TMA 4100 Skriftlig innlevering 3

16 October, 2017 14:16

1.

R er den sirkelsektoren av sirkelen med radius $\sqrt{5}$ som ligger mellom y aksen og linjen $y = 2x$. Vi kan finne volumet av det resulterende omdreiningslegemet som framstår når dette roteres om y aksen

Integrasjonsgrensene finnes med å løse for skjeringspunkt mellom de to kurvene

$$y^2 + x^2 = 5$$
$$y = \sqrt{5 - x^2}$$
$$2x = \sqrt{5 - x^2}$$
$$4x^2 = 5 - x^2$$
$$5x^2 = 5$$
$$x = 1$$

Sylinderskallmetoden gir da:

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^1 x\left(\sqrt{5 - x^2} - 2x\right) dx =$$
$$\int_0^1 x\sqrt{5 - x^2} dx - 2\int_0^1 x^2 dx = \int_5^4 x\sqrt{u}\frac{du}{-2x} - \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^4 - \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{5}{3}\left(\sqrt{5} - 2\right)$$
$$u = 5 - x^2$$
$$du = -2x\, dx$$
$$u(0) = 5$$
$$u(1) = 4$$

$$\frac{V}{2\pi} = \frac{5}{3}\left(\sqrt{5} - 2\right)$$
$$V = \frac{10\,\pi}{3}\left(\sqrt{5} - 2\right) \approx 2.47$$

2.

a)

$$f(x) = \arctan x - x^2$$
$$f(0.8) \approx 0.03$$
$$f(1) \approx -0.21$$

Skjæringssetningen sier da at det finnes minst en løsning I intervallet $x \in (0.8, 1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 2x$$
$$f''(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} - 2$$
$$x \geq 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{antall nullpunkt} \leq 2$$

Siden vi da har ett nullpunkt ved *x = 0* kan det ikke være flere enn ett nullpunkt for strengt positive x-verdier. Vi har da altså nøyaktig en strengt positiv løsning I intervallet (0.8, 1).

b)

$$g(x) = \arctan x$$
$$g(0) = 0$$
$$g'(0) = 1$$
$$g''(0) = 0$$
$$g'''(0) = -2$$

$P_3 = x - \frac{x^3}{3}$

$x - \frac{x^3}{3} = x^2$

$\frac{x^3}{3} + x^2 - x = 0$

$x\left(\frac{x^2}{3} + x - 1\right) = 0$

$x = 0$

$\frac{x^2}{3} + x - 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{2}{3}}$$

(Kun positive verdier)

$$x = \frac{-1 + \sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{2}{3}} \approx 0.79$$

Som er ganske nært det gjettede intervallet.

3.

Skal vise: $a_{n+1} > a_n$

$a_1 = 1$

$a_2 = \sqrt{1 + 2 \cdot 1} = \sqrt{3} > 1$

Hvis $a_{n+1} > a_n$ holder for alle $n > 1$ så kan vi si:

$a_{n+2} = \sqrt{1 + 2\, a_{n+1}} > \sqrt{1 + 2\, a_n} = a_{n+1}$

Vi har da vist at $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$

Siden dette holder for n = 1 holder det induktivt for alle verdier av n

Altså følgen er monotont voksende.

Skal vise: $a_n < 3$

$a_1 = 1 < 3$

Hvis $a_n < 3$ holder for alle $n > 1$ kan vi si:

$a_{n+1} = \sqrt{1 + 2\, a_n} < \sqrt{1 + 2 \cdot 3} = \sqrt{7} < 3$

Da har vi vist at $a_n < 3 \Rightarrow a_{n+1} < 3$

Som tidligere holder dette for alle verdier av n siden det holder for n = 1

Altså er følgen $\{a_n\}$ er monotont stigende og begrenset ovenifra. Dette Impliserer at følgen konvergerer mot en grense *r*.

$\lim_{n\to\infty} a_n = r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = r$

$\lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} = \sqrt{1 + 2\, a_n}\right) \to \left(r = \sqrt{1 + 2r}\right)$

$r = \sqrt{1+2r}$
$r^2 = 1 + 2r$
$r^2 - 2r - 1 = 0$
$r = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$
$r > 0$
$r = 1 + \sqrt{2} \approx 2.41$

4.
a)
Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer må følgen $\{a_n\}$ konvergere mot null.

For $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ vil en ha en begrenset mengde verdier større enn 1. Alle de resterende uendelig verdiene vil ligge mellom 0 og 1. $x \in [0,1] \Rightarrow x \geq x^2$. Altså er de uendelig mange tallene som summeres og konvergerer blir nå enda lavere og vi da også konvergere.

Tilsvarende for den andre summen må vi for $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ vise at $x \geq \ln(1+x)$ for $x \in [0,1]$ så vil samme argument holde.

$\ln(1+0) = 0$
$\ln(1+x)'\,(0) = \frac{1}{1+0} = 1 = x'(0)$
$\ln(1+x)'' = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$

Altså er $\ln(1+x) < x$ for alle x og summen konvergerer.

b)
(I)
Bruker integraltest for å teste for konvergens.

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} u\,du = \frac{1}{2}\left[u^2\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} < \infty$$
$u = \arctan x$
$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$
$u(1) = \frac{\pi}{4}$
$\lim_{r\to\infty} u(r) = \frac{\pi}{2}$

Dette integralet konvergerer som impliserer at rekken konvergerer.

(II)
Bruker comparison test.

$a_n = \sin\frac{1}{n}$
$b_n = \frac{1}{2n}$
$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sin\frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx \to \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \to \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \to \infty$$

Altså konvergerer ikke integralet.