

1

Un peu de géométrie convexe

1.1 Faces d'un ensemble convexe

1.1.1. Convexité. — On rappelle, étant donné un espace affine A sur \mathbf{R} , qu'une partie $C \subseteq A$ est dite *convexe* lorsque le segment $[x, y]$ est contenu dans C pour tout couple (x, y) de points de C . La *dimension* de C , notée $\dim C$, est alors la dimension de son enveloppe affine $\text{aff } C$. L'intérieur et la frontière de C sont toujours considérés relativement à l'espace topologique $\text{aff } C$.

Remarque 1.1.2 Un convexe non vide est d'intérieur non vide.

Théorème 1.1.3 — Carathéodory

Tout point de l'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace affine de dimension d est barycentre de $d + 1$ points de A .

—— *Démonstration* ——

Étant donné $y \in \text{conv } A$, il existe un entier r minimal, des réels positifs λ_i et des points x_i de A vérifiant :

$$y = \sum_{i=0}^r \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$$

Si $r \geq d + 1$, alors la famille x_0, \dots, x_r n'est pas affinement indépendante. Autrement dit, il existe des réels μ_0, \dots, μ_r non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=0}^r \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^r \mu_i = 0$$

On peut supposer avoir $\mu_r > 0$ et $\lambda_i/\mu_r < \lambda_i/\mu_i$ pour tout i tel que $\mu_i > 0$. Alors :

$$x_j = - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\mu_i}{\mu_r} x_i \quad \text{puis} \quad y = \sum_{i=0}^{r-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \right) x_i$$

et on vérifie immédiatement que :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \right) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i < r, \lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \geq 0$$

C'est absurde car r est supposé minimal, donc $r \leq d$.

On travaille implicitement dans le reste de chapitre dans un espace affine euclidien ambiant E .

Définition 1.1.4

Soit K un convexe fermé. Une *face exposée* de K est une partie de K vide ou de la forme $H \cap K$ avec H hyperplan d'appui de K dans $\text{aff } K$.

L'ensemble des faces exposées de K est noté $\mathcal{F}_{\text{exp}}(K)$.

Ses éléments maximaux pour la relation d'inclusion forment l'ensemble $\overline{\mathcal{F}}(K)$.

1.1.5. Premières propriétés. — Si $F = H \cap K$ est face exposée non vide d'un convexe fermé K , alors $\text{aff } F \subseteq H$ puis $\text{aff } F \cap K \subseteq H \cap K = F$. L'inclusion réciproque étant évidente, il vient que :

$$F = \text{aff } F \cap K$$

et c'est vrai également dans le cas où F est vide.

En particulier, si $F \subseteq F'$ sont deux faces exposées de K de même dimension, alors $F = F'$. Cela assure par exemple que l'ensemble $\mathcal{F}_{\text{exp}}(K)$ est inductif.

Proposition 1.1.6

Étant donné un convexe fermé K :

- (1) Les éléments de $\mathcal{F}_{\text{exp}}(K)$ sont des parties convexes fermées de ∂K .
- (2) L'ensemble $\mathcal{F}_{\text{exp}}(K)$ est stable par intersections finies non vides.

—— Démonstration ———

(1) Clair.

(2) Soient $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(K)$. On note :

$$F = \bigcap_{i=1}^m F_i$$

Si F est vide alors il n'y a rien à faire. Sinon on fixe $a \in F$. Il existe alors pour tout i un vecteur non nul u_i tel que, si H_i désigne l'hyperplan d'équation $\langle x - a, u_i \rangle = 0$:

$$F_i = H_i \cap K \quad \text{et} \quad \forall x \in K, \langle x - a, u_i \rangle \leq 0$$

Le vecteur $u = \sum_i u_i$ est non nul, car si $b \in \text{int } K$ alors $\langle b - a, u \rangle < 0$.
Finalement, si H désigne l'hyperplan d'équation $\langle x, u \rangle = 0$:

$$F = H \cap K \quad \text{et} \quad \forall x \in K, \langle x, u \rangle \leq 0$$

et H est un hyperplan d'appui de K en a , d'où $F \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(K)$.

On fixe dans la suite un convexe fermé K .

Proposition 1.1.7

| Si K n'est pas réduit à un point, alors $\partial K = \bigcup \overline{\mathcal{F}(K)}$.

—— *Démonstration* ——

Si K est vide, il n'y a rien à faire. Sinon, le théorème de séparation des convexes assure que tout point de la frontière de K appartient à une face exposée, et le lemme de Zorn permet de conclure.

Remarque 1.1.8 Si $C' \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(C)$ et $C'' \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(C')$, on n'a pas nécessairement $C'' \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(C)$.
REGARDER LE CONVEXE SUIVANT DANS \mathbf{R}^2 , POINTS EXTREMAUX \neq POINTS EXPOSÉS.

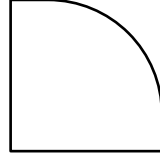


Figure 1.1

La remarque précédente justifie la définition suivante :

Définition 1.1.9

| Une *face* de K est une partie F de K telle qu'il existe une suite de convexes fermés :

$$K = F_0 \supseteq \dots \supseteq F_k = F$$

telle que $F_i \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(F_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq k$.

| On désigne par $\mathcal{F}(K)$ l'ensemble des faces de K .

Remarque 1.1.10 La suite vide montre que K est une face de K . L'ensemble des faces propres maximales de K est exactement $\overline{\mathcal{F}(K)}$.

Proposition 1.1.11 — Transitivité

| Si F est une face de K , alors les faces de F sont les faces de K contenues dans F .

—— *Démonstration* ——

Il suffit de traiter le cas où F est une face exposée de K .

Étant donnée une face F' de K contenue dans F , on considère une suite $K = F'_0 \supseteq \dots \supseteq F'_k = F'$ telle que $F'_i \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(F'_{i-1})$ pour tout i . Si F'_i s'écrit $F'_{i-1} \cap H$ avec H hyperplan d'appui F'_{i-1} , alors :

$$F \cap F'_i = (F \cap F'_{i-1}) \cap H$$

et H est un hyperplan d'appui de $F \cap F'_{i-1}$. Ainsi $F \cap F'_i \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(F \cap F'_{i-1})$, et c'est évidemment aussi le cas si F'_i est vide. La suite :

$$F = F \cap F'_0 \supseteq \dots \supseteq F \cap F'_k = F'$$

montre finalement que F' est une face de F .

Proposition 1.1.12

| Si F est une face de K , alors $\text{ext } F = F \cap \text{ext } K$.

—— *Démonstration* ———

On peut supposer que F est une face exposée non vide, et on écrit dans ce cas $F = H \cap K$ avec H hyperplan d'appui de K . Étant donné $a \in \text{ext } F$, il existe un vecteur u non nul tel que :

$$H = \{ x \mid \langle x - a, u \rangle = 0 \} \quad \text{et} \quad \forall x \in K, \langle x - a, u \rangle \leq 0$$

Supposons qu'il existe $0 < \lambda < 1$ et deux points distincts x et y de K tels que $a = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Alors :

$$\lambda \langle x - a, u \rangle + (1 - \lambda) \langle y - a, u \rangle = 0$$

ce qui impose que x et y appartiennent à F . C'est absurde, d'où :

$$\text{ext } F \subseteq F \cap \text{ext } K$$

et l'inclusion réciproque est immédiate.

Corollaire 1.1.13

| Les points extrémaux de K sont exactement les faces singletons.

—— *Démonstration* ———

Si $\{x\}$ est une face singleton de K , la proposition 1.1.12 assure que :

$$\begin{aligned} \{x\} \cap \text{ext } K &= \text{ext } \{x\} \\ &= \{x\} \end{aligned}$$

Autrement dit, x est un point extrémal de K .

Réciproquement, considérons x un point extrémal de K . Si K est réduit à un point, alors il n'y a rien à faire. Sinon il existe, en vertu de la proposition 1.1.7, une face propre maximale F de K qui contient x . Le point x est en particulier extrémal dans F et $\dim F < \dim K$. En réitérant ce processus, on finit par montrer que x appartient à une face de K de dimension nulle, ce qui achève la preuve.

1.2 Polytopes convexes

Définition 1.2.1

Un *polytope convexe* est un convexe non vide qui est intersection finie de demi-espaces fermés dans son enveloppe affine.
Les 0-faces et 1-faces d'un polytope sont respectivement appelés *sommets* et *arêtes*.

1.2.2. Étant donné un polytope convexe K de dimension non nulle, on fixe une famille minimale de demi-espaces fermés D_1, \dots, D_r de $\text{aff } K$ vérifiant :

$$K = \bigcap_{i=1}^r D_i$$

En fixant $a \in \text{int } K$, on peut écrire pour tout $1 \leq i \leq r$:

$$D_i = \{ x \mid \langle x - a, u_i \rangle \leq \theta_i \} \quad \text{et} \quad F_i = \partial D_i \cap K$$

où les u_i sont des vecteurs non nuls et les θ_i des réels strictement positifs.

1.2.2.1. Étant donné un indice $1 \leq i \leq r$, on pose :

$$K_i = \bigcap_{j \neq i} D_j$$

La minimalité de la famille D_1, \dots, D_r implique $K \subset K_i$.

Si $b \in K_i - K$, alors $\langle b - a, u_i \rangle > \theta_i$ et il existe $c \in]a, b[\subseteq K_i$ tel que :

$$\langle c, u_i \rangle = \theta_i$$

Alors $c \in \partial D_i \cap K_i = F_i$, et ∂D_i est un hyperplan d'appui de K en c .

En particulier F_i est une face exposée de K , et $F_i \subseteq \partial K$ d'après la proposition 1.1.7.

Maintenant, si $x \in K - \bigcup_i F_i$, alors $\langle x - a, u_i \rangle < \theta_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et K est voisinage de x . On en déduit $K - \bigcup_i F_i \subseteq \text{int } K$, d'où $\partial K = K - \text{int } K \subseteq \bigcup_i F_i$.

Finalement :

$$\partial K = \bigcup_{i=1}^r F_i$$

1.2.2.2. Si $F \in \mathcal{F}_{\text{exp}}(K)$, alors d'après ce qui précède :

$$F = F \cap \partial K = \bigcup_{i=1}^r (F \cap F_i)$$

Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\text{aff } K$, alors :

$$0 < \lambda(F) \leq \sum_{i=1}^r \lambda(F \cap F_i)$$

et il existe un indice $1 \leq i \leq r$ tel que $\lambda(F \cap F_i) > 0$. En particulier F et $F \cap F_i$ sont de même dimension, puis $F \cap F_i = F$. Autrement dit $F \subseteq F_i$, et $\overline{\mathcal{F}}(K) \subseteq \{F_1, \dots, F_r\}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux indices i et j tels que $F_i \subseteq F_j$.

Si $b \in K_i - K$, alors $\langle b - a, u_i \rangle > \theta_i$ et il existe $c \in]a, b[\subseteq K_i$ tel que $\langle c - a, u_i \rangle = \theta_i$.

En particulier, $c \in F_i$ et l'hypothèse assure que $\langle c - a, u_j \rangle = \theta_j$, or $\langle b - a, u_j \rangle \leq \theta_j$.

C'est absurde, donc les F_i sont maximales parmi les faces exposées de K .

Ainsi $\overline{\mathcal{F}}(K) = \{F_1, \dots, F_r\}$.

1.2.2.3. Pour $1 \leq i \leq r$, on a :

$$\begin{aligned} F_i &= \partial D_i \cap K_i \\ &= \bigcap_{i \neq j} (\partial D_i \cap D_j) \end{aligned}$$

or $\partial D_i \cap D_j$ est soit plein soit un demi-espace fermé dans ∂D_i . En particulier F_i est un polytope convexe, et chaque $F \in \overline{\mathcal{F}}(F_i)$ est d'après ce qui précède de la forme :

$$\begin{aligned} F &= \partial(\partial D_i \cap D_j) \cap F_i \\ &= \partial D_i \cap \partial D_j \cap F_i \\ &= F_i \cap F_j \end{aligned}$$

pour un certain $j \neq i$ tel que $\partial D_i \cap D_j \subset \partial D_i$.

Ainsi chaque élément de $\overline{\mathcal{F}}(F_i)$ est intersection de deux éléments de $\overline{\mathcal{F}}(K)$.

Proposition 1.2.3

| Une face de K est intersection finie d'éléments de $\overline{\mathcal{F}}(K)$ dans K .

—— *Démonstration* ———

On raisonne par récurrence sur la dimension d de K :

- si K est réduit à un point, alors l'énoncé est vide.
- si $d \geq 1$, on se donne une face F de K . Si $F = K$, alors l'intersection vide convient. Sinon il existe une face maximale propre G de K contenant F . Alors F est une face de G en vertu de la proposition 1.1.11, et F est intersection finie dans G d'éléments de $\overline{\mathcal{F}}(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence. La discussion qui précède permet de conclure.

On déduit immédiatement de ce qui précède :

Théorème 1.2.4

Si K est un polytope convexe, alors les faces exposées de K sont exactement ses faces propres et sont en nombre fini.

1.2.5.

Proposition 1.2.6

Soit K un polytope convexe.

Si D_1, \dots, D_r sont des demi-espaces fermés de l'espace E ambiant tels que :

$$K = \bigcap_{i=1}^r D_i$$

alors, en notant $F_i = \partial D_i \cap K$ pour tout $1 \leq i \leq r$, les faces de K sont alors exactement les intersections dans K d'un nombre fini de F_i .

—— *Démonstration* ———

On a :

$$K = \bigcap_{i=1}^r (D_i \cap \text{aff } K)$$

or $\Delta_i = D_i \cap \text{aff } K$ est soit plein soit un demi-espace fermé dans $\text{aff } K$ pour tout i . Or, pour $1 \leq i \leq r$, on vérifie que :

$$F_i = \partial \Delta_i \cap K$$

En particulier, les F_i sont des faces exposées (éventuellement vides) de K .

Réciproquement, on extrait de la famille $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ une famille minimale délimitant K que l'on suppose, quitte à réarranger les D_i , de la forme $\Delta_1, \dots, \Delta_s$. Mais alors $\mathcal{F}(K) = \{F_1, \dots, F_s\}$ et toute face de K est intersection dans K d'un nombre fini de F_i en vertu de la proposition 1.2.3.

Corollaire 1.2.7

Si K_1 et K_2 sont deux polytopes convexes, alors :

$$\mathcal{F}(K_1 \cap K_2) = \{ F_1 \cap F_2 \mid (F_1, F_2) \in \mathcal{F}(K_1) \times \mathcal{F}(K_2) \}$$

— Démonstration —

On peut écrire dans E :

$$K_1 = \bigcap_{i=1}^r D_i \quad \text{et} \quad K_2 = \bigcap_{i=r+1}^{r+s} D_i$$

où les D_i sont des demi-espaces fermés. Alors :

$$K_1 \cap K_2 = \bigcap_{i=1}^{r+s} D_i$$

et la proposition 1.2.6 permet de conclure.

1.3 Cellules linéaires

Définition 1.3.1

| Une *cellule linéaire* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

1.3.2.

Lemme 1.3.3

| Si K est une cellule, alors tout point d'une k -face de K appartient à l'enveloppe convexe de $k + 1$ points extrémaux de K .

— Démonstration —

Soient K une cellule et F une éventuelle k -face de K . Le théorème de Krein–Milman et la proposition 1.1.12 assurent que F est l'enveloppe convexe des points extrémaux de K qui appartiennent à F . Le théorème 1.1.3 appliqué dans l'espace $\text{aff } F$ permet de conclure.

Le résultat suivant est fondamental :

Théorème 1.3.4

| Les cellules sont exactement les polytopes bornés.

— Démonstration —

Soit K une cellule, que l'on suppose sans perte de généralité de dimension $d \geq 1$. L'ensemble L des combinaisons affines d'au plus $d - 1$ points extrémaux de K contient d'après le lemme 1.3.3 les faces de K de dimension inférieure à $d - 2$. Étant donné $b \notin K$, on définit :

$$C = \{ \lambda x + (1 - \lambda)b \mid \lambda \geq 0 \text{ et } x \in L \}$$

L'ensemble C est contenu dans un nombre fini d'espaces affines de dimension inférieure à $d - 1$, donc est négligeable pour la mesure de Lebesgue dans $\text{aff } K$. En particulier, il existe $a \in (\text{int } K) \setminus C$ puis, par compacité de K , un $0 < \lambda < 1$ minimal tel que le point $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ appartienne à K . Alors $c \in \partial K$, et il existe d'après la proposition 1.1.7 une face propre F de K contenant c , nécessairement de dimension $d - 1$. Si l'hyperplan $\text{aff } F$ est d'équation $\langle x - a, u \rangle = \theta$, alors $b - a$ n'est pas orthogonal à u et $\text{aff } F$ sépare K du point b . On en déduit que K est l'intersection des demi-espaces fermés déterminés par les $(d - 1)$ -faces de K , qui sont en nombre fini d'après le lemme 1.3.3.

Réciproquement, si K est un polytope borné, alors il possède un nombre fini de points extrémaux d'après le corollaire 1.1.13 et le théorème 1.2.4. Le théorème de Krein–Milman permet de conclure.

Corollaire 1.3.5

| L'intersection de deux cellules est encore une cellule.

1.4 Simplexes et complexes simpliciaux

Définition 1.4.1

| Un *simplexe* est une cellule dont les points extrémaux sont affinement indépendants.

Remarque 1.4.2 Les faces d'un simplexe de points extrémaux a_0, \dots, a_k sont exactement les enveloppes convexes d'une partie des a_i . Ce sont en particulier des simplexes de dimension plus petite.

Définition 1.4.3

| Un *complexe simplicial* de \mathbf{R}^d est un ensemble localement fini Δ de simplexes tel que :

- (i) chaque face d'un simplexe de Δ est dans Δ ;
- (ii) l'intersection de deux simplexes de Δ est une face commune aux deux.

| Un *sous-complexe* de Δ est un complexe simplicial $\Sigma \subseteq \Delta$.

1.4.4. Squelettes. — Étant donné un complexe simplicial Δ et un entier n , le *n-squelette* de Δ est le sous-complexe $\Delta^{(n)}$ de Δ défini par :

$$\Delta^{(n)} = \{ \sigma \in \Delta \mid \dim \sigma \leq n \}$$

1.4.5. Subdivision d'un complexe. — La *réalisation géométrique* d'un complexe simplicial Δ est l'espace topologique :

$$|\Delta| = \bigcup \Delta$$

On dit d'une partie d'un espace affine euclidien que c'est un *polyèdre* si elle est la réalisation d'un certain complexe. Une subdivision de Δ est un complexe simplicial Σ tel que :

$$|\Sigma| = |\Delta|$$

et dont chaque simplexe est inclus dans un simplexe de Δ .

Définition 1.4.6

Une *triangulation* d'un espace topologique X est la donnée d'un complexe simplicial Δ et d'un homéomorphisme $X \simeq |\Delta|$.

Théorème 1.4.7

Deux complexes simpliciaux qui réalisent le même polyèdre possèdent une subdivision commune.

—— *Démonstration* ——

Soient Δ_1 et Δ_2 deux complexes simpliciaux de \mathbf{R}^d tels que :

$$|\Delta_1| = |\Delta_2|$$

On va construire une suite croissante $(\Sigma_k)_{k \leq d}$ de complexes vérifiant pour tout k :

- (i) $\dim \Sigma_k \leq k$
- (ii) si $\sigma_1 \in \Delta_1$ et $\sigma_2 \in \Delta_2$ sont d'intersection k -dimensionnelle :

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \bigcup_{\substack{\sigma \in \Sigma_k \\ \sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2}} \sigma$$

$$(iii) |\Sigma_k| = \bigcup_{\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) \leq k} (\sigma_1 \cap \sigma_2)$$

On pose naturellement :

$$\Sigma_0 = \{ \sigma_1 \cap \sigma_2 \mid \dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 0 \}$$

L'ensemble $\Delta_1 \cup \Delta_2$ étant localement fini, c'est également le cas de Σ_0 . Étant constitué de simplexes réduits à des points, il s'agit d'un complexe simplicial.

Supposons maintenant avoir construit le complexe Σ_{k-1} .

Étant donnés des simplexes $\sigma_1 \in \Delta_1$ et $\sigma_2 \in \Delta_2$ tels que $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = k$, on note b l'isobarycentre de la cellule $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et :

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \{ \sigma \in \Sigma_{k-1} \mid \sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2 \}$$

L'ensemble Σ_{k-1} étant localement fini et $\sigma_1 \cap \sigma_2$ compact, il vient que $F(\sigma_1, \sigma_2)$ est fini.

Assertion 1 Chaque simplexe de $F(\sigma_1, \sigma_2)$ est contenu dans une face propre de $\sigma_1 \cap \sigma_2$.

—— *Démonstration* ——

Soit $\sigma \in F(\sigma_1, \sigma_2)$. D'après le corollaire 1.2.7, on a :

$$(\sigma_1 \cap \sigma_2) \cap |\Sigma_{k-1}| \subseteq \bigcup \mathcal{F}_{\text{exp}}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$$

d'où $\sigma \subseteq \bigcup \mathcal{F}_{\text{exp}}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$. Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\text{aff } \sigma$, alors :

$$0 < \lambda(\sigma) \leq \sum_{\omega} \lambda(\omega \cap \text{aff } \sigma)$$

et il existe une face propre ω de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ telle que $\lambda(\omega \cap \text{aff } \sigma) > 0$. Par égalité des dimensions :

$$\begin{aligned} \text{aff } \sigma &= \text{aff}(\omega \cap \text{aff } \sigma) \\ &\subseteq \text{aff } \omega \cap \text{aff } \sigma \\ &\subseteq \text{aff } \omega \end{aligned}$$

Finalement $\sigma \subseteq \text{aff } \omega \cap (\sigma_1 \cap \sigma_2) = \omega$.

Assertion 2 Si $\sigma = [a_0, \dots, a_r]$ est un simplexe de $F(\sigma_1, \sigma_2)$, alors $\tau = [b, a_0, \dots, a_r]$ est un simplexe inclus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau \cap |\Sigma_{k-1}| = \sigma$.

—— *Démonstration* ——

Étant donné H un hyperplan d'appui de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ dans $\text{aff}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$, on écrit :

$$H = \{x \mid \langle x, u \rangle = \theta\} \quad \text{et} \quad \forall x \in (\sigma_1 \cap \sigma_2), \quad \langle x, u \rangle \leq \theta$$

avec u un vecteur non nul et θ un réel. Un argument de dimension montre l'existence d'un sommet de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ hors de H , d'où $\langle b, u \rangle < \theta$ et $b \notin H$. Mais $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, et si τ désigne la cellule conv $\{b\} \cup \sigma$:

$$\tau \cap H = \sigma \cap H$$

En particulier, si $B = \bigcup \mathcal{F}_{\text{exp}}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ alors :

$$\tau \cap B = \sigma \cap B$$

Puis, τ étant inclus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$:

$$\begin{aligned} \tau \cap |\Sigma_{k-1}| &= \sigma \cap |\Sigma_{k-1}| \\ &= \sigma \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que τ est un simplexe. L'(ASSERTION 1) montre qu'il existe une face propre ω de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ telle que $\sigma \subseteq \omega$, or $b \notin \text{aff } \omega$ d'après ce qui précède. Les points b, a_0, \dots, a_r sont donc affinement indépendants.

En particulier, l'ensemble :

$$\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) = \{ \text{conv}\{b\} \cup \sigma \mid \sigma \in F(\sigma_1, \sigma_2) \}$$

est formé de simplexes contenus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de dimension inférieure à k .

Assertion 3 On a :

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \bigcup \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

—— *Démonstration* ——

Soit $x \in (\sigma_1 \cap \sigma_2) - \{b\}$.

Il existe, par compacité de $\sigma_1 \cap \sigma_2$, un réel $\lambda \geq 1$ maximal tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda)b \in (\sigma_1 \cap \sigma_2)$.

Alors $y \in \partial(\sigma_1 \cap \sigma_2)$, donc y appartient à une face propre $\tau_1 \cap \tau_2$ de $\sigma_1 \cap \sigma_2$. Par hypothèse de récurrence, y appartient à un simplexe τ de Σ_{k-1} contenu dans $\tau_1 \cap \tau_2$. Finalement conv $\{b\} \cup \tau \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ contient x .

Assertion 4 Si σ est face d'un simplexe de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$, alors :

$$\sigma \in \Sigma_{k-1} \cup \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

— Démonstration —

Soit σ face d'un simplexe τ de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$. L'ensemble des sommets de σ est une partie de l'ensemble $\{b, a_0, \dots, a_r\}$ des sommets de τ .

Mais $[a_0, \dots, a_r] \in \Sigma_{k-1}$, donc il suffit pour conclure de distinguer les cas selon si b est ou non sommet de σ .

On définit alors :

$$\Sigma_k = \Sigma_{k-1} \cup \bigcup_{\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2)=k} \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

Soit U un ouvert qui intersecte un nombre fini de simplexes de $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Le nombre de couples (σ_1, σ_2) tels que U rencontre au moins un simplexe de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ est fini, donc U intersecte un nombre fini de simplexes de $\Sigma_k - \Sigma_{k-1}$. Finalement, l'ensemble $\Sigma_k = \Sigma_{k-1} \cup (\Sigma_k - \Sigma_{k-1})$ est localement fini.

Assertion 5 Si $\sigma \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ et $\tau \in \Sigma(\tau_1, \tau_2)$, alors $\sigma \cap \tau \in \Sigma_k$.

— Démonstration —

D'après (ASSERTION 2), les ensembles :

$$\sigma' = \sigma \cap |\Sigma_{k-1}| \quad \text{et} \quad \tau' = \tau \cap |\Sigma_{k-1}|$$

sont des simplexes de Σ_{k-1} . On distingue alors deux cas :

— si $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau_1 \cap \tau_2$ sont une même cellule d'isobarycentre b , alors :

$$\sigma = \text{conv}\{b\} \cup \sigma' \quad \text{et} \quad \tau = \text{conv}\{b\} \cup \tau'$$

Soit $a \in (\sigma \cap \tau) - \{b\}$. Quitte à échanger σ et τ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} a &= \lambda b + (1 - \lambda)y \\ &= \mu b + (1 - \mu)z \end{aligned}$$

avec $0 \leq \lambda \leq \mu < 1$, $y \in \sigma'$ et $z \in \tau'$, et alors :

$$y = \frac{\mu - \lambda}{1 - \lambda} b + \frac{1 - \mu}{1 - \lambda} z \in \tau$$

En particulier $y \in \sigma' \cap \tau = \sigma' \cap \tau'$ et $a \in \text{conv}\{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$.

On en déduit $\sigma \cap \tau \subseteq \text{conv}\{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$, puis :

$$\sigma \cap \tau = \text{conv}\{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$$

et $\sigma \cap \tau \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$.

— sinon $(\sigma_1 \cap \tau_1) \cap (\sigma_2 \cap \tau_2)$ est une face propre des cellules $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau_1 \cap \tau_2$, donc est de dimension inférieure à $k - 1$. En particulier :

$$\sigma \cap \tau \subseteq (\sigma_1 \cap \tau_1) \cap (\sigma_2 \cap \tau_2) \subseteq |\Sigma_{k-1}|$$

puis :

$$\begin{aligned} \sigma \cap \tau &= (\sigma \cap |\Sigma_{k-1}|) \cap (\tau \cap |\Sigma_{k-1}|) \\ &= \sigma' \cap \tau' \end{aligned}$$

On en déduit $\sigma \cap \tau \in \Sigma_{k-1}$.

Les (ASSERTIONS 4 & 5) montrent finalement que l'ensemble localement fini Σ_k est un complexe simplicial, et :

$$|\Sigma_k| = \bigcup_{\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) \leq k} (\sigma_1 \cap \sigma_2)$$

en vertu de (ASSERTION 3).

1.4.8. *Subdivision cristalline.* — \square

2

Homologie simpliciale

2.1 Triangulation des variétés

Oui mais non