POLITECHNIKA GDAŃSKA

Eternally surrounding a robber

czyli jak sprawić, aby nie było dojścia do prezydenta.

Marek Borzyszkowski

8 października 2024

Policjanci i złodziej

Gra odbywa się na grafie G między drużyną policjantów i złodziejem. Drużyna policjantów składa się z $K > 0$ policjantów, gdzie K to liczba policjantów. Policjanci i złodzieje znajdują się na wierzchołkach grafu $V(G)$.

Policjanci i złodziej

Gra odbywa się na grafie G między drużyną policjantów i złodziejem. Drużyna policjantów składa się z $K > 0$ policjantów, gdzie K to liczba policjantów. Policjanci i złodzieje znajdują się na wierzchołkach grafu $V(G)$. W grze można wyróżnić 2 fazy:

1. fazę umieszczania najpierw wszystkich policjantów, a potem złodzieja na wierzchołkach $V(G)$.
2. Fazę ruchu, która odbywa się turowo, najpierw ruszają się wszyscy policjanci, potem turę ma złodziej. Dozwolonymi ruchami są:
    1. brak zmiany wierzołka,
    2. zmiana wierzchołka na inny będący połączony krawendzią z wierzchołkiem, na którym aktualnie przebywa dana osoba.

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c(G)$.[1]

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c(G)$.[1]

Przykłady

Rysunek: $c(G) = 1$

Rysunek: $c(G) = 2$

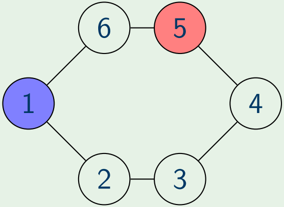
Rysunek: $c(G) = 1$

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.
Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c(G)$.[1]

Przykłady

Rysunek: $c(G) = 1$



Rysunek: $c(G) = 2$

Rysunek: $c(G) = 1$

POLITECHNIKA GDAŃSKA

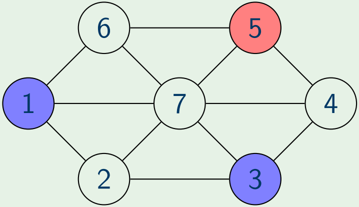
Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.
Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c(G)$.[1]

Przykłady

Rysunek: $c(G) = 1$

Rysunek: $c(G) = 2$



Rysunek: $c(G) = 1$

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant

Analogicznie do $c(G)$ w tej wariacji stosuje się $\sigma(G)$ oznaczające *liczbę policjantów wymaganych do okrążenia złodzieja w grafie* G.

Przykłady

Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 1$

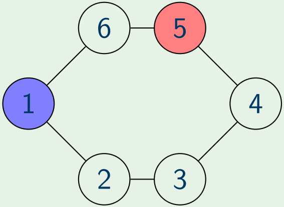
Rysunek: $c(G) = 2$, $\sigma(G) = 2$

Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 3$

Policjanci okrążający złodzieja

Przykłady

Rysunek: $c\left(G\right)=1$, $\sigma\left(G\right)=1$



Rysunek: $c\left(G\right)=2$, $\sigma\left(G\right)=2$

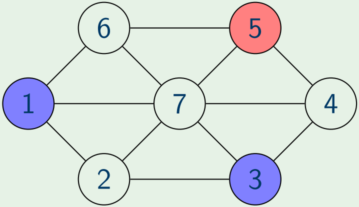
Rysunek: $c\left(G\right)=1$, $\sigma\left(G\right)=3$

Policjanci okrążający złodzieja

Przykłady

Rysunek: $c\left(G\right)=1$, $\sigma\left(G\right)=1$

Rysunek: $c\left(G\right)=2$, $\sigma\left(G\right)=2$



Rysunek: $c\left(G\right)=1$, $\sigma\left(G\right)=3$

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

Ochroniarze i prezydent

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

Analogicznie do $\sigma(G)$ w tej wariacji stosuje się $B(G)$ oznaczające *liczbę ochroniarzy wymaganych do okrążenia prezydanta i spełnienia warunków wygranej w grafie* G.

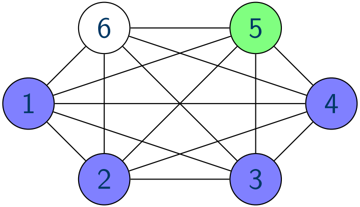
Ochroniarze i prezydent

Ciekawostka, zmiana nazwy drużyn w artykule wynika z zachowania jakie się wytwarzają podczas przebiegu gry. Zachowanie ochroniarzy (dawniej policjantów) bardziej przypomina próbę otoczenia/ochrony ważnej osobistości, poprzez ciągłe obsadzenie wszelkich dróg dojścia do tej osobistości

Rysunek: Przykład wizualizacji gry

Ochroniarze i prezydent

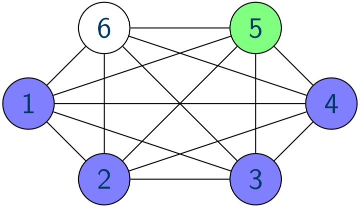
Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...



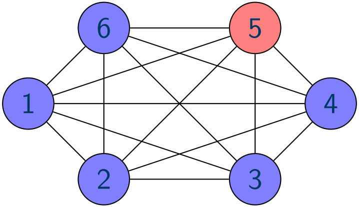
Rysunek: Prezydent zaczynająca na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)

Ochroniarze i prezydent

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...



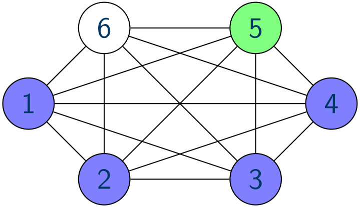
Rysunek: Prezydent zaczynająca na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



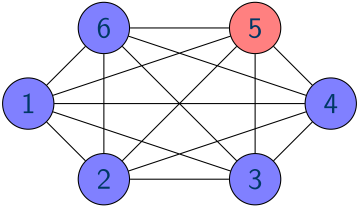
Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Ochroniarze i prezydent

Dla grafu G o n wierzchołkach $B\left(G\right) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem... lub bez.



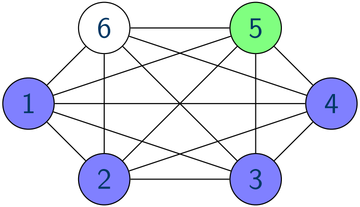
Rysunek: Prezydent zaczynająca na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



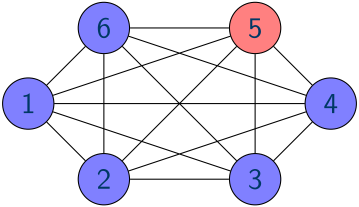
Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Ochroniarze i prezydent

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem... lub bez.



Rysunek: Prezydent zaczynająca na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Jak widać po powyższym przykładzie, grę można podzielić na 2 fazy, okrążenia i utrzymania okrążenia

Ochroniarze i prezydent

Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Ochroniarze i prezydent

Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Dowód.

Jeżeli prezydent stoi na wierzchołku o największym stopniu, ochroniarze nie mogą wygrać nie okrążając prezydent na tym wierzchołku. $\square$

Ochroniarze i prezydent

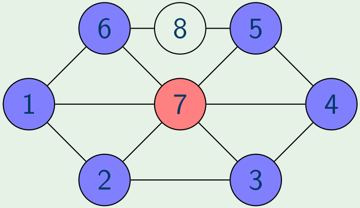
Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Dowód.

Jeżeli prezydent stoi na wierzchołku o największym stopniu, ochroniarze nie mogą wygrać nie okrążając prezydent na tym wierzchołku. □

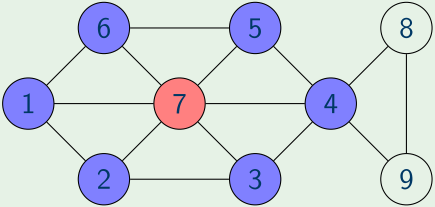
Przykłady

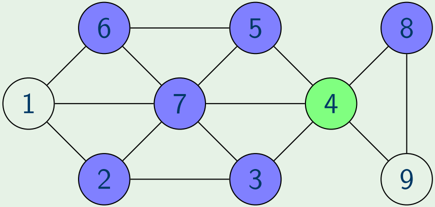


Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Przykłady



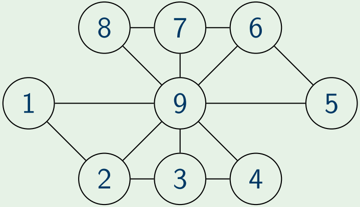


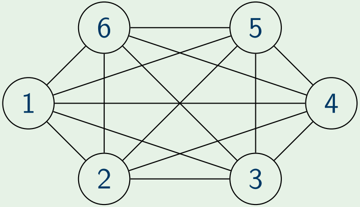
Ochroniarze i prezydent

Twierdzenie

Dla każdego grafu G na n wierzchołkach, $B(G) = n - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(G) = n - 1$.

Przykłady





Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geqslant \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.

Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geqslant \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.

Założmy że $\Delta(G) < n - 1$.

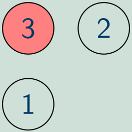
Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geqslant \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.
Załóżmy że $\Delta(G) < n - 1$.
Dla $n \leqslant 3$ G jest izomorficzne do E_n, P_2, P_3 albo C_3. $B(E_n) = 0$, gdyż wierzchołki nie są połączone. Można łatwo zauważyć, że $B(P_2) = 1$, $B(P_3) = B(C_3) = 2$.

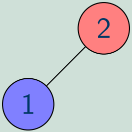
Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geqslant \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.
Załóżmy że $\Delta(G) < n - 1$.
Dla $n \leqslant 3$ G jest izomorficzne do E_n, P_2, P_3 albo C_3. $B(E_n) = 0$, gdyż wierzchołki nie są połączone. Można łatwo zauważyć, że $B(P_2) = 1$, $B(P_3) = B(C_3) = 2$.

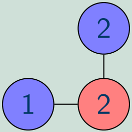
Przykłady



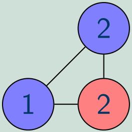
Rysunek: E_n



Rysunek: P_2



Rysunek: P_3



Rysunek: C_2

Ochroniarze i prezydent

Bibliografia I

Anthony Bonato and Richard J. Nowakowski.
The game of cops and robbers on graphs.
2011.

Andrea C. Burgess, Rosalind A. Cameron, Nancy E. Clarke, Peter Danziger, Stephen Finbow, Caleb W. Jones, and David A. Pike.
Cops that surround a robber.
Discrete Applied Mathematics, (285: 552-566), 2020.

Nancy E. Clarke, Danny Dyer, and William Kellough.
Eternally surrounding a robber.
arXiv preprint, (arXiv:2408.10452), 2024.

POLITECHNIKA
GDAŃSKA