Innlevering 3

Oppgave 1

a)

Disse vil være binomisk fordelt da hver består av 5 uavhengige bernoulli forsøk med fast sannsynelighet for suksess (mål). Fordelingsfunksjoner blir da:

$$f_T(x) = P(X_T = x) = \binom{5}{x} \cdot 0.80^x \cdot 0.20^{5-x} \qquad f_F(x) = P(X_F = x) = \binom{5}{x} \cdot 0.70^x \cdot 0.30^{5-x}$$

$$P(X_T = 5 \cap X_F = 5) = f_T(5) \cdot f_F(5) = 0.8^5 \cdot 0.7^5 = 0.0551$$
$$f_T(3) \cdot f_F(3) = \binom{5}{3} \cdot 0.80^3 \cdot 0.20^2 \cdot \binom{5}{3} \cdot 0.70^3 \cdot 0.30^2 = 0.0632$$

$$P(L_1) = \sum_{i=0}^{5} f_T(i) \cdot f_F(i) = 0.2728$$

b)

La hendelsene T_i og F_i henholdsvis betegne at Tyskland og Frankrike scorer i runde i og $P(T_i) = 0.8,\ P(F_i) = 0.7$ som definert i begynnelsen av oppgaven.

$$V_1 = (T_1 \cap \bar{F}_1) \cup (\bar{T}_1 \cap F_1)$$
$$P(V_1) = P(T_1) \cdot (1 - P(F_1)) + (1 - P(T_1)) \cdot P(F_1) =$$
$$0.8 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.38$$

$$V_T = T_i \cap \bar{F}_i, \quad P(V_T|V_1) = \frac{P(V_T \cap V_1)}{P(V_1)}$$
$$\frac{P(V_T \cap V_1)}{P(V_1)} = \frac{P(V_T)}{P(V_1)} = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.38} = 0.632$$

c)

X vil være geometrisk fordelt da dette er fordelingen til antall forsøk før første suksess av en rekke uavhengige bernoulli forsøk. p i forsøket blir sannsyneligheten for at vi får en vinner i et vilkårlig forsøk som i b) ble regnet ut til 0.38. Da har vi fra fordelingen:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.38} = 2.63$$
$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0.38}{0.38^2} = 4.29$$

Oppgave 2

a)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - f(0) = 1 - e^{-7} = 0.9991$$

$$P(X \leq 2 | X \geq 1) = \frac{P(X \leq 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \leq 2) - P(X \leq 0)}{P(X \geq 1)} =$$
$$\frac{f(0) + f(1) + f(2) - f(0)}{0.9991} = \frac{\frac{7^1}{1!}e^{-7} + \frac{7^2}{2!}e^{-7}}{0.9991} = 0.0288$$

b)

$$\mu_{tot} = 0.5 \cdot 5 + 0.25 \cdot 15 + 0.25 \cdot 20 = 11.25$$
$$f(x) = p(x; 11.25) = \frac{11.25^x}{x!}e^{-11.25}$$

Oppgave 3

X vil være hypergeometrisk fordelt da det ikke ville innfalt to kontroller på samme transporten

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{995}{5-x}}{\binom{1000}{5}}$$
$$\text{Høyest: } f(0) = \frac{\binom{995}{5}}{\binom{1000}{5}} = 0.975$$
$$\text{Alle testene positiv: } f(5) = \frac{1}{\binom{1000}{5}} = 1.212 \cdot 10^{-13}$$

Oppgave 4

$$Z = \frac{x - 6.8}{0.060} P(X < 6.74) = P(Z < 1) = 0.1587$$
$$P(6.74 < X < 6.86) = 1 - 2 \cdot 0.1587 = 0.6826 \quad \text{pga. symetri}$$
$$P(|X - \mu| > 0.06) = 1 - P(6.74 < X < 6.86) = 0.3174$$

Oppgave 5

$$Z = \frac{Y - 500}{80}$$
$$P(Y > 550) = P(Z > 0.625) = 1 - 0.7357 = 0.2643$$

$$X = Y_1 - Y_2$$
$$E(X) = E(Y_1) - E(Y_2) = 0$$
$$Var(X) = Var(Y_1) + Var(Y_1) = 2 \cdot 80^2 = 12800$$
$$\sigma_X = \sqrt{12800} = \sqrt{2} \cdot 80 = 113.14$$
$$Z = \frac{X}{113.14}$$
$$P(|X| > 80) = 1 - P(-80 < X < 80) = P(-0.71 < Z < 0.71) =$$
$$P(Z < 0.71) - P(Z < -0.71) = 0.7611 - 0.2389 = 0.5222$$

Oppgave 6

a)

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z < 10) = 1 - \left(1 - e^{-0.05 \cdot 10}\right) = 0.6065$$

Hendelsene er per definisjon uavhengige så sannsyneligheten for å finne en feil på de neste x kilometrene er uavhengig av hvor lenge det er siden den forrige. Sannsyneligheten vil derfor være lik.

b)

$$P(M = m) = P(m < Z < m + 1) = F(m + 1) - F(m) =$$
$$1 - e^{-\lambda(m+1)} - \left(1 - e^{-\lambda m}\right) = e^{-\lambda m} - e^{-\lambda m} e^{-\lambda} =$$
$$\left(1 - e^{-\lambda}\right) e^{-\lambda m}$$