POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

ENE8105
Rayonnement et radioprotection

Devoir 4

Réalisé par

Mardy Huor [1789841]

Travail présenté à
Guy Marleau

2 Décembre 2019

Question a

Dans cette question, on doit déterminer le signal que devrait produire théoriquement par le détecteur pour chacune des expériences. Avec le taux de photons Q = 10000 photons/s émis à partir d'une source d'une longueur $h_s = 40$ cm, on le taux de photons par unité de longueur suivant :

$$Q_l = \frac{Q}{h_s} = \frac{10000}{40} = 250\, photons/cm\ s$$

Cas en absence de l'écran :

Étant donné qu'on a des sources linéaires dans les cas des expériences sans écran, on a :

$$dI = \frac{Q_l}{4\pi r^2}dl$$

$$I = \int_{l_1}^{l_2} \frac{Q_l}{4\pi r^2}dl$$

où :

$$l_1 = -20$$

$$l_2 = 20$$

et r est la distance d'un point quelconque de la source au détecteur qui correspond à :

$$r = \sqrt{x^2 + l^2}$$

et on a donc :

$$I = \int_{l_1}^{l_2} \frac{Q_l}{4\pi\left(x^2 + l^2\right)}dl$$

En résolvant cette intégrale, on obtient :

$$I = \frac{Q_l}{4\pi x}\left(\theta_2 - \theta_1\right) \tag{1}$$

où :

$$\theta_2 = \frac{l_2}{x}$$

$$\theta_1 = \frac{l_1}{x}$$

Cas en présence de l'écran :

Pour une source dans un milieu ayant une section efficace Σ, on a l'intensité I atteignant le détecteur de la forme suivante :

$$I = \int_{l_1}^{l_2} \frac{Q_l}{4\pi r^2}\exp\left(-\Sigma r\right)dl$$

Dans notre cas, ce milieu est un écran ayant une épaisseur e et on a donc :

$$I = \int_{l_1}^{l_2} \frac{Q_l}{4\pi r^2}\exp\left(-\Sigma \frac{e}{x_d} r\right)dl$$

où x_d est la position horizontale de la source au détecteur.

Avec :

$$r = x \sec(\theta)$$

$$l = x \tan(\theta)$$

$$dl = x \sec^2(\theta)\, d\theta$$

on obtient :

$$I = \frac{Q_l}{4\pi x} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp\left(-\Sigma \frac{e}{x_d} x \sec(\theta)\right) d\theta$$

où :

$$\theta_2 = \frac{l_2}{x}$$

$$\theta_1 = \frac{l_1}{x}$$

Avec la fonction de Sievert définie par :

$$F_s(\theta, y) = \int_0^{\theta} \exp(-y \sec(\theta)) d\theta$$

on obtient finalement :

$$I = \frac{Q_l}{4\pi x} \left[F_s\left(\theta_2, \Sigma \frac{e}{x_d} x\right) - F_s\left(\theta_1, \Sigma \frac{e}{x_d} x\right)\right] \tag{2}$$

qui peut être résolue à l'aide de Matlab via la fonction quad.

Détermination du nombre de photons comptés par le détecteur :

Pour déterminer le nombre de photons théorique comptés par le détecteur, on utiliser la relation suivante :

$$C_{theorie} = ITS_d \tag{3}$$

où T est le temps de comptage et S_d est la surface du compteur.

Dans notre cas :

$$T = 5\, minutes = 300\, secondes$$

et comme notre compteur est de forme carré ayant les arêtes d'une longueur de 4 cm, on a :

$$S_d = 4 \times 4 = 16\, cm^2$$

Étant donné qu'il y a 3 sources situées à différente position, les expressions pour déterminer l'intensité exprimées aux équations (1) et (2) ne sont pas les mêmes. Donc, pour chaque source, on a :

Source 1 située au point (0, -10, 0) :

On a :

$$x = \sqrt{x_d^2 + 10^2}$$

$$I_{1,\, sans\, ecran} = \frac{Q_l}{4\pi\sqrt{x_d^2+10^2}}\left[\arctan\left(\frac{l_2}{\sqrt{x_d^2+10^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_1}{\sqrt{x_d^2+10^2}}\right)\right]$$

$$I_{1,\, avec\, ecran} = \frac{Q_l}{4\pi\sqrt{x_d^2+10^2}}\left[F_s\left(\theta_2, \Sigma\frac{e}{x_d}\sqrt{x_d^2+10^2}\right) - F_s\left(\theta_1, \Sigma\frac{e}{x_d}\sqrt{x_d^2+10^2}\right)\right]$$

Source 2 située au point (0, 0, 0) :

On a :

$$x = x_d$$

$$I_{2,\, sans\, ecran} = \frac{Q_l}{4\pi x_d}\left[\arctan\left(\frac{l_2}{x_d}\right) - \arctan\left(\frac{l_1}{x_d}\right)\right]$$

$$I_{2,\, avec\, ecran} = \frac{Q_l}{4\pi x_d}\left[F_s\left(\theta_2, \Sigma\frac{e}{x_d}x_d\right) - F_s\left(\theta_1, \Sigma\frac{e}{x_d}x_d\right)\right] = \frac{Q_l}{4\pi x_d}\left[F_s\left(\theta_2, \Sigma e\right) - F_s\left(\theta_1, \Sigma e\right)\right]$$

Source 3 située au point (0, 10, 0) :

On a :

$$x = \sqrt{x_d^2+10^2}$$

$$I_{3,\, sans\, ecran} = \frac{Q_l}{4\pi\sqrt{x_d^2+10^2}}\left[\arctan\left(\frac{l_2}{\sqrt{x_d^2+10^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_1}{\sqrt{x_d^2+10^2}}\right)\right]$$

$$I_{3,\, avec\, ecran} = \frac{Q_l}{4\pi\sqrt{x_d^2+10^2}}\left[F_s\left(\theta_2, \Sigma\frac{e}{x_d}\sqrt{x_d^2+10^2}\right) - F_s\left(\theta_1, \Sigma\frac{e}{x_d}\sqrt{x_d^2+10^2}\right)\right]$$

Ainsi, pour chaque source, on peut déterminer pour chacune des 5 expériences le nombre de photons thériques comptés par le compteur via l'équation (3) à l'aide de Matlab. Ensuite, on additionne ensemble le nombre de photons obtenus pour chacune des 3 sources afin d'obtenir le nombre de photons théoriques total comptés par le compteur, soit :

$$C_{theorie} = TS_d\left(I_1 + I_2 + I_3\right)$$

et ces valeurs sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Expérience	$C_{theorie}$
Expérience 1	4254
Expérience 2	1124
Expérience 3	1507
Expérience 4	1507
Expérience 5	534

Question b

Dans cette question, on doit simuler chacune des expériences numériquement pour N = 10 fois à l'aide de Matlab (Voir section "Simulation numerique" en annexe pour plus de détails concernant la simulation). En suivant les instructions fournies dans l'énoncé et en utilisant les équations suivantes :

$$\bar{C}_{exp} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C_{exp,n}$$

$$\sigma\,(\%) = \frac{100}{\bar{C}_{exp}}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(C_{exp,n} - \bar{C}_{exp}\right)^2} \tag{4}$$

pour déterminer le nombre de photons moyen $\bar{C}_{exp}$ et l'écart type σ, on obtient les nombres de photons présentés dans le tableau ci-dessous.

Expérience	$\bar{C}_{exp} \pm \sigma(\%)$
Expérience 1	4084 ± 2.005 %
Expérience 2	1100 ± 2.767 %
Expérience 3	1451 ± 2.297 %
Expérience 4	1466 ± 3.032 %
Expérience 5	515 ± 4.332 %

On peut comparer l'écart-type calculé via l'équation (4) avec la valeur attendue pour ces simulations qui correpond à l'incertitude théorique donnée par :

$$\sigma_{th}\,(\%) = \frac{100}{\sqrt{N}}$$

où N est le nombre de comptes reçus par le compteur. Par exemple, le compteur compte théoriquement 4254 photons pour la première expérience. Comme on répète 10 fois chaque expérience, l'incertitude théorique du nombre de photons compté lors de cette expérience est :

$$\sigma_{th}\,(\%) = \frac{100}{\sqrt{10 \times 4254}} \approx 0.485\,\%$$

En répétant ce même calcul pour le nombre de photons théorique obtenu lors des autres expériences, on obtient les valeurs présentées dans le tableau ci-dessous.

Expérience	$\sigma(\%)$	$\sigma_{th}(\%)$
Expérience 1	2.005 %	0.485 %
Expérience 2	2.767 %	0.943 %
Expérience 3	2.297 %	0.815 %
Expérience 4	3.032 %	0.815 %
Expérience 5	4.332 %	1.368 %

Dans ce tableau, on constate que les écart-types calculés et les incertitudes théoriques sont dans le même ordre de grandeur et presque identiques, ce qui montre que les simulations sont vraiment aléatoires.

Question c

Dans cette question, on doit déterminer les différences relatives D entre les résultats provenant de la simulation numérique et les nombres de photons théoriques calculé à la question a via l'expression suivante :

$$D\,(\%) = 100\left(\frac{\bar{C}_{exp} - C_{theorie}}{C_{theorie}}\right)$$

En évaluant cette expression pour chaque expérience à l'aide de Matlab, on obtient les différences relatives présentées dans le tableau ci-dessous.

Expérience	D(%)	$\sigma(\%)$
Expérience 1	-3.995 %	2.005 %
Expérience 2	-2.076 %	2.767 %
Expérience 3	-3.761 %	2.297 %
Expérience 4	-2.766 %	3.032 %
Expérience 5	-3.624 %	4.332 %

À partir de ce tableau, on compare les écart-types $\sigma(\%)$ avec les différences relatives D(%) entre les résultats des expériences numériques et les valeurs théoriques et on constate que l'approximation utilisée pour le calcul théorique concernant l'uniformité du signal sur le détecteur est très valide parce que les différences relatives D(%) et les écart-types $\sigma(\%)$ ont les mêmes ordres de grandeur et la valeur absolue des différences relatives est plus petite que 2 fois les écart-types (D(%) $<2\sigma(\%)$).