Technische Universität München

Mathematik-Vorkurs

2022w

Dr. Michael Luttenberger – Jeremias Bohn – Julian Geheeb

Blatt 1 - Logik

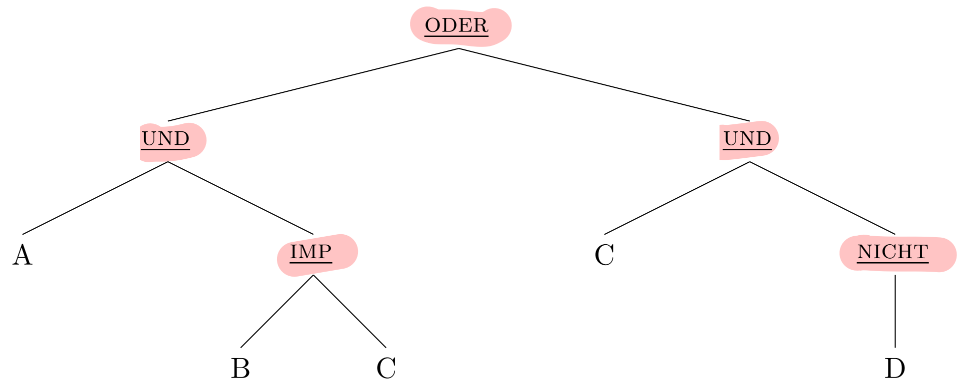
Aufgaben

1.1 Syntaxbäume und Wahrheitstabellen

A, B und C stehen für beliebige Aussagen. Wir betrachten die folgenden daraus zusammengesetzten Aussagen:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= ((A\,\underline{\text{UND}}\,(B\,\underline{\text{IMP}}\,C))\,\underline{\text{ODER}}\,(C\,\underline{\text{UND}}\,\underline{\text{NICHT}}\,A))\\
F_2 &= ((A\,\underline{\text{UND}}\,\underline{\text{NICHT}}\,B)\,\underline{\text{ODER}}\,((C\,\underline{\text{ODER}}\,B)\,\underline{\text{UND}}\,(C\,\underline{\text{ODER}}\,\underline{\text{NICHT}}\,B)))\\
F_3 &= (((\underline{\text{NICHT}}\,A)\,\underline{\text{GDW}}\,B)\,\underline{\text{UND}}\,(B\,\underline{\text{UND}}\,(A\,\underline{\text{ODER}}\,C)))\\
F_4 &= (((\underline{\text{NICHT}}\,A)\,\underline{\text{UND}}\,(C\,\underline{\text{IMP}}\,B))\,\underline{\text{UND}}\,(A\,\underline{\text{ODER}}\,C))
\end{aligned}
$$

(a) Die Klammerstruktur der Aussagen lässt sich mittels so genannter Syntaxbäume darstellen. Z.B. für F_1:



Stellen Sie die Struktur der restlichen drei Aussagen entsprechend als Syntaxbaum dar.

(b) Tabellieren Sie die Wahrheitswerte der Aussagen F_1 bis F_4 in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Aussagen A, B und C entsprechend den Folien.

1.2 Aussagenlogische Formeln

Pep ist Trainer der Jugendmannschaft beim lokalen Fußballverein. Um möglichen Streitereien aus dem Weg zu gehen, wer einen Elfmeter schießen darf, hat er folgende Anforderungen an eine mögliche Aufstellung seiner Spieler:

- Wenn Franziska spielt, dann soll nicht Arjen spielen.
- Franziska und Bernd das Brot spielen beide, oder keiner von beiden spielt.
- Zumindest Arjen oder Bernd das Brot spielen.

(a) Präzisieren Sie diese Anforderungen als Aussagen mittels der Junktoren $\underline{\text{UND}}$, $\underline{\text{ODER}}$, $\underline{\text{IMP}}$, $\underline{\text{GDW}}$, $\underline{\text{NICHT}}$ und den atomaren Aussagen

A: „Arjen spielt“

F: „Franziska spielt“

B: „Bernd das Brot spielt“

(F)

A	B	C	((A	UND	(B	IMP	C))	ODER	(C	UND	NICHT A))
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

$\beta : V \to \{0,1\}$

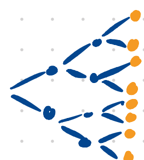
$2^3 = 8$ mögliche Belegungen

000 = 0
001 = 1
010 = 2
011 = 3
⋮

0 falsch
1 wahr

$2 \cdot 2 \cdot 2$

imp Implikation



a imp b v_1 v_2 v_3

a	b	a imp b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bikonditional

a	b	a gdw b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

F_3

A	B	C	$(((\underline{\text{NICHT}}\ \bar{A})\ \underline{\text{GDW}}\ B)\ \underline{\text{UND}}\ (B\ \underline{\text{UND}}\ (A\ \underline{\text{ODER}}\ C)))$								
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1

F_4

A	B	C	$(((\underline{\text{NICHT}}\ A)\ \underline{\text{UND}}\ (C\ \underline{\text{IMP}}\ B))\ \underline{\text{UND}}\ (A\ \underline{\text{ODER}}\ C))$								
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1

1.2a)
- F IMP NICHT A
- F GDW B
- A ODER B

b)

A	F	B	F	IMP	NICHT A	F	GDW	B	A	ODER	B
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1

erfüllende Belegungen

1.3) $D_{x,y}$ ... Dame auf Feld (x, y)

Zeile Spalte

alternativ: XOR

a) $(D_{0,0}$ ODER $D_{0,1}$ ODER $D_{0,2})$
UND $(D_{1,0}$ ODER $D_{1,1}$ ODER $D_{1,2})$
UND $(D_{2,0}$ ODER $D_{2,1}$ ODER $D_{2,2})$

in jeder Zeile eine Dame

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob alle Vorgaben gleichzeitig umgesetzt werden können.
Gibt es mehrere Möglichkeiten, die Vorgaben umzusetzen?

1.3 Das Damenproblem

SAT - Problem

Das 3-Damenproblem besteht darin, 3 Damen (Schachfigur) auf einem 3×3 Schachbrett so zu positionieren, dass keine Dame eine andere Dame schlägt bzw. „sieht": Eine Dame „sieht" dabei nur alles, was in ihrer Zeile (x-Achse), ihrer Spalte (y-Achse) oder in einer ihrer 45°-Diagonalen steht.

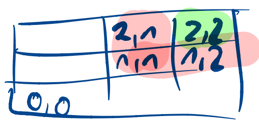
Dame steht auf Feld (0,0) wahr
$\Uparrow$
$D_{0,0}$

Die Felder des Schachbretts seien mit $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), \ldots, (2,2)$ bezeichnet, wobei $(0,0)$ das unterste linke Feld und $(2,2)$ das oberste rechte Feld ist.

$D_{x,y}$ stehe für die atomare Aussage: „Eine Dame steht auf dem Feld (x, y)"

Präzisieren Sie folgende Aussagen unter Verwendung der atomaren Aussagen $D_{x,y}$ und den Junktoren UND, ODER, IMP, GDW, NICHT.

Dame auf (2,2) + auf Feld daneben



(a) In jeder Spalte (Zeile) steht eine Dame.

(b) Keine zwei Damen stehen in derselben Spalte (Zeile).

(c) Keine zwei Damen stehen in derselben Diagonalen.

(d) Keine zwei Damen dürfen sich „sehen".

evtl. nicht rechnen

$(D_{0,0} \lor D_{0,1} \lor D_{0,2}) \land (D_{1,0} \lor D_{1,1} \lor D_{1,2}) \land (D_{2,0} \lor D_{2,1} \lor D_{2,2})$

$D_{2,2}$ UND ($D_{2,1}$ ODER $D_{1,1}$ ODER $D_{1,2}$

1.4 Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln

Überprüfen Sie mittels Wahrheitstabellen (vgl. Definition der Junktoren), dass folgende Aussagen (genauer: Aussageformen, da A, B hier nicht genauer besimmt sind) gleichbedeutend sind, egal wie die Teilaussagen A und B genau lauten:

- „NICHT (A ODER B)" und „(NICHT A) UND (NICHT B)"
- „A GDW B" und „(NICHT A) GDW (NICHT B)"
- „A IMP B" und „B ODER NICHT A"
- „A GDW B" und „(A IMP B) UND (B IMP A)" und „(A UND B) ODER NICHT (A ODER B)"

Halten Sie sich an das Schema der Tabellen aus den Folien, um die Wahrheitswerte besser vergleichen zu können.

1.5 XOR

ODER wird auch als

„nicht-ausschließendes Oder", „Alternative", „Inklusives Oder"

bezeichnet; entsprechend wird „entweder/oder" als

„ausschließendes Oder", „eXklusives Oder", „XOR"

bezeichnet.

- Definieren Sie die Bedeutung von „XOR" mittels einer Wahrheitstafel.
- Drücken Sie „A XOR B" durch A, B, „UND", „ODER" und „NICHT" aus.
- Wie ergibt sich „XOR" aus „GDW"?

1.4)

A	B	NICHT	$(A$ ODER $B)$	(NICHT A)	UND	(NICHT B)‘
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0
		=			=	

⇒ äquivalent

A	B	A	gdw	B	(nicht A)	gdw	(nicht B)
0	0		1		1	1	1
0	1		0		1	0	0
1	0		0		0	0	1
1	1		1		0	1	0
			=			=	

⇒ äquivalent

A	B	A	imp	B	B	oder	nicht A
0	0		1		0	1	1
0	1		1		1	1	1
1	0		0		0	0	0
1	1		1		1	1	0
			=			=	

⇒ äquivalent

A	B	A gdw B	(A imp B) und (B imp A)						
			A	imp	B	und	B	imp	A
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

A	B	(A und B)	oder	nicht	(A oder B)
0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1

$\Rightarrow$ äquivalent

1.5) XOR

exklusives oder ≙ entweder oder

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$A \text{ XOR } B \equiv (A \text{ ODER } B) \text{ UND NICHT } (A \text{ UND } B)$

$\equiv (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A)$

((A imp B) und B)

1.6 ITE

In Programmiersprachen verwendet man häufig Aussagen der Form

„Falls A, dann B, ansonsten C." („If A, then B, else C")

dabei muss „ansonsten C" als „und falls nicht A, dann C" gelesen werden.

Definieren Sie die Wahrheitswerte dieses „dreistelligen (ternären) Junktors" mittels einer Wahrheitstafel.

1.7 Spielereien mit Quantoren

Im Folgenden stehen x und y für Schweine im Weltall.

Beschreiben Sie eine Situation, in der genau eine der beiden Aussagen WAHR ist:

- „ES EXISTIERT ein x, so dass FÜR ALLE y gilt: x ist mind. so groß wie y."
- „FÜR ALLE y gilt, ES EXISTIERT ein x, so dass gilt: x ist mind. so groß wie y."

Wichtig ist, dass "für alle x" bedeutet, dass man das konkrete x nicht selbst wählen darf, sondern alle Möglichkeiten betrachten muss, d.h. man kann sich einen "Gegenspieler" vorstellen, der x wählt.

Zeigen Sie entsprechend, dass auch die Aussagen

- „(ES EXISTIERT ein x mit: x ist groß) UND (ES EXISTIERT ein x mit: x ist grün)."
- „ES EXISTIERT ein x mit: (x ist groß UND x ist grün)."

nicht gleichbedeutend sind.

Entsprechend auch für

- „(FÜR ALLE x gilt: x ist groß) ODER (FÜR ALLE x gilt: x ist grün)."
- „FÜR ALLE x gilt: (x ist groß ODER x ist grün)."

(Prinzipiell muss man überhaupt erst einmal definieren, was "groß" für zwei Schweine im Weltall überhaupt bedeuten soll; zunächst handelt es sich nur um ein zweistelliges Prädikat.)

1.8 Syllogismen

Entscheiden Sie, welche der folgenden Syllogismen allgemeingültig/korrekt sind, d.h. dass in jeder Situation, in der die beiden Aussagen oberhalb der Trennlinie (Prämissen, Annahmen) wahr/erfüllt sind, auch die Aussage unterhalb der Trennlinie (Konklusion, (Schluss-)Folgerung) *zwingend/stets/immer* wahr ist. → gültig

"Einige" ist dabei als "es existiert mindestens ein Objekt" zu lesen.

Veranschaulichen Sie die Beziehung der Aussagen zu einander graphisch entsprechend den Folien.

Geben Sie für jedes Beispiel auch die abstrakte prädikatenlogische Struktur jeder Aussage an ("Für alle x mit ...", "Nicht für alle x ...", "Es gibt ein x ...", "Es gibt kein x ...") wie z.B.:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{All bandersnatches are borogoves}\\ \text{All borogoves are slithy}\end{array}}{\text{All bandersnatches are slithy}}$$

hat die Struktur

$$\frac{\begin{array}{l}\text{For all } x\text{: if } P(x)\text{, then } Q(x)\\ \text{For all } x\text{: if } Q(x)\text{, then } R(x)\end{array}}{\text{For all } x\text{: if } P(x)\text{, then } R(x)}$$

1.6)

A	B	C	ITE (A, B, C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1.7)

Gruppieren Sie die Syllogismen dann nach der prädikatenlogischen Struktur der Aussagen. Beachten Sie, dass die Reihenfolge der Annahmen (Aussagen über dem Trennstrich) irrelevant ist.

Alle Rechtecke sind Vierecke
Alle Quadrate sind Rechtecke

Alle Quadrate sind Vierecke

Kein Rechteck ist ein Kreis
Alle Quadrate sind Rechtecke

Kein Quadrat ist ein Kreis

Einige Rhomben sind Rechteck
Alle Quadrate sind Rechtecke

Einige Rhomben sind Quadrate

Einige Rhomben sind Quadrate
Alle Quadrate sind Rechtecke

Einige Rhomben sind Rechtecke

Alle Quadrate sind Rechtecke
Einige Rhomben sind Quadrate

Einige Rhomben sind Rechtecke

Alle Rechtecke sind Vierecke
Alle Quadrate sind Rechtecke

Einige Quadrate sind Vierecke

Kein Rechteck ist ein Kreis
Alle Quadrate sind Rechtecke

Einige Quadrate sind keine Kreise

Alle Professoren sind ernst
Einige Dozenten sind nicht ernst

Einige Dozenten sind nicht Professoren

Kein Säugetier atmet durch Kiemen
Alle Fische atmen durch Kiemen

Kein Fisch ist ein Säugetier

Kein Säugetier atmet durch Kiemen
Alle Fische atmen durch Kiemen

Kein Säugetier ist ein Fisch

Kein Tier, das mit Kiemen atmet, ist ein Säugetier
Einige Wassertiere sind Säugetiere

Einige Wassertiere atmen nicht mit Kiemen

Einige Früchte sind Äpfel
Alle Früchte sind Teile von Pflanzen

Einige Teile von Pflanzen sind Äpfel

Würzburg liegt in Bayern.
Würzburg liegt in Franken.
Tauberbischofsheim liegt in Franken.
Tauberbischofsheim liegt nicht in Bayern.

Franken ist kein Teil von Bayern.

1.9 Fliegende Schweine nach Aristoteles

Syllogismen stellen eine der ältesten Formen des logischen Schlussfolgerns dar.

Ein Beispiel für einen Syllogismus lautet:

> Falls alle Schweine fliegen können, und alles, was fliegen kann, auch abstürzen kann, dann können auch alle Schweine abstürzen.

oder anders gegliedert:

$$\begin{array}{rl} \text{Annahme:} & \text{Alle Schweine fliegen können.} \\ \text{Annahme:} & \text{Alles, was fliegen kann, kann auch abstürzen.} \\ \hline \text{Folgerung:} & \text{Alle Schweine können abstürzen.} \end{array}$$

Mit den Abkürzungen

- $S(x) :=$ „x ist ein Schwein"
- $F(x) :=$ „x kann fliegen"
- $A(x) :=$ „x kann abstürzen"

lässt sich der Syllogismus etwas formaler schreiben als:

$$\begin{array}{rl} \text{Annahme}_1: & \text{Für alle } x\text{: Falls } S(x)\text{, dann } F(x). \\ \text{Annahme}_2: & \text{Für alle } x\text{: Falls } F(x)\text{, dann } A(x). \\ \hline \text{Folgerung:} & \text{Für alle } x\text{: Falls } S(x)\text{, dann } A(x). \end{array}$$

Ein möglicher Beweis für die Korrektheit der Schlussfolgerung lautet dann:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{Ann}_1 \vdash \text{Für alle } x:\ \text{falls } S(x),\ \text{dann } F(x)}}{\text{Ann}_1 \vdash \text{falls } S(m),\ \text{dann } F(m)}}{\text{Ann}_1, S(m) \vdash F(m)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\text{Ann}_2 \vdash \text{Für alle } x:\ \text{falls } F(x),\ \text{dann } A(x)}}{\text{Ann}_2 \vdash \text{falls } F(m),\ \text{dann } A(m)}}{\dfrac{\text{Ann}_1, \text{Ann}_2, S(m) \vdash A(m)}{\text{Ann}_1, \text{Ann}_2 \vdash\ \text{falls } S(m),\ \text{dann } A(m)}}}{\text{Ann}_1, \text{Ann}_2 \vdash \text{Für alle } x:\ \text{falls } S(x),\ \text{dann } A(x)}$$

Anmerkung: Man darf Annahmen immer „fallen lassen", also für mehr/allgemeinere Situationen/Welten die zu zeigende Aussagen beweisen.

Aufgaben:

(a) Übersetzen Sie den obigen Beweis(baum) in natürliche Sprache.

(b) Beweisen Sie den folgenden Syllogismus, einmal natürlichsprachlich, dann als Beweisbaum gegliedert.

> Falls es ein Schwein gibt, das fliegen kann, und alles, was fliegen kann, auch abstürzen kann, dann gibt es auch ein Schwein, das abstürzen kann.

1.10 Stetigkeit von x^2

Zeigen Sie, dass $f(x) = x^2$ für jede reelle Zahl x_0 bei x_0 stetig ist, d.h. der Gegenspieler darf jetzt auch noch den konkreten Wert von x_0 bestimmen.

Überlegen Sie sich hierzu eine passende Antwort/Wahl für δ in Abhängigkeit von der Wahl des Werts von ε und x_0.

nicht stetig

ε beliebig klein

$$\Rightarrow \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{IMP} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$$

Annahme: $|x - x_0| < \delta$

$f(x) = x^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0|\,|x - x_0|$$

$$< |x + x_0| \cdot \delta$$

$$= |x - x_0 + x_0 + x_0| \cdot \delta$$

$|A| + |B| \geq |A + B|$

$$= |x - x_0 + 2x_0| \cdot \delta$$

$$\leq (|x - x_0| + 2|x_0|) \cdot \delta$$

$$< (\delta + 2|x_0|) \cdot \delta$$

$\delta \leq 1$

$$\leq (1 + 2|x_0|) \cdot \delta$$

$$|f(x) - f(x)| < (1 + 2|x_0|) \cdot \delta$$

$$|f(x) - f(x)| < (1 + 2|x_0|)\,\delta$$

$$(1 + 2|x_0|) \cdot \delta = \varepsilon$$

$$\downarrow \delta$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{(1 + 2|x_0|)}$$

$$\delta_{min} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \delta = 1$$

$$\delta < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{(1+2|x_0|)}$$

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1+2|x_0|)}\right)$$

Zusätzliche Aufgaben für Interessierte

1.1* Syntaxbäume und gebundene Variablen

Stellen Sie die Struktur jeder der folgenden Aussagen als Syntaxbaum dar. Bestimmen Sie dann, welche Variablenvorkommen durch welche Quantoren gebunden werden, bzw. welche Vorkommen ungebunden (frei) sind:

- „FÜR ALLE x gilt: (WENN x fliegen kann, DANN (ist x ein Schwein UND y kann auch fliegen))"
- „ES EXISTIERT x mit: (x kann fliegen UND NICHT (FÜR ALLE x: (WENN x ein Schwein ist, DANN kann y auch fliegen))"
- „ES EXISTIERT z mit: (NICHT (FÜR ALLE y: (WENN y ein Schwein ist, DANN kann y auch fliegen) UND z kann fliegen)"
- „FÜR ALLE z gilt: (WENN (z kein Schwein ist ODER y nicht fliegen kann), DANN kann z nicht fliegen)"

Versuchen Sie zu argumentieren, welche der Formeln in allen möglichen „passenden" Situationen gleichbedeutend sind.

Machen Sie sich klar: Falls eine Aussage ein ungebundenes Vorkommen einer Variablen enthält, dann muss eine passende Situation vorgeben, für welchen konkreten Wert das ungebundene Vorkommen steht; ansonsten macht es keinen Sinn, sich über den Wahrheitswert der Aussage zu unterhalten.

1.2* Gleichmäßige Stetigkeit

Stellen Sie die Struktur der folgenden Definition entsprechend der Definition der $\varepsilon\delta$-Stetigkeit dar:

> Bezeichne f eine Funktion von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen. Dann ist f genau dann **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle reelle Zahlen x und y mit $|x - y| < \delta$ immer $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt.

Entscheiden Sie, ob $f(x) = x^2$ gleichmäßig stetig ist.

Diskutieren Sie speziell die Situation, in der der Gegenspieler x und y so wählt, dass $x = y + \delta/2$ und $y > \frac{4\varepsilon - \delta^2}{4\delta}$ gilt.