



Eternally surrounding a robber
czyli jak sprawić, aby nie było dojścia do prezydenta.

Marek Borzyszkowski

8 października 2024



Gra odbywa się na grafie G między drużyną policjantów i złodziejem. Drużyna policjantów składa się z $K > 0$ policjantów, gdzie K to liczba policjantów. Policjanci i złodzieje znajdują się na wierzchołkach grafu $V(G)$.



Gra odbywa się na grafie G między drużyną policjantów i złodziejem. Drużyna policjantów składa się z $K > 0$ policjantów, gdzie K to liczba policjantów. Policjanci i złodzieje znajdują się na wierzchołkach grafu $V(G)$. W grze można wyróżnić 2 fazy:

1. fazę umieszczania najpierw wszystkich policjantów, a potem złodzieja na wierzchołkach $V(G)$.
2. Fazę ruchu, która odbywa się turowo, najpierw ruszają się wszyscy policjanci, potem turę ma złodziej. Dozwolonymi ruchami są:
 1. brak zmiany wierzchołka,
 2. zmiana wierzchołka na inny będący połączony krawędzią z wierzchołkiem, na którym aktualnie przebywa dana osoba.



Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.



Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G , liczbę tę oznacza się przez $c(G)$. [1]

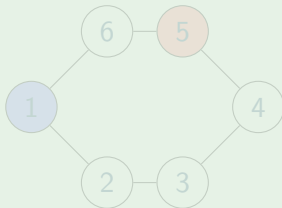
Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G , liczbę tę oznacza się przez $c(G)$. [1]

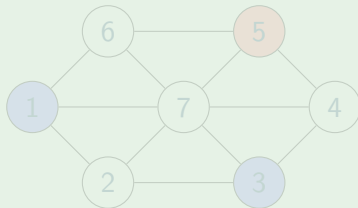
Przykłady



Rysunek:
 $c(G) = 1$



Rysunek: $c(G) = 2$



Rysunek: $c(G) = 1$

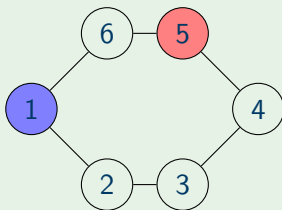
Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G , liczbę tę oznacza się przez $c(G)$. [1]

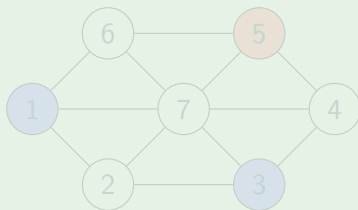
Przykłady



Rysunek:
 $c(G) = 1$



Rysunek: $c(G) = 2$



Rysunek: $c(G) = 1$

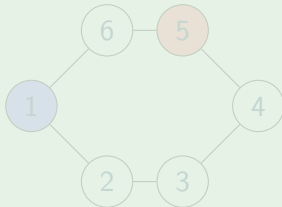
Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G , liczbę tę oznacza się przez $c(G)$. [1]

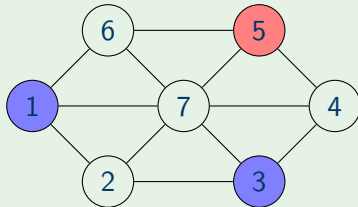
Przykłady



Rysunek:
 $c(G) = 1$



Rysunek: $c(G) = 2$



Rysunek: $c(G) = 1$



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany względem oryginału są następujące:



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany względem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany względem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany względem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany względem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany względem oryginału są następujące:

1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany względem oryginału są następujące:

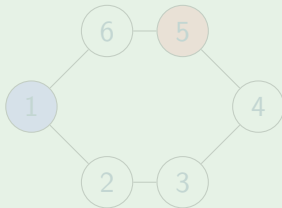
1. policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
4. Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant

Analogicznie do $c(G)$ w tej wariacji stosuje się $\sigma(G)$ oznaczające *liczbę policjantów wymaganych do okrążenia złodzieja w grafie G* .

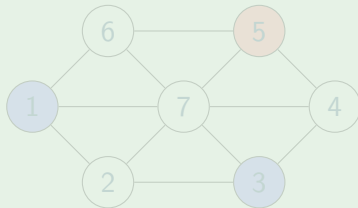
Przykłady



Rysunek:
 $c(G) = 1$,
 $\sigma(G) = 1$



Rysunek: $c(G) = 2$,
 $\sigma(G) = 2$

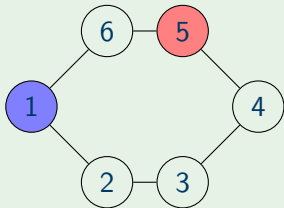


Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 3$

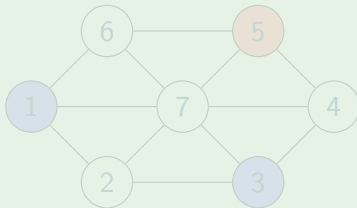
Przykłady



Rysunek:
 $c(G) = 1$,
 $\sigma(G) = 1$



Rysunek: $c(G) = 2$,
 $\sigma(G) = 2$

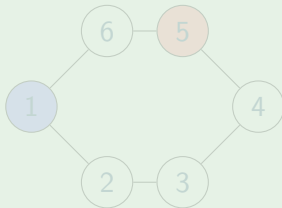


Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 3$

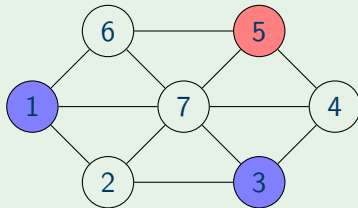
Przykłady



Rysunek:
 $c(G) = 1$,
 $\sigma(G) = 1$



Rysunek: $c(G) = 2$,
 $\sigma(G) = 2$



Rysunek: $c(G) = 1$, $\sigma(G) = 3$



Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany względem poprzednika są następujące:



Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany względem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.



Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany względem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.



Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany względem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.



Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany względem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.



Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany względem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.



Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany względem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
2. Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
4. Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

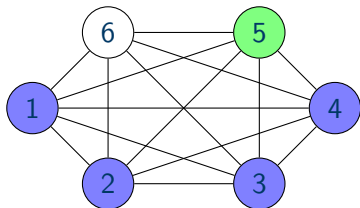
Analogicznie do $\sigma(G)$ w tej wariacji stosuje się $B(G)$ oznaczające *liczbę ochroniarzy wymaganych do okrążenia prezydanta i spełnienia warunków wygranej w grafie G .*

Ciekawostka, zmiana nazwy drużyn w artykule wynika z zachowania jakie się wytwarzają podczas przebiegu gry. Zachowanie ochroniarzy (dawniej policjantów) bardziej przypomina próbę otoczenia/ochrony ważnej osoby, poprzez ciągłe obsadzenie wszelkich dróg dojścia do tej osoby



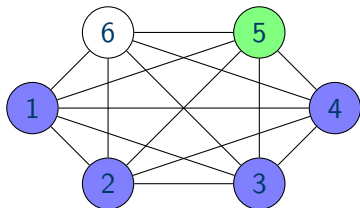
Rysunek: Przykład wizualizacji gry

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzchołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem. . .

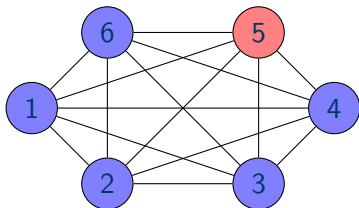


Rysunek: Prezydent zaczynający na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzchołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...

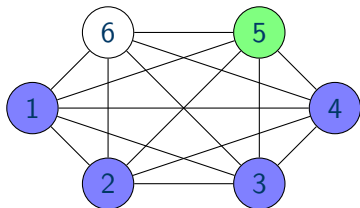


Rysunek: Prezydent zaczynający na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)

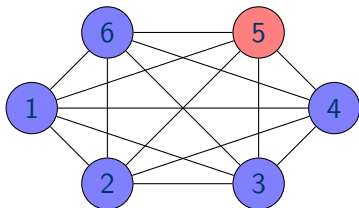


Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzchołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem... lub bez.

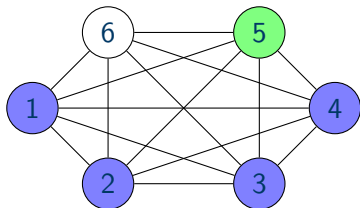


Rysunek: Prezydent zaczynający na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)

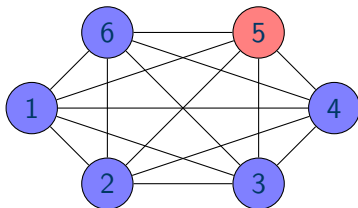


Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Dla grafu G o n wierzchołkach $B(G) = n - 1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują $n - 1$ wierzchołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem... lub bez.



Rysunek: Prezydent zaczynający na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Jak widać po powyższym przykładzie, grę można podzielić na 2 fazy, okrążenia i utrzymania okrążenia



Lemat

Dla każdego grafu G , $B(G) \geq \Delta(G)$.



Lemat

Dla każdego grafu G , $B(G) \geq \Delta(G)$.

Dowód.

Jeżeli prezydent stoi na wierzchołku o największym stopniu, ochroniarze nie mogą wygrać nie okrążając prezydenta na tym wierzchołku. ☐

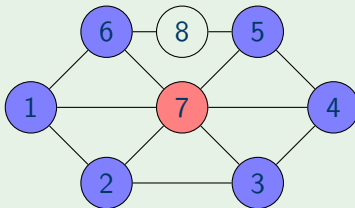
Lemat

Dla każdego grafu G , $B(G) \geq \Delta(G)$.

Dowód.

Jeżeli prezydent stoi na wierzchołku o największym stopniu, ochroniarze nie mogą wygrać nie okrążając prezydenta na tym wierzchołku. ☐

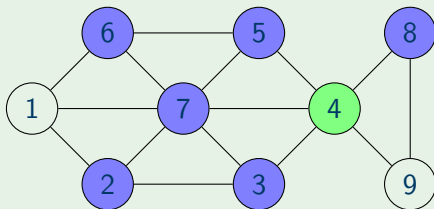
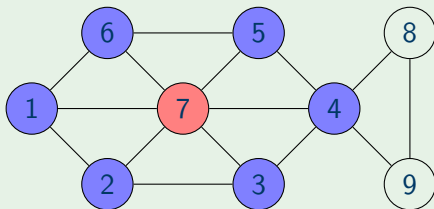
Przykłady



Lemat

Dla każdego grafu G , $B(G) \geq \Delta(G)$.

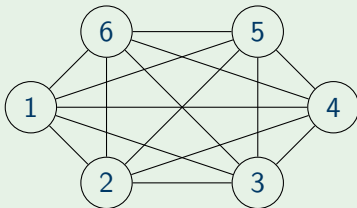
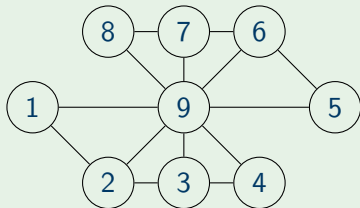
Przykłady



Twierdzenie

Dla każdego grafu G na n wierzchołkach, $B(G) = n - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(G) = n - 1$.

Przykłady





Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geq \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.



Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geq \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.

Założmy że $\Delta(G) < n - 1$.



Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geq \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.

Założmy że $\Delta(G) < n - 1$.

Dla $n \leq 3$ G jest izomorficzne do E_n , P_2 , P_3 albo C_3 . $B(E_n) = 0$, gdyż wierzchołki nie są połączone. Można łatwo zauważyć, że $B(P_2) = 1$, $B(P_3) = B(C_3) = 2$.

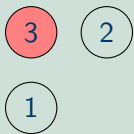
Dowód.

Jeżeli $\Delta(G) = n - 1$ to z lematu $B(G) \geq \Delta(G)$ oraz $B(G) = n - 1$, to $B(G) = n - 1$.

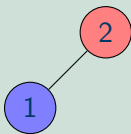
Założmy że $\Delta(G) < n - 1$.

Dla $n \leq 3$ G jest izomorficzne do E_n , P_2 , P_3 albo C_3 . $B(E_n) = 0$, gdyż wierzchołki nie są połączone. Można łatwo zauważyć, że $B(P_2) = 1$, $B(P_3) = B(C_3) = 2$.

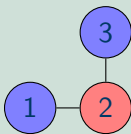
Przykłady



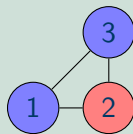
Rysunek: E_n



Rysunek: P_2



Rysunek: P_3



Rysunek: C_2



Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geq 4$.



Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geq 4$.

Założmy że jest $n - 2$ ochroniarzy. Zaczniemy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G . G może mieć najwyżej $n - 2$ liści, gdyż dla $n - 1$ liści $\Delta(G) = n - 1$.



Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geq 4$.

Założmy że jest $n - 2$ ochroniarzy. Zaczniemy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G . G może mieć najwyżej $n - 2$ liści, gdyż dla $n - 1$ liści $\Delta(G) = n - 1$.

Następnie ustawmy resztę ochroniarzy tak, że jest co najwyżej 1 ochroniarz na każdym z wierzchołków. W takim ustawieniu zostały 2 wierzchołki bez ochroniarzy x i y .



Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geq 4$.

Założmy że jest $n - 2$ ochroniarzy. Zaczniemy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G . G może mieć najwyżej $n - 2$ liści, gdyż dla $n - 1$ liści $\Delta(G) = n - 1$.

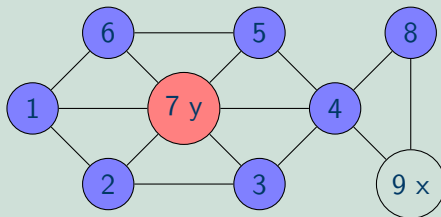
Następnie ustawmy resztę ochroniarzy tak, że jest co najwyżej 1 ochroniarz na każdym z wierzchołków. W takim ustawieniu zostały 2 wierzchołki bez ochroniarzy x i y .

Od tego momentu jest 5 przypadków ustawienia prezydenta.

Dowód cd. Przypadek 1.

Prezydent jest na wierzchołku otoczonym przez ochroniarzy. Jest to docelowa sytuacja ochroniarzy, w pierwszym ruchu każdy zostanie na swojej pozycji.

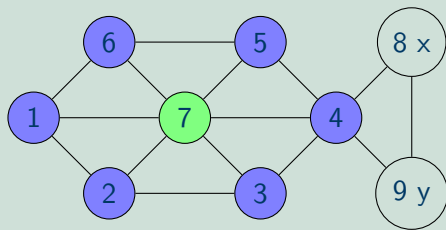
Przykład



Dowód cd. Przypadek 2.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jest otoczona przez ochroniarzy.

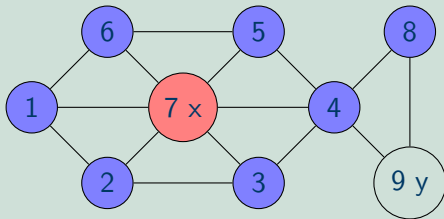
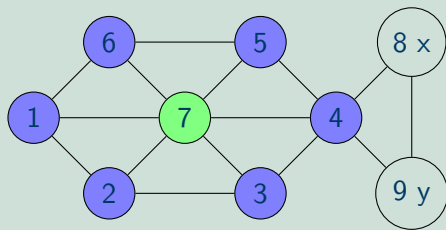
Przykład



Dowód cd. Przypadek 2.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jest otoczona przez ochroniarzy. W takiej sytuacji istnieje ścieżka v_1, v_2, \dots, v_n w G , że v_1 jest okupowane przez prezydenta, a $v_n = x$. Niech b_i oznacza ochroniarza na v_i . Podczas pierwszej tury ochroniarzy, ochroniarze b_i dla $1 \leq i \leq n-1$ przejdą z v_i na v_{i+1} .

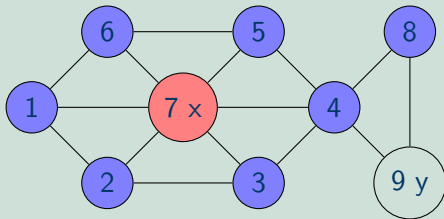
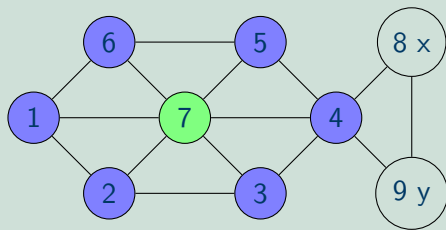
Przykład



Dowód cd. Przypadek 2.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jest otoczona przez ochroniarzy. W takiej sytuacji istnieje ścieżka v_1, v_2, \dots, v_n w G , że v_1 jest okupowane przez prezydenta, a $v_n = x$. Niech b_i oznacza ochroniarza na v_i . Podczas pierwszej tury ochroniarzy, ochroniarze b_i dla $1 \leq i \leq n-1$ przejdą z v_i na v_{i+1} . Wynikiem tego działania jest otoczenie prezydenta bez ochroniarza na jej wierzchołku.

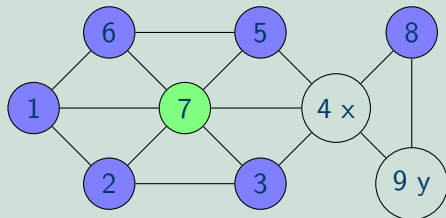
Przykład



Dowód cd. Przypadek 3.

Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jeden z sąsiadujących wierzchołków nie ma ochroniarza. Bez straty ogólności załóżmy że ten wierzchołek to x .

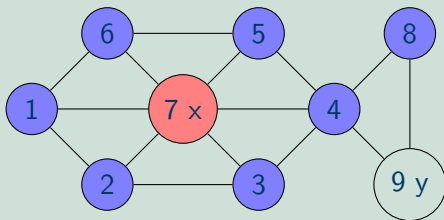
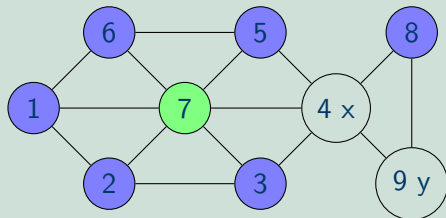
Przykład





Dowód cd. Przypadek 3.


Prezydent jest na wierzchołku z ochroniarzem oraz jeden z sąsiadujących wierzchołków nie ma ochroniarza. Bez straty ogólności założmy że ten wierzchołek to x . W takiej sytuacji ochroniarz znajdujący się na wierzchołku prezydenta przejdzie się na wierzchołek x .

Przykład



 Anthony Bonato and Richard J. Nowakowski.
The game of cops and robbers on graphs.
2011.

 Andrea C. Burgess, Rosalind A. Cameron, Nancy E. Clarke, Peter Danziger, Stephen Finbow, Caleb W. Jones, and David A. Pike.
Cops that surround a robber.
Discrete Applied Mathematics, (285: 552-566), 2020.

 Nancy E. Clarke, Danny Dyer, and William Kellough.
Eternally surrounding a robber.
arXiv preprint, (arXiv:2408.10452), 2024.



**POLITECHNIKA
GDAŃSKA**