Das ist eine Probe Klausur !! KEINE ECHTE !! Klausur, im folgenden Sinne:

(1) In dieser Probeklausur sind alle Aufgaben von den Übungsblättern aus jeder Woche. Aber in der echten Klausur werden die Aufgaben NICHT von den Übungsblätter kommen.
(2) Aber die Form der echten Klausur wird der der Probeklausur sehr ähnlich sein.

In unserer echten Klausur gilt:

(1) Keine Taschenrechner, keine Handys, keine Computer.
(2) Ein Blatt A4 Papier, beidseitig beschrieben, darf mitgebracht werden.

Probe Klausur zur Vorlesung Diskrete Mathematik WS 2016/2017

Prof. Dr. Chenchang Zhu, Dr. Dennis Borisov

2 Stunden

---

1. Multiple Choice

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Falls die richtig Antwort für eine Aufgabe eine Menge R und Ihre Antwort A ist, dann gilt:

- $A = R \Rightarrow 6$ Punkte;
- $A \subset R \wedge A \neq R \wedge A \neq \varnothing \Rightarrow 3$ Punkte;
- $A \smallsetminus R \neq \varnothing \Rightarrow 0$ Punkte.

Aufgabe 1. Welche Paare von Aussagen sind logisch äquivalent?

(1) Für alle Aussagen p und q: $\neg(p \wedge q)$ und $\neg p \vee q$;
(2) Für alle Aussagen s, t, u und v: $(s \vee t) \wedge (u \vee v)$ und $(s \wedge u) \vee (s \wedge v) \vee (t \wedge u) \vee (t \wedge v)$;
(3) Für alle Mengen A und B: $A \cap B = \varnothing$ und $A \smallsetminus B = A$;
(4) Für alle Aussagen s, t, u: $(s \vee t \vee u) \wedge (s \vee \neg t \vee u)$ und $s \vee u$.

Aufgabe 2. Welche ist (sind) ein richtiger Beweis für die Aussage $(A \smallsetminus B) \cup (A \cap B) = A$, für alle Mengen A und B?

(1)

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \big((x \in A \cap B) \vee (x \notin A \cap B)\big) \\ &\Leftrightarrow \big((x \in A) \vee (x \notin A \cap B)\big) \wedge (x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \smallsetminus B) \wedge (x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \smallsetminus B) \cup (A \cap B). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x \in (A \smallsetminus B) \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \smallsetminus B) \vee (x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \big((x \in A) \vee (x \notin B)\big) \vee \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \vee \big((x \notin B) \vee (x \in B)\big) \\ &\Leftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \cap B) \\
&\Leftrightarrow \big((x \in A) \wedge (x \notin B)\big) \vee \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \big((x \notin B) \vee (x \in B)\big) \\
&\Leftrightarrow x \in A
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee \big(x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)\big) \\
&\Leftrightarrow \big((x \in A) \wedge (x \in A \setminus B)\big) \vee (x \in A \wedge x \notin A \setminus B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \big((x \in A \setminus B) \vee (x \notin A \setminus B)\big) \\
&\Leftrightarrow x \in A
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist. Beweisen Sie, dass $f \circ f^{op} = id_B$, die Identitätsfunktion auf B ist. Welcher Beweise ist (sind) richtig?

(1)

$$\begin{aligned}
f \circ f^{op} &= \{(x, f(x))\} \circ \{(f(y), y)\} \\
&= \{(x, y) : f(x) = f(y)\} \quad f \text{ ist injectiv} \Rightarrow x = y \\
&= \{(x, x)\} \quad f \text{ ist surjectiv} \Rightarrow x \text{ nehmen alle Elemente in } B. \\
&= id_B
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
f \circ f^{op} &= \{(x, f(x))\} \circ \{(f(y), y)\} \\
&= \{(f(y), f(x)) : x = y\} \\
&= \{(f(x), f(x))\} \quad f \text{ ist surjectiv} \Rightarrow f(x) \text{ nehmen alle Elemente in } B. \\
&= id_B
\end{aligned}$$

(3) $f : A \to B$ ist eine injektive Funktion $\Rightarrow$ $f^{op} : B \to A$ ist noch ein Funktion.
$\Rightarrow$ $f \circ f^{op} : B \to A \to B$ ist ein Funktion von B nach B.
f ist injectiv $\Rightarrow |A| \leq |B|$.
f ist surjectiv $\Rightarrow |A| \geq |B|$. $\Rightarrow |A| = |B|$.
Daher $f \circ f^{op} = id_B$.

Aufgabe 4. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx, xxxxxxxxxxxxxxxxxxx, xxxxxxxxxxxxxxxx.

(1) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx;
(2) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx;
(3) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx;
(4) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx;

Aufgabe 5. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx, xxxxxxxxxxxxxxxxxxx, xxxxxxxxxxxxxxxx.

(1) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx;
(2) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx;
(3) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx;
(4) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx;

2. Ausfüllen

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte.

Aufgabe 6. Der folgende Abschnitt Programmcode ist ein Teil eines Programme, das die Liste A sortiert:

```
for i=2 to n:
    j=i
    while (j > 2 or j=2) and (A[j] < A[j-1]):
        exchange A[j] and A[j-1]
        j--
```

Man muss maximal ________ mal vertauschen, um eine beliebige Liste A von n Elementen zu sortieren.

Aufgabe 7. Es gibt ________ fünfstelligen Zahlen in Dezimalsystem. Bei ________ davon sind keine nebeneinanderstehenden Ziffern gleich. In ________ davon gibt es zumindest ein Paar von nebeneinanderstehenden Ziffern, die gleich sind. (Bitte beachten: 00439 zum Beispiel ist eine dreistellige Zahl).

Aufgabe 8. **a):** Auf ________ Arten können wir n Leute um einen runden Tisch herum platzieren.

b): Auf ________ Arten können wir n Frauen und n Männer um einen runden Tisch herum platzieren, so dass keine zwei Männer und keine zwei Frauen nebeneinander sitzen.

c): Auf ________ Arten können wir n identische schwarze und $n+1$ identische weiße Schachfiguren in einem Kreis anordnen. (Diese Zahl wird *Catalan-Zahl* genannt.)

Dabei gelten zwei Platzierungen als gleich, wenn sie durch eine Drehung ineinander überführt werden können.

Aufgabe 9. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxx ________ xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx ________ xxxxxxxxxxxxxxx

Aufgabe 10. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxx ________ xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx ________ xxxxxxxxxxxxxxx

3. Lösung und Beweise

Jedes Aufgabe hat 10 Punkte.

Aufgabe 11 (Induktion)**.** Beweisen Sie, dass jede ganze Zahl $n \geq 8$ ist eine Summe $n = 5k_1 + 3k_2$, wobei k_1 und k_2 nicht-negative ganze Zahlen sind.

Aufgabe 12 (Rekurrenz)**.** Sabine hat n FreundInnen. Sie hat für sie n Briefe geschrieben und n Briefumschläge mit Namen und Adressen vorbereitet. Danach aber war Sabine so müde, das sie die Briefe einfach zufällig in die Briefumschläge eingesteckt hat. Sei jetzt $T(n)$ die Zahl der Arten, auf die niemand von den n FreundInnen von Sabine eine ihr/ihm adressiertes Brief bekommt.

a): Was ist der Wert von $T(5)$? (Benutzen Sie Aufgabe 4b) nur wenn, Sie sie bewiesen haben!).

b): Beweisen Sie, dass $T(n) = (n-1)(T(n-1) + T(n-2))$.

c): Jetzt zählen wir eine Multiplikation bei $n-1$ und eine Addition als jeweils eine Operation. Wie viele Operationen werden bei einem Algorithmus durchgeführt, der $T(n)$ mithilfe der oben gegebenen rekurrenten Relation zählt.

d): Die *Fibonacci-Zahlen* sind eine sehr berühmte Folge, die durch die Formel $\mathrm{Fib}(n) = \mathrm{Fib}(n-1) + \mathrm{Fib}(n-2)$, $\mathrm{Fib}(0) = \mathrm{Fib}(1) = 1$ definiert wird. Der Wert der n'ten Fibonacci Zahl wird auch durch die folgende explizite Formel gegeben:

$$\mathrm{Fib}(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1+\sqrt{5})^n}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2}$$

Sei jetzt $F(n)$ die Anzahl der Operationen aus Aufgabe 4c). Geben Sie die explizite Formel für $F(n)$.

Aufgabe 13 (big-Θ)**.** Zeichnen Sie die Rekursionsbäume und finden Sie die big-Θ Grenzen und genaue Werte für $T(n) = 3T(n/3) + n^2$. Wir nehmen an, dass $T(1) = 1$ und die Zahlen n Potenzen einer passenden natürlichen Zahl sind.

Aufgabe 14. Xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx. Xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx.