8.1 Anse at en fjær med lengde L består av to deler, hver med lengde $L/2$. Når vi komprimerer hele fjæren med en kraft, føler hver halv-fjær den samme kraften, men blir bare komprimert halve distansen sammenlignet med hele fjæren.

Fjærkonstanten k er gitt ved:

$$k = -\frac{F}{x} \quad \text{som betyr at}$$

k til den halve fjæren er det dobbelte av k til hele fjæren.

$$f = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dvs. f til den halve fjæren er $\sqrt{2}$ ganger så stor som f til hele fjæren.

En liten fjær svinger fortere enn en stor...

8.2 Vinkelfart og vinkelfrekvens er det samme for en sirkulær bevegelse med konstant vinkelfart. Dette er ikke tilfellet for en pendel.

Vinkelfrekvens : konstant $= \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

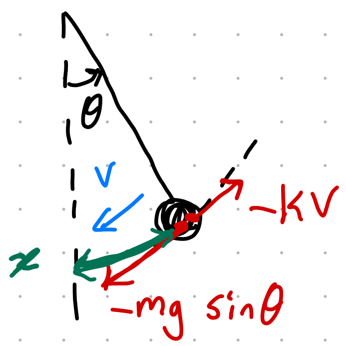
Vinkelfart : ikke konstant $= \omega = \frac{d\theta}{dt}$

8.3

a) $F_L = -kv$

$$[k] = \frac{[F_L]}{[v]} = \frac{kg\frac{m}{s^2}}{\frac{m}{s}} = \underline{\underline{\frac{kg}{s}}}$$

b)



$F_\theta = -mg\sin\theta$

$F_L = -kv$ (avhengig av retning til v)

Liten vinkeltilnærming : $\sin\theta \approx \theta$

Buelengden kan uttrykkes som: $x = \theta L$ slik at

$$F_\theta = -mg\theta = -mg\frac{x}{L}$$

Newtons 2. lov gir:

$$\sum F = F_\theta + F_L = ma$$

$$\Rightarrow ma = -mg\frac{x}{L} - kv$$

$$a = -\frac{g}{L}x - \frac{k}{m}v$$

$$\Rightarrow a + \frac{k}{m}v + \frac{g}{L}x = 0$$

Dette er en 2. grad differensialligning.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad v = \frac{dx}{dt}$$

c) Vi løser oppgaven ved å sette inn uttrykket for $x(t)$ inn i løsningen.

$$x(t) = e^{-\frac{k}{2m}t}\left[x_0 \cos(\omega' t) + \frac{x_0 k}{2m\omega'}\sin(\omega' t)\right]$$

Vi definerer $\beta = \frac{k}{2m}$ for mindre skriving.

Tidsderivert av x (altså v) er lik:

$$\frac{dx}{dt} = x_0\left[-\beta e^{-\beta t}\cos(\omega' t) - \omega' e^{-\beta t}\sin(\omega' t)\right]$$

$$+ \frac{x\beta}{\omega'}\left[-\beta e^{-\beta t}\sin(\omega' t) + \omega' e^{-\beta t}\cos(\omega' t)\right]$$

$$= e^{-\beta t}\left[\cancel{-x_0\beta\cos(\omega' t)} - x_0\omega'\sin(\omega' t) - \frac{x_0\beta^2}{\omega'}\sin(\omega' t) + \cancel{x_0\beta\cos(\omega' t)}\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right) x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega' t)$$

Andre derivert (altså a):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right) x_0 \left[-\beta e^{-\beta t} \sin(\omega' t) + \omega' e^{-\beta t} \cos(\omega' t)\right]$$

$$= -\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right) x_0 e^{-\beta t} \left[-\beta \sin(\omega' t) + \omega' \cos(\omega' t)\right]$$

Vi setter inn i uttrykket for akselerasjon:

$$a + \frac{k}{m} v + \frac{g}{L} x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{g}{L} x = 0$$

gir:

$$-\cancel{x_0}\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right)\left[\omega' \cos(\omega' t) - \beta \sin(\omega' t)\right]\cancel{e^{-\beta t}}$$

$$-\frac{k}{m}\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right)\cancel{x_0} \sin(\omega' t)\cancel{e^{-\beta t}} + \frac{g}{L}\cancel{x_0}\left[\cos(\omega' t) + \frac{\beta}{\omega'}\sin(\omega' t)\right]\cancel{e^{-\beta t}} = 0$$

Deler på x_0 og $e^{-\beta t}$ på begge sider og kombinerer første og andre ledd.

$$-\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right)\left[\omega' \cos(\omega' t) - \beta \sin(\omega' t) + \frac{k}{m} \sin(\omega' t)\right]$$

$$+ \frac{g}{L}\left[\cos(\omega' t) + \frac{\beta}{\omega'} \sin(\omega' t)\right] = 0$$

$$-\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right)\left[\omega'\cos(\omega' t) - \beta\sin(\omega' t) + \frac{k}{m}\sin(\omega' t)\right]$$
$$+ \frac{g}{L}\left[\cos(\omega' t) + \frac{\beta}{\omega'}\sin(\omega' t)\right] = 0$$

Vi har $\beta = \frac{k}{2m} \Rightarrow \frac{k}{m} = 2\beta$

Vi får:

$$-\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right)\left[\omega'\cos(\omega' t) + \beta\sin(\omega' t)\right]$$
$$+ \frac{g}{L}\left[\cos(\omega' t) + \frac{\beta}{\omega'}\sin(\omega' t)\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'}\right)\left[\omega'\cos(\omega' t) + \beta\sin(\omega' t)\right]$$
$$+ \frac{g}{L\omega'}\left[\omega'\cos(\omega' t) + \beta\sin(\omega' t)\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'} - \frac{g}{L\omega'}\right)\left[\omega'\cos(\omega' t) + \beta\sin(\omega' t)\right] = 0$$

For at dette uttrykket skal bli null, må

$$\omega' + \frac{\beta^2}{\omega'} - \frac{g}{L\omega'} = 0$$

$$\omega'^2 = \frac{g}{L} - \beta^2 = \frac{g}{L} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{k^2}{4m^2}}}$$

$$\boxed{\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{k^2}{4m^2}}}$$

Med dette uttrykket for vinkelfrekvensen, ser vi at $x(t)$ (oppgitt) tilfredsstiller

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{g}{L}x = 0$$

Dette er svar på oppgave d).

Vi ser at uttrykket for ω' ligner på det vi så i kap. 14.7.

8.3

c) Løsning av 2. grads differensiallligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{g}{L}x = 0$$

Karakteristisk ligning:

$$r^2 + \frac{k}{m}r + \frac{g}{L} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - 4\frac{g}{L}}$$

$$= -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{g}{L} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2\right)}$$

$$= -\frac{k}{2m} \pm i\sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2} \quad \leftarrow \begin{cases} i = \sqrt{-1} \\ \omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2} \end{cases}$$

$$r = -\frac{k}{2m} \pm i\omega'$$

Dette gir en generell løsning

$$x(t) = A e^{-\frac{k}{2m}t}\cos(\omega' t) + B e^{-\frac{k}{2m}t}\sin(\omega' t)$$

A og B finner vi ved initialbetingelsene.

$x(t=0) = x_0 \Rightarrow A = x_0$ siden $e^0 = 1$

$\cos 0 = 1$

$\sin 0 = 0$

Deriverer mhp tid for å bruke initialbetingelse for farten.

$$\frac{dx}{dt} = A\left[-\frac{k}{2m}e^{-\frac{k}{2m}t}\cos(\omega' t) - e^{-\frac{k}{2m}t}\omega'\sin(\omega' t)\right]$$

$$+ B\left[-\frac{k}{2m}e^{-\frac{k}{2m}t}\sin(\omega' t) + e^{-\frac{k}{2m}t}\omega'\cos(\omega' t)\right]$$

Vi har: $v(t=0) = 0$, så vi står igjen med

$$0 = -\frac{Ak}{2m} + B\omega'$$

$$\Rightarrow B = \frac{Ak}{2m\omega'} = \frac{x_0 k}{2m\omega'}$$

Løsningen blir

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-\frac{k}{2m}t}\cos(\omega' t) + \frac{x_0 k}{2m\omega'}e^{-\frac{k}{2m}t}\sin(\omega' t)}$$

d) $\boxed{\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}}$

8.4

a) Legemet er i ro ved tidene:

$$t = [0, 1s, 2s, 3s, 4s]$$

b) Ved start var legemet i ro.

$$E = U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 225\,Nm \cdot (7 \cdot 10^{-2}\,m)^2 = \underline{\underline{0,55\,J}}$$

c) $E(t=1{,}0s) = \frac{1}{2} \cdot 225\,Nm \cdot (-6 \cdot 10^{-2}\,m)^2 = 0{,}405\,J$

$E(t=4{,}0s) = \frac{1}{2} \cdot 225\,Nm \cdot (3 \cdot 10^{-2}\,m)^2 = 0{,}101\,J$

$$\boxed{\Delta E = 0{,}30\,J}$$

d) Energi gått tap pga. friksjon/luftmotstand. Den er omdannet til andre energiformer som varme og lyd.