Potencjał grawitacyjny

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G \rho(x)$$

$$\Phi(0) = -5G$$

$$\Phi(3) = -4G$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 10^{11}, & x \in (1,2] \\ 0, & x \in (2,3] \end{cases}$$

1. Sformułowanie wariacyjne

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G \rho(x)$$

wprowadzam funkcję $v \in V$, takie że funkcje w V zerują się na brzegach i mnożę równanie obustronnie przez v

$$\Phi'' v = 4\pi G \rho(x) v$$

całkuję na dziedzinie $\Omega = [0,3]$

$$\int_0^3 \Phi'' v\,dx = \int_0^3 4\pi G \rho v\,dx$$

całkuję przez części

$$\int \Phi'' v\,dx = \begin{vmatrix} f = v & g' = \Phi'' \\ f' = v' & g = \Phi' \end{vmatrix} = \Phi' v - \int \Phi' v'\,dx$$

$$[\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v'\,dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v\,dx$$

v zeruje się na końcach dziedziny, więc:

$$-\int_0^3 \Phi' v'\,dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v\,dx$$

Równanie można zapisać w postaci

$B(\Phi, v) = L(v)$, gdzie $B(\Phi, v) = -\int_0^3 \Phi' v'\,dx$ $L(v) = 4\pi G \int_0^3 \rho v\,dx$

2. Rozszerzenie warunku brzegowego

$\Phi = w + \bar{\Phi}$, $w \in V$

$\bar{\Phi} = Ax + B$ $\quad \bar{\Phi}(0) = -5G \quad \bar{\Phi}(3) = -4G$

$$\begin{cases} -5G = 0 \cdot A + B \\ -4G = 3A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5G = B \\ -4G = 3A - 5G \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -5G \\ A = \frac{G}{3} \end{cases}$$

$\bar{\Phi} = \frac{G}{3}x - 5G$

zapisuję sformułowanie wariacyjne podstawiając $\Phi = w + \bar{\Phi}$

$B(w + \bar{\Phi}, v) = L(v)$

Korzystając z liniowości B względem pierwszego argumentu:

$B(w, v) = L(v) - B(\bar{\Phi}, v)$

przyjmuję $\bar{L}(v) = L(v) - B(\bar{\Phi}, v)$

$B(w, v) = \bar{L}(v)$, gdzie $B(w,v) = -\int_0^3 w'v'dx \quad \bar{L}(v) = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx - \frac{G}{3}\int_0^3 v' dx$

3. Konstrukcja podprzestrzeni elementów skończonych $V_h \in V$

Na obu brzegach mam warunek Dirichleta, więc dzieląc przestrzeń na n elementów przyjmę przestrzeń $v_h \in \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$. Elementy na które dzielę przestrzeń mają równe długości $h = \frac{3}{n}$. Jako funkcje bazowe przyjmuję:

$$e_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases} \xRightarrow[x_{i-1} = x_i - h]{x_{i+1} = x_i + h} e_i = \begin{cases} \frac{x - x_i + h}{x_i - x_i + h} = \frac{x - x_i}{h} + 1, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_i + h - x}{x_i + h - x_i} = \frac{x_i - x}{h} + 1, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

4. Przybliżenie wyniku metodą Galerkina

Aby otrzymać przybliżony wynik w, użyję metody Galerkina:

$$w \approx \sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i$$

podstawiam do wzoru $B(w,v) = \overline{L}(v)$:

$$B\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i, v\right) = \overline{L}(v)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[w_i B(e_i, v)\right] = \overline{L}(v)$$

Dla $j = 1, \dots, n-1$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[w_i, B(e_i, v_j)\right] = \overline{L}(v_j)$$

$v_n \in V$ oraz $v \in V$ dlatego przyjmuję $v_j = e_j$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[w_i, B(e_i, e_j)\right] = \overline{L}(e_j)$$

W ten sposób otrzymuję układ równań, który zapisuję w postaci macierzowej. Dla uproszczenia zapisu $B(e_i, e_j) \to B_{i,j}$ $\overline{L}(e_j) = \overline{L}_j$

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{n-1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,n-1} & \cdots & B_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{L}_1 \\ \vdots \\ \overline{L}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dla $|i-j|>1$, wyrażenie $B(e_i, e_j)$ przyjmuje wartość 0, dlatego macierz z wartościami B wypełniam jedynie na przekątnej ~~oraz~~ oraz bezpośrednio nad i pod nią. W pozostałe miejsca wpisuję 0. Takie spostrzeżenie pozwala zaoszczędzić sporo obliczeń