

OPTYMALIZACJA W SYSTEMACH STEROWANIA



“Lot kosmiczny”

Zespół:

Arkadiusz Gonet
Jarosław Borzęcki
Marek Pięta
Filip Grudzień
Bartosz Kozłowski

Opis problemu	2
Równania matematyczne:	2
Zasada maksimum Pontriagina dla problemu minimalnoczasowego	3
Sformułowanie zasady maksimum dla problemu lotu kosmicznego	3
Opis położenia względem planety, wokół której orbituje stacja kosmiczna:	5
Sposób rozwiązywania problemu:	5
Weryfikacja rozwiązania:	7

Opis problemu

Celem ćwiczenia była realizacja optymalnoczasowego rozwiązania zadania spotkania polegającego na przeprowadzeniu statku kosmicznego znajdującego się w określonym położeniu w przestrzeni do stacji kosmicznej, krążącej po znanej orbicie o innym promieniu niż początkowa orbita rakiety. Orbity statku i stacji kosmicznej znajdują się w tej samej płaszczyźnie - problem 2D. Ponadto, statek kosmiczny przy spotkaniu ze stacją, powinien mieć względem niej zerowe prędkości (dokładny opis minimalizowanej funkcji celu przedstawiony w rozdziale: równania matematyczne). Sterowania przyjmowały tylko dwie wartości, maksymalną i minimalną, które były równe co do wartości bezwzględnej, ale o przeciwnych znakach (1 oraz -1).

Równania matematyczne:

Równania matematyczne opisujące dynamikę systemu (na podstawie opisu matematycznego problemu przeprowadzona została optymalizacja). Rozważano układ współrzędnych związany z poruszającą się ze stacją kosmiczną.

Oznaczenia:

- \mathbf{x}_1 - położenie rakiety względem stacji kosmicznej (oś x)
- \mathbf{x}_2 - położenie rakiety względem stacji kosmicznej (oś y)
- \mathbf{x}_3 - prędkości rakiety względem stacji kosmicznej (oś x)
- \mathbf{x}_4 - prędkości rakiety względem stacji kosmicznej (oś y)
- \mathbf{u}_1 - sterowanie (oś x)
- \mathbf{u}_2 - sterowanie (oś y)

$$r = \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}$$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = 2 \cdot x_4 + \left(1 + x_1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + u_1$$

$$\dot{x}_4 = -2 \cdot x_3 + x_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + u_2$$

Zasada maksimum Pontriagina dla problemu minimalnoczasowego

Dany jest system dynamiczny opisany równaniem stanu: $x' = f(x(t), u(t))$. Na układ narzucono ograniczenia: chwila początkowa $t_0 = 0$, chwila końcowa $t_f > t_0$, stan początkowy $x_0 = x(t_0) \in R^n$, stan końcowy $x_f = x(t_f) \in R^n$, sterowanie $u \in PC(0, t_f; D)$, gdzie zbiór $D \subset R^m$ nazywany zbiorem dopuszczalnym, funkcja $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ oraz jej pochodna $\partial_v f$ (indeks oznacza numer argumentu, po którym funkcja jest różniczkowana) są ciągłe.

Problem minimalnoczasowy jest to zadanie sterowania optymalnego, w którym wskaźnikiem jakości jest czas trwania procesu: $Q(u, t_f) = t_f$. Hamiltonian $H: R^n \times R^n \times R^m \times R \rightarrow R$ dany jest wzorem: $H(\psi(t), x(t), u(t)) = \psi^T f(x(t), u(t))$, gdzie $\psi(t)$ jest funkcją sprzężoną będącą rozwiązaniem równania sprzężonego $\psi'(t) = -\partial_x H(\psi(t), x(t), u(t))$. Dla tak sformułowanego problemu prawdziwe jest twierdzenie (zasada maksimum dla problemu minimalnoczasowego):

Twierdzenie: Niech (u, t_f) będzie decyzją optymalną oraz x odpowiednią trajektorią stanu. Wtedy istnieje liczba rzeczywista $\chi \geq 0$ i niezerowa funkcja absolutnie ciągła $\psi: [0, t_f] \rightarrow R^n$ (spełniająca równanie sprzężone), takie że spełniona jest relacja:

$$H(\psi(t), x(t), v) \leq H(\psi(t), x(t), u(t)) = \chi \quad \forall v \in D$$

Sformułowanie zasady maksimum dla problemu lotu kosmicznego

Z definicji hamiltonian ma postać:

$$H = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4] \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 2x_4 + \left(1 + x_1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + u_1 \\ -2x_3 + x_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + u_2 \end{bmatrix}$$

Na tej podstawie wyznaczono równania sprzężone:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \psi_3 \cdot \left\{ 3 \cdot (x_1 + 1)^2 \cdot [(x_1 + 1)^2 + x_2^2]^{-\frac{5}{2}} + 1 - \frac{1}{[\sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}]^3} \right\} + \psi_4 \cdot \left\{ 3x_2 \cdot (x_1 + 1) \cdot [(x_1 + 1)^2 + x_2^2]^{-\frac{5}{2}} \right\} \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_4 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{[\sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}]^3} - 3x_2^2 \cdot [(x_1 + 1)^2 + x_2^2]^{-\frac{5}{2}} \right\} + \psi_3 \cdot \left\{ (1 + x_1) \cdot (-3) \cdot x_2 \cdot [(x_1 + 1)^2 + x_2^2]^{-\frac{5}{2}} \right\} \\ \dot{\psi}_3 &= -\psi_1 + 2 \cdot \psi_4 \\ \dot{\psi}_4 &= -\psi_2 - 2 \cdot \psi_3\end{aligned}$$

Minimalizowany wskaźnik jakości:

$$J(x(T), T) = T + \frac{1}{2}\rho|x(T) - x_p|^2$$

Gdzie:

T - horyzont czasowy

x(T) - końcowe współrzędne rakiety

x_p - współrzędne stacji kosmicznej

ρ - przyjęty współczynnik liczbowy - na potrzeby rozważań przyjęliśmy wartość: 20000

Dla tak zdefiniowanego wskaźnika należy jeszcze wyznaczyć warunek końcowy dla równania sprzężonego: $\psi(T) = -\partial_1 J(x(T), T) = -\rho x(T)$.

Aby zmaksymalizować hamiltonian na trajektorii x należy zapewnić maksymalizację części zależnej od sterowania. W przypadku rozpatrywanego problemu $\phi(u, t) = \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2$. Stąd należy przyjąć następującą postać sterowania optymalnego:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= \begin{cases} u_{1\max}, & \text{gdy } \psi_3(t) > 0 \\ u_{1\min}, & \text{gdy } \psi_3(t) < 0 \end{cases} \\ u_2(t) &= \begin{cases} u_{2\max}, & \text{gdy } \psi_4(t) > 0 \\ u_{2\min}, & \text{gdy } \psi_4(t) < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

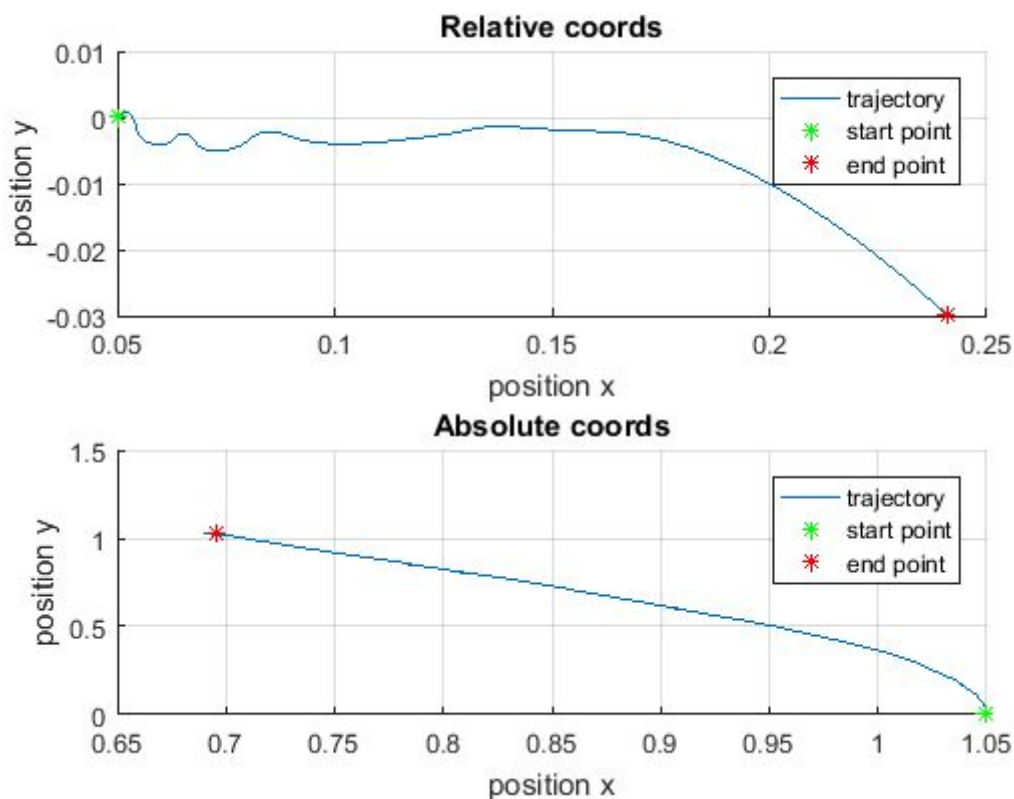
Opis położenia względem planety, wokół której orbituje stacja kosmiczna:

Z uwagi na to, że równania opisują dynamikę obiektu w układzie współrzędnych związanych z ruchomą stacją kosmiczną, zdecydowano się na zapisanie funkcji obliczającej współrzędne satelity w nieruchomym układzie współrzędnych. Pozwoliło to na bardziej przejrzystą wizualizację wyników i wizualną ocenę efektów działania algorytmu. Przejścia pomiędzy układami współrzędnych dokonano w oparciu o następujące równania:

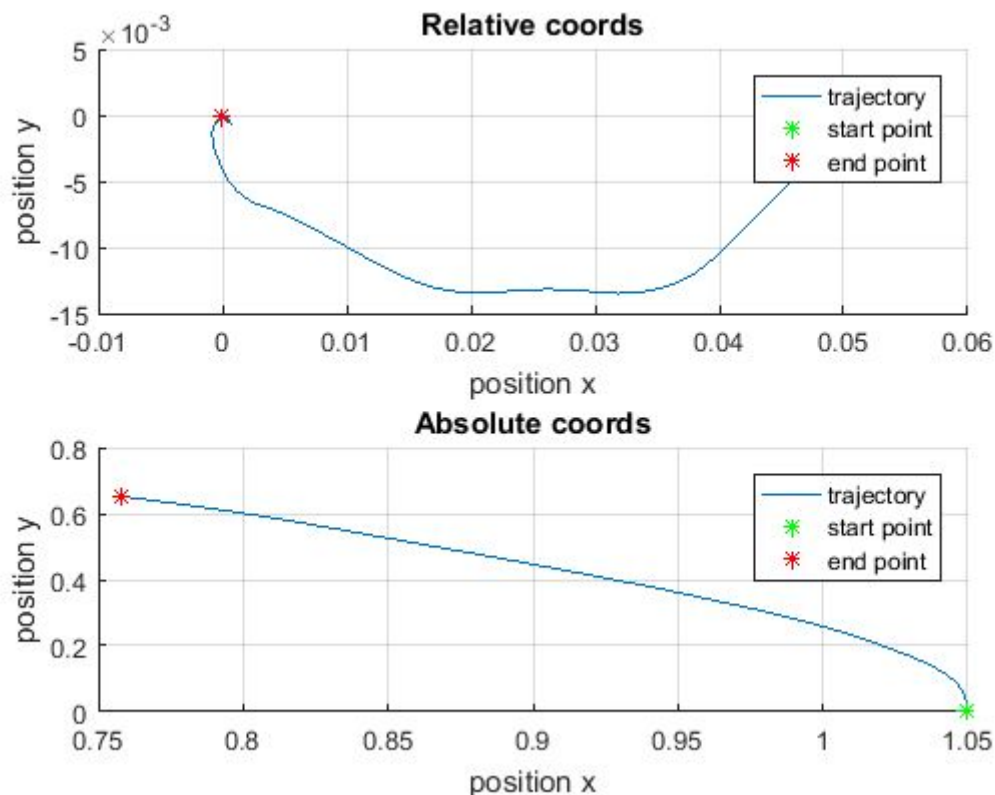
$$\begin{aligned}
x_{1\ abs} &= x_1 \cdot \cos(t) - x_2 \cdot \sin(t) + \cos(t) \\
x_{2\ abs} &= x_2 \cdot \cos(t) - x_1 \cdot \sin(t) + \sin(t) \\
x_{3\ abs} &= x_3 - \sin(t) \\
x_{4\ abs} &= x_4 + \cos(t)
\end{aligned}$$

Sposób rozwiązywania problemu:

Podczas rozwiązywania zadania opierano się na symulacyjnym wyznaczaniu trajektorii ruchu oraz poszczególnych prędkości rakiety przy pomocy solvera ze stałym krokiem - RK4. Eksperymenty przeprowadzane dla tej metody okazały się jednak bardzo niestabilne numerycznie i nie przynoszące zadowalających efektów. Wyniki zadania znacznie odbiegały od oczekiwanych rezultatów.



Rys. 1: Otrzymana trajektoria statku kosmicznego w układach odniesienia dla solvera RK4



Rys. 2: Otrzymana trajektoria statku kosmicznego w układach odniesienia dla solvera RK4 3/8

Na powyższych wykresach możemy zauważyć trajektorie dla tego zadania przeprowadzonego przy tych samych warunkach, ale z zastosowaniem różnych wariantów solvera RK4. Na tej podstawie zdecydowano o wykorzystaniu w dalszej części badań wersji RK4 3/8.

Przy optymalizacji korzystano z wbudowanej funkcji Matlaba - `fmincon`. Jako początkowe przybliżenie rozwiązania przyjęto sekwencję kolejnych sterowań w postaci kolejno powtarzających się wartości:

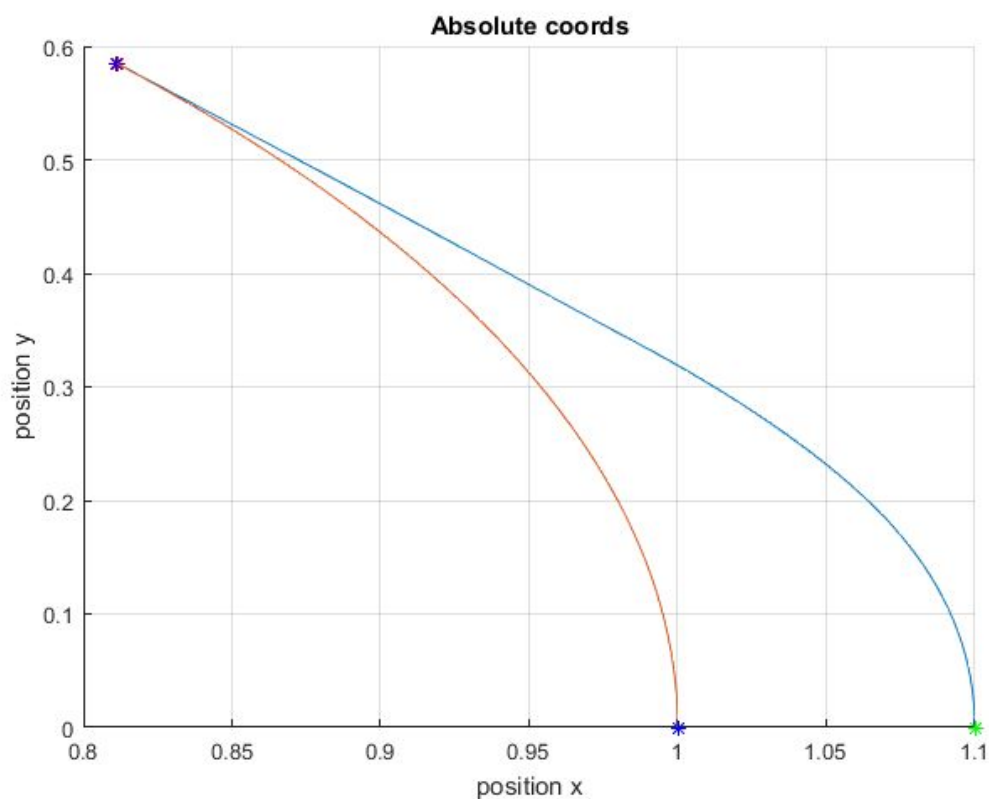
1. $u_1 = 1$; $u_2 = -1$
2. $u_1 = -1$; $u_2 = -1$
3. $u_1 = 1$; $u_2 = 1$
4. $u_1 = -1$; $u_2 = 1$

Początkowe czasy przełączeń były rozmieszczone równomiernie co określony krok w przedziale czasu $[0; T]$ (T - początkowe przybliżenie czasu symulacji). Funkcja `fmincon` jako zmienna decyzyjną przyjmowała momenty przełączeń sterowań (poszczególne sterowania przyjmowały wyłącznie wartości maksymalne lub minimalne zgodnie z założeniami z opisu problemu). W przypadku, gdy po zakończeniu działania funkcji `fmincon` momenty przełączeń znajdowały się dostatecznie blisko siebie nadmiarowe

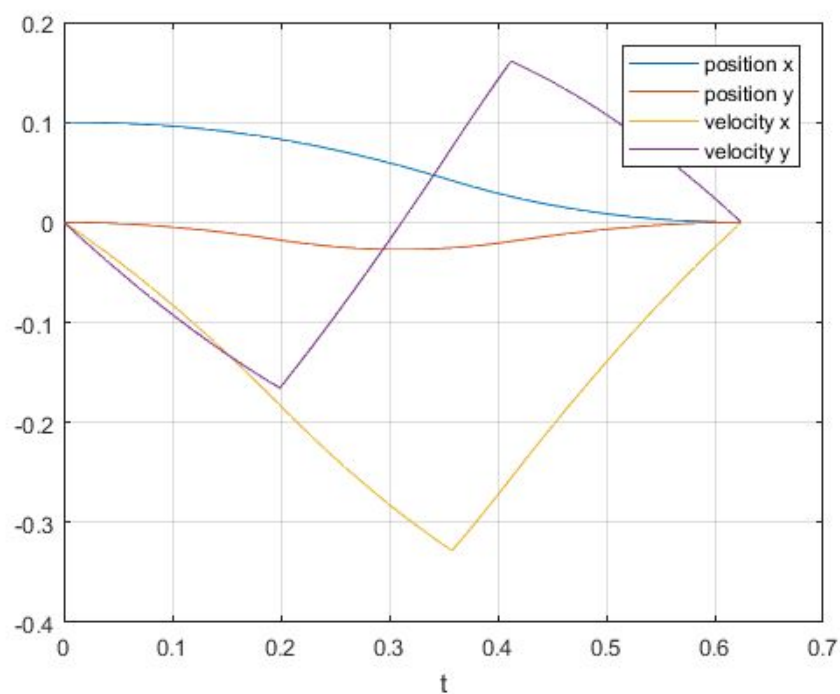
przełączenia były usuwane, a funkcja `fmincon` wywoływana była ponownie. Algorytm wykonywał w ten sposób określoną liczbę iteracji. Następnie dokonywano wizualizacji uzyskanych rozwiązań.

Weryfikacja rozwiązania:

Podstawowym kryterium oceny działania algorytmu była wizualizacja trajektorii stacji i rakiety w układzie współrzędnych 2D oraz przebiegów czasowych zmiennych stanu (w przypadku poprawnie działającego algorytmu powinny one zbiegać do zera - rakietę dociera do stacji z zerowymi prędkościami). Obserwacja wykresów pozwoliła na szybką wizualną ocenę sensowności przyjętego sterowania. Przykładowe uzyskane wykresy oraz trajektorie dla $x_0 = [0.1; 0; 0; 0]$:

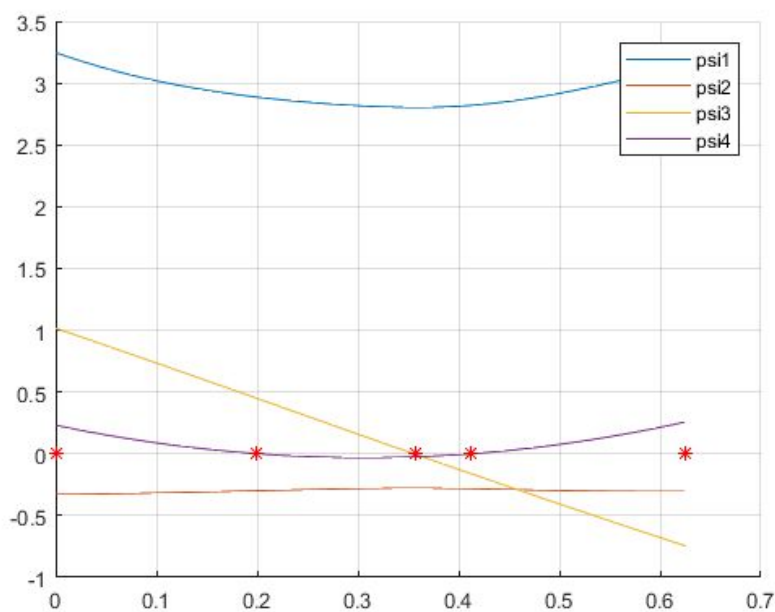


Rys. 3: Trajektorie stacji kosmicznej oraz statku w układzie geocentrycznym

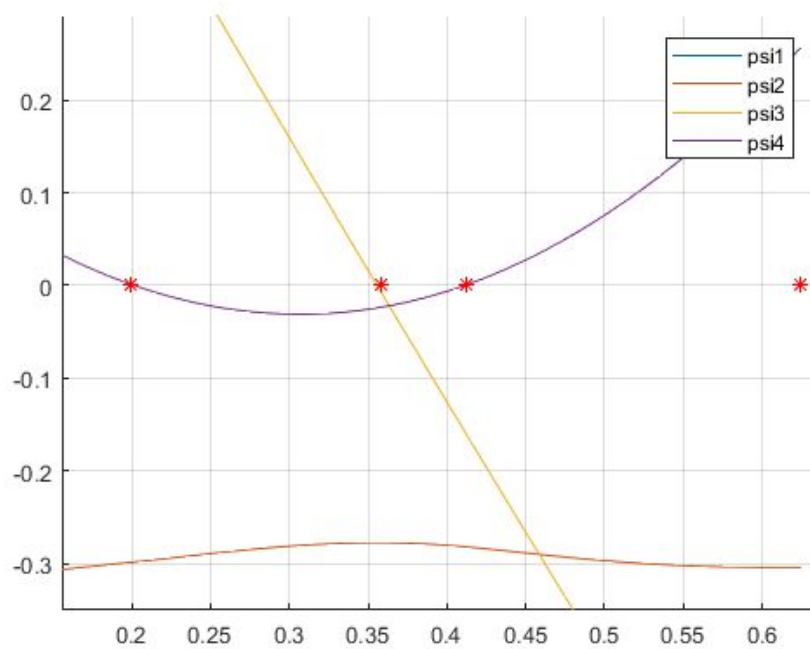


Rys. 4: Wyznaczona trajektoria optymalnoczasowa

Kolejnym istotnym parametrem pozwalającym na ocenę jakości uzyskiwanego rozwiązania jest funkcja sprzężona (rozwiązująca w tył korzystając z uzyskanych wartości zmiennych stanu dla poszczególnych chwil czasowych). Miejsca zerowe dla określonych zmiennych sprzężonych powinny pokrywać się z chwilami czasowymi, dla których występowały przełączenia. Przykładowe uzyskane przebiegi czasowe:



Rys. 5: Trajektoria sprzężona dla trajektorii optymalnej z zaznaczonymi chwilami przełączeń



Rys. 6: Trajektoria sprzężona dla trajektorii optymalnej z zaznaczonymi chwilami przełączeń.

Wyznaczone czasy przełączeń:

$$\tau = [0.0000; 0.1992; 0.3579; 0.4122; 0.6245]$$

Kolejne wartości sterowań $[u_1; u_2]$:

$$u = \begin{array}{ccccc} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

Wartość wskaźnika jakości:

$$Q = 0.6247841$$

Można zauważyć, że odpowiednie przełączenia praktycznie pokrywają się z chwilami czasowymi, dla których wartości funkcji sprzężonej przyjmują wartości zerowe (warunek maksimum Hamiltonianu jest w przybliżeniu spełniony). Jest to dobrze widoczne na wykresie.