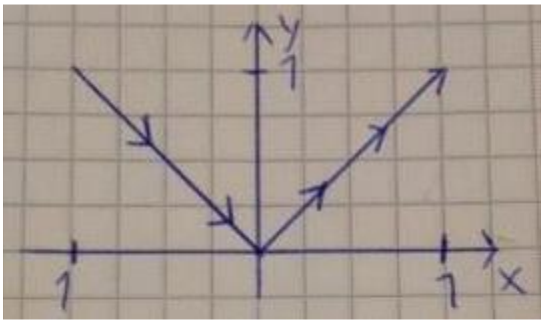
Innlevering 1

søndag 7. januar 2018 19.30

1.



For positive verdier av t er $x(t) = y(t) = t^5$ og kurven vil derfor gå langs linjen $y = x$ mellom punktene $(0,0)$ og $(1,1)$
For negative verdier av t er $x(t) = -y(t) = t^5$ og kurven vil da gå langs linjen $y = -x$ fra $(-1,1)$ til $(0,0)$

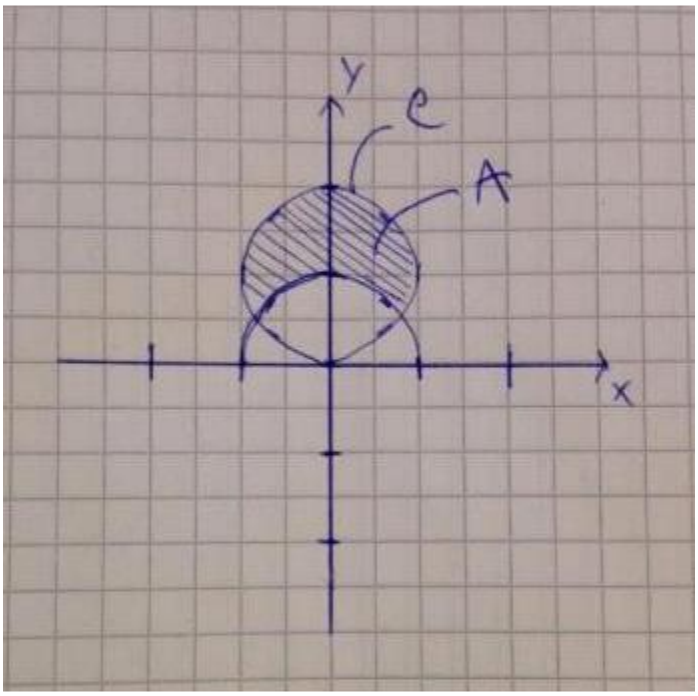
I origo får vi at $x'(0) = 5 \cdot (0)^4 = 0$
Og: $y'\left(0^+\right) = 5 \cdot (0)^4 = 0$
$y'(0^-) = -5 \cdot (0)^4 = 0$

Siden både den deriverte til x og y er 0 I origo kan må vi se på grenseverdien $\lim_{t\to 0} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{5t^4}{5t^4} = 1$$
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{5t^4}{-5t^4} = -1$$

Grenseverdien eksisterer altså ikke og kurven er ikke glatt. (Som, er nokså greit å se grafisk)

2.

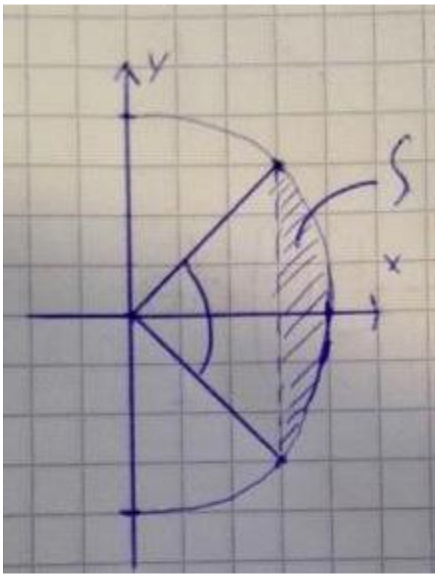


Vi kan løse for hvilken θ skjæringspunktene mellom C og enhetssirkelen er ved:
$r = 1 - \cos 2\theta \qquad \theta \in [0, \pi]$
$r = 1$
$1 - \cos 2\theta = 1$
$\cos 2\theta = 0$
$2\theta = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n \qquad n \in \mathbb{N}$
$\theta = \frac{\pi}{4} \wedge \theta = \frac{3\pi}{4}$

Vi bruker da dette som grensene for θ:

$$Areal(A) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left((1 - \cos 2\theta)^2 - 1^2\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(-2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3\pi}{2} - \left(-1 + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 + \frac{\pi}{2}$$

Arealet kan også finnes geometrisk nokså enkelt. Arealet er en sirkel med areal = π minus to ganger den biten av en sirkel mellom sirkelbuen med vinkel $\frac{\pi}{4}$ og sekanten gjennom endepunktene på sirkelbuen (Område S I tegning):



Arealet av S blir da:
$\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Vi kan da finne arealet av A:

$$A = \pi - 2S = \pi - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$$
Vi ser at det ble det samme som med integralet, som er greit.

3.
$y = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-4\sin 2x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{-8\cos 2x}{6}$$
$$= -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$x = 0$:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} = 1 \neq -\frac{4}{3}$$

Grenseverdien eksisterer altså ikke, siden grensen er ulik på linjen $x = 0$ og linjen $y = 0$.

4.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin x \cos x + \cos x \cos y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= -2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

Hvis vi tar kryssprodukt av en vektor langs hver av de to partiellderiverte får vi en normalvektor til planet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi får da et plan med ligning:
$x + y + 2z = C$

Vi finner C ved å sette inn koordinatene til punktet planet tangerer F

$$C = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

$$C = \frac{\pi}{2} + 2$$

Ligningen for planet blir da:

$$x + y + 2z = 2 + \frac{\pi}{2}$$