Technische Universität München

Mathematik-Vorkurs

2022w

Dr. Michael Luttenberger – Jeremias Bohn – Julian Geheeb

Blatt 4

Aufgaben

110
114

kgV $2\cdot 5\cdot 11\cdot 3\cdot 19 = 6270$

ggT 2

4.1 Primfaktorzerlegung

Gegeben seien die Zahlen

$$110, \quad 111, \quad 112, \quad 113, \quad 114, \quad 115$$

$2\cdot 5\cdot 11$ $\quad 37\cdot 3$ $\quad 2^4\cdot 7$ $\quad 113$ $\quad 2\cdot 3\cdot 19$ $\quad 5\cdot 23$

(a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen.

(b) Bestimmen Sie für jedes Paar von Zahlen das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) und größten gemeinsamen Teiler (ggT).

4.2 Primzahlen

Widerspruchsbeweis

Sei $n \in \mathbb{N}$. Warum gilt $n \in \mathbb{P}$, falls n von keiner Primzahl $p \le \sqrt{n}$ geteilt wird?

4.3 Zahl der primen Teiler

Warum hat jedes $n \in \mathbb{N}$ höchstens $\log_2(n)$ viele Primzahlen als Teiler?

Tipp: Logarithmengesetze

$\log_a b\cdot c = \log_a b + \log_a c$

$\log_a b^c = c\cdot \log_a b$

4.4 Primzahlsatz

Sei $\pi(x) := |\{p \in \mathbb{P} \mid p \le x\}|$ für $x \in \mathbb{R}$ die Zahl der Primzahlen kleiner-gleich x.
Man kann zeigen, dass ab $x \ge 55$ gilt:

$$\frac{x}{2+\ln(x)} < \pi(x) < \frac{x}{-4+\ln(x)}$$

Tabellieren Sie $\pi(x)$ für $55 \le x \le 100$ und vergleichen Sie den genauen Wert mit den beiden Schranken.

Verwenden Sie hierfür z.B. die OEIS-Tabelle der ersten Primzahl.

Alternativ verwenden Sie folgendes **sehr** primitives Primzahlsieb (wieder z.B. mittels `https://www.python.org/`):

```
>>> import math
>>> is_prime = [True for i in range(101)]
>>> is_prime[0] = False
>>> is_prime[1] = False
>>> for i in range(3,101):
...   for j in range(2,int(math.sqrt(i))+1):
...     if is_prime[j] and i % j == 0:
...       is_prime[i] = False
...       break
>>> primes = [i for i in range(101) if is_prime[i]]
```

4.2)

Primzahlen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Warum gilt $n \in \mathbb{P}$, falls n von keiner Primzahl $p \le \sqrt{n}$ geteilt wird?

Widerspruchsbeweis

$\exists p \in \mathbb{P} : p \mid n \;\; p \le \sqrt{n} \iff n \notin \mathbb{P}$

$\nexists p \in \mathbb{P} : p \mid n \;\; p \le \sqrt{n} \iff n \in \mathbb{P}$

$n \notin \mathbb{P} \quad p, q > \sqrt{n}$

p, q ... maximal

$n = p \cdot q > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$

$n > \sqrt{n}^2$

$n > n$ Widerspruch

$n \in \mathbb{P}$

$\sum \quad \prod$ Produkt

4.3)

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P} : p \mid n} p^{v_p(n)}$$

$\log_b a \cdot c = \log_b a + \log_b c$ ✓

$$\log_2 n = \log_2 \left(\prod_{p \in \mathbb{P} : p \mid n} p^{v_p(n)} \right)$$

$$= \sum_{p \in \mathbb{P} : p \mid n} \log_2 p^{v_p(n)}$$

$\log_c a^b = b \cdot \log_c a$ ✓

$$= \sum_{p \in \mathbb{P} : p \mid n} \left(v_p(n) \underbrace{\log_2(p)}_{\ge 1} \right)$$

$$\ge \sum_{p \in \mathbb{P} : p \mid n} v_p(n)$$

← wie oft

↑ welche Teiler

$\hat{=}$ Anzahl Primfaktoren-faktoren

$$\log_2 n \ge \sum_{p \in \mathbb{P} : p \mid n} v_p(n)$$

$m = p \cdot a$ $\quad 2 \equiv$

$n = p \cdot b$ $\quad 4 \equiv$

4.5 $\equiv_n$

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 2$.

- Geben Sie konkrete Werte für m, n an, so dass $\equiv_m \cap \equiv_n \neq \equiv_{mn}$.
- Zeigen Sie: Falls $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$, dann $\equiv_m \cap \equiv_n = \equiv_{mn}$.

0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

4.6 Körper

Algebraische Struktur

$(K, +, \cdot)$

$K \times K \to K$

Man nennt allgemein eine nicht-leere Menge K, auf der zwei Operationen $+ : K \times K \to K$ (Addition) und $\cdot : K \times K \to K$ (Multiplikation) definiert sind, einen **Körper** (engl.: *field*), falls alle folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$x + y = 0$ ← add. Neutrales

$0 \cdot y = 1$ $\quad x \cdot y = 1$ ← mult. Neutrales

- Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$. Kommutativität
- Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$ und $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Assoziativität
- Es gibt $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$ und für alle $x \in K$ gilt $x + 0 = x = 0 + x$ und $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$. Neutrales
- Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $y \in K$ mit $x + y = 0$. Für dieses y schreibt man auch $-x$. Zu jedem $x \in K \setminus \{0\}$ gibt es ein $y \in K$ mit $x \cdot y = 1$. Für dieses y schreibt man auch x^{-1}. Inverse

  Nullelement hat kein multipl. Inverses!

$A, B \in K^{m \times n}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

- Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

  Distributivität $\quad \oplus\ b = 0 \quad \odot\ b = 1$

(a) Definieren Sie auf $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ so eine Addition und Multiplikation, dass es sich um einen Körper handelt.

(b) Überprüfen Sie, dass $\mathbb{Z}_3 := \{0, 1, 2\}$ mit der Addition $x +_3 y := (x + y) \bmod 3$ und Multiplikation $x \cdot_3 y := (x \cdot y) \bmod 3$ ein Körper ist.

$3 \bmod 3 = 0$

> **Erinnerung**: $x \bmod 3$ bezeichnet den nicht-negativen, ganzzahligen Rest, wenn man $x \in \mathbb{Z}$ durch 3 teilt. Also $7 \bmod 3 = 1$, aber auch $-2 \bmod 3 = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass in jedem Körper gilt: Falls $a \cdot b = 0$, dann $a = 0$ oder $b = 0$, wobei 0 das neutrale Element bzgl. der Addition $+$ ist.

$a, b \neq 0 \Rightarrow a^{-1}, b^{-1}$ $\quad a \cdot a^{-1} = 1 \quad b \cdot b^{-1} = 1$

$1 = 1 \cdot 1 = (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) = (a \cdot b)(a^{-1} \cdot b^{-1}) = 0(a^{-1} \cdot b^{-1}) = 0$ ↯

muss gelten $0 \neq 1$ $\quad$ Widerspruch

4.7 Eigenschaften von Körpern

Sei K ein Körper mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$. Zeigen Sie, dass dann immer gilt:

Eindeutigkeit des Inversen

(a) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: Falls $x \cdot y = 1$ und $x \cdot z = 1$, dann $y = z$.

(b) Für alle $x \in K$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.

(c) Für alle $x, y \in K$ gilt $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

$x + y = 0$

$4 + y = 0 \quad 4 \cdot y = 1$

4.8 Körperaxiome für bekannte Mengen

Bestimmen Sie für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ mit der jeweils üblichen Addition und Multiplikation, welche der Anforderungen für einen Körper erfüllt und welche nicht erfüllt sind.

$\mathbb{N}$ ... kein addit. Neutrales bzw. keine 0

$\mathbb{N}_0$ .. kein additives Inverses

$\mathbb{Z}$ ... keine multipl. Inverses

$\mathbb{Q}$ ... Körper

4.9 Lineare Gleichungssysteme

Einsetzungsverfahren

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$x - 2y = 4, \quad -y - z = -1, \quad -x + 3z + y = -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

← Inverses von 1 ist 1

$x+y=0$

$1+y=0$

$(x+y) \bmod 2$

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$x \cdot y$

b) $+_3$ $\cdot_3$

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

komm.
Neutrales.
Inverses

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

komm.
Neutrales
Inverses

1. Kommutativität

$$x +_3 y = y +_3 x$$

$$(x+y) \bmod 3 = (y+x) \bmod 3 \quad \checkmark$$

$$x \cdot_3 y = y \cdot_3 x$$

$$(x \cdot y) \bmod 3 = (y \cdot x) \bmod 3$$

2. Assoziativität

$$(x +_3 y) +_3 z = ((x+y) \bmod 3) + z \bmod 3$$

$$= x+y+z \bmod 3 = \underline{x} + \underline{(y+z \bmod 3)} \, \underline{\bmod 3}$$

$$= x +_3 (y +_3 z)$$

Analog für Multipl.

4.7 a) immer gilt:

Eindeutigkeit des Inversen

(a) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: Falls $x \cdot y = 1$ und $x \cdot z = 1$, dann $y = z$.

$$y = z \qquad z = 1 \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z = x \cdot z \cdot y = (x \cdot z) \cdot y = 1 \cdot y = y$$

b) $$\underline{(x^{-1})}^{-1} = x$$

$$x^{-1} \cdot x = 1$$

Inverses von x

c) $$1 = 1 \cdot 1 = (x \cdot x^{-1}) \cdot (y \cdot y^{-1}) = x \cdot x^{-1} \cdot y \cdot y^{-1}$$

$$= x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} = (x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1})$$

$$(x \cdot y) \cdot \underline{(x^{-1} \cdot y^{-1})} = 1$$

$$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$$

$a \equiv_m b \wedge a \equiv_n b$

$(a,b) \in \equiv_n \cap \equiv_m$ $\quad m \mid (a-b) \quad n \mid (a-b)$

$\Updownarrow$ $\quad m \cdot n \mid (a-b)$

$\to (a,b) \in \equiv_{nm}$

$\to a \equiv_m b \quad a \equiv_n b$

- $m \mid (a-b) \quad n \mid (a-b)$

$\exists k \in \mathbb{Z}: \quad k = \dfrac{a-b}{m} \qquad \boxed{km = a-b}$

$\nearrow 8 \quad 6$

$9 \quad 4 \qquad ln = a-b$

$k \cdot 4 = l \cdot 9$

- $km = ln \qquad \boxed{ggT(m,n) = 1}$

k ist vielfaches von $n \qquad m = n$

$\to$ $\boxed{n \mid k \qquad m \mid l} \qquad km = lm$

$k = k'n \qquad l = l'm$

$k'(nm) = a-b \qquad k' \in \mathbb{Z}$

$\to mn \mid (a-b)$

$a \equiv_{mn} b$

- $a \equiv_{mn} b \Rightarrow a \equiv_m b \wedge a \equiv_n b$

$mn \mid (a-b)$

$k \cdot m \cdot n = (a-b)$

$m = \dfrac{(a-b)}{kn} \qquad n = \dfrac{(a-b)}{km}$

$m \mid (a-b) \qquad n \mid (a-b) \qquad \square$

- $m = n = 2$

$\{0,2\} \in \equiv_2 0$

$2 \not\equiv_4 0$

$14 - 6 = 8$

$\equiv_2 \cap \equiv_2 \neq \equiv_4$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
8	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0

$(a,b) \in \equiv_m \cap \equiv_n \iff m \mid (a-b)$ UND $n \mid (a-b)$

über den reellen Zahlen entsprechend den Folien durch schrittweises Auflösen nach einer Variablen und Einsetzen.

Additionsverfahren (zum Vergleich)

Erinnern Sie sich an das Additionsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen: Angenommen es sind 2 lineare Gleichungen

$$ax + by = c, \quad dx + ey = f$$

gegeben. Dann können Sie in der Regel dieses System lösen, indem Sie eine Gleichung auf die andere so addieren, dass eine Variable nur noch mit dem Vorfaktor 0 in dieser Gleichung auftritt und damit die andere Variable eindeutig bestimmen können. Durch Einsetzen in die andere Gleichung erhalten Sie dann auch einen eindeutigen Wert für die zweite Variable.
Für eine kompaktere Darstellung nutzen wir oft eine sogenannte erweiterte Koeffizientenmatrix. Das lineare Gleichungssystem lässt sich daher auch wie folgt darstellen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right)$$

Eine Zeile korrespondiert hier mit einer linearen Gleichung, eine Spalte mit einer Variablen. Analog zum Additionsverfahren führen wir hier so genannte Zeilenoperationen aus: Uns ist es erlaubt, eine Zeile auf eine andere zu addieren sowie Zeilen mit Skalaren zu multiplizieren. Weiter dürfen wir auch Zeilen miteinander tauschen. Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ -7 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right) {}_{+1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right) \ |\cdot 2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 14 & 18 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 14 & 18 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

Ziel ist es, das lineare Gleichungssystem in die sogenannte Zeilenstufenform zu bringen, d.h. beginnend mit der zweiten Zeile bildet sich eine „Treppe" aus Nullen nach unten gehend. Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \end{array}\right)$$

Anschließend kann man nun ohne weiteres alle Variablen bestimmen.

Übertragen Sie das folgende lineare Gleichungssystem in die Matrixform und lösen Sie es anschließend mit den drei zulässigen Zeilenoperationen. Geben Sie in jedem Schritt an, welche Operation Sie ausgeführt haben.

$$x - 2y = 4, \quad -y - z = -1, \quad -x + 3z + y = -1$$

LGS über endlichen Körpern

Man kann zeigen, dass $\mathbb{Z}_5 := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit der Addition $x +_5 y = (x + y) \mod 5$ und Multiplikation $x \cdot_5 y = (x \cdot y) \mod 5$ ein Körper ist. Überlegen Sie sich, dass die obigen Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen nur die Körperaxiome verwende und lösen Sie dann das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_5$:

$$2 \cdot_5 x +_5 2 \cdot_5 y = 0, \quad x +_5 4 \cdot_5 y = 2$$

LGS über endlichen Körpern

Man kann zeigen, dass $\mathbb{Z}_5 := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit der Addition $x +_5 y = (x + y) \mod 5$ und Multiplikation $x \cdot_5 y = (x \cdot y) \mod 5$ ein Körper ist. Überlegen Sie sich, dass die obigen Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen nur die Körperaxiome verwende und lösen Sie dann das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_5$:

$$2 \cdot_5 x +_5 2 \cdot_5 y = 0, \quad x +_5 4 \cdot_5 y = 2$$

$x = a$

$y = b$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$(4 \cdot 4) \mod 5 = 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad +3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad +4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 4$$

$4 \cdot_5 y = 1$

$y = 4$

$(4 \cdot 4) \mod 5 = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$x = 1$

$y = 4$

4.10 Matrixoperationen (optional)

Abgesehen von der Verwendung von Matrizen für das Lösen von linearen Gleichungssystemen können wir diese auch nutzen, um lineare Transformationen von Vektoren (z.B. Spiegelungen, Rotationen, Skalierungen, etc.) darzustellen. Die Matrix wird dazu mit dem Vektor wie folgt multipliziert:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} \cdot v_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2,i} \cdot v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m,i} \cdot v_i \end{pmatrix}$$

Diese Multiplikation ist dabei eine vereinfachte Version der Matrix-Matrix-Multiplikation (beachte, dass ein Vektor des $\mathbb{R}^n$ eigentlich eine Matrix des $\mathbb{R}^{n\times 1}$-Raumes ist):

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,l} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} \cdot b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{1,i} \cdot b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1,i} \cdot b_{i,l} \\ \sum_{i=1}^n a_{2,i} \cdot b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{2,i} \cdot b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2,i} \cdot b_{i,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m,i} \cdot b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{m,i} \cdot b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{m,i} \cdot b_{i,l} \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Verkettung der beiden Transformationen: Wir führen zuerst B aus und anschließend A (genau wie die Komposition zweier Funktionen f, g als $f \circ g$).

(a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie jeweils das Ergebnis der Transformationen A, B und C für die Vektoren. Was bewirken die Transformationen?

(b) Warum macht es einen Unterschied, ob wir zuerst die Transformation A und dann B anwenden oder zuerst B und dann A? Überlegen Sie sich ein Beispiel, bei dem die Reihenfolge der Transformationen eine Rolle spielt!

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 8}$. Wie viele Reihen und Spalten muss B haben, wenn $A \cdot B = C$ gilt?

(d) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A \cdot B$, $A \cdot C$, $C \cdot A$ und $B \cdot C$.

4.11 Dreiecksungleichungen

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\big| |x| - |y| \big| \le |x + y| \le |x| + |y|$$

4.12 Ordnungsaxiome

Zeigen Sie nur unter Verwendung der Ordnungsaxiome, dass für alle $x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) Falls $x < y$ und $z < 0$, dann $z \cdot x > z \cdot y$.

(b) Falls $x < y$ und $u < v$, dann $x + u < y + v$.

(c) $x \cdot y > 0$ gdw. ($x > 0$ und $y > 0$) oder ($x < 0$ und $y < 0$).

(d) $x > 0$ gdw. $x^{-1} > 0$.

(e) Falls $x \neq 0$, dann $x^2 \neq 0$.

(f) Falls $0 < x < u$ und $0 < y < v$, dann auch $x \cdot y < u \cdot v$.

(g) Falls $0 < x$ und $0 < y$, dann gilt ($x < y$ gdw. $x^2 < y^2$ gdw. $y^{-1} < x^{-1}$).

4.13 Folgen

Zeigen Sie, dass die Folge $a_0 := 1$, $a_{i+1} := a_i + \frac{2-{a_i}^2}{4a_i}$

(a) strikt monoton wächst,

(b) durch jede rationale Zahl $b > 0$ mit $b^2 \geq 2$ beschränkt wird

(c) und jede rationale Zahl $c > 0$ mit $c^2 < 2$ irgendwann überschreitet.

Tipp: Folgern Sie (a) und (b), indem sie induktiv zeigen, dass $a_i < a_{i+1}$ und ${a_i}^2 < 2$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt. Folgern Sie (c) dann mittels (b).

Optionale Aufgaben

4.1* Komplexe Zahlen

Nach Konstruktion hat $x^2 = 2$ eine Lösung in $\mathbb{R}$, während $x^2 = -2$ immer noch keine Lösung in $\mathbb{R}$ (vgl. Ordnungsaxiome) hat.
Die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind als Paare von reellen Zahlen definiert, wobei man für ein Paar $(x, y) \in \mathbb{C}$ kurz $x + iy$ schreibt.
Man definiert

- die Addition durch $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$.
- die Multiplikation durch $(x, y) \cdot (u, v) := (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)$.

Die Additionen und Multiplikationen von x, y, u, v (also z.B. $x \cdot u$) werden dabei ganz normal in $\mathbb{R}$ berechnet.

(a) Zeigen Sie, dass $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ gilt.

(b) Überprüfen Sie, dass $\mathbb{C}$ mit diesen Operationen einen Körper bildet. Geben Sie insbesondere an, wie man die multiplikativen Inversen berechnet.

(c) Überprüfen Sie, dass $(x + i0) \cdot (y + i0) = (x \cdot y + i0)$ und $(x + i0) + (y + i0) = (x + y) + i0$ gilt, d.h. man kann $\mathbb{R}$ mit $R \times \{0\}$ identifizieren.

Man schreibt daher für $(x, 0)$ bzw. $(x + i0)$ einfach nur x; entsprechend kurz iy für $(0, y)$, insbesondere i für $(0, 1)$, sodass $i^2 = -1$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen von $x^2 - 4x + 8 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Auch über $\mathbb{C}$ kann ein quadratisches Polynom maximal 2 Nullstellen haben. Man kann aber zeigen, dass jedes Polynom vom Grad $n > 0$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt; man sagt daher, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.

4.2* Quaternionen

Die Quaternionen (auch Hamilton-Zahlen) $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind, wie auch die komplexen Zahlen, Tupel von reellen Zahlen. Wir schreiben in der Regel für ein solches Tupel $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$, kurz $x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Analog zu den komplexen Zahlen schreiben wir i für $(0, 1, 0, 0)$, j für $(0, 0, 1, 0)$ und k für $(0, 0, 0, 1)$. Man definiert

- die Addition durch $(x_0, x_1, x_2, x_3) + (y_0, y_1, y_2, y_3) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.
- die Multiplikation durch $(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot (y_0, y_1, y_2, y_3) = (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3,\ x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_0 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1,\ x_0 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0)$.

Quaternionen werden häufig für die Darstellung von Rotationen im dreidimensionalen Raum, z.B. in der Computergrafik, genutzt.

(a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:
  (i) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ (hierbei steht $i^2 = -1$ kurz für $(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 0, 0)$, analog dazu k^2 und j^2)
  (ii) $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$
  (iii) $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$

(b) Zeigen Sie: Für $x = (x_0, x_1, y_2, y_3), y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{H}$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$ genau dann, wenn $x_i \cdot y_j = y_i \cdot x_j$ für $1 \leq i < j \leq 3$.

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes $h = (h_0, h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{H}$ genau ein multiplikatives Inverses gibt mit $h^{-1} = \left(\frac{h_0}{||h||^2}, -\frac{h_1}{||h||^2}, -\frac{h_2}{||h||^2}, -\frac{h_3}{||h||^2} \right)$ mit $||h|| = \sqrt{{h_0}^2 + {h_1}^2 + {h_2}^2 + {h_3}^2}$

(d) Lesen Sie sich die Wikipediaartikel zu Quaternionen und 3D-Rotation und Gimbal Lock durch.

4.3* Dedekindsche Schnitte

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $R_b = \{z \in \mathbb{Q} \mid z < b\}$:

(a) Für jede beschränkte, monoton wachsende Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von rationalen Zahlen ist die Menge

$$\bigcap\{R_b \mid b \in \mathbb{Q}, \underline{\text{FÜR ALLE}}\ i \in \mathbb{N}_0 : a_i < b\}$$

wieder ein Dedekindscher Schnitt.

(b) Die Menge

$$S_2 := \bigcap\{R_b \mid b \in \mathbb{Q}, b > 0, 2 \leq b^2\}$$

ist ein Dedekindscher Schnitt und es gilt:

$$S_2 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\ \underline{\text{ODER}}\ q^2 < 2\}$$

(c) Die Menge

$$\bigcap\{R_q \mid q \in \mathbb{Q}, -2 \leq q^2\}$$

ist kein Dedekindscher Schnitt.