PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM PODSTAWOWY

2 MARCA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Cena towaru bez podatku VAT wynosi 240 zł. Ten sam towar wraz z podatkiem VAT i 8% rabatem handlowym kosztuje 231,84 zł. Jaką stawką VAT opodatkowano ten towar?

A) 5% B) 8% C) 23% D) 105%

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli przez x oznaczymy szukaną stawkę VAT, to z podanych informacji mamy równanie

$$\begin{aligned} &240 \cdot \frac{100+x}{100} \cdot 0,92 = 231,84 \\ &100 + x = \frac{231,84}{240 \cdot 0,92} \cdot 100 = 105 \\ &x = 5. \end{aligned}$$

Sposób II

Widać, że 105% to zbyt duża odpowiedź, więc sprawdźmy pozostałe 3 – liczymy nową cenę według kolejnych stawek VAT.

$$\begin{aligned} 240 \cdot 1,05 \cdot 0,92 &= 231,84 \\ 240 \cdot 1,08 \cdot 0,92 &= 238,46 \\ 240 \cdot 1,23 \cdot 0,92 &= 271,58. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Dane są liczby $a = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$, $b = \log_4 \sqrt[5]{16}$, $c = \log_{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{4}$. Liczby te spełniają warunek

A) $a > b > c$ B) $b > a > c$ C) $b > c > a$ D) $c > b > a$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
a &= \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{2}\right)^4 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4} = -4 \\
b &= \log_4 \sqrt[5]{16} = \log_4 4^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \\
c &= \log_{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{4} = \log_{\sqrt[3]{4}} 4^{-1} = \log_{\sqrt[3]{4}} \left(\sqrt[3]{4}\right)^{-3} = -3.
\end{aligned}
$$

Zatem

$$b > c > a.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Dane są liczby $a = 9,1 \cdot 10^{-14}$ oraz $b = 6,5 \cdot 10^{-21}$. Wtedy iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy

A) $59,15 \cdot 10^6$ B) $1,4 \cdot 10^{-35}$ C) $59,15 \cdot 10^{-35}$ D) $1,4 \cdot 10^7$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{a}{b} = \frac{9,1 \cdot 10^{-14}}{6,5 \cdot 10^{-21}} = \frac{7 \cdot 1,3 \cdot 10^{-14}}{5 \cdot 1,3 \cdot 10^{-21}} = \frac{7}{5} \cdot 10^{-14-(-21)} = 1,4 \cdot 10^7.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Wskaż liczbę spełniającą nierówność $(x+2)(x+4)(2-x) < 0$.

A) 1 B) 3 C) -5 D) -4

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Nierówność możemy zapisać w postaci

$$
\begin{aligned}
(x+2)(x+4)(2-x) &< 0 \quad / \cdot (-1) \\
(x+4)(x+2)(x-2) &> 0 \\
(x+4)(x^2-4) &> 0.
\end{aligned}
$$

Teraz łatwo sprawdzić, że spełnia ją np. $x = 3$.

Sposób II

Sprawdzamy, które z podanych liczb spełniają daną nierówności. Gdy to zrobimy, okaże się, że tak jest tylko w przypadku $x = 3$.

$$(3+2)\cdot(3+4)\cdot(2-3) = 5\cdot 7\cdot(-1) < 0.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 5 (1 PKT)

Liczba $\sqrt[4]{16\sqrt[3]{2}+8\sqrt[3]{16}}$ jest równa

A) $2\sqrt[3]{2}$ B) $2\sqrt[7]{2}$ C) $2\sqrt[4]{2}$ D) $2^{\frac{2}{3}}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Liczymy

$$\sqrt[4]{16\sqrt[3]{2}+8\sqrt[3]{16}} = \sqrt[4]{8\cdot 2\sqrt[3]{2}+8\sqrt[3]{16}} = \sqrt[4]{8\sqrt[3]{16}+8\sqrt[3]{16}} =$$
$$= \sqrt[4]{16\sqrt[3]{16}} = 2\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} = 2\sqrt[3]{\sqrt[4]{16}} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Sposób II

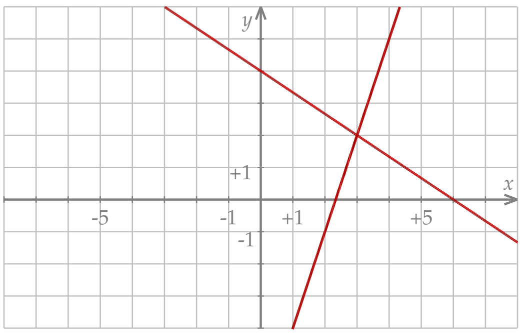
Liczymy

$$\sqrt[4]{16\sqrt[3]{2}+8\sqrt[3]{16}} = \left(2^4\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^3\cdot 2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{13}{3}}+2^{\frac{13}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} =$$
$$= \left(2\cdot 2^{\frac{13}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{16}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 6 (1 PKT)

Na rysunku jest przedstawiona graficzna ilustracja układu dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y.



Wskaż ten układ

A) $\begin{cases} y = x-1 \\ y = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$ B) $\begin{cases} y = 2x-4 \\ y = -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \end{cases}$ C) $\begin{cases} y = 3x-7 \\ y = -\frac{2}{3}x+4 \end{cases}$ D) $\begin{cases} y = -2x+8 \\ y = -\frac{3}{2}x+\frac{13}{2} \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Rosnąca funkcja liniowa przedstawiona na wykresie przechodzi przez punkt $(2,-1)$. Patrząc na podane odpowiedzi łatwo odgadnąć, że jest to prosta $y=3x-7$. Podobnie funkcja malejąca przechodzi przez punkt $(0,4)$. Łatwo zgadnąć (patrząc na odpowiedzi), że jest to prosta $y=-\frac{2}{3}x+4$.

Sposób II

Z wykresu widać, że proste przecinają się w punkcie $(3,2)$. Sprawdzamy, dla którego z układów para $(x,y)=(3,2)$ jest rozwiązaniem.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Równanie $\frac{x^5-81x}{2x^4-18x^2}=0$

A) ma dwa rozwiązania
B) ma trzy rozwiązania
C) nie ma rozwiązań
D) ma jedno rozwiązanie

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} x^5-81x &= x(x^4-3^4)=x(x^2-3^2)(x^2+3^2)=x(x-3)(x+3)(x^2+9),\\ 2x^4-18x^2 &= 2x^2(x^2-9)=2x^2(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

więc licznik zeruje się dla $x=0$, $x=-3$ i $x=3$, ale każda z tych liczb zeruje też mianownik. Zatem równanie nie ma rozwiązań.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 8 (1 PKT)

Liczba $\frac{1}{(2\sqrt{2}+3)^2}$ jest równa

A) $12\sqrt{2}-17$
B) $1+6\sqrt{2}$
C) $6\sqrt{2}-1$
D) $17-12\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Usuńmy najpierw niewymierność z mianownika – w tym celu mnożymy licznik i mianownik przez $(2\sqrt{2}-3)^2$.

$$\frac{1}{(2\sqrt{2}+3)^2}=\frac{(2\sqrt{2}-3)^2}{(2\sqrt{2}+3)^2(2\sqrt{2}-3)^2}=\frac{(2\sqrt{2}-3)^2}{\left((2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)\right)^2}=$$
$$=\frac{8-12\sqrt{2}+9}{(8-9)^2}=17-12\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -10(2-6x)^{-11}(2x-4)^9$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq \frac{1}{3}$. Wartość funkcji f dla argumentu 2019 jest taka sama jak $g(2019)$ jeżeli

A) $g(x) = \frac{5(x-2)^9}{2(3x-1)^{11}}$
B) $g(x) = \frac{-10(2x-4)^9}{(6x-2)^{11}}$
C) $g(x) = \frac{5(x-2)^9}{4(3x-1)^{11}}$
D) $g(x) = \frac{10(x-2)^9}{(3x-1)^{11}}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$f(x) = -10(2-6x)^{-11}(2x-4)^9 = \frac{-10(2(x-2))^9}{(-2(3x-1))^{11}} =$$

$$= \frac{-10 \cdot 2^9(x-2)^9}{-2^{11}(3x-1)^{11}} = \frac{10(x-2)^9}{4(3x-1)^{11}} = \frac{5(x-2)^9}{2(3x-1)^{11}}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 10 (1 PKT)

Punkt $(-1,2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = (a+\sqrt{3})(x-1)+2$. Wynika stąd, że

A) $f(-1) = f(2)$
B) $f(2) = 1$
C) $f(-1) = 0$
D) $f(2) = -1$

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że

$$2 = f(-1) = (a+\sqrt{3}) \cdot (-2) + 2.$$

Zatem $a+\sqrt{3} = 0$ i $f(x) = 2$. W szczególności $f(-1) = f(2)$.

Odpowiedź: A

ZADANIE 11 (1 PKT)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{3-4n}{7}$ dla $n \geqslant 1$. Ciąg ten jest

A) geometryczny i jego iloraz jest równy $q = -\frac{4}{7}$.
B) geometryczny i jego iloraz jest równy $q = \frac{3}{7}$.
C) arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = \frac{3}{7}$.
D) arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -\frac{4}{7}$.

ROZWIĄZANIE

Ciąg arytmetyczny ma wzór postaci

$$a_n = a_1 + (n-1)r = (a_1 - r) + nr,$$

a ciąg geometryczny ma wzór postaci

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Widać więc, że dany ciąg

$$a_n = \frac{3-4n}{7} = \frac{3}{7} - \frac{4}{7} \cdot n$$

jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = -\frac{4}{7}$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 12 (1 PKT)

Gdy przesuniemy wykres funkcji $y = f(x)$ o 2 jednostki w prawo i 3 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = 2x + 1$. Zatem

A) $f(x) = 2x - 6$ B) $f(x) = 2x - 1$ C) $f(x) = 2x + 3$ D) $f(x) = 2x + 2$

ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji $y = f(x)$ otrzymamy z wykresu $y = 2x + 1$ przez przesunięcie o 3 jednostki w dół i 2 jednostki w lewo. Po przesunięciu wykresu $y = 2x + 1$ o 3 jednostki w dół otrzymamy wykres funkcji

$$y = 2x + 1 - 3 = 2x - 2.$$

Jeżeli ten wykres przesuniemy o 2 jednostki w lewo, to otrzymamy wykres funkcji

$$y = f(x) = 2(x+2) - 2 = 2x + 4 - 2 = 2x + 2.$$

Osobom, które pogubiły się w tych przekształceniach polecam lekturę poradnika o przesuwaniu wykresów funkcji.

Odpowiedź: D

ZADANIE 13 (1 PKT)

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$ są dodatnie i $2a_{14} + 3a_{12} = 2\sqrt{6} \cdot a_{13}$. Stąd wynika, że iloraz q tego ciągu jest równy

A) $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ C) $q = \frac{3}{2}$ D) $q = \sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru $a_n = a_1q^{n-1}$ na n-ty wyraz ciągu geometrycznego mamy

$$\begin{aligned}
&2a_{14} + 3a_{12} = 2\sqrt{6} \cdot a_{13} \\
&2a_1q^{13} + 3a_1q^{11} = 2\sqrt{6} \cdot a_1q^{12} \quad / : a_1q^{11} \\
&2q^2 - 2\sqrt{6}q + 3 = 0 \\
&\Delta = 24 - 24 = 0 \\
&q = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: A

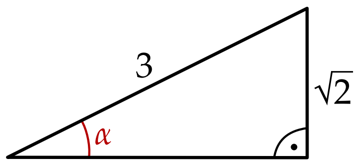
ZADANIE 14 (1 PKT)

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 3, a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α jest równa $\sqrt{2}$. Zatem

A) $\alpha = 45^\circ$ B) $\alpha \in (40^\circ, 60^\circ)$ C) $\alpha \in (30^\circ, 40^\circ)$ D) $\alpha < 30^\circ$

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Wiemy, że

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,47.$$

Teraz odczytujemy z tablic, że $\alpha \approx 28^\circ$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 15 (1 PKT)

Dany jest trójkąt o bokach długości $\log 4, \log 9, \log 25$. Trójkątem podobnym do tego trójkąta jest trójkąt, którego boki mają długości

A) 2, 3, 5 B) $\log 2,\ \log 3,\ \log 5$ C) $\log 8,\ \log 18,\ \log 50$ D) 4, 9, 25

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\log 4 : \log 9 : \log 25 = \log 2^2 : \log 3^2 : \log 5^2 = 2\log 2 : 2\log 3 : 2\log 5 = \\
= \log 2 : \log 3 : \log 5.
\end{aligned}$$

Dany trójkąt jest więc podobny do trójkąta o bokach $\log 2,\ \log 3,\ \log 5$.

Odpowiedź: B

ZADANIE 16 (1 PKT)

Liczba $3 - \operatorname{tg} 70^\circ$ jest

A) ujemna.
B) dodatnia, ale mniejsza od 0,3.
C) większa od 0,3, ale mniejsza od 0,8.
D) większa od 0,8.

ROZWIĄZANIE

Sprawdzamy w tablicach, że

$$\operatorname{tg} 70^\circ \approx 2,75,$$

więc

$$3 - \operatorname{tg} 70^\circ \approx 3 - 2,75 = 0,25.$$

Odpowiedź: B

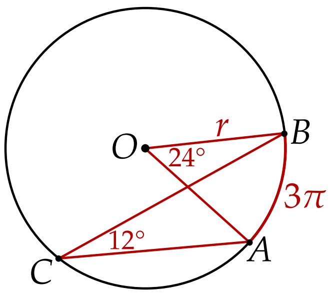
ZADANIE 17 (1 PKT)

Kąt wpisany oparty na łuku okręgu długości 3π ma miarę 12°. Jakie jest pole koła ograniczonego tym okręgiem?

A) $1012,5\pi$
B) $506,25\pi$
C) 100π
D) 225π

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy okrąg



Kąt środkowy AOB jest dwa razy większy od kąta wpisanego ACB, czyli

$$\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB = 2 \cdot 12^\circ = 24^\circ.$$

To oznacza, że łuk AB stanowi

$$\frac{24^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{15}$$

całego okręgu. Stąd

$$\frac{1}{15} \cdot 2\pi r = 3\pi \quad \Rightarrow \quad r = 22,5.$$

Pole koła jest więc równe

$$22,5^2\pi = 506,25\pi.$$

Odpowiedź: B

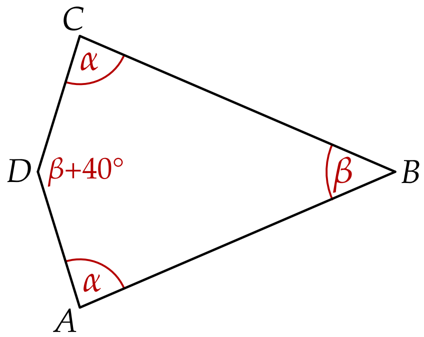
ZADANIE 18 (1 PKT)

Różnica miar dwóch przeciwległych kątów deltoidu jest równa 40°. Suma miar dwóch sąsiednich kątów tego deltoidu może być równa

A) 140° B) 200° C) 320° D) 150°

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy deltoid.



Deltoid ma zawsze dwa przeciwległe kąty tej samej miary – oznaczmy je przez α. Z treści zadania wiemy wtedy, że miary pozostałych kątów możemy oznaczyć przez β i $\beta + 40^\circ$. Suma kątów w czworokącie to 360°, więc

$$360^\circ = 2\alpha + \beta + \beta + 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 160^\circ.$$

To oznacza, że sumy dwóch sąsiednich kątów deltoidu są równe

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = 160^\circ \\ &\alpha + \beta + 40^\circ = 160^\circ + 40^\circ = 200^\circ. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Proste o równaniach $y = (m+3)x + 2$ i $y = (3m-1)x - 2$ są równoległe, gdy

A) $m = 2$ B) $m = 3$ C) $m = 0$ D) $m = 1$

ROZWIĄZANIE

Proste są równoległe jeżeli mają równe współczynniki kierunkowe. Mamy zatem równanie

$$m + 3 = 3m - 1 \quad \iff \quad 2m = 4 \quad \iff \quad m = 2.$$

Odpowiedź: **A**

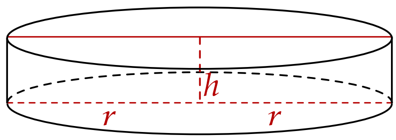
ZADANIE 20 (1 PKT)

Objętość walca, w którym wysokość jest trzykrotnie krótsza od promienia podstawy, jest równa 72π. Zatem promień podstawy tego walca ma długość:

A) 4 B) 8 C) 2 D) 6

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy walec



Z podanej objętości obliczamy promień podstawy

$$72\pi = \pi r^2 \cdot \frac{1}{3}r \quad / \cdot \frac{3}{\pi}$$
$$216 = r^3 \quad \Rightarrow \quad r = 6.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 21 (1 PKT)

Punkt $A = (-3, -1)$ jest końcem odcinka AB, a punkt $M = (-4, 6)$ jest środkiem tego odcinka. Długość odcinka AB jest równa

A) $2\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $10\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Obliczamy długość odcinka AB

$$AB = 2AM = 2\sqrt{(-4-(-3))^2 + (6-(-1))^2} = 2\sqrt{1+49} = 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}.$$

Sposób II

Ze wzoru:

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

na współrzędne środka $M = (x_M, y_M)$ odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ mamy

$$M = (-4, 6) = \left(\frac{-3 + x_B}{2}, \frac{-1 + y_B}{2}\right)$$

$$\begin{cases} -4 = \frac{-3+x_B}{2} \quad / \cdot 2 \\ 6 = \frac{-1+y_B}{2} \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 = -3 + x_B \\ 12 = -1 + y_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 = x_B \\ 13 = y_B. \end{cases}$$

Zatem $B = (-5, 13)$ i

$$AB = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (13 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 22 (1 PKT)

W zestawie $\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{2m \text{ liczb}}, \underbrace{4, 4, 4, \ldots, 4}_{m \text{ liczb}}$ jest $3m$ liczb ($m \geqslant 1$), w tym $2m$ liczb 1 i m liczb 4. Odchylenie standardowe tego zestawu liczb jest równe

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy średnią

$$s = \frac{1 \cdot 2m + 4 \cdot m}{3m} = \frac{6m}{3m} = 2.$$

Liczymy wariancję

$$\sigma^2 = \frac{2m \cdot (1-2)^2 + m \cdot (4-2)^2}{3m} = \frac{6m}{3m} = 2.$$

Liczymy odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2}.$$

Odpowiedź: **D**

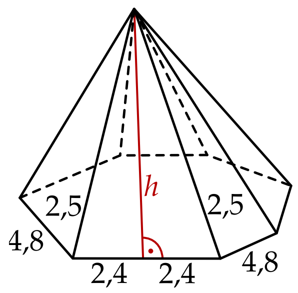
ZADANIE 23 (1 PKT)

Obwód podstawy ostrosłupa prawidłowego siedmiokątnego jest równy 33,6 cm, a długość jego krawędzi bocznej jest równa 2,5 cm. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe

A) $1,68$ cm^2 B) $5,88$ cm^2 C) $23,52$ cm^2 D) $11,76$ cm^2

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy ostrosłup.



Na pole powierzchni bocznej składają się pola 7 trójkątów równoramiennych o podstawie $\frac{33,6}{7} = 4,8$ i wysokości

$$h = \sqrt{2,5^2 - 2,4^2} = \sqrt{6,25 - 5,76} = \sqrt{0,49} = 0,7.$$

Pole to jest więc równe

$$P_b = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 0,7 = 11,76 \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 24 (1 PKT)

Maturzysta na rozwiązanie testu składającego się z 34 zadań przeznaczył 169 minut, przy czym na rozwiązanie każdego z 9 zadań otwartych przeznaczył trzy razy więcej czasu niż na rozwiązanie każdego z zdań zamkniętych. Średnia liczba sekund przeznaczonych na jedno zadanie zamknięte jest równa

A) 180 B) 205 C) 195 D) 170

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy przez x liczbę minut przeznaczoną na rozwiązanie jednego zadania zamkniętego, to na każde zadanie otwarte przypada $3x$ minut. Stąd

$$169 = (34-9)x + 9 \cdot 3x = 25x + 27x = 52x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{169}{52} = \frac{13}{4}$$

Ta liczba minut jest równa

$$\frac{13}{4} \cdot 60 = 195$$

sekund.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 25 (1 PKT)

W pudełku znajdują się dwie kule: niebieska i czerwona. Dziewięciokrotnie losujemy ze zwracaniem jedną kulę z tego pudełka. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie osiem z wylosowanych kul jest tego samego koloru jest równe

A) $\frac{1}{256}$ B) $\frac{9}{512}$ C) $\frac{9}{256}$ D) $\frac{1}{512}$

ROZWIĄZANIE

Za każdym razem wyciągamy jedną z dwóch kul, więc jest

$$2^9 = 512$$

zdarzeń elementarnych. Wyciągnięcie ośmiu czerwonych kul oznacza, że dokładnie jedna z kul jest niebieska. Jest więc 9 takich zdarzeń – niebieską kulę możemy otrzymać w jednym z 9 losowań. Analogicznie jest 9 zdarzeń, w których jest 8 kul niebieskich. Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{18}{512} = \frac{9}{256}$$

Odpowiedź: **C**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

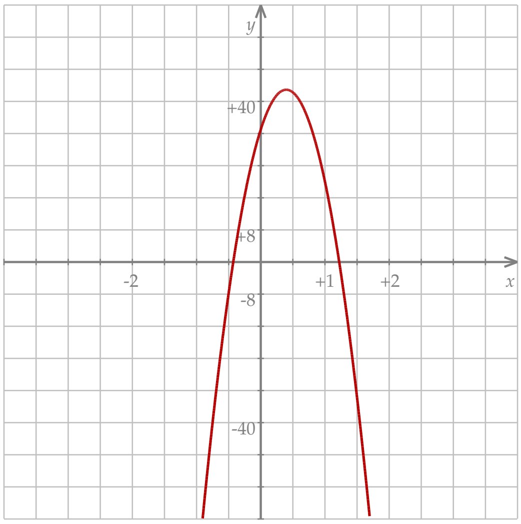
Rozwiąż nierówność $33 + 50x - 63x^2 \leqslant 0$.

ROZWIĄZANIE

Znajdujemy najpierw miejsca zerowe trójmianu $-63x^2 + 50x + 33$.

$$\Delta = 50^2 - 4\cdot(-63)\cdot 33 = 2500 + 8316 = 10816 = 104^2$$
$$x_1 = \frac{-50-104}{-2\cdot 63} = \frac{25+52}{63} = \frac{77}{63} = \frac{11}{9}$$
$$x_2 = \frac{-50+104}{-2\cdot 63} = \frac{25-52}{63} = -\frac{27}{63} = -\frac{3}{7}.$$

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest ujemny, wykres tego trójmianu jest parabolą o ramionach skierowanych w dół.



Otrzymujemy stąd rozwiązanie nierówności

$$\left(-\infty,-\frac{3}{7}\right\rangle \cup \left\langle \frac{11}{9},+\infty\right).$$

Odpowiedź: $\left(-\infty,-\frac{3}{7}\right\rangle \cup \left\langle \frac{11}{9},+\infty\right)$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $(x^3+64)(x^4-81)=0$.

ROZWIĄZANIE

Wyrażenie w pierwszym nawiasie zeruje się gdy

$$x^3=-64=-4^3 \quad\iff\quad x=-4,$$

a wyrażenie w drugim nawiasie gdy

$$x^4=81=3^4 \quad\iff\quad x=\pm 3.$$

Odpowiedź: $x\in\{-3,-4,3\}$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b prawdziwa jest nierówność

$$a^2+b^2+1\geqslant a+b+ab.$$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekształcamy daną nierówność w sposób równoważny.

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2+1 \geqslant a+b+ab \quad / \cdot 2 \\
&2a^2+2b^2+2-2a-2b-2ab \geqslant 0 \\
&(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(a^2-2ab+b^2) \geqslant 0 \\
&(a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, więc wyjściowa nierówność też musiała być spełniona.

Sposób II

Potraktujmy daną nierówność

$$a^2-a(1+b)+(b^2-b+1) \geqslant 0$$

Jako zwykłą nierówność kwadratową zmiennej a. Liczymy Δ-ę.

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1+b)^2-4(b^2-b+1) = 1+2b+b^2-4b^2+4b-4 = \\
&= -3b^2+6b-3 = -3(b^2-2b+1) = -3(b-1)^2 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Ponieważ Δ jest zawsze niedodatnia, wykres trójmianu będącego lewą stroną nierówności nie schodzi poniżej osi Ox (może być styczny do osi Ox). Zatem rzeczywiście

$$a^2-a(1+b)+(b^2-b+1) \geqslant 0.$$

ZADANIE 29 (2 PKT)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, suma 221 początkowych wyrazów jest równa 1547. Oblicz sumę $a_{93}+a_{111}+a_{129}$.

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzoru $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n$ na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\begin{aligned}
1547 &= \frac{2a_1+220r}{2} \cdot 221 = (a_1+110r) \cdot 221 \quad / : 221 \\
7 &= a_1+110r.
\end{aligned}$$

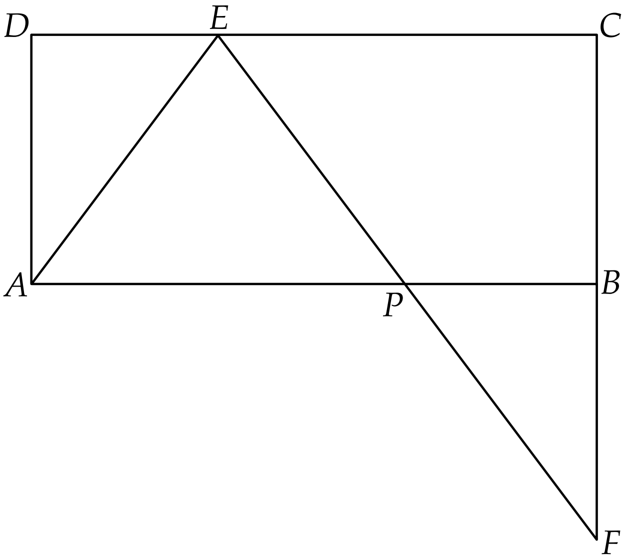
Mamy zatem

$$\begin{aligned}
a_{93}+a_{111}+a_{129} &= (a_1+92r)+(a_1+110r)+(a_1+128r) = \\
&= 3a_1+330r = 3(a_1+110r) = 3 \cdot 7 = 21.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: **21**

ZADANIE 30 (2 PKT)

Dany jest prostokąt $ABCD$. Na boku CD tego prostokąta wybrano taki punkt E, że $|EC| = 2|DE|$, a na przedłużeniu boku CB wybrano taki punkt F, że $|BF| = |BC|$. Niech P oznacza punkt przecięcia prostej EF z prostą AB (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty AED i PFB są przystające.



ROZWIĄZANIE

Sposób I

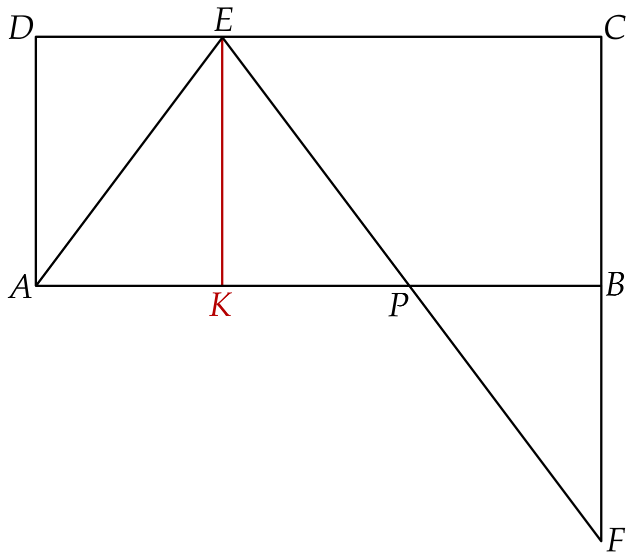
Odcinek PB jest odcinkiem łączącym środki boków w trójkącie EFC (bo $BF = \frac{1}{2}CF$ i $PB \parallel EC$), więc $PB = \frac{1}{2}EC = DE$. Ponadto

$$BF = BC = DA,$$

więc trójkąty prostokątne AED i PFB mają przyprostokątne tej samej długości. Trójkąty te są więc przystające.

Sposób II

Niech K będzie rzutem punktu E na bok AB.



Trójkąty PFB i PEK mają równe kąty (bo oba są prostokątne i $\measuredangle FPB = \measuredangle EPK$) oraz $BF = BC = EK$. To oznacza, że są przystające, czyli w szczególności

$$PB = KP \quad \Rightarrow \quad PB = \frac{1}{2}KB = \frac{1}{2}EC = DE.$$

Wiemy ponadto, że $BF = BC = DA$, więc przyprostokątne trójkątów prostokątnych AED i PFB mają równe długości. Trójkąty te są więc przystające.

Zadanie 31 (2 pkt)

Losujemy jedną liczbę całkowitą z przedziału $(-29, 28)$ i jedną liczbę całkowitą z przedziału $(-21, 55)$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest ujemny. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie

Liczby całkowite w pierwszym i w drugim przedziale to odpowiednio:

$$-28, -27, \ldots, 26, 27$$
$$-20, -19, \ldots, 53, 54.$$

Jest ich odpowiednio $28 + 1 + 27 = 56$ i $20 + 1 + 54 = 75$. W takim razie

$$|\Omega| = 56 \cdot 75.$$

W zdarzeniach sprzyjających wylosowane liczby muszą być różnych znaków. Pierwszą liczbę ujemną a drugą dodatnią możemy wybrać na

$$28 \cdot 54$$

sposoby, a pierwszą dodatnią, a drugą ujemną na

$$27 \cdot 20$$

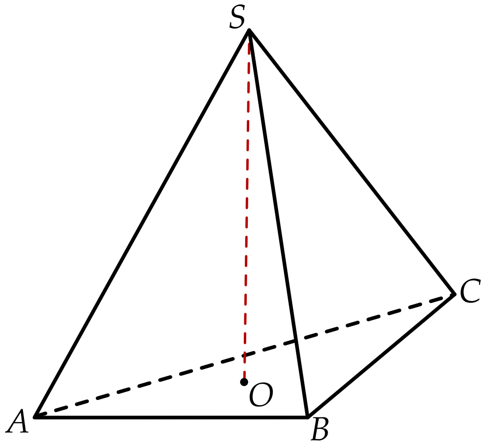
sposobów. Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{28 \cdot 54 + 27 \cdot 20}{56 \cdot 75} = \frac{7 \cdot 54 + 27 \cdot 5}{14 \cdot 75} = \frac{7 \cdot 18 + 9 \cdot 5}{14 \cdot 25} = \frac{171}{350}.$$

Odpowiedź: $\frac{171}{350}$

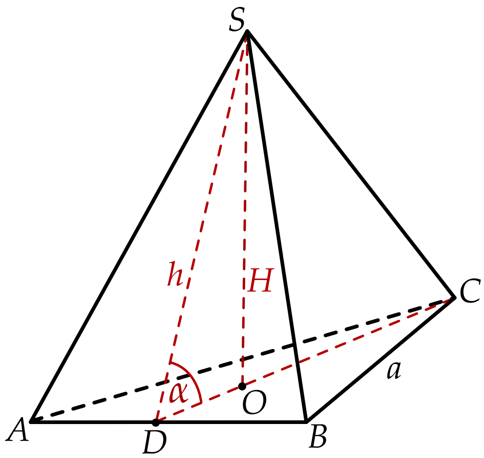
ZADANIE 32 (4 PKT)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ pole powierzchni bocznej jest trzy razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy, a przez h i H odpowiednio długości wysokości ściany bocznej oraz wysokości ostrosłupa.



Sposób I

Z podanego stosunku pola bocznego do pola podstawy mamy

$$3 = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}ah}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{6ah}{a^2\sqrt{3}} = \frac{6h}{a\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ponieważ środek O trójkąta równobocznego ABC dzieli jego wysokość DC w stosunku 2:1, mamy

$$DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Z trójkąta prostokątnego DOS obliczamy teraz wysokość ostrosłupa.

$$H = \sqrt{SD^2 - DO^2} = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \sqrt{\frac{24a^2}{36}} = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Stąd

$$\sin\alpha = \frac{H}{h} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Sposób II

Zauważmy, że z treści zadania wynika, że ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi o polu takim samym jak pole podstawy ostrosłupa. To oznacza, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi i mamy do czynienia z czworościanem foremnym. W szczególności

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Resztę rachunków przeprowadzamy tak samo jak w pierwszym sposobie.

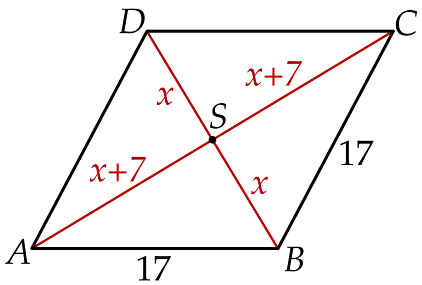
Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Oblicz pole rombu o obwodzie 68 cm, w którym długości przekątnych różnią się o 14 cm.

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy długości przekątnych rombu przez $2x$ i $2x + 14$.



Ponieważ przekątne rombu dzielą się na połowy oraz są prostopadłe, trójkąt ABS jest prostokątny oraz $AS = x + 7$, $BS = x$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$\begin{aligned}
&x^2 + (x+7)^2 = 17^2\\
&x^2 + x^2 + 14x + 49 = 289\\
&2x^2 + 14x - 240 = 0 \quad / : 2\\
&x^2 + 7x - 120 = 0\\
&\Delta = 49 + 480 = 529 = 23^2\\
&x = \frac{-7-23}{2} < 0 \quad \vee \quad x = \frac{-7+23}{2} = 8.
\end{aligned}$$

Zatem $x = 8$ i $x + 7 = 15$.

Pole rombu jest cztery razy większe od pola trójkąta ABS (bo wszystkie cztery narysowane trójkąty są przystające), zatem

$$P_{ABCD} = 4P_{ABS} = 2x(x+7) = 240.$$

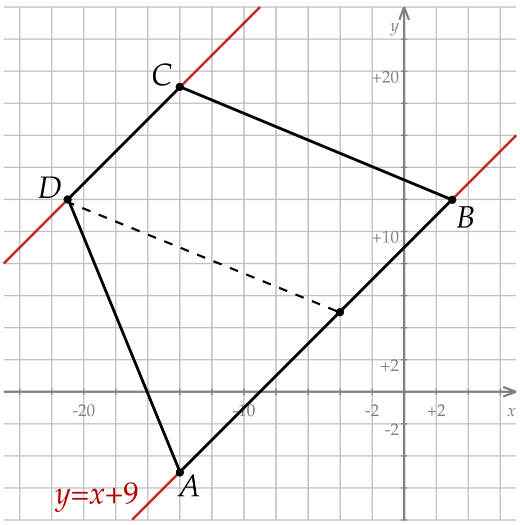
Odpowiedź: 240 cm^2

ZADANIE 34 (5 PKT)

Punkty $B = (3,12)$, $C = (-14,19)$ i $D = (-21,12)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, i w którym $AB \parallel CD$. Oblicz współrzędne wierzchołka A tego trapezu.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy trapez.



Plan jest taki: napiszemy równanie prostej CD, potem równanie prostej AB i na prostej AB znajdziemy punkt A taki, że $AD = BC$.

Do dzieła. Szukamy równania prostej CD w postaci $y = ax + b$ i podstawiamy współrzędne punktów C i D.

$$\begin{cases} 19 = -14a + b \\ 12 = -21a + b \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$7 = 7a \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Współczynnik b nie jest nam potrzebny. Teraz wyznaczamy prostą AB – jest ona równoległa do CD, więc ma równanie postaci $y = x + b$. Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu B.

$$12 = 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = 9.$$

W takim razie prosta AB ma równanie postaci $y = x+9$ i współrzędne punktu A mają postać $A = (x, x+9)$. Wiemy ponadto, że trapez jest równoramienny, więc

$$\begin{aligned}
&DA^2 = BC^2\\
&(x+21)^2 + (x+9-12)^2 = (-14-3)^2 + (19-12)^2\\
&x^2 + 42x + 441 + x^2 - 6x + 9 = 289 + 49\\
&2x^2 + 36x + 112 = 0 \quad / : 4\\
&\frac{1}{2}x^2 + 9x + 28 = 0\\
&\Delta = 81 - 56 = 25\\
&x = -9 - 5 = -14 \quad \text{lub} \quad x = -9 + 5 = -4.
\end{aligned}$$

Zatem $A = (-14, -14+9) = (-14, -5)$ lub $A = (-4, -4+9) = (-4, 5)$. To jeszcze nie całkiem koniec, bo z założenia trapez ma nie być równoległobokiem, czyli jego podstawy nie mogą mieć równych długości. Tymczasem, jeżeli $A = (-4, 5)$, to

$$\begin{aligned}
AB^2 &= (3+4)^2 + (12-5)^2 = 49 + 49\\
CD^2 &= (-21+14)^2 + (12-19)^2 = 49 + 49 = AB^2.
\end{aligned}$$

Zatem musi być $A = (-14, -5)$. Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku $AB > CD$.

Odpowiedź: $A = (-14, -5)$