_i$, et $\overline{\mathscr{F}}(K) \subseteq \big\{F_1, \dots, F_r\big\}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux indices i et j tels que $F_i \subsetneq F_j$.
Si $b \in K_i - K$, alors $\langle b - a, u_i \rangle > \theta_i$ et il existe $c \in \,]a, b[\, \subseteq K_i$ tel que $\langle c - a, u_i \rangle = \theta_i$. En particulier, $c \in F_i$ et l'hypothèse assure que $\langle c - a, u_j \rangle = \theta_j$, or $\langle b - a, u_j \rangle \leq \theta_j$. C'est absurde, donc les F_i sont maximales parmi les faces exposées de K.

Ainsi $\overline{\mathscr{F}}(K) = \big\{F_1, \dots, F_r\big\}$.

1.2.2.3. Pour $1 \leq i \leq r$, on a :

$$\begin{aligned} F_i &= \partial D_i \cap K_i \\ &= \bigcap_{i \neq j} \big(\partial D_i \cap D_j\big) \end{aligned}$$

or $\partial D_i \cap D_j$ est soit plein soit un demi-espace fermé dans ∂D_i. En particulier F_i est un polytope convexe, et chaque $F \in \overline{\mathscr{F}}\big(F_i\big)$ est d'après ce qui précède de la forme :

$$\begin{aligned} F &= \partial\big(\partial D_i \cap D_j\big) \cap F_i \\ &= \partial D_i \cap \partial D_j \cap F_i \\ &= F_i \cap F_j \end{aligned}$$

pour un certain $j \neq i$ tel que $\partial D_i \cap D_j \subset \partial D_i$.

Ainsi chaque élément de $\overline{\mathscr{F}}\big(F_i\big)$ est intersection de deux éléments de $\overline{\mathscr{F}}(K)$.

Proposition 1.2.3

Une face de K est intersection finie d'éléments de $\overline{\mathscr{F}}(K)$ dans K.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur la dimension d de K :

- si K est réduit à un point, alors l'énoncé est vide.
- si $d \geq 1$, on se donne une face F de K. Si $F = K$, alors l'intersection vide convient. Sinon il existe une face maximale propre G de K contenant F. Alors F est une face de G en vertu de la proposition 1.1.11, et F est intersection finie dans G d'éléments de $\overline{\mathscr{F}}(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence. La discussion qui précède permet de conclure.

On déduit immédiatement de ce qui précède :

Théorème 1.2.4

> Si K est un polytope convexe, alors les faces exposées de K sont exactement ses faces propres et sont en nombre fini.

1.2.5.

Proposition 1.2.6

> Soit K un polytope convexe.
> Si $D_1, \ldots, D_r$ sont des demi-espaces fermés de l'espace E ambiant tels que :
>
> $$K = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$
>
> alors, en notant $F_i = \partial D_i \cap K$ pour tout $1 \leq i \leq r$, les faces de K sont alors exactement les intersections dans K d'un nombre fini de F_i.

Démonstration

On a :

$$K = \bigcap_{i=1}^{r} \big(D_i \cap \operatorname{aff} K\big)$$

or $\Delta_i = D_i \cap \operatorname{aff} K$ est soit plein soit un demi-espace fermé dans $\operatorname{aff} K$ pour tout i. Or, pour $1 \leq i \leq r$, on vérifie que :

$$F_i = \partial \Delta_i \cap K$$

En particulier, les F_i sont des faces exposées (éventuellement vides) de K.

Réciproquement, on extrait de la famille $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ une famille minimale délimitant K que l'on suppose, quitte à réarranger les D_i, de la forme $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$. Mais alors $\overline{\mathscr{F}}(K) = \{F_1, \ldots, F_s\}$ et toute face de K est intersection dans K d'un nombre fini de F_i en vertu de la proposition 1.2.3.

Corollaire 1.2.7

> Si K_1 et K_2 sont deux polytopes convexes, alors :
>
> $$\mathscr{F}\big(K_1 \cap K_2\big) = \big\{\ F_1 \cap F_2 \ \big|\ \big(F_1, F_2\big) \in \mathscr{F}\big(K_1\big) \times \mathscr{F}\big(K_2\big)\ \big\}$$

—— *Démonstration* ——

On peut écrire dans E :

$$K_1 = \bigcap_{i=1}^{r} D_i \quad \text{et} \quad K_2 = \bigcap_{i=r+1}^{r+s} D_i$$

où les D_i sont des demi-espaces fermés. Alors :

$$K_1 \cap K_2 = \bigcap_{i=1}^{r+s} D_i$$

et la proposition 1.2.6 permet de conclure.

1.3 Cellules linéaires

Définition 1.3.1

> Une *cellule linéaire* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

1.3.2. *Diamètre et corpulence.* — On appelle *corpulence* d'une cellule $K = [\, a_0, \dots, a_k \,]$ le rapport :

$$\operatorname{corp} K = \frac{r}{d}$$

où r est le rayon maximal d'une boule de aff K contenue dans K et $d = \operatorname{diam} K$.
On remarque que d s'obtient comme le maximum des $\left|a_i - a_j\right|$ d'après le (RÉSULTAT DIAMETRE CONVEXES)

Lemme 1.3.3

> Si K est une cellule, alors tout point d'une k-face de K appartient à l'enveloppe convexe de $k + 1$ points extrémaux de K.

—— *Démonstration* ——

Soient K une cellule et F une éventuelle k-face de K. Le théorème de Krein–Milman et la proposition 1.1.12 assurent que F est l'enveloppe convexe des points extrémaux de K qui appartiennent à F. Le théorème 1.1.3 appliqué dans l'espace aff F permet de conclure.

Le résultat suivant est fondamental :

Théorème 1.3.4

Les cellules sont exactement les polytopes bornés.

Démonstration

Soit K une cellule, que l'on suppose sans perte de généralité de dimension $d \geq 1$. L'ensemble L des combinaisons affines d'au plus $d - 1$ points extrémaux de K contient d'après le lemme 1.3.3 les faces de K de dimension inférieure à $d - 2$. Étant donné $b \notin K$, on définit :

$$C = \{ \lambda x + (1 - \lambda) b \mid \lambda \geq 0 \text{ et } x \in L \}$$

L'ensemble C est contenu dans un nombre fini d'espaces affines de dimension inférieure à $d - 1$, donc est négligeable pour la mesure de Lebesgue dans $\operatorname{aff} K$. En particulier, il existe $a \in (\operatorname{int} K) \smallsetminus C$ puis, par compacité de K, un $0 < \lambda < 1$ minimal tel que le point $c = \lambda a + (1 - \lambda) b$ appartienne à K. Alors $c \in \partial K$, et il existe d'après la proposition 1.1.7 une face propre F de K contenant c, nécessairement de dimension $d - 1$. Si l'hyperplan $\operatorname{aff} F$ est d'équation $\langle x - a, u \rangle = \theta$, alors $b - a$ n'est pas orthogonal à u et $\operatorname{aff} F$ sépare K du point b. On en déduit que K est l'intersection des demi-espaces fermés déterminés par les $(d - 1)$-faces de K, qui sont en nombre fini d'après le lemme 1.3.3.

Réciproquement, si K est un polytope borné, alors il possède un nombre fini de points extrémaux d'après le corollaire 1.1.13 et le théorème 1.2.4. Le théorème de Krein–Milman permet de conclure.

Corollaire 1.3.5

L'intersection de deux cellules est encore une cellule.

1.4 Simplexes et complexes simpliciaux

Définition 1.4.1

Un *simplexe* est une cellule dont les points extrémaux sont affinement indépendants.

Remarque 1.4.2 Les faces d'un simplexe de points extrémaux $a_0, \ldots, a_k$ sont exactement les enveloppes convexes d'une partie des a_i. Ce sont en particulier des simplexes de dimension plus petite.

Définition 1.4.3

Un *complexe simplicial* de $\mathbf{R}^d$ est un ensemble localement fini Δ de simplexes tel que :

(i) chaque face d'un simplexe de Δ est dans Δ ;

(ii) l'intersection de deux simplexes de Δ est une face commune aux deux.

Un *sous-complexe* de Δ est un complexe simplicial $\Sigma \subseteq \Delta$.

1.4.4. *Squelettes.* — Étant donné un complexe simplicial Δ et un entier n, le *n-squelette* de Δ est le sous-complexe $\Delta^{(n)}$ de Δ défini par :

$$\Delta^{(n)} = \{ \sigma \in \Delta \mid \dim \sigma \leq n \}$$

1.4.5. *Subdivision d'un complexe.* — La *réalisation géométrique* d'un complexe simplicial Δ est l'espace topologique :

$$|\Delta| = \bigcup \Delta$$

On dit d'une partie d'un espace affine euclidien que c'est un *polyèdre* si elle est la réalisation d'un certain complexe. Une subdivision de Δ est un complexe simplicial Σ tel que :

$$|\Sigma| = |\Delta|$$

et dont chaque simplexe est inclus dans un simplexe de Δ.

Définition 1.4.6

Une *triangulation* d'un espace topologique X est la donnée d'un complexe simplicial Δ et d'un homéomorphisme $X \simeq |\Delta|$.

Théorème 1.4.7

Deux complexes simpliciaux qui réalisent le même polyèdre possèdent une subdivision commune.

— *Démonstration* —

Soient Δ_1 et Δ_2 deux complexes simpliciaux de $\mathbf{R}^d$ tels que :

$$\left|\Delta_1\right| = \left|\Delta_2\right|$$

On va construire une suite croissante $\left(\Sigma_k\right)_{k \leq d}$ de complexes vérifiant pour tout k :

(i) $\dim \Sigma_k \leq k$

(ii) si $\sigma_1 \in \Delta_1$ et $\sigma_2 \in \Delta_2$ sont d'intersection k-dimensionnelle :

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \bigcup_{\substack{\sigma \in \Sigma_k \\ \sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2}} \sigma$$

(iii) $\left|\Sigma_k\right| = \bigcup_{\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) \leq k} \left(\sigma_1 \cap \sigma_2\right)$

On pose naturellement :

$$\Sigma_0 = \left\{ \sigma_1 \cap \sigma_2 \;\middle|\; \dim\left(\sigma_1 \cap \sigma_2\right) = 0 \right\}$$

L'ensemble $\Delta_1 \cup \Delta_2$ étant localement fini, c'est également le cas de Σ_0. Étant constitué de simplexes réduits à des points, il s'agit d'un complexe simplicial.

Supposons maintenant avoir construit le complexe Σ_{k-1}.
Étant donnés des simplexes $\sigma_1 \in \Delta_1$ et $\sigma_2 \in \Delta_2$ tels que $\dim\left(\sigma_1 \cap \sigma_2\right) = k$, on note b l'isobarycentre de la cellule $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et :

$$F\left(\sigma_1, \sigma_2\right) = \left\{ \sigma \in \Sigma_{k-1} \;\middle|\; \sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2 \right\}$$

L'ensemble Σ_{k-1} étant localement fini et $\sigma_1 \cap \sigma_2$ compact, il vient que $F\left(\sigma_1, \sigma_2\right)$ est fini.

Assertion 1 Chaque simplexe de $F(\sigma_1, \sigma_2)$ est contenu dans une face propre de $\sigma_1 \cap \sigma_2$.

— *Démonstration* —

Soit $\sigma \in F(\sigma_1, \sigma_2)$. D'après le corollaire 1.2.7, on a :

$$(\sigma_1 \cap \sigma_2) \cap |\Sigma_{k-1}| \subseteq \bigcup \mathscr{F}_{\exp}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$$

d'où $\sigma \subseteq \bigcup \mathscr{F}_{\exp}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$. Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\operatorname{aff}\sigma$, alors :

$$0 < \lambda(\sigma) \leq \sum_{\omega} \lambda(\omega \cap \operatorname{aff}\sigma)$$

et il existe une face propre ω de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ telle que $\lambda(\omega \cap \operatorname{aff}\sigma) > 0$. Par égalité des dimensions :

$$\begin{aligned} \operatorname{aff}\sigma &= \operatorname{aff}(\omega \cap \operatorname{aff}\sigma) \\ &\subseteq \operatorname{aff}\omega \cap \operatorname{aff}\sigma \\ &\subseteq \operatorname{aff}\omega \end{aligned}$$

Finalement $\sigma \subseteq \operatorname{aff}\omega \cap (\sigma_1 \cap \sigma_2) = \omega$.

Assertion 2 Si $\sigma = [\, a_0, \ldots, a_r \,]$ est un simplexe de $F(\sigma_1, \sigma_2)$, alors $\tau = [\, b, a_0, \ldots, a_r \,]$ est un simplexe inclus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau \cap |\Sigma_{k-1}| = \sigma$.

— *Démonstration* —

Étant donné H un hyperplan d'appui de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ dans $\operatorname{aff}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$, on écrit :

$$H = \{\, x \mid \langle x, u \rangle = \theta \,\} \quad \text{et} \quad \forall x \in (\sigma_1 \cap \sigma_2),\ \langle x, u \rangle \leq \theta$$

avec u un vecteur non nul et θ un réel. Un argument de dimension montre l'existence d'un sommet de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ hors de H, d'où $\langle b, u \rangle < \theta$ et $b \notin H$. Mais $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, et si τ désigne la cellule $\operatorname{conv}\{b\} \cup \sigma$:

$$\tau \cap H = \sigma \cap H$$

En particulier, si $B = \bigcup \mathscr{F}_{\exp}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ alors :

$$\tau \cap B = \sigma \cap B$$

Puis, τ étant inclus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$:

$$\begin{aligned} \tau \cap |\Sigma_{k-1}| &= \sigma \cap |\Sigma_{k-1}| \\ &= \sigma \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que τ est un simplexe. L'(ASSERTION 1) montre qu'il existe une face propre ω de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ telle que $\sigma \subseteq \omega$, or $b \notin \operatorname{aff}\omega$ d'après ce qui précède. Les points $b, a_0, \ldots, a_r$ sont donc affinement indépendants.

En particulier, l'ensemble :

$$\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) = \left\{ \operatorname{conv}\{b\} \cup \sigma \;\middle|\; \sigma \in F(\sigma_1, \sigma_2) \right\}$$

est formé de simplexes contenus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de dimension inférieure à k.

Assertion 3 On a :

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \bigcup \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

Démonstration

Soit $x \in (\sigma_1 \cap \sigma_2) - \{b\}$.
Il existe, par compacité de $\sigma_1 \cap \sigma_2$, un réel $\lambda \geq 1$ maximal tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)b \in (\sigma_1 \cap \sigma_2)$.
Alors $y \in \partial(\sigma_1 \cap \sigma_2)$, donc y appartient à une face propre $\tau_1 \cap \tau_2$ de $\sigma_1 \cap \sigma_2$. Par hypothèse de récurrence, y appartient à un simplexe τ de Σ_{k-1} contenu dans $\tau_1 \cap \tau_2$. Finalement conv $\{b\} \cup \tau \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ contient x.

Assertion 4 Si σ est face d'un simplexe de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$, alors :

$$\sigma \in \Sigma_{k-1} \cup \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

Démonstration

Soit σ face d'un simplexe τ de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$. L'ensemble des sommets de σ est une partie de l'ensemble $\{b, a_0, \ldots, a_r\}$ des sommets de τ.
Mais $[\, a_0, \ldots, a_r\,] \in \Sigma_{k-1}$, donc il suffit pour conclure de distinguer les cas selon si b est ou non sommet de σ.

On définit alors :

$$\Sigma_k = \Sigma_{k-1} \cup \bigcup_{\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = k} \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

Soit U un ouvert qui intersecte un nombre fini de simplexes de $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Le nombre de couples (σ_1, σ_2) tels que U rencontre au moins un simplexe de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ est fini, donc U intersecte un nombre fini de simplexes de $\Sigma_k - \Sigma_{k-1}$. Finalement, l'ensemble $\Sigma_k = \Sigma_{k-1} \cup (\Sigma_k - \Sigma_{k-1})$ est localement fini.

Assertion 5 Si $\sigma \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ et $\tau \in \Sigma(\tau_1, \tau_2)$, alors $\sigma \cap \tau \in \Sigma_k$.

Démonstration

D'après (ASSERTION 2), les ensembles :

$$\sigma' = \sigma \cap |\Sigma_{k-1}| \quad \text{et} \quad \tau' = \tau \cap |\Sigma_{k-1}|$$

sont des simplexes de Σ_{k-1}. On distingue alors deux cas :

— si $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau_1 \cap \tau_2$ sont une même cellule d'isobarycentre b, alors :

$$\sigma = \text{conv}\,\{b\} \cup \sigma' \quad \text{et} \quad \tau = \text{conv}\,\{b\} \cup \tau'$$

Soit $a \in (\sigma \cap \tau) - \{b\}$. Quitte à échanger σ et τ, on peut écrire :

$$\begin{aligned} a &= \lambda b + (1-\lambda) y \\ &= \mu b + (1-\mu) z \end{aligned}$$

avec $0 \leq \lambda \leq \mu < 1$, $y \in \sigma'$ et $z \in \tau'$, et alors :

$$y = \frac{\mu - \lambda}{1-\lambda} b + \frac{1-\mu}{1-\lambda} z \in \tau$$

En particulier $y \in \sigma' \cap \tau = \sigma' \cap \tau'$ et $a \in \text{conv}\,\{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$.
On en déduit $\sigma \cap \tau \subseteq \text{conv}\,\{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$, puis :

$$\sigma \cap \tau = \text{conv}\,\{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$$

et $\sigma \cap \tau \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$.

— sinon $(\sigma_1 \cap \tau_1) \cap (\sigma_2 \cap \tau_2)$ est une face propre des cellules $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau_1 \cap \tau_2$, donc est de dimension inférieure à $k-1$. En particulier :

$$\sigma \cap \tau \subseteq \left(\sigma_1 \cap \tau_1\right) \cap \left(\sigma_2 \cap \tau_2\right) \subseteq \left|\Sigma_{k-1}\right|$$

puis :

$$\begin{aligned} \sigma \cap \tau &= \left(\sigma \cap \left|\Sigma_{k-1}\right|\right) \cap \left(\tau \cap \left|\Sigma_{k-1}\right|\right) \\ &= \sigma' \cap \tau' \end{aligned}$$

On en déduit $\sigma \cap \tau \in \Sigma_{k-1}$.

Les (ASSERTIONS 4 & 5) montrent finalement que l'ensemble localement fini Σ_k est un complexe simplicial, et :

$$\left|\Sigma_k\right| = \bigcup_{\dim\left(\sigma_1 \cap \sigma_2\right) \leq k} \left(\sigma_1 \cap \sigma_2\right)$$

en vertu de (ASSERTION 3).

1.4.8. *Triangulations cristallines.* —

Lemme 1.4.9 — Subdivisions cristallines

> Si Δ est un complexe simplicial fini, alors il existe une suite $\left(\Delta_k\right)_{k\geq 1}$ de subdivisions de Δ telle que, pour tout k et tout $\sigma \in \Delta_k$:
>
> $$\operatorname{diam} \sigma \leq \frac{C}{k} \quad \text{et} \quad \operatorname{corp} \sigma \geq \beta$$
>
> où C et β sont des constantes strictement positives indépendantes de k.

—— *Démonstration* ——

Définition 1.4.10

> Soit Δ un complexe simplicial :
>
> — Une application continue $f : |\Delta| \to \mathbf{R}^n$ est dite *linéaire par morceaux* (resp. *lisse par morceaux*) si sa restriction à chaque simplexe de Δ est affine (resp. lisse).
>
> — Étant donnée une application $f : |\Delta| \to \mathbf{R}^n$, son *redressement affine* est l'unique application $|\Delta| \to \mathbf{R}^n$ linéaire par morceaux qui prend les mêmes valeurs que f aux sommets de Δ.

Proposition 1.4.11 — Approximation C^1

Soit Δ un complexe simplicial fini.
Si $f : |\Delta| \to \mathbf{R}$ est lisse par morceaux, alors il existe des subdivisions Δ_k de Δ et une suite $f_k : \left|\Delta_k\right| \to \mathbf{R}$ de fonctions linéaires par morceaux qui converge C^1-uniformément vers f.

Démonstration

On note $\left(\Delta_k\right)_{k\geq 1}$ la suite donnée par le lemme 1.4.9, et f_k le redressement affine de f vis-à-vis de Δ_k pour tout $k \geq 1$. Les subdivisions Δ_k étant de plus en plus fines, la continuité uniforme de f sur le compact $|\Delta|$ assure la convergence C^0-uniforme de $\left(f_k\right)_{k\geq 1}$ vers f.

Il s'agit maintenant de montrer la convergence uniforme des f_k' vers f'.
On fixe un $\varepsilon > 0$. Pour k suffisamment grand, on a diam $f'(\sigma) \leq \varepsilon$ pour chaque simplexe σ de Δ_k par continuité uniforme de f'.

Si $\sigma = [\, a_0, \dots, a_s \,]$ est un simplexe de Δ_k, alors $f_k'(x) = f_k'(a_0)$ par linéarité puis :

$$\begin{aligned} \left|f_k'(x) - f'(x)\right| &\leq \left|f_k'(a_0) - f'(a_0)\right| + \left|f'(a_0) - f'(x)\right| \\ &\leq \left|A(a_0)\right| + \varepsilon \end{aligned}$$

où A désigne la forme linéaire $f_k'(a_0) - f'(a_0)$.

Pour $1 \leq i \leq s$, on a :

$$\begin{aligned} A(a_i - a_0) &= f(a_i) - f(a_0) - f'(a_0) \cdot (a_i - a_0) \\ &= \left(f'(c_i) - f'(a_0)\right) \cdot (a_i - a_0) \end{aligned}$$

où c_i est un point du segment $\left[a_0, a_i\right] \subseteq \sigma$ dont l'existence est garantie par le théorème des accroissements finis.

2
Homologie simpliciale

2.1 Triangulation des variétés

Oui mais non