1
Un peu de géométrie convexe

1.1 Faces d'un ensemble convexe

1.1.1. *Convexité.* — On rappelle, étant donné un espace affine A sur $\mathbf{R}$, qu'une partie $C \subseteq A$ est dite *convexe* lorsque le segment $[x, y]$ est contenu dans C pour tout couple (x, y) de points de C. La *dimension* de C, notée $\dim C$, est alors la dimension de son enveloppe affine $\operatorname{aff} C$. L'intérieur et la frontière de C sont toujours considérés relativement à l'espace topologique $\operatorname{aff} C$.

Remarque 1.1.2 Un convexe non vide est d'intérieur non vide.

Théorème 1.1.3 — Carathéodory

> Tout point de l'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace affine de dimension d est barycentre de $d + 1$ points de A.

—— *Démonstration* ——

Étant donné $y \in \operatorname{conv} A$, il existe un entier r minimal, des réels positifs λ_i et des points x_i de A vérifiant :

$$y = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$$

Si $r \geq d + 1$, alors la famille $x_0, \ldots, x_r$ n'est pas affinement indépendante. Autrement dit, il existe des réels $\mu_0, \ldots, \mu_r$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=0}^{r} \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{r} \mu_i = 0$$

On peut supposer avoir $\mu_r > 0$ et $\lambda_r/\mu_r < \lambda_i/\mu_i$ pour tout i tel que $\mu_i > 0$. Alors :

$$x_j = -\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\mu_i}{\mu_r} x_i \quad \text{puis} \quad y = \sum_{i=0}^{r-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \right) x_i$$

et on vérifie immédiatement que :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \right) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i < r,\ \lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \geq 0$$

C'est absurde car r est supposé minimal, donc $r \leq d$.

On travaille implicitement dans le reste de chapitre dans un espace affine euclidien ambiant E.

Définition 1.1.4

> Soit K un convexe fermé. Une *face exposée* de K est une partie de K vide ou de la forme $H \cap K$ avec H hyperplan d'appui de K dans $\operatorname{aff} K$.
>
> L'ensemble des faces exposées de K est noté $\mathscr{F}_{\exp}(K)$.
> Ses éléments maximaux pour la relation d'inclusion forment l'ensemble $\overline{\mathscr{F}}(K)$.

1.1.5. *Premières propriétés.* — Si $F = H \cap K$ est face exposée non vide d'un convexe fermé K, alors $\operatorname{aff} F \subseteq H$ puis $\operatorname{aff} F \cap K \subseteq H \cap K = F$. L'inclusion réciproque étant évidente, il vient que :

$$F = \operatorname{aff} F \cap K$$

et c'est vrai également dans le cas où F est vide.

En particulier, si $F \subseteq F'$ sont deux faces exposées de K de même dimension, alors $F = F'$. Cela assure par exemple que l'ensemble $\mathscr{F}_{\exp}(K)$ est inductif.

Proposition 1.1.6

> Étant donné un convexe fermé K :
>
> (1) Les éléments de $\mathscr{F}_{\exp}(K)$ sont des parties convexes fermées de ∂K.
>
> (2) L'ensemble $\mathscr{F}_{\exp}(K)$ est stable par intersections finies non vides.

—— *Démonstration* ——

(1) Clair.

(2) Soient $F_1, \ldots, F_m \in \mathscr{F}_{\exp}(K)$. On note :

$$F = \bigcap_{i=1}^{m} F_i$$

Si F est vide alors il n'y a rien à faire. Sinon on fixe $a \in F$. Il existe alors pour tout i un vecteur non nul u_i tel que, si H_i désigne l'hyperplan d'équation $\langle x - a, u_i \rangle = 0$:

$$F_i = H_i \cap K \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \langle x - a, u_i \rangle \leq 0$$

Le vecteur $u = \sum_i u_i$ est non nul, car si $b \in \operatorname{int} K$ alors $\langle b - a, u \rangle < 0$.
Finalement, si H désigne l'hyperplan d'équation $\langle x, u \rangle = 0$:

$$F = H \cap K \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \langle x, u \rangle \leq 0$$

et H est un hyperplan d'appui de K en a, d'où $F \in \mathscr{F}_{\exp}(K)$.

On fixe dans la suite un convexe fermé K.

Proposition 1.1.7

> Si K n'est pas réduit à un point, alors $\partial K = \bigcup \overline{\mathscr{F}}(K)$.

Démonstration

Si K est vide, il n'y a rien à faire. Sinon, le théorème de séparation des convexes assure que tout point de la frontière de K appartient à une face exposée, et le lemme de Zorn permet de conclure.

Remarque 1.1.8 Si $C' \in \mathscr{F}_{\text{exp}}(C)$ et $C'' \in \mathscr{F}_{\text{exp}}(C')$, on n'a pas nécessairement $C'' \in \mathscr{F}_{\text{exp}}(C)$. REGARDER LE CONVEXE SUIVANT DANS $\mathbf{R}^2$, POINTS EXTREMAUX $\neq$ POINTS EXPOSÉS.

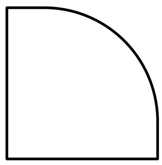

Figure 1.1

La remarque précédente justifie la définition suivante :

Définition 1.1.9

> Une *face* de K est une partie F de K telle qu'il existe une suite de convexes fermés :
>
> $$K = F_0 \supseteq \ldots \supseteq F_k = F$$
>
> telle que $F_i \in \mathscr{F}_{\text{exp}}(F_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq k$.
>
> On désigne par $\mathscr{F}(K)$ l'ensemble des faces de K.

Remarque 1.1.10 La suite vide montre que K est une face de K. L'ensemble des faces propres maximales de K est exactement $\overline{\mathscr{F}}(K)$.

Proposition 1.1.11 — Transitivité

> Si F est une face de K, alors les faces de F sont les faces de K contenues dans F.

Démonstration

Il suffit de traiter le cas où F est une face exposée de K.
Étant donnée une face F' de K contenue dans F, on considère une suite $K = F'_0 \supseteq \ldots \supseteq F'_k = F'$ telle que $F'_i \in \mathscr{F}_{\text{exp}}(F'_{i-1})$ pour tout i. Si F'_i s'écrit $F'_{i-1} \cap H$ avec H hyperplan d'appui F'_{i-1}, alors :

$$F \cap F_i' = (F \cap F_{i-1}') \cap H$$

et H est un hyperplan d'appui de $F \cap F_{i-1}'$. Ainsi $F \cap F_i' \in \mathscr{F}_{\exp}(F \cap F_{i-1}')$, et c'est évidemment aussi le cas si F_i' est vide. La suite :

$$F = F \cap F_0' \supseteq \ldots \supseteq F \cap F_k' = F'$$

montre finalement que F' est une face de F.

Proposition 1.1.12

> Si F est une face de K, alors $\operatorname{ext} F = F \cap \operatorname{ext} K$.

—— *Démonstration* ——

On peut supposer que F est une face exposée non vide, et on écrit dans ce cas $F = H \cap K$ avec H hyperplan d'appui de K. Étant donné $a \in \operatorname{ext} F$, il existe un vecteur u non nul tel que :

$$H = \left\{ x \;\middle|\; \langle x - a, u \rangle = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \langle x - a, u \rangle \leq 0$$

Supposons qu'il existe $0 < \lambda < 1$ et deux points distincts x et y de K tels que $a = \lambda x + (1 - \lambda) y$. Alors :

$$\lambda \langle x - a, u \rangle + (1 - \lambda) \langle y - a, u \rangle = 0$$

ce qui impose que x et y appartiennent à F. C'est absurde, d'où :

$$\operatorname{ext} F \subseteq F \cap \operatorname{ext} K$$

et l'inclusion réciproque est immédiate.

Corollaire 1.1.13

> Les points extrémaux de K sont exactement les faces singletons.

—— *Démonstration* ——

Si $\{x\}$ est une face singleton de K, la proposition 1.1.12 assure que :

$$\begin{aligned} \{x\} \cap \operatorname{ext} K &= \operatorname{ext} \{x\} \\ &= \{x\} \end{aligned}$$

Autrement dit, x est un point extrémal de K.

Réciproquement, considérons x un point extrémal de K. Si K est réduit à un point, alors il n'y a rien à faire. Sinon il existe, en vertu de la proposition 1.1.7, une face propre maximale F de K qui contient x. Le point x est en particulier extrémal dans F et $\dim F < \dim K$. En réitérant ce processus, on finit par montrer que x appartient à une face de K de dimension nulle, ce qui achève la preuve.

1.2 Polytopes convexes

Définition 1.2.1

> Un *polytope convexe* est un convexe non vide qui est intersection finie de demi-espaces fermés dans son enveloppe affine.
> Les 0-faces et 1-faces d'un polytope sont respectivement appelés *sommets* et *arêtes*.

1.2.2. Étant donné un polytope convexe X de dimension non nulle, on fixe une famille minimale de demi-espaces fermés $D_1, \ldots, D_r$ de aff X vérifiant :

$$X = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$

En fixant $a \in \operatorname{int} X$, on peut écrire pour tout $1 \leq i \leq r$:

$$D_i = \left\{ x \;\middle|\; \langle x - a, u_i \rangle \leq \theta_i \right\} \quad \text{et} \quad F_i = \partial D_i \cap X$$

où les u_i sont des vecteurs non nuls et les θ_i des réels strictement positifs.

1.2.2.1. Étant donné un indice $1 \leq i \leq r$, on pose :

$$X_i = \bigcap_{j \neq i} D_j$$

La minimalité de la famille $D_1, \ldots, D_r$ implique $X \subset X_i$.
Si $b \in X_i - X$, alors $\langle b - a, u_i \rangle > \theta_i$ et il existe $c \in]a, b[\subseteq X_i$ tel que :

$$\langle c, u_i \rangle = \theta_i$$

Alors $c \in \partial D_i \cap X_i = F_i$, et ∂D_i est un hyperplan d'appui de X en c.
En particulier F_i est une face exposée de X, et $F_i \subseteq \partial X$ d'après la proposition 1.1.7.

Maintenant, si $x \in X - \bigcup_i F_i$, alors $\langle x - a, u_i \rangle < \theta_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et X est voisinage de x. On en déduit $X - \bigcup_i F_i \subseteq \operatorname{int} X$, d'où $\partial X = X - \operatorname{int} X \subseteq \bigcup_i F_i$.

Finalement :

$$\partial X = \bigcup_{i=1}^{r} F_i$$

1.2.2.2. Si $F \in \mathscr{F}_{\exp}(X)$, alors d'après ce qui précède :

$$F = F \cap \partial X = \bigcup_{i=1}^{r} (F \cap F_i)$$

Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur aff X, alors :

$$0 < \lambda(F) \leq \sum_{i=1}^{r} \lambda(F \cap F_i)$$

et il existe un indice $1 \leq i \leq r$ tel que $\lambda(F \cap F_i) > 0$. En particulier F et $F \cap F_i$ sont de même dimension, puis $F \cap F_i = F$. Autrement dit $F \subseteq F_i$, et $\overline{\mathscr{F}}(X) \subseteq \{F_1, \ldots, F_r\}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux indices i et j tels que $F_i \subseteq F_j$.
Si $b \in X_i - X$, alors $\langle b - a, u_i \rangle > \theta_i$ et il existe $c \in]a, b[\subseteq X_i$ tel que $\langle c - a, u_i \rangle = \theta_i$. En particulier, $c \in F_i$ et l'hypothèse assure que $\langle c - a, u_j \rangle = \theta_j$, or $\langle b - a, u_j \rangle \leq \theta_j$. C'est absurde, donc les F_i sont maximales parmi les faces exposées de X.

Ainsi $\overline{\mathscr{F}}(X) = \{F_1, \ldots, F_r\}$.

1.2.2.3. Pour $1 \leq i \leq r$, on a :

$$\begin{aligned} F_i &= \partial D_i \cap X_i \\ &= \bigcap_{i \neq j} (\partial D_i \cap D_j) \end{aligned}$$

or $\partial D_i \cap D_j$ est soit plein soit un demi-espace fermé dans ∂D_i. En particulier F_i est un polytope convexe, et chaque $F \in \overline{\mathscr{F}}(F_i)$ est d'après ce qui précède de la forme :

$$\begin{aligned} F &= \partial(\partial D_i \cap D_j) \cap F_i \\ &= \partial D_i \cap \partial D_j \cap F_i \\ &= F_i \cap F_j \end{aligned}$$

pour un certain $j \neq i$ tel que $\partial D_i \cap D_j \subset \partial D_i$.

Ainsi chaque élément de $\overline{\mathscr{F}}(F_i)$ est intersection de deux éléments de $\overline{\mathscr{F}}(X)$.

Proposition 1.2.3

> Une face de X est intersection finie d'éléments de $\overline{\mathscr{F}}(X)$ dans X.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur la dimension d de X :

- si X est réduit à un point, alors l'énoncé est vide.
- si $d \geq 1$, on se donne une face F de X. Si $F = X$, alors l'intersection vide convient. Sinon il existe une face maximale propre G de X contenant F. Alors F est une face de G en vertu de la proposition 1.1.11, et F est intersection finie dans G d'éléments de $\overline{\mathscr{F}}(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence. La discussion qui précède permet de conclure.

On déduit immédiatement de ce qui précède :

Théorème 1.2.4

> Si X est un polytope convexe, alors les faces exposées de X sont exactement ses faces propres et sont en nombre fini.

1.2.5.

Proposition 1.2.6

> Soit X un polytope convexe.
> Si $D_1, \dots, D_r$ sont des demi-espaces fermés de l'espace E ambiant tels que :
>
> $$X = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$
>
> alors, en notant $F_i = \partial D_i \cap X$ pour tout $1 \leq i \leq r$, les faces de X sont alors exactement les intersections dans X d'un nombre fini de F_i.

—— *Démonstration* ——

On a :

$$X = \bigcap_{i=1}^{r} (D_i \cap \operatorname{aff} X)$$

or $\Delta_i = D_i \cap \operatorname{aff} X$ est soit plein soit un demi-espace fermé dans aff X pour tout i. Or, pour $1 \leq i \leq r$, on vérifie que :

$$F_i = \partial \Delta_i \cap X$$

En particulier, les F_i sont des faces exposées (éventuellement vides) de X.

Réciproquement, on extrait de la famille $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ une famille minimale délimitant X que l'on suppose, quitte à réarranger les D_i, de la forme $\Delta_1, \dots, \Delta_s$. Mais alors $\overline{\mathscr{F}}(X) = \{F_1, \dots, F_s\}$ et toute face de X est intersection dans X d'un nombre fini de F_i en vertu de la proposition 1.2.3.

Corollaire 1.2.7

> Si X_1 et X_2 sont deux polytopes convexes, alors :
>
> $$\mathscr{F}(X_1 \cap X_2) = \left\{ F_1 \cap F_2 \;\middle|\; (F_1, F_2) \in \mathscr{F}(X_1) \times \mathscr{F}(X_2) \right\}$$

Démonstration

On peut écrire dans E :

$$X_1 = \bigcap_{i=1}^{r} D_i \quad \text{et} \quad X_2 = \bigcap_{i=r+1}^{r+s} D_i$$

où les D_i sont des demi-espaces fermés. Alors :

$$X_1 \cap X_2 = \bigcap_{i=1}^{r+s} D_i$$

et la proposition 1.2.6 permet de conclure.

1.3 Cellules linéaires

Définition 1.3.1

Une *cellule linéaire* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

1.3.2. *Diamètre et corpulence.* — On appelle *corpulence* d'une cellule $K = \left[a_0, \ldots, a_k\right]$ le rapport :

$$\theta(K) = \frac{r(K)}{d(K)}$$

où $r(K)$ est la distance séparant l'isobarycentre de K à son bord et $d(K)$ est le diamètre de K (qui est par convexité le maximum des $|a_i - a_j|$).

Lemme 1.3.3

Si K est une cellule, alors tout point d'une k-face de K appartient à l'enveloppe convexe de $k+1$ points extrémaux de K.

Démonstration

Soient K une cellule et F une éventuelle k-face de K. Le théorème de Krein–Milman et la proposition 1.1.12 assurent que F est l'enveloppe convexe des points extrémaux de K qui appartiennent à F. Le théorème 1.1.3 appliqué dans l'espace aff F permet de conclure.

Le résultat suivant est fondamental :

Théorème 1.3.4

Les cellules sont exactement les polytopes bornés.

Démonstration

Soit K une cellule, que l'on suppose sans perte de généralité de dimension $d \geq 1$. L'ensemble L des combinaisons affines d'au plus $d - 1$ points extrémaux de K contient d'après le lemme 1.3.3 les faces de K de dimension inférieure à $d - 2$. Étant donné $b \notin K$, on définit :

$$C = \left\{ \lambda x + (1 - \lambda)b \;\middle|\; \lambda \geq 0 \text{ et } x \in L \right\}$$

L'ensemble C est contenu dans un nombre fini d'espaces affines de dimension inférieure à $d - 1$, donc est négligeable pour la mesure de Lebesgue dans $\operatorname{aff} K$. En particulier, il existe $a \in (\operatorname{int} K) \smallsetminus C$ puis, par compacité de K, un $0 < \lambda < 1$ minimal tel que le point $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ appartienne à K. Alors $c \in \partial K$, et il existe d'après la proposition 1.1.7 une face propre F de K contenant c, nécessairement de dimension $d - 1$. Si l'hyperplan $\operatorname{aff} F$ est d'équation $\langle x - a, u \rangle = \theta$, alors $b - a$ n'est pas orthogonal à u et $\operatorname{aff} F$ sépare K du point b. On en déduit que K est l'intersection des demi-espaces fermés déterminés par les $(d - 1)$-faces de K, qui sont en nombre fini d'après le lemme 1.3.3.

Réciproquement, si K est un polytope borné, alors il possède un nombre fini de points extrémaux d'après le corollaire 1.1.13 et le théorème 1.2.4. Le théorème de Krein–Milman permet de conclure.

Corollaire 1.3.5

L'intersection de deux cellules est encore une cellule.

1.4 Simplexes et complexes simpliciaux

Définition 1.4.1

Un *simplexe* est une cellule dont les points extrémaux sont affinement indépendants.

Remarque 1.4.2 Les faces d'un simplexe de points extrémaux $a_0, \dots, a_k$ sont exactement les enveloppes convexes d'une partie des a_i. Ce sont en particulier des simplexes de dimension plus petite.

Définition 1.4.3

Un *complexe simplicial* de $\mathbf{R}^d$ est un ensemble localement fini Δ de simplexes tel que :

(i) chaque face d'un simplexe de Δ est dans Δ ;

(ii) l'intersection de deux simplexes de Δ est une face commune aux deux.

Un *sous-complexe* de Δ est un complexe simplicial $\Sigma \subseteq \Delta$.

1.4.4. *Squelettes.* — Étant donné un complexe simplicial Δ et un entier n, le *n-squelette* de Δ est le sous-complexe $\Delta^{(n)}$ de Δ défini par :

$$\Delta^{(n)} = \left\{ \sigma \in \Delta \;\middle|\; \dim \sigma \leq n \right\}$$

1.4.5. *Subdivision d'un complexe.* — La *réalisation géométrique* d'un complexe simplicial Δ est l'espace topologique :

$$|\Delta| = \bigcup \Delta$$

On dit d'une partie d'un espace affine euclidien que c'est un *polyèdre* si elle est la réalisation d'un certain complexe. Une subdivision de Δ est un complexe simplicial Σ tel que :

$$|\Sigma| = |\Delta|$$

et dont chaque simplexe est inclus dans un simplexe de Δ.

Définition 1.4.6

> Une *triangulation* d'un espace topologique X est la donnée d'un complexe simplicial Δ et d'un homéomorphisme $X \simeq |\Delta|$.

Théorème 1.4.7

> Deux complexes simpliciaux qui réalisent le même polyèdre possèdent une subdivision commune.

—— *Démonstration* ——

Soient Δ_1 et Δ_2 deux complexes simpliciaux de $\mathbf{R}^d$ tels que :

$$|\Delta_1| = |\Delta_2|$$

On va construire une suite croissante $(\Sigma_k)_{k \leq d}$ de complexes vérifiant pour tout k :

(i) $\dim \Sigma_k \leq k$

(ii) si $\sigma_1 \in \Delta_1$ et $\sigma_2 \in \Delta_2$ sont d'intersection k-dimensionnelle :

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \bigcup_{\substack{\sigma \in \Sigma_k \\ \sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2}} \sigma$$

(iii) $|\Sigma_k| = \bigcup_{\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) \leq k} (\sigma_1 \cap \sigma_2)$

On pose naturellement :

$$\Sigma_0 = \left\{ \sigma_1 \cap \sigma_2 \;\middle|\; \dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 0 \right\}$$

L'ensemble $\Delta_1 \cup \Delta_2$ étant localement fini, c'est également le cas de Σ_0. Étant constitué de simplexes réduits à des points, il s'agit d'un complexe simplicial.

Supposons maintenant avoir construit le complexe Σ_{k-1}.
Étant donnés des simplexes $\sigma_1 \in \Delta_1$ et $\sigma_2 \in \Delta_2$ tels que $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = k$, on note b l'isobarycentre de la cellule $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et :

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \left\{ \sigma \in \Sigma_{k-1} \;\middle|\; \sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2 \right\}$$

L'ensemble Σ_{k-1} étant localement fini et $\sigma_1 \cap \sigma_2$ compact, il vient que $F(\sigma_1, \sigma_2)$ est fini.

Assertion 1 Chaque simplexe de $F(\sigma_1, \sigma_2)$ est contenu dans une face propre de $\sigma_1 \cap \sigma_2$.

Démonstration

Soit $\sigma \in F(\sigma_1, \sigma_2)$. D'après le corollaire 1.2.7, on a :

$$(\sigma_1 \cap \sigma_2) \cap |\Sigma_{k-1}| \subseteq \bigcup \mathscr{F}_{\exp}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$$

d'où $\sigma \subseteq \bigcup \mathscr{F}_{\exp}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$. Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\operatorname{aff} \sigma$, alors :

$$0 < \lambda(\sigma) \leq \sum_{\omega} \lambda(\omega \cap \operatorname{aff} \sigma)$$

et il existe une face propre ω de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ telle que $\lambda(\omega \cap \operatorname{aff} \sigma) > 0$. Par égalité des dimensions :

$$\begin{aligned} \operatorname{aff} \sigma &= \operatorname{aff}(\omega \cap \operatorname{aff} \sigma) \\ &\subseteq \operatorname{aff} \omega \cap \operatorname{aff} \sigma \\ &\subseteq \operatorname{aff} \omega \end{aligned}$$

Finalement $\sigma \subseteq \operatorname{aff} \omega \cap (\sigma_1 \cap \sigma_2) = \omega$.

Assertion 2 Si $\sigma = [a_0, \ldots, a_r]$ est un simplexe de $F(\sigma_1, \sigma_2)$, alors $\tau = [b, a_0, \ldots, a_r]$ est un simplexe inclus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau \cap |\Sigma_{k-1}| = \sigma$.

Démonstration

Étant donné H un hyperplan d'appui de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ dans $\operatorname{aff}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$, on écrit :

$$H = \left\{ x \;\middle|\; \langle x, u \rangle = \theta \right\} \quad \text{et} \quad \forall x \in (\sigma_1 \cap \sigma_2),\ \langle x, u \rangle \leq \theta$$

avec u un vecteur non nul et θ un réel. Un argument de dimension montre l'existence d'un sommet de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ hors de H, d'où $\langle b, u \rangle < \theta$ et $b \notin H$. Mais $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, et si τ désigne la cellule $\operatorname{conv}\{b\} \cup \sigma$:

$$\tau \cap H = \sigma \cap H$$

En particulier, si $B = \bigcup \mathscr{F}_{\exp}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ alors :

$$\tau \cap B = \sigma \cap B$$

Puis, τ étant inclus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$:

$$\begin{aligned} \tau \cap |\Sigma_{k-1}| &= \sigma \cap |\Sigma_{k-1}| \\ &= \sigma \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que τ est un simplexe. L'(ASSERTION 1) montre qu'il existe une face propre ω de $\sigma_1 \cap \sigma_2$ telle que $\sigma \subseteq \omega$, or $b \notin \operatorname{aff} \omega$ d'après ce qui précède. Les points $b, a_0, \ldots, a_r$ sont donc affinement indépendants.

En particulier, l'ensemble :

$$\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) = \left\{ \operatorname{conv}\{b\} \cup \sigma \;\middle|\; \sigma \in F(\sigma_1, \sigma_2) \right\}$$

est formé de simplexes contenus dans $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de dimension inférieure à k.

Assertion 3 On a :

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \bigcup \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

Démonstration

Soit $x \in (\sigma_1 \cap \sigma_2) - \{b\}$.
Il existe, par compacité de $\sigma_1 \cap \sigma_2$, un réel $\lambda \geq 1$ maximal tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda)b \in (\sigma_1 \cap \sigma_2)$.
Alors $y \in \partial(\sigma_1 \cap \sigma_2)$, donc y appartient à une face propre $\tau_1 \cap \tau_2$ de $\sigma_1 \cap \sigma_2$. Par hypothèse de récurrence, y appartient à un simplexe τ de Σ_{k-1} contenu dans $\tau_1 \cap \tau_2$. Finalement conv $\{b\} \cup \tau \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ contient x.

Assertion 4 Si σ est face d'un simplexe de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$, alors :

$$\sigma \in \Sigma_{k-1} \cup \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

Démonstration

Soit σ face d'un simplexe τ de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$. L'ensemble des sommets de σ est une partie de l'ensemble $\{b, a_0, \dots, a_r\}$ des sommets de τ.
Mais $\left[a_0, \dots, a_r\right] \in \Sigma_{k-1}$, donc il suffit pour conclure de distinguer les cas selon si b est ou non sommet de σ.

On définit alors :

$$\Sigma_k = \Sigma_{k-1} \cup \bigcup_{\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = k} \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$$

Soit U un ouvert qui intersecte un nombre fini de simplexes de $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Le nombre de couples (σ_1, σ_2) tels que U rencontre au moins un simplexe de $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ est fini, donc U intersecte un nombre fini de simplexes de $\Sigma_k - \Sigma_{k-1}$. Finalement, l'ensemble $\Sigma_k = \Sigma_{k-1} \cup (\Sigma_k - \Sigma_{k-1})$ est localement fini.

Assertion 5 Si $\sigma \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ et $\tau \in \Sigma(\tau_1, \tau_2)$, alors $\sigma \cap \tau \in \Sigma_k$.

Démonstration

D'après (ASSERTION 2), les ensembles :

$$\sigma' = \sigma \cap |\Sigma_{k-1}| \quad \text{et} \quad \tau' = \tau \cap |\Sigma_{k-1}|$$

sont des simplexes de Σ_{k-1}. On distingue alors deux cas :

— si $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau_1 \cap \tau_2$ sont une même cellule d'isobarycentre b, alors :

$$\sigma = \text{conv}\, \{b\} \cup \sigma' \quad \text{et} \quad \tau = \text{conv}\, \{b\} \cup \tau'$$

Soit $a \in (\sigma \cap \tau) - \{b\}$. Quitte à échanger σ et τ, on peut écrire :

$$\begin{aligned} a &= \lambda b + (1 - \lambda)y \\ &= \mu b + (1 - \mu)z \end{aligned}$$

avec $0 \leq \lambda \leq \mu < 1$, $y \in \sigma'$ et $z \in \tau'$, et alors :

$$y = \frac{\mu - \lambda}{1 - \lambda} b + \frac{1 - \mu}{1 - \lambda} z \in \tau$$

En particulier $y \in \sigma' \cap \tau = \sigma' \cap \tau'$ et $a \in \text{conv}\, \{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$.
On en déduit $\sigma \cap \tau \subseteq \text{conv}\, \{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$, puis :

$$\sigma \cap \tau = \text{conv}\, \{b\} \cup (\sigma' \cap \tau')$$

et $\sigma \cap \tau \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$.

— sinon $(\sigma_1 \cap \tau_1) \cap (\sigma_2 \cap \tau_2)$ est une face propre des cellules $\sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\tau_1 \cap \tau_2$, donc est de dimension inférieure à $k-1$. En particulier :

$$\sigma \cap \tau \subseteq (\sigma_1 \cap \tau_1) \cap (\sigma_2 \cap \tau_2) \subseteq |\Sigma_{k-1}|$$

puis :

$$\begin{aligned} \sigma \cap \tau &= (\sigma \cap |\Sigma_{k-1}|) \cap (\tau \cap |\Sigma_{k-1}|) \\ &= \sigma' \cap \tau' \end{aligned}$$

On en déduit $\sigma \cap \tau \in \Sigma_{k-1}$.

Les (ASSERTIONS 4 & 5) montrent finalement que l'ensemble localement fini Σ_k est un complexe simplicial, et :

$$|\Sigma_k| = \bigcup_{\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) \leq k} (\sigma_1 \cap \sigma_2)$$

en vertu de (ASSERTION 3).

Définition 1.4.8

Une suite $(\Delta_i)_i$ de subdivisions d'un complexe simplicial Δ est dite :

- *fine* si le supremum des diamètres des simplexes de Δ_i tend vers 0 lorsque $i \to \infty$;
- *cristalline* s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\theta(\sigma) \geq \delta$ pour chaque simplexe σ de Δ_i pour tout i.

1.4.9. *Triangulations cristallines de* $\mathbf{R}^n$. — Étant donnée une permutation $f \in \mathfrak{S}_n$, on définit :

$$\sigma_f = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n \;\middle|\; x_{f(1)} \geq \dots \geq x_{f(n)} \right\}$$

C'est un simplexe, car :

$$\sigma_f = \operatorname{conv}\Big(\sum_{i \geq k} e_{f(i)} \Big)_{0 \leq k \leq n}$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Corollaire 1.4.10

Tout complexe simplicial fini possède des suites de subdivisions fines et cristallines.

—— *Démonstration* ——

Définition 1.4.11

> Si X est un polyèdre, alors une application $f : X \to \mathbf{R}^n$ est dite *linéaire par morceaux* (resp. *lisse par morceaux*) s'il existe une triangulation Δ de X telle que la restriction de f à chaque simplexe de Δ est affine (resp. lisse).
>
> Un *plongement lisse par morceaux* est une injection $X \to \mathbf{R}^n$ lisse par morceaux dont la restriction à chaque simplexe de la triangulation est une immersion lisse.

Définition 1.4.12

> Étant donné un complexe simplicial Δ et une application $f : |\Delta| \to \mathbf{R}^n$, la *sécante* de f relativement à Δ est l'unique application $L_f^\Delta : |\Delta| \to \mathbf{R}^n$ linéaire par morceaux telle que :
>
> (i) f et L_f^Δ coïncident sur les sommets de Δ ;
>
> (ii) la restriction de L_f^Δ à simplexe de Δ est affine.

Proposition 1.4.13 — Approximation C^1

> Si X est un polyèdre compact et f une application $X \to \mathbf{R}$ lisse par morceaux, alors il existe une suite $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ d'applications linéaires par morceaux $X \to \mathbf{R}$ qui converge vers f au sens de la topologie C^1.

—— *Démonstration* ——

Soit Δ une triangulation de X. C'est un complexe simplicial fini par compacité, et il existe d'après le corollaire 1.4.10 une suite $(\Delta_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de subdivisions de Δ à la fois fine et cristalline. On note dans la suite $f_i = L_f^{\Delta_i}$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

La suite (Δ_i) est fine, donc la continuité uniforme de f sur X assure la convergence C^0-uniforme de la suite (f_i) vers f. Il s'agit maintenant de montrer la convergence uniforme des f_i' vers f'.

On fixe un $\varepsilon > 0$. Pour i suffisamment grand, on a pour tout simplexe σ de Δ_i :

$$\forall x, y \in \sigma,\ \|f'_{|\sigma}(x) - f'_{|\sigma}(y)\| \leq \varepsilon$$

Soit i un tel indice et $\sigma = [a_0, \dots, a_s] \in \Delta_i$.
Si $x \in \sigma$, alors $f'_{i\,|\sigma}(x) = f'_{i\,|\sigma}(a_0)$ du fait du caractère affine de f_i sur σ et :

$$\begin{aligned} \|f'_{i\,|\sigma}(x) - f'_{|\sigma}(x)\| &\leq \|f'_{i\,|\sigma}(a_0) - f'_{|\sigma}(a_0)\| + \|f'_{|\sigma}(a_0) - f'_{|\sigma}(x)\| \\ &\leq \|A(a_0)\| + \varepsilon \end{aligned}$$

où $A = f'_{i\,|\sigma}(a_0) - f'_{|\sigma}(a_0)$.

Pour $1 \leq i \leq s$, on a :

$$\begin{aligned} A(a_i - a_0) &= f(a_i) - f(a_0) - f'_{|\sigma}(a_0) \cdot (a_i - a_0) \\ &= (f'_{|\sigma}(c_i) - f'_{|\sigma}(a_0)) \cdot (a_i - a_0) \end{aligned}$$

où c_i est un point du segment $[a_0, a_i] \subseteq \sigma$ dont l'existence est garantie par le théorème des accroissements finis. On en déduit $|A(a_i - a_0)| \leq d(\sigma)\varepsilon$, puis :

$$\forall y \in \sigma,\ |A(y - a_0)| \leq d(\sigma)\varepsilon$$

par linéarité.

Mais alors, si b désigne l'isobarycentre de σ et si $u \in \operatorname{aff} \sigma$ est de norme $r(\sigma)$, les points b et $b + u$ appartiennent à σ et :

$$|A(u)| \leq |A(b + u - a_0)| + |A(b - a_0)| \leq 2d(\sigma)\varepsilon$$

d'où $\|A\| \leq 2\varepsilon/\theta(\sigma)$. Le caractère cristallin de la suite (Δ_i) permet de conclure.

2
Homologie simpliciale

2.1 Triangulation des variétés

Soit V une variété lisse. (POUR L'INSTANT COPIER COLLER DE ANALYSIS SITUS)

Définition 2.1.1

> Soient X et Y deux polyèdres compacts, $f : X \to V$ et $g : Y \to V$ sont deux plongements C^∞_{pm}, et $W = f(X) \cap g(Y) \subseteq V$. On dit que f et g sont *compatibles* si :
>
> (i) $f^{-1}(W) \subseteq X$ et $g^{-1}(W) \subseteq Y$ sont des sous-polyèdres de X et de Y ;
>
> (ii) $g^{-1} \circ f : f^{-1}(W) \to g^{-1}(W)$ est un homéomorphisme linéaire par morceaux.

Lemme 2.1.2 — Recollement de plongements compatibles

> Si $f : X \to V$ et $g : Y \to V$ sont deux plongements C^∞_{pm} compatibles avec X et Y polyèdres compacts. En notant $W = f(X) \cap g(Y)$, alors le recollement $X \coprod_W Y$ a une structure de polyèdre vérifiant :
>
> (i) f et g se recollent en un plongement lisse par morceaux $f \cup g : X \coprod_W Y \to V$;
>
> (ii) un plongement lisse par morceaux $h : Z \to V$ est compatible avec $f \cup g$ si et seulement si f et g sont compatibles avec h.