

Eternally surrounding a robber czyli jak sprawić, aby nie było dojścia do prezydenta.

Marek Borzyszkowski

8 października 2024

Policjanci i złodziej

Gra odbywa się na grafie G między drużyną policjantów i złodziejem. Drużyna policjantów składa się z K>0 policjantów, gdzie K to liczba policjantów. Policjanci i złodzieje znajdują się na wierzchołkach grafu $V\left(G\right)$.

Policjanci i złodziej

Gra odbywa się na grafie G między drużyną policjantów i złodziejem. Drużyna policjantów składa się z K>0 policjantów, gdzie K to liczba policjantów. Policjanci i złodzieje znajdują się na wierzchołkach grafu $V\left(G\right)$. W grze można wyróżnić 2 fazy:

- 1. fazę umieszczania najpierw wszystkich policjantów, a potem złodzieja na wierzchołkach $V\left(G\right)$.
- 2. Fazę ruchu, która odbywa się turowo, najpierw ruszają się wszyscy policjanci, potem turę ma złodziej. Dozwolonymi ruchami są:
 - 1. brak zmiany wierzołka,
 - 2. zmiana wierzchołka na inny będący połączony krawendzią z wierzchołkiem, na którym aktualnie przebywa dana osoba.



Celem policiantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.



POLITECHNIKA GDAŃSKA

Policjanci i złodziej

Celem policjantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez $c\left(G\right).[1]$



Celem policiantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez c(G).[1]

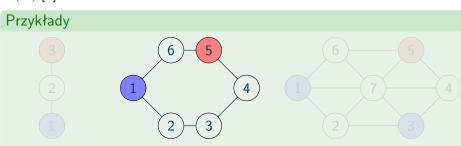
Przykłady

Rysunek: c(G) = 1



Celem policiantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez c(G).[1]

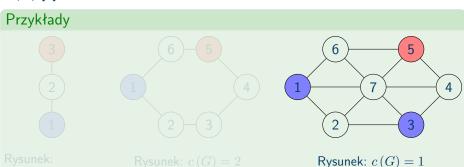


Rysunek: c(G) = 2



Celem policiantów jest znalezienie się conajmniej jednego z nich na wierzchołku gdzie przebywa złodziej na końcu swojej tury, natomiast złodzieja nie doprowadzić do tej sytuacji.

Liczba policjantów grafu G to minimalna wymagana liczba policjantów potrzebnych aby złapać złodzieja w grafie G, liczbę tę oznacza się przez c(G).[1]





POLITECHNIKA | Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:



POLITECHNIKA GDAŃSKA

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

 policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.



POLITECHNIKA GDAŃSKA

Policjanci okrążający złodzieja

Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

- policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
- 2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja. [2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

- policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
- 2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
- 3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

- policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
- 2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
- 3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
- Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja.[2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

- policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
- 2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
- 3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
- Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant



Wariacją na temat policjantów i złodzieja są policjanci okrążający złodzieja. [2] Zmiany wzgędem oryginału są następujące:

- policjanci wygrywają w momencie okrążenia złodzieja w skończonej liczbie ruchów, czyli kiedy znajdują się na każdym wierzchołku połączonym krawędzią z wierzchołkiem na którym aktualnie jest złodziej.
- 2. Złodziej nie przegrywa, kiedy znajdzie się na tym samym wierzchołku co jeden z policjantów.
- 3. Złodziej nie może wejść na wierzchołek okupowany przez policjanta.
- Jeżeli złodziej będzie na tym samym wierzchołku co policjant, musi w swoim ruchu przejść na wierzchołek na którym nie znajduje się policjant

Analogicznie do $c\left(G\right)$ w tej wariacji stosuje się $\sigma\left(G\right)$ oznaczające liczbę policjantów wymaganych do okrążenia złodzieja w grafie G.



Przykłady



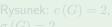


Rysunek:

$$c(G) = 1$$

c(G) = 1, $\sigma(G) = 1$









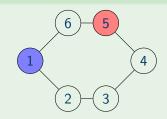
Rysunek:
$$c(G) = 1$$
, $\sigma(G) = 3$

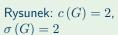


Przykłady











Rysunek:
$$c(G) = 1$$
, $\sigma(G) = 3$



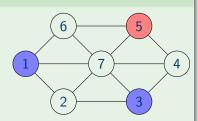
Przykłady



Rysunek: c(G) = 1 $\sigma(G) = 1$



Rysunek: c(G) = 2, $\sigma(G) = 2$



Rysunek: $c\left(G\right)=1$, $\sigma\left(G\right)=3$





Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.

- 1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
- Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.

- 1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
- Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
- 3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.

- 1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
- Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
- 3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
- **4.** Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

- 1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
- Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
- 3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
- **4.** Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

Wariacją na temat policjantów okrążających złodzieja są ochroniarze i prezydent.[3] Zmiany wzgędem poprzednika są następujące:

- 1. policjanci to ochroniarze, złodziej to prezydent.
- Ochroniarze wygrywają w momencie okrążenia prezydenta w skończonej liczbie ruchów i utrzymaniu tego stanu na końcu każdej kolejnej swojej tury.
- 3. Prezydent może wejść na wierzchołek okupowany przez ochroniarza.
- **4.** Ochroniarzy może być 0. Taka sytuacja występuje tylko w grafie pustym.

Analogicznie do $\sigma(G)$ w tej wariacji stosuje się B(G) oznaczające liczbę ochroniarzy wymaganych do okrążenia prezydanta i spełnienia warunków wygranej w grafie G.

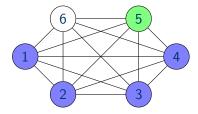


Ciekawostka, zmiana nazwy drużyn w artykule wynika z zachowania jakie się wytwarzają podczas przebiegu gry. Zachowanie ochroniarzy (dawniej policjantów) bardziej przypomina próbę otoczenia/ochrony ważnej osobistości, poprzez ciągłe obsadzenie wszelkich dróg dojścia do tej osobistości



Rysunek: Przykład wizualizacji gry

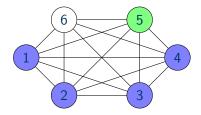
Dla grafu G o n wierzchołkach $B\left(G\right)=n-1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują n-1 wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...



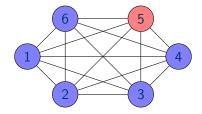
Rysunek: Prezydent zaczynająca na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



Dla grafu G o n wierzchołkach $B\left(G\right)=n-1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują n-1 wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...



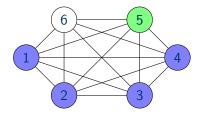
Rysunek: Prezydent zaczynająca na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



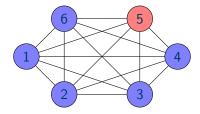
Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy



Dla grafu G o n wierzchołkach $B\left(G\right)=n-1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują n-1 wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...lub bez.



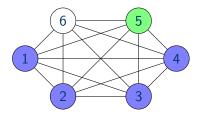
Rysunek: Prezydent zaczynająca na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



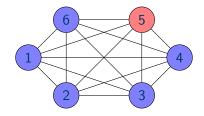
Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy



Dla grafu G o n wierzchołkach $B\left(G\right)=n-1$. W takiej sytuacji przy rozstawianiu ochroniarze już okupują n-1 wierzołków. Prezydent ma wtedy dwie opcje, wybrać wierzchołek z ochroniarzem...lub bez.



Rysunek: Prezydent zaczynająca na wierzchołku ochroniarza (kolor zielony)



Rysunek: Po pierwszym ruchu ochroniarzy

Jak widać po powyższym przykładzie, grę można podzielić na 2 fazy, okrążenia i utrzymania okrążenia



Lemat

Dla każdego grafu $G, B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Dowód.

Jeżeli prezydent stoi na wierzchołku o największym stopniu, ochroniarze nie mogą wygrać nie okrążając prezydent na tym wierzchołku.



Lemat

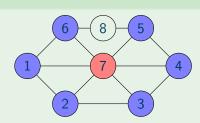
Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

Dowód.

Jeżeli prezydent stoi na wierzchołku o największym stopniu, ochroniarze nie mogą wygrać nie okrążając prezydent na tym wierzchołku.

Przykłady

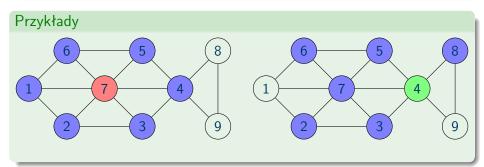






Lemat

Dla każdego grafu G, $B(G) \geqslant \Delta(G)$.

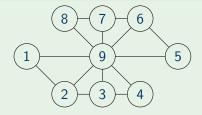


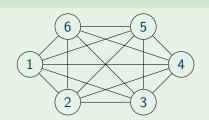


Twierdzenie

Dla każdego grafu G na n wierzchołkach, $B\left(G\right)=n-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta\left(G\right)=n-1$.

Przykłady





Dowód.

Jeżeli
$$\Delta\left(G\right)=n-1$$
 to z lematu $B\left(G\right)\geqslant\Delta\left(G\right)$ oraz $B\left(G\right)=n-1$, to $B\left(G\right)=n-1$.

Dowód.

Jeżeli
$$\Delta\left(G\right)=n-1$$
 to z lematu $B\left(G\right)\geqslant\Delta\left(G\right)$ oraz $B\left(G\right)=n-1$, to $B\left(G\right)=n-1$.

Załóżmy że $\Delta(G) < n-1$.

Dowód.

Jeżeli
$$\Delta\left(G\right)=n-1$$
 to z lematu $B\left(G\right)\geqslant\Delta\left(G\right)$ oraz $B\left(G\right)=n-1$, to $B\left(G\right)=n-1$.

Załóżmy że $\Delta\left(G\right) < n-1$.

Dla $n \leq 3$ G jest izomorficzne do E_n , P_2 , P_3 albo C_3 . $B(E_n) = 0$, gdyż wierzchołki nie są połączone. Można łatwo zauważyć, że $B(P_2) = 1$, $B(P_3) = B(C_3) = 2$.



Dowód.

Jeżeli $\Delta\left(G\right)=n-1$ to z lematu $B\left(G\right)\geqslant\Delta\left(G\right)$ oraz $B\left(G\right)=n-1$, to $B\left(G\right)=n-1$.

Załóżmy że $\Delta\left(G\right) < n-1$.

Dla $n\leqslant 3$ G jest izomorficzne do E_n , P_2 , P_3 albo C_3 . $B\left(E_n\right)=0$, gdyż wierzchołki nie są połączone. Można łatwo zauważyć, że $B\left(P_2\right)=1$, $B\left(P_3\right)=B\left(C_3\right)=2$.

Przykłady







Rysunek: P_2



Rysunek: P_3



Rysunek: C_2



Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \ge 4$.

Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geqslant 4$.

Załóżmy że jest n-2 ochroniarzy. Zacznijmy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G. G może mieć najwyżej n-2 liści, gdyż dla n-1 liści $\Delta\left(G\right)=n-1.$

Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geqslant 4$.

Załóżmy że jest n-2 ochroniarzy. Zacznijmy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G. G może mieć najwyżej n-2 liści, gdyż dla n-1 liści $\Delta\left(G\right)=n-1.$

Następnie ustawmy resztę ochroniarzy tak, że jest co najwyżej 1 ochroniarz na każdym z wierzchołków. W takim ustawieniu zostały 2 wierzchołki bez ochroniarzy x i y.

Dowód cd.

Od teraz zakładamy że $n \geqslant 4$.

Załóżmy że jest n-2 ochroniarzy. Zacznijmy od ustawienia po ochroniarzu na każdym z liści na G. G może mieć najwyżej n-2 liści, gdyż dla n-1 liści $\Delta\left(G\right)=n-1.$

Następnie ustawmy resztę ochroniarzy tak, że jest co najwyżej 1 ochroniarz na każdym z wierzchołków. W takim ustawieniu zostały 2 wierzchołki bez ochroniarzy x i y.

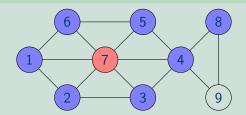
Od tego momentu jest 5 przypadków ustawienia prezydent.



Dowód cd. Przypadek 1.

Prezydent jest na wierzchołku otoczonym przez ochroniarzy. Jest to docelowa sytuacja ochroniarzy, w pierwszym ruchu każdy zostanie na swojej pozycji.

Przykład





Bibliografia I

- Anthony Bonato and Richard J. Nowakowski. The game of cops and robbers on graphs. 2011.
- Andrea C. Burgess, Rosalind A. Cameron, Nancy E. Clarke, Peter Danziger, Stephen Finbow, Caleb W. Jones, and David A. Pike. Cops that surround a robber.
 - Discrete Applied Mathematics, (285: 552-566), 2020.
- Nancy E. Clarke, Danny Dyer, and William Kellough. Eternally surrounding a robber. arXiv preprint, (arXiv:2408.10452), 2024.



POLITECHNIKA GDAŃSKA