POLITECHNIKA GDAŃSKA

Eternally surrounding a robber

czyli jak sprawić, aby nie było dojścia do prezydenta.

Marek Borzyszkowski

9 października 2024

Policjanci i złodziej

Gra odbywa się na grafie G między drużyną policjantów i złodziejem. Drużyna policjantów składa się z $K > 0$ policjantów, gdzie K to liczba policjantów. Policjanci i złodzieje znajdują się na wierzchołkach grafu $V(G)$.

Policjanci i złodziej

Gra odbywa się na grafie G między drużyną policjantów i złodziejem. Drużyna policjantów składa się z $K > 0$ policjantów, gdzie K to liczba policjantów. Policjanci i złodzieje znajdują się na wierzchołkach grafu $V(G)$. W grze można wyróżnić 2 fazy:

1. fazę umieszczania najpierw wszystkich policjantów, a potem złodzieja na wierzchołkach $V(G)$.
2. Fazę ruchu, która odbywa się turowo, najpierw ruszają się wszyscy policjanci, potem turę ma złodziej. Dozwolonymi ruchami są:
   1. brak zmiany wierzołka,
   2. zmiana wierzchołka na inny będący połączony krawendzią z wierzchołkiem, na którym aktualnie przebywa dana osoba.

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

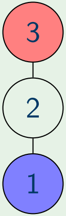
Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c(G)$.[1]

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.
Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c(G)$.[1]

Przykłady



Rysunek: $c(G) = 1$

Rysunek: $c(G) = 2$

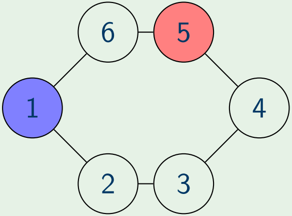
POLITECHNIKA GDAŃSKA

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.
Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c\left(G\right)$.[1]

Przykłady

Rysunek: $c\left(G\right) = 1$



Rysunek: $c\left(G\right) = 2$

Policjanci i złodziej

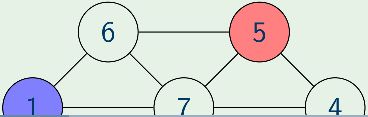
Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c(G)$.[1]

Przykłady

Rysunek: $c(G) = 1$

Rysunek: $c(G) = 2$



Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant

Policjanci okrążający złodzieja

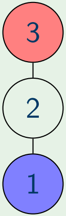
Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant

Analogicznie do $c(G)$ w tej wariacji stosuje się $\sigma(G)$ oznaczające *liczbę policjantów wymaganych do okrążenia złodzieja w grafie* G.

Policjanci okrążający złodzieja

Przykłady



Rysunek: $c\left(G\right) = 1$, $\sigma\left(G\right) = 1$

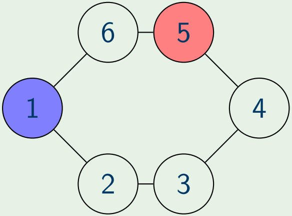
Rysunek: $c\left(G\right) = 2$, $\sigma\left(G\right) = 2$

Rysunek: $c\left(G\right) = 1$, $\sigma\left(G\right) = 3$

Policjanci okrążający złodzieja

Przykłady

Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 1$



Rysunek: $c(G) = 2$, $\sigma(G) = 2$

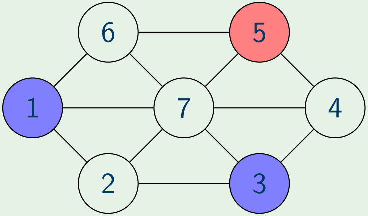
Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 3$

Policjanci okrążający złodzieja

Przykłady

Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 1$

Rysunek: $c(G) = 2$, $\sigma(G) = 2$



Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 3$

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

Analogicznie do $\sigma(G)$ w tej wariacji stosuje się $B(G)$ oznaczające *liczbę ochroniarzy wymaganych do okrążenia prezydanta i spełnienia warunków wygranej w grafie* G.

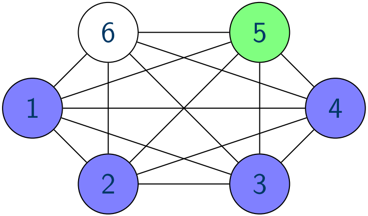
Ochroniarze i prezydent

Ciekawostka, zmiana nazwy drużyn w artykule wynika z zachowania jakie się wytwarzają podczas przebiegu gry. Zachowanie ochroniarzy (dawniej policjantów) bardziej przypomina próbę otoczenia/ochrony ważnej osobistości, poprzez ciągłe obsadzenie wszelkich dróg dojścia do tej osobistości

Rysunek: Przykład wizualizacji gry

Ochroniarze i prezydent

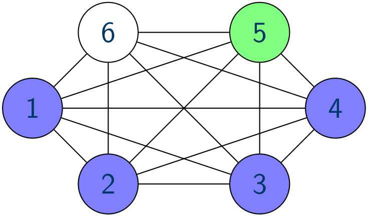
Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...



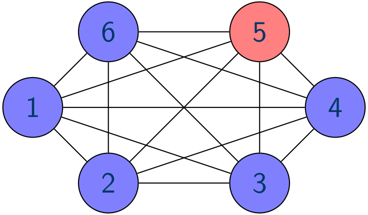
Rysunek: Prezydent zaczynający na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)

Ochroniarze i prezydent

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...



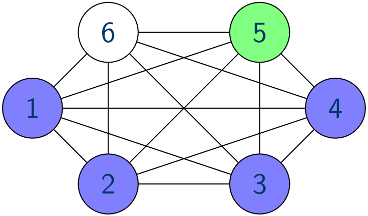
Rysunek: Prezydent zaczynający na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



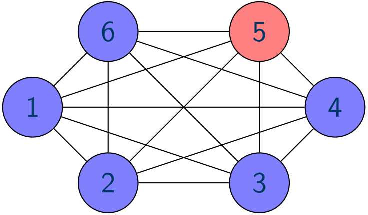
Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Ochroniarze i prezydent

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem. . . lub bez.



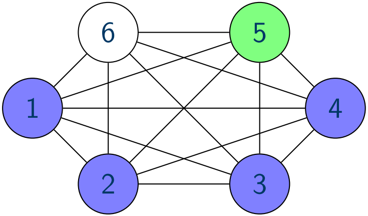
Rysunek: Prezydent zaczynający na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



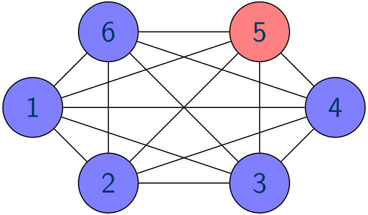
Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Ochroniarze i prezydent

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem... lub bez.



Rysunek: Prezydent zaczynający na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Jak widać po powyższym przykładzie, grę można podzielić na 2 fazy, okrążenia i utrzymania okrążenia

Ochroniarze i prezydent

Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Ochroniarze i prezydent

Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Dowód.

Jeżeli prezydent stoi na wierzchołku o największym stopniu, ochroniarze nie mogą wygrać nie okrążając prezydenta na tym wierzchołku. □

Ochroniarze i prezydent

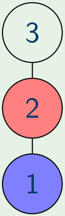
Lemat

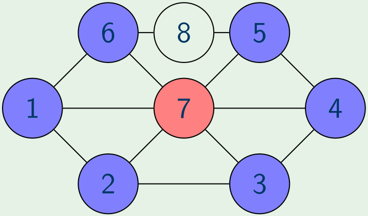
Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Dowód.

Jeżeli prezydent stoi na wierzchołku o największym stopniu, ochroniarze nie mogą wygrać nie okrążając prezydenta na tym wierzchołku. □

Przykłady

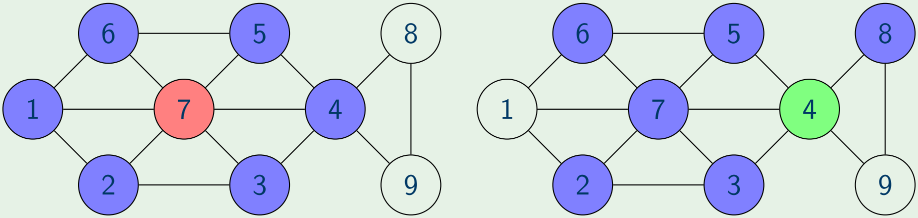




Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Przykłady

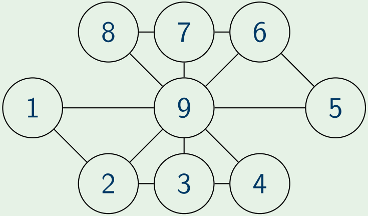


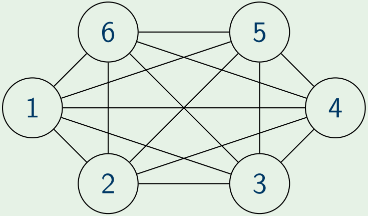
Ochroniarze i prezydent

Twierdzenie

Dla każdego grafu G na n wierzchołkach, $B(G) = n - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(G) = n - 1$.

Przykłady





Ochroniarze i prezydent

Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geqslant \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.

Ochroniarze i prezydent

Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geqslant \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.
Załóżmy że $\Delta(G) < n - 1$.

Ochroniarze i prezydent

Dowód.

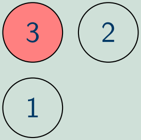
Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geqslant \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.
Załóżmy że $\Delta(G) < n - 1$.
Dla $n \leqslant 3$ G jest izomorficzne do E_n, P_2, P_3 albo C_3. $B(E_n) = 0$, gdyż wierzchołki nie są połączone. Można łatwo zauważyć, że $B(P_2) = 1$, $B(P_3) = B(C_3) = 2$.

Ochroniarze i prezydent

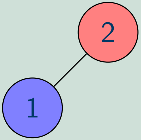
Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geqslant \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.
Załóżmy że $\Delta(G) < n - 1$.
Dla $n \leqslant 3$ G jest izomorficzne do E_n, P_2, P_3 albo C_3. $B(E_n) = 0$, gdyż wierzchołki nie są połączone. Można łatwo zauważyć, że $B(P_2) = 1$, $B(P_3) = B(C_3) = 2$.

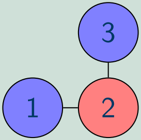
Przykłady



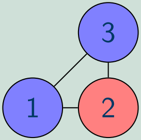
Rysunek: E_n



Rysunek: P_2



Rysunek: P_3



Rysunek: C_2

Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geqslant 4$.

Ochroniarze i prezydent

Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geqslant 4$.
Załóżmy że jest $n - 2$ ochroniarzy. Zacznijmy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G. G może mieć najwyżej $n - 2$ liści, gdyż dla $n - 1$ liści $\Delta(G) = n - 1$.

Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geqslant 4$.
Załóżmy że jest $n-2$ ochroniarzy. Zacznijmy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G. G może mieć najwyżej $n-2$ liści, gdyż dla $n-1$ liści $\Delta(G) = n-1$.
Następnie ustawmy resztę ochroniarzy tak, że jest co najwyżej 1 ochroniarz na każdym z wierzchołków. W takim ustawieniu zostały 2 wierzchołki bez ochroniarzy x i y.

Ochroniarze i prezydent

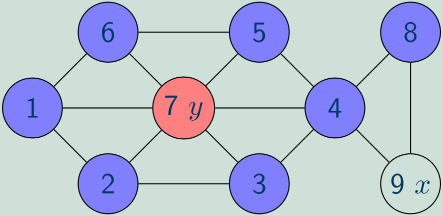
Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geqslant 4$.
Załóżmy że jest $n-2$ ochroniarzy. Zacznijmy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G. G może mieć najwyżej $n-2$ liści, gdyż dla $n-1$ liści $\Delta(G) = n-1$.
Następnie ustawmy resztę ochroniarzy tak, że jest co najwyżej 1 ochroniarz na każdym z wierzchołków. W takim ustawieniu zostały 2 wierzchołki bez ochroniarzy x i y.
Od tego momentu jest 5 przypadków ustawienia prezydenta.

Dowód cd. Przypadek 1.

Prezydent jest na wierzchołku otoczonym przez ochroniarzy. Jest to docelowa sytuacja ochroniarzy, w pierwszym ruchu każdy zostanie na swojej pozycji.

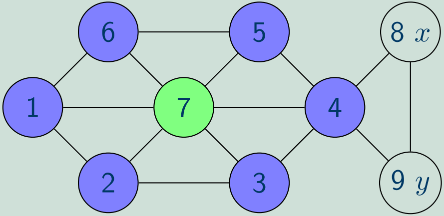
Przykład



Dowód cd. Przypadek 2.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jest otoczona przez ochroniarzy.

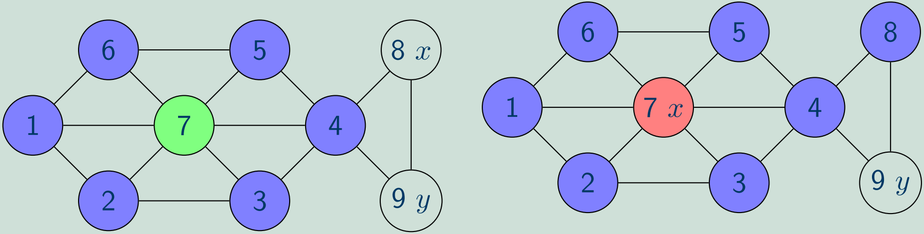
Przykład



Dowód cd. Przypadek 2.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jest otoczona przez ochroniarzy. W takiej sytuacji istanieje ścieżka $v_1, v_2, \ldots, v_n$ w G, że v_1 jest okupowane przez prezydenta, a $v_n = x$. Niech b_i oznacza ochroniarza na v_i. Podczas pierwszej tury ochroniarzy, ochroniarze b_i dla $1 \leqslant i \leqslant n-1$ przejdą z v_i na v_{i+1}.

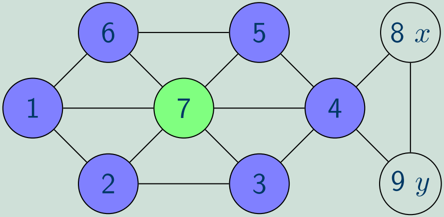
Przykład

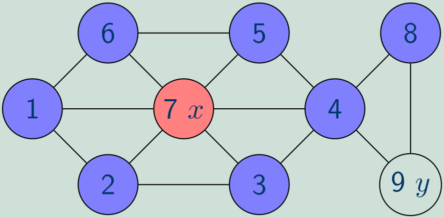


Dowód cd. Przypadek 2.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jest otoczona przez ochroniarzy. W takiej sytuacji istanieje ścieżka $v_1, v_2, \ldots, v_n$ w G, że v_1 jest okupowane przez prezydenta, a $v_n = x$. Niech b_i oznacza ochroniarza na v_i. Podczas pierwszej tury ochroniarzy, ochroniarze b_i dla $1 \leqslant i \leqslant n-1$ przejdą z v_i na v_{i+1}. Wynikiem tego działania jest otoczenie prezydenta bez ochroniarza na jej wierzchołka.

Przykład

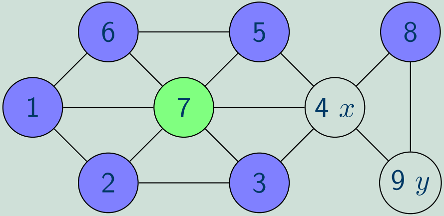




Dowód cd. Przypadek 3.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jeden z sąsiadujących wierzchołków nie ma ochroniarza. Bez straty ogólności załóżmy że ten wierzchołek to x.

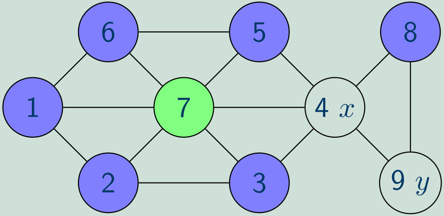
Przykład

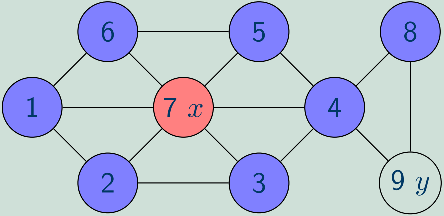


Dowód cd. Przypadek 3.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jeden z sąsiadujących wierzchołków nie ma ochroniarza. Bez straty ogólności załóżmy że ten wierzchołek to x. W takiej sytuacji ochroniarz znajdujący się na wierzchołku prezydenta przejdzie się na wierzchołek x.

Przykład

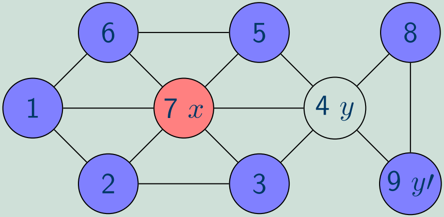




Dowód cd. Przypadek 4.

Prezydent jest na wierzchołku bez ochroniarzem oraz jeden z sąsiadujących wierzchołków nie ma ochroniarza. Bez straty ogólności załóżmy że prezydent jest na x i sąsiaduje z y. Ponieważ y nie jest liściem, istnieje wierzchołek $y\prime$ mający ochroniarza oraz sąsiadujący z y.

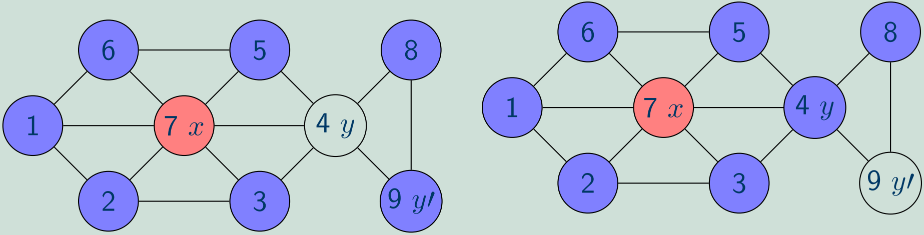
Przykład



Dowód cd. Przypadek 4.

Prezydent jest na wierzchołku bez ochroniarzem oraz jeden z sąsiadujących wierzchołków nie ma ochroniarza. Bez straty ogólności załóżmy że prezydent jest na x i sąsiaduje z y. Ponieważ y nie jest liściem, istnieje wierzchołek $y\prime$ mający ochroniarza oraz sąsiadujący z y.

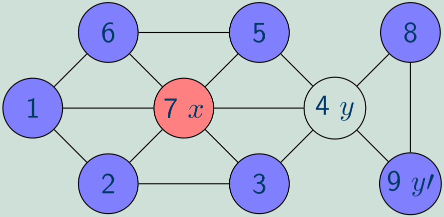
Przykład

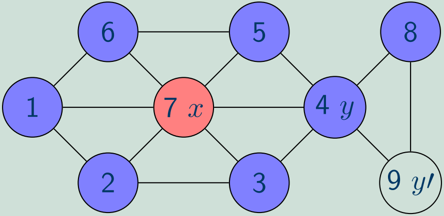


Dowód cd. Przypadek 4.

Prezydent jest na wierzchołku bez ochroniarzem oraz jeden z sąsiadujących wierzchołków nie ma ochroniarza. Bez straty ogólności załóżmy że prezydent jest na x i sąsiaduje z y. Ponieważ y nie jest liściem, istnieje wierzchołek y' mający ochroniarza oraz sąsiadujący z y. W pierwszej turze ochroniarzy, ochroniarz z y' przejdzie na y co skutkuje okrążeniem prezydenta...

Przykład

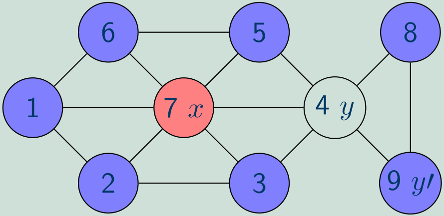


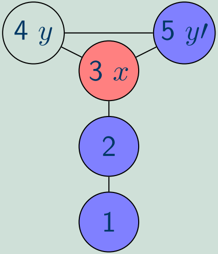


Dowód cd. Przypadek 4.

Prezydent jest na wierzchołku bez ochroniarzem oraz jeden z sąsiadujących wierzchołków nie ma ochroniarza. Bez straty ogólności załóżmy że prezydent jest na x i sąsiaduje z y. Ponieważ y nie jest liściem, istnieje wierzchołek $y\prime$ mający ochroniarza oraz sąsiadujący z y. W pierwszej turze ochroniarzy, ochroniarz z $y\prime$ przejdzie na y co skutkuje okrążeniem prezydenta... choć znalazłem inny przypadek.

Przykład

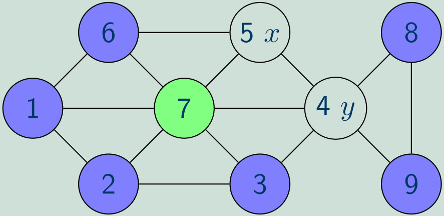




Dowód cd. Przypadek 5.1.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz oba z sąsiadujących wierzchołków nie mają ochroniarza. Załóżmy że y ma połączenie z z gdzie $z \neq x$ i nie jest to wierzchołek prezydenta.

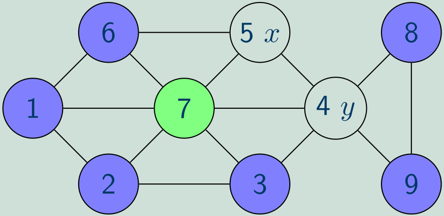
Przykład

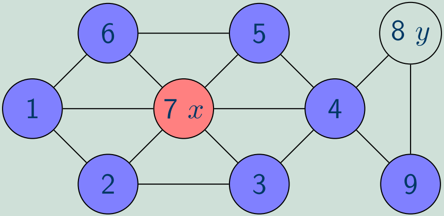


Dowód cd. Przypadek 5.1.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz oba z sąsiadujących wierzchołków nie mają ochroniarza. Załóżmy że y ma połączenie z z gdzie $z \neq x$ i nie jest to wierzchołek prezydenta. W takiej sytuacji ochroniarz na wierzchołku prezydenta może przejść na wierzchołek x, a wierzchołek y można obstawić według strategii z przypadku 4.

Przykład



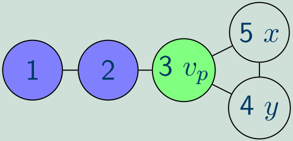


Ochroniarze i prezydent

Dowód cd. Przypadek 5.2.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz oba z sąsiadujących wierzchołków nie mają ochroniarza. Załóżmy że x ma tylko połączenie do y i do prezydenta, a y ma połączenie tylko do x i do prezydenta. Wierzchołek prezydenta oznaczamy v_p.

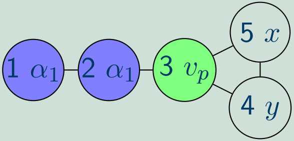
Przykład



Dowód cd. Przypadek 5.2 cd.

Niech $\alpha \notin N[v_p]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_(k-2), v_p = \alpha_{k-1}, x = \alpha_k$ będzie ścieżką zawierającą v_p.

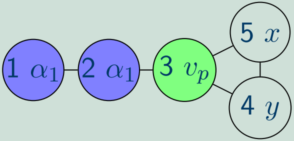
Przykład



Dowód cd. Przypadek 5.2 cd.

Niech $\alpha \notin N[v_p]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_(k-2), v_p = \alpha_{k-1}, x = \alpha_k$ będzie ścieżką zawierającą v_p. Niech b_i oznacza ochroniarza na α_i dla $1 \leqslant i \leqslant k-1$. W pierwszej turze ochroniarz b_i przejdzie z α_i na α_{i+1}. W rezultacji v_p i x mają ochroniarza, a α_1 i y nie.

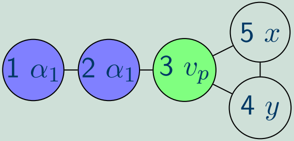
Przykład

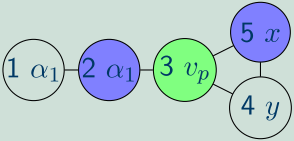


Dowód cd. Przypadek 5.2 cd.

Niech $\alpha \notin N[v_p]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_(k-2), v_p = \alpha_{k-1}, x = \alpha_k$ będzie ścieżką zawierającą v_p. Niech b_i oznacza ochroniarza na α_i dla $1 \leqslant i \leqslant k-1$. W pierwszej turze ochroniarz b_i przejdzie z α_i na α_{i+1}. W rezultacji v_p i x mają ochroniarza, a α_1 i y nie. W takiej sytuacji prezydent może wybrać pozycję v_p, x, lub y, co skutkuje okrążeniem, albo przypadkiem 3. Jeżeli prezydent wybierze inny wierzchołek, to albo będzie okrążony, albo będzie sąsiadował z α_1, skąd można przejść do przypadku 2 albo 3.

Przykład





Ochroniarze i prezydent

Dowód cd.

Ochroniarze w każdym z powyższych przypadków ustawili się w taki sposób, że nie ma wierzchołka zawierającego prezydenta i ochroniarza oraz istnieje najwyżej jeden liść bez ochroniarza, nie wliczając wierzchołka prezydenta, który może być liściem.
Dodatkowo prezydent jest otoczony.

Dowód cd.

Ochroniarze w każdym z powyższych przypadków ustawili się w taki sposób, że nie ma wierzchołka zawierającego prezydenta i ochroniarza oraz istnieje najwyżej jeden liść bez ochroniarza, nie wliczając wierzchołka prezydenta, który może być liściem.

Dodatkowo prezydent jest otoczony. W tym momencie prezydent ma 3 możliwe ruchy:

Ochroniarze i prezydent

Dowód cd.

Ochroniarze w każdym z powyższych przypadków ustawili się w taki sposób, że nie ma wierzchołka zawierającego prezydenta i ochroniarza oraz istnieje najwyżej jeden liść bez ochroniarza, nie wliczając wierzchołka prezydenta, który może być liściem.
Dodatkowo prezydent jest otoczony. W tym momencie prezydent ma 3 możliwe ruchy:

1. zostać na miejscu.

Dowód cd.

Ochroniarze w każdym z powyższych przypadków ustawili się w taki sposób, że nie ma wierzchołka zawierającego prezydenta i ochroniarza oraz istnieje najwyżej jeden liść bez ochroniarza, nie wliczając wierzchołka prezydenta, który może być liściem.
Dodatkowo prezydent jest otoczony. W tym momencie prezydent ma 3 możliwe ruchy:

1. zostać na miejscu.
2. Przejść na wierzchołek, który ma sąsiada bez ochroniarza.

Dowód cd.

Ochroniarze w każdym z powyższych przypadków ustawili się w taki sposób, że nie ma wierzchołka zawierającego prezydenta i ochroniarza oraz istnieje najwyżej jeden liść bez ochroniarza, nie wliczając wierzchołka prezydenta, który może być liściem.
Dodatkowo prezydent jest otoczony. W tym momencie prezydent ma 3 możliwe ruchy:

1. zostać na miejscu.
2. Przejść na wierzchołek, który ma sąsiada bez ochroniarza.
3. Przejść na wierzchołek, który ma 2 sąsiadów bez ochroniarza.

Dowód cd.

Ochroniarze w każdym z powyższych przypadków ustawili się w taki sposób, że nie ma wierzchołka zawierającego prezydenta i ochroniarza oraz istnieje najwyżej jeden liść bez ochroniarza, nie wliczając wierzchołka prezydenta, który może być liściem.
Dodatkowo prezydent jest otoczony. W tym momencie prezydent ma 3 możliwe ruchy:

1. zostać na miejscu.
2. Przejść na wierzchołek, który ma sąsiada bez ochroniarza.
3. Przejść na wierzchołek, który ma 2 sąsiadów bez ochroniarza.

Ochroniarze i prezydent

Dowód cd.

Ochroniarze w każdym z powyższych przypadków ustawili się w taki sposób, że nie ma wierzchołka zawierającego prezydenta i ochroniarza oraz istnieje najwyżej jeden liść bez ochroniarza, nie wliczając wierzchołka prezydenta, który może być liściem.
Dodatkowo prezydent jest otoczony. W tym momencie prezydent ma 3 możliwe ruchy:

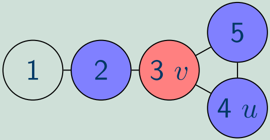
1. zostać na miejscu.
2. Przejść na wierzchołek, który ma sąsiada bez ochroniarza.
3. Przejść na wierzchołek, który ma 2 sąsiadów bez ochroniarza.

Przez v oznaczmy wierzchołek przed prezydenta, a przez u wierzchołek po ruchu prezydenta.
Jeżeli v i u to te same wierzchołki, to ochroniarze nie zmieniają swojej pozycji.

Dowód cd.

W przypadku kiedy jedynym sąsiadem u bez ochroniarza jest v, to po ruchu prezydenta ochroniarz z u przejdzie do v.

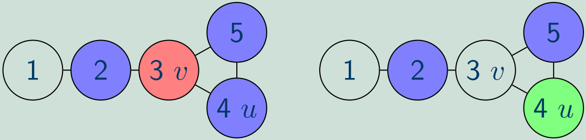
Przykład



Dowód cd.

W przypadku kiedy jedynym sąsiadem u bez ochroniarza jest v, to po ruchu prezydenta ochroniarz z u przejdzie do v.

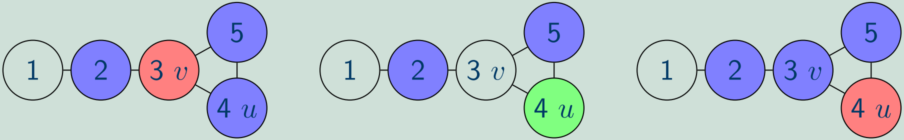
Przykład



Dowód cd.

W przypadku kiedy jedynym sąsiadem u bez ochroniarza jest v, to po ruchu prezydenta ochroniarz z u przejdzie do v.

Przykład



Dowód cd.

Ostatecznie załóżmy, że u ma sąsiada innego niż v, który nie ma ochroniarza, oznaczonego przez w.

Ochroniarze i prezydent

Dowód cd.

Ostatecznie załóżmy, że u ma sąsiada innego niż v, który nie ma ochroniarza, oznaczonego przez w. Nie jest to możliwe aby v i w jednocześnie były liśćmi. Można to udowodnić przez sprzeczność.

Dowód cd.

Ostatecznie załóżmy, że u ma sąsiada innego niż v, który nie ma ochroniarza, oznaczonego przez w. Nie jest to możliwe aby v i w jednocześnie były liśćmi. Można to udowodnić przez sprzeczność. Jeżeli prezydent znalazł by się w wierzchołku v na początku gry, to po pierwszym ruchu ochroniarzy w miałby ochroniarza.

Ochroniarze i prezydent

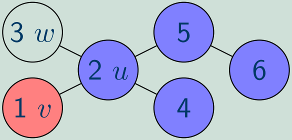
Dowód cd.

Ostatecznie załóżmy, że u ma sąsiada innego niż v, który nie ma ochroniarza, oznaczonego przez w. Nie jest to możliwe aby v i w jednocześnie były liśćmi. Można to udowodnić przez sprzeczność.
Jeżeli prezydent znalazł by się w wierzchołku v na początku gry, to po pierwszym ruchu ochroniarzy w miałby ochroniarza.
Jeżeli prezydent przeszedł z u do v podczas gry, to jedynie ochroniarz z v przeszedł do u. W takim przypadku jeżeli v i w nie mają ochroniarza, to kiedy prezydent był na u to nie był otoczony, co przeczy założeniom aktualnego stanu. Więc najwyżej jeden z v i w są liśćmi.

Dowód cd.

Ostatecznie załóżmy, że u ma sąsiada innego niż v, który nie ma ochroniarza, oznaczonego przez w. Nie jest to możliwe aby v i w jednocześnie były liśćmi. Można to udowodnić przez sprzeczność.
Jeżeli prezydent znalazł by się w wierzchołku v na początku gry, to po pierwszym ruchu ochroniarzy w miałby ochroniarza.
Jeżeli prezydent przeszedł z u do v podczas gry, to jedynie ochroniarz z v przeszedł do u. W takim przypadku jeżeli v i w nie mają ochroniarza, to kiedy prezydent był na u to nie był otoczony, co przeczy założeniom aktualnego stanu. Więc najwyżej jeden z v i w są liśćmi.

Przykład (anty)



Dowód cd.

Stąd v albo w ma jeden wierzchołek inny niż u mający ochroniarza.

Ochroniarze i prezydent

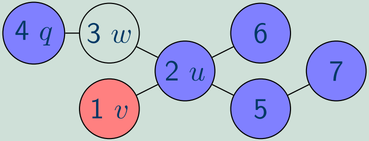
Dowód cd.

Stąd v albo w ma jeden wierzchołek inny niż u mający ochroniarza.
Skoro $\delta\left(u\right) n-1$, to bez straty ogólności można założyć, że w ma sąsiada q takiego że $q \notin N\left[u\right]$ jednocześnie posiadającego ochroniarza.

Dowód cd.

Stąd v albo w ma jeden wierzchołek inny niż u mający ochroniarza. Skoro $\delta(u)\, n-1$, to bez straty ogólności można założyć, że w ma sąsiada q takiego że $q \notin N[u]$ jednocześnie posiadającego ochroniarza. Więc jak prezydent przejdzie z v do u, to ochroniach z u przejdzie do v, a z q do w. Skoro $\delta(u) \neq 1$, to najwyżej jeden wierzchołek nie ma ochroniarza. Kończąc, nieważne jak prezydent będzie się poruszał od tego momentu, ochroniarze zawsze mogą go otoczyć. Dlatego $n-2$ ochroniarzy może wygrać z prezydentem na G gdy $\Delta(G) < n-1$.

Przykład



□

Podziękowania

Chciałbym podziękować Panu dr. inż. Janowi Cychnerskiemu za stworzenie i udostępnienie stylu *pg-beamer*, co zostało wykorzystane do stworzenia tej prezentacji.
`https://github.com/jachoo/pg-beamer`

Bibliografia I

Anthony Bonato and Richard J. Nowakowski.
The game of cops and robbers on graphs.
2011.

Andrea C. Burgess, Rosalind A. Cameron, Nancy E. Clarke, Peter Danziger, Stephen Finbow, Caleb W. Jones, and David A. Pike.
Cops that surround a robber.
Discrete Applied Mathematics, (285: 552-566), 2020.

Nancy E. Clarke, Danny Dyer, and William Kellough.
Eternally surrounding a robber.
arXiv preprint, (arXiv:2408.10452), 2024.

Pytania?

Dziękuję za uwagę!

PG

POLITECHNIKA
GDAŃSKA