PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM PODSTAWOWY

13 KWIETNIA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Różnica $2\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3}-\log_{\sqrt{2}}8$ jest równa

A) -2 B) $\log_6\frac{9}{4}$ C) -5 D) 7

ROZWIĄZANIE

Liczymy z definicji logarytmu

$$2\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3}=\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{3}\right)^2=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$$
$$\log_{\sqrt{2}}8=\log_{\sqrt{2}}2^3=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6=6.$$

Stąd

$$2\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3}-\log_{\sqrt{2}}8=1-6=-5.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba $3^{26}-24\cdot 3^{23}$ jest równa

A) -3^{23} B) 3^3 C) 3^{23} D) 3^{24}

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$3^{26}-24\cdot 3^{23}=3^3\cdot 3^{23}-24\cdot 3^{23}=27\cdot 3^{23}-24\cdot 3^{23}=$$
$$=(27-24)\cdot 3^{23}=3\cdot 3^{23}=3^{24}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Jacek kupił 8 bułek po 0,65 zł za sztukę oraz 1,5 kilograma ogórków po 4,40 zł za kilogram. Oszacował, że za zakupy zapłacił w przybliżeniu 12 zł. Błąd względny tego przybliżenia wynosi:

A) $\frac{1}{59}$ B) 0,2 C) $\frac{20}{118}$ D) 11,8

ROZWIĄZANIE

Jacek zapłacił za zakupy

$$8 \cdot 0,65 + 1,5 \cdot 4,4 = 11,8.$$

Błąd względny podanego przybliżenia jest więc równy

$$\frac{12 - 11,8}{11,8} = \frac{0,2}{11,8} = \frac{2}{118} = \frac{1}{59}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 4 (1 PKT)

Narty po serii obniżek ceny o 5% kosztują 2606,42 zł. Oblicz ile razy obniżono cenę nart o 5% jeżeli ich cena po drugiej obniżce wynosiła 2888 zł.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

ROZWIĄZANIE

Wiemy jaka jest cena po drugiej obniżce, więc sprawdźmy jaka będzie cena po kolejnych obniżkach.

$$2888 \cdot 0,95 = 2743,6$$
$$2743,6 \cdot 0,95 = 2606,42.$$

Potrzebne są więc dodatkowe 2 obniżki, czyli w sumie dokonano 4 obniżek ceny.

Odpowiedź: B

ZADANIE 5 (1 PKT)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{3-2x}{5} \leqslant \frac{1}{3}$ jest przedział

A) $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{2}{3}, +\infty\right)$ C) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right\rangle$ D) $\left\langle\frac{7}{3}, +\infty\right)$

ROZWIĄZANIE

Rozwiążmy podaną nierówność

$$\begin{aligned}
&\frac{3-2x}{5} \leqslant \frac{1}{3} \quad / \cdot 15\\
&3(3-2x) \leqslant 5\\
&9-6x \leqslant 5\\
&4 \leqslant 6x \quad / : 6\\
&x \geqslant \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 6 (1 PKT)

Równość $\left(a+\sqrt{2}\right)^{-2} = 3+2\sqrt{2}$ jest prawdziwa dla

A) $a=\sqrt{13}$ B) $a=-1$ C) $a=2$ D) $a=\sqrt{13}+1$

ROZWIĄZANIE

Przekształćmy podany warunek

$$\begin{aligned}
&3+2\sqrt{2} = \left(a+\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{(a+\sqrt{2})^2} \quad / \cdot (a+\sqrt{2})^2\\
&(3+2\sqrt{2})(a+\sqrt{2})^2 = 1 \quad / : (3+2\sqrt{2})\\
&a^2+2a\sqrt{2}+2 = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3-2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

To oznacza, że równość ta jest spełniona np. dla $a=-1$.

Odpowiedź: B

ZADANIE 7 (1 PKT)

Liczbę $\frac{673}{3333}$ można zapisać w postaci nieskończonego ułamka dziesiętnego okresowego. Trzydziestą cyfrą po przecinku jego rozwinięcia jest

A) 2 B) 0 C) 1 D) 9

ROZWIĄZANIE

Na kalkulatorze sprawdzamy, że

$$\frac{673}{3333} = 0,20192019\ldots = 0,(2019).$$

Ponieważ okres rozwinięcia dziesiętnego jest równy 4, trzydziesta cyfra po przecinku jest taka sama jak cyfra na miejscu $30-28=2$, czyli jest to cyfra 0.

Odpowiedź: B

ZADANIE 8 (1 PKT)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-4}{3(x+4)} = -\frac{1}{9}$ jest liczba

A) -2 B) 2 C) 4 D) -4

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{3(x+4)} &= -\frac{1}{9} \quad / \cdot 9(x+4) \\ 3(x-4) &= -(x+4) \\ 3x-12 &= -x-4 \quad \Rightarrow \quad 4x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 9 (1 PKT)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 1019 - (x-3019)(2019+x)$ jest parabola, której wierzchołek leży na prostej

A) $y = 3019$ B) $x = 2019$ C) $x = 500$ D) $y = 1019$

ROZWIĄZANIE

Wierzchołek paraboli $y = -(x-3019)(x+2019)$ leży na jej osi symetrii, czyli na prostej

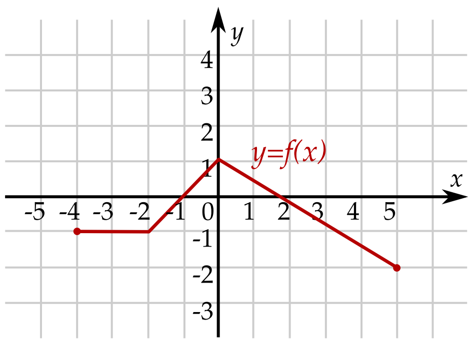
$$x = \frac{3019-2019}{2} = 500.$$

Dana parabola $f(x) = 1019 - (x-3019)(2019+x)$ powstaje z powyższej paraboli przez przesunięcie o 1019 jednostek do góry. Pierwsza współrzędna wierzchołka przy tej operacji nie ulegnie zmianie.

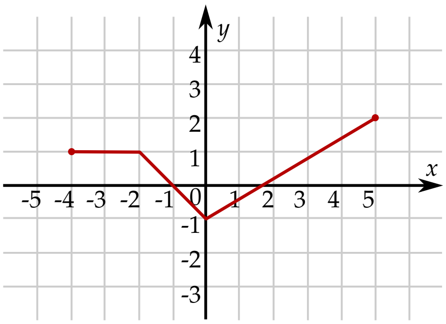
Odpowiedź: C

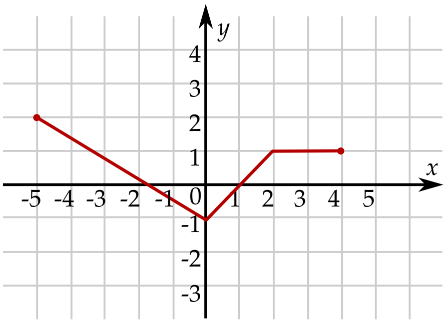
ZADANIE 10 (1 PKT)

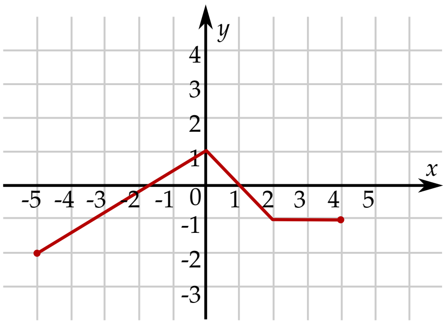
Rysunek przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.

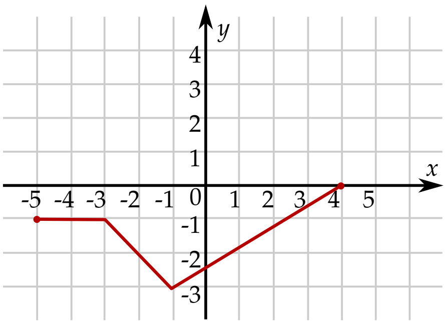


Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(-x)$.

A)


B)


C)


D)


ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez odbicie względem osi Oy.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Wykres funkcji liniowej $f(x) = 2s^2x + s - 1 - 2x$ nie ma punktów wspólnych z prostą $y = -2$. Zatem

A) $s = -2$ B) $s = 0$ C) $s = -1$ D) $s = 1$

ROZWIĄZANIE

Wykresem funkcji liniowej

$$y = 2s^2x + s - 1 - 2x = 2(s^2 - 1)x + (s - 1)$$

jest prosta. Jeżeli ta prosta nie ma przecinać poziomej prostej $y = -2$, to też musi być pozioma. W takim razie $s^2 = 1$, czyli $s \pm 1$. Jeżeli $s = -1$, wykres funkcji f pokrywa się z prostą $y = -2$, więc musi być $s = 1$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Największą wartością funkcji $y = -(x^2 - 2)^2 + (x^2 + 2)^2$ w przedziale $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ jest

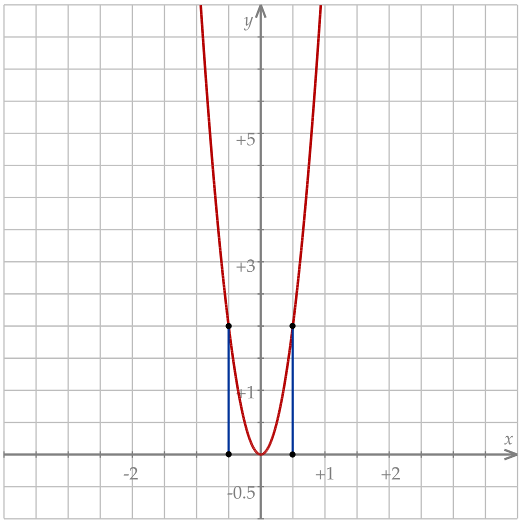
A) 0 B) 8 C) 4 D) 2

ROZWIĄZANIE

Wykresem funkcji

$$y = -(x^2-2)^2 + (x^2+2)^2 = -(x^4-4x^2+4) + (x^4+4x^2+4) = 8x^2$$

jest parabola o ramionach skierowanych w górę i wierzchołku w punkcie $(0,0)$.



Jeżeli ją naszkicujemy, to widać, że na danym przedziale największa wartość to

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 8\cdot\frac{1}{4} = 2.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 13 (1 PKT)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_1 = 4\sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{2}$. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać

A) $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$ B) $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$ C) $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ D) $a_n = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-3}}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy iloraz ciągu

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem ciąg ma wzór

$$a_n = a_1q^{n-1} = 4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^2\cdot\sqrt{2}}{2^{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-3}}.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 14 (1 PKT)

Układ równań $\begin{cases} 2x + py = 3 \\ qx + 3y = 6 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y ma nieskończenie wiele rozwiązań. Zatem liczba $p+q$ jest równa

A) 6 B) 1 C) $\frac{13}{2}$ D) $\frac{11}{2}$

ROZWIĄZANIE

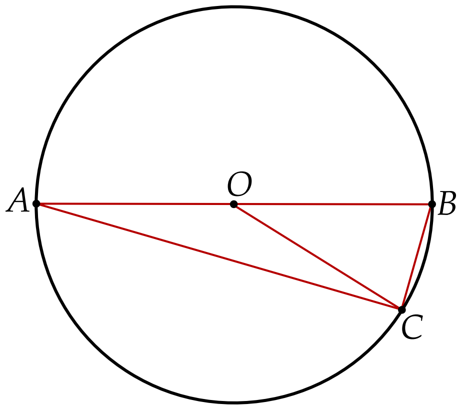
Jeżeli układ ma mieć nieskończenie wiele rozwiązań, to proste odpowiadające równaniom układu muszą się pokrywać. To oznacza, że jedno równanie musi być wielokrotnością drugiego. Patrząc na prawe strony równań widzimy, że drugie równanie musi powstawać z pierwszego przez mnożenie przez 2. W takim razie $q = 4$ i $p = \frac{3}{2}$. Stąd

$$p + q = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku O i promieniu r. Na tym okręgu wybrano punkt C, taki, że $|OB| = 2|BC|$ (zobacz rysunek).



Pole trójkąta AOC jest równe

A) $\frac{r^2\sqrt{15}}{8}$ B) $\frac{1}{2}r^2$ C) $\frac{r^2\sqrt{15}}{16}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

ROZWIĄZANIE

Kąt ACB jest oparty na średnicy, więc jest prosty. Zatem

$$\sin\measuredangle A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}OB}{2OB} = \frac{1}{4}$$

oraz

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = \sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{15r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{15}}{2}.$$

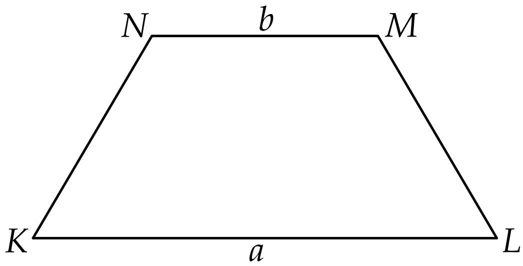
Korzystamy teraz ze wzoru z sinusem na pole trójkąta

$$P_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot AC \cdot \sin \measuredangle A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{r^2\sqrt{15}}{16}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 16 (1 PKT)

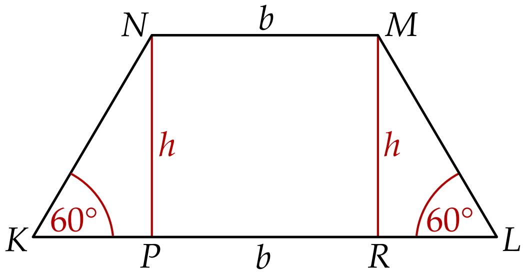
Dany jest trapez równoramienny $KLMN$, którego podstawy mają długości $|KL| = a$, $|MN| = b$, $a > b$. Kąt KLM ma miarę 60°. Długość ramienia LM tego trapezu jest równa



A) $2(a-b)$ B) $a-b$ C) $a+\frac{1}{2}b$ D) $\frac{a+b}{2}$

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy wysokości NP i MR trapezu.



Zauważmy, że

$$KP = RL = \frac{KL - NM}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Sposób I

Trójkąt RLM to połówka trójkąta równobocznego o boku długości $2RL$, więc

$$ML = 2RL = a - b.$$

Sposób II

W trójkącie RLM mamy

$$\frac{RL}{ML} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad ML = 2RL = a - b.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, spełnia warunek $a_5 + a_6 + a_7 = 51$. Wtedy
A) $a_6 = 19$ B) $a_6 = 15$ C) $a_6 = 51$ D) $a_6 = 17$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli oznaczymy przez r różnicę ciągu a_n, to

$$\begin{aligned} a_5 &= a_6 - r \\ a_7 &= a_6 + r. \end{aligned}$$

Zatem

$$51 = a_5 + a_6 + a_7 = a_6 - r + a_6 + a_6 + r = 3a_6 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 17.$$

Sposób II

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$\begin{aligned} &51 = a_5 + a_6 + a_7 = (a_1 + 4r) + (a_1 + 5r) + (a_1 + 6r) = 3a_1 + 15r \quad / : 3 \\ &17 = a_1 + 5r. \end{aligned}$$

Zatem $a_6 = a_1 + 5r = 17$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 18 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $\frac{\cos 129^\circ \cos 51^\circ}{\sin 51^\circ \sin 129^\circ}$ wynosi
A) 1 B) -1 C) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 51^\circ}$ D) $1 - \frac{1}{\sin^2 51^\circ}$

ROZWIĄZANIE

Na mocy wzorów

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos\alpha \end{aligned}$$

mamy

$$\begin{aligned} \frac{\cos 129^\circ \cos 51^\circ}{\sin 51^\circ \sin 129^\circ} &= \frac{\cos(180^\circ - 51^\circ)\cos 51^\circ}{\sin 51^\circ \sin(180^\circ - 51^\circ)} = \\ &= -\frac{\cos^2 51^\circ}{\sin^2 51^\circ} = \frac{\sin^2 51^\circ - 1}{\sin^2 51^\circ} = 1 - \frac{1}{\sin^2 51^\circ}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: D

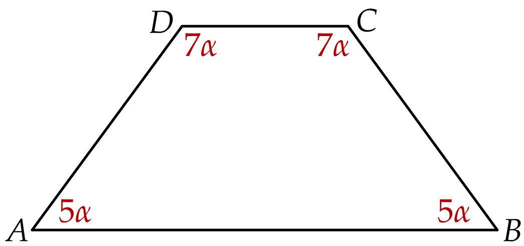
ZADANIE 19 (1 PKT)

Miary dwóch kątów trapezu równoramiennego pozostają w stosunku 5 : 7. Wynika stąd, że największy kąt tego trapezu ma miarę

A) 105° B) 15° C) 75° D) 125°

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy miarę najmniejszego kąta trapezu równoramiennego przez 5α to kąty rozwarte trapezu mają miarę 7α.



Suma kątów przy jednym ramieniu trapezu jest równa 180°, więc

$$180^\circ = 5\alpha + 7\alpha = 12\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15^\circ.$$

Zatem największy kąt trapezu ma miarę

$$7\alpha = 105^\circ.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 20 (1 PKT)

Boki równoległoboku $ABCD$ zwierają się w prostych o równaniach:

$$\begin{aligned} &x + (2-m)y + 2 = 0, \\ &mx - my + 3 = 0, \\ &y = x - 7, \\ &2x + my - 7 = 0 \end{aligned}$$

Zatem

A) $m = -\frac{4}{3}$ B) $m = \frac{3}{4}$ C) $m = \frac{4}{3}$ D) $m = -\frac{3}{4}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że równanie prostej $mx - my + 3 = 0$ możemy zapisać w postaci

$$x - y + \frac{3}{m} = 0$$

(dla $m = 0$ to równanie nie opisuje prostej), więc prosta ta jest równoległa do prostej $y = x - 7$. To oznacza, że pozostałe dwie proste

$$y = -\frac{1}{2-m}x - \frac{2}{2-m}$$
$$y = -\frac{2}{m}x + \frac{7}{m}$$

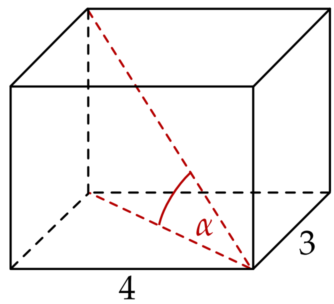
też muszą być równoległe. Zatem

$$-\frac{1}{2-m} = -\frac{2}{m} \quad / \cdot (-m(2-m))$$
$$m = 2(2-m) = 4 - 2m \quad \iff \quad 3m = 4 \quad \iff \quad m = \frac{4}{3}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 21 (1 PKT)

Podstawą graniastosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 3 i 4. Kąt α, jaki przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego podstawą, jest równy 30° (zobacz rysunek).

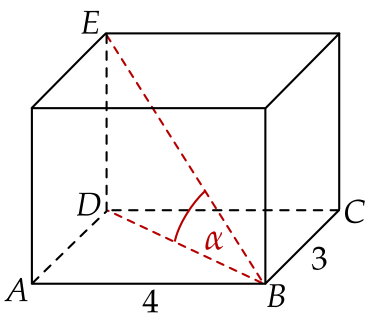


Wysokość graniastosłupa jest równa

A) $5\sqrt{3}$ B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ D) $5\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Przyjmijmy oznaczenia z rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Patrzymy teraz na trójkąt prostokątny DBE.

$$\frac{DE}{DB} = \operatorname{tg} \alpha$$
$$DE = DB \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 22 (1 PKT)

Wśród 200 osób przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie o liczbę filmów kinowych obejrzanych w ostatnim roku. Wyniki ankiety zebrano w poniższej tabeli.

Liczba filmów	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	57	79	38	17	7	2

Średnia liczba obejrzanych filmów przez jedną ankietowaną osobę jest równa

A) 2,44 B) 1,22 C) 1,88 D) 2,5

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{0 \cdot 57 + 1 \cdot 79 + 2 \cdot 38 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2}{57 + 79 + 38 + 17 + 7 + 2} = \frac{244}{200} = 1,22.$$

Odpowiedź: **B**

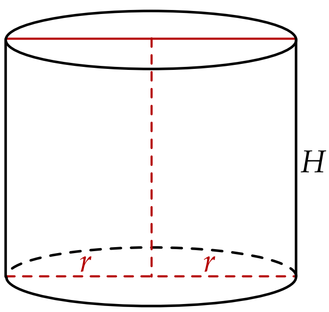
ZADANIE 23 (1 PKT)

Przekrój osiowy walca jest prostokątem o przekątnej $4\sqrt{5}$ i polu 20. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe

A) 20π B) 24π C) 40π D) 30π

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez r i H odpowiednio promień podstawy i wysokość walca.



Z podanego pola przekroju osiowego mamy

$$2r \cdot H = 20,$$

więc pole powierzchni bocznej walca jest równe

$$2\pi r \cdot H = 20\pi.$$

Odpowiedź: A

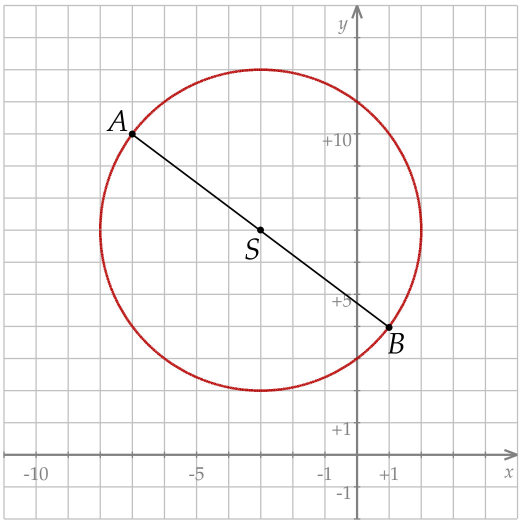
ZADANIE 24 (1 PKT)

Punkty $A = (-7, 10)$ i $B = (1, 4)$ są końcami średnicy AB okręgu o. Długość okręgu o jest równa

A) 5π B) 25π C) 10π D) 20π

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Jeżeli r jest promieniem danego okręgu, to

$$2r = AB = \sqrt{(1+7)^2 + (4-10)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$$

Długość okręgu o jest więc równa

$$2\pi r = 10\pi.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 25 (1 PKT)

W pewnej loterii fantowej przygotowano dwie urny z losami, przy czym w drugiej urnie było trzy razy więcej losów niż w pierwszej urnie. Prawdopodobieństwo wybrania losu wygrywającego z pierwszej urny jest równe $\frac{1}{6}$, a prawdopodobieństwo wybrania losu wygrywającego z drugiej urny jest równe $\frac{1}{4}$. Przed rozpoczęciem loterii losy z obu urn zmieszano i umieszczono w jednej urnie. Po tej operacji prawdopodobieństwo wybrania losu wygrywającego jest równe

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{11}{48}$ D) $\frac{7}{24}$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli w pierwszej urnie było n losów wygrywających, to wszystkich losów w pierwszej urnie było $6n$. W takim razie w drugiej urnie było $3\cdot 6n = 18n$ losów i wśród nich było $4,5n$ wygrywających. Po zmieszaniu losów z obu urn prawdopodobieństwo wygranej jest więc równe

$$\frac{n+4,5n}{6n+18n} = \frac{5,5}{24} = \frac{11}{48}.$$

Odpowiedź: **C**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Jeżeli do licznika i do mianownika dodatniego ułamka dodamy jego licznik, to otrzymamy $\frac{2}{5}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 6, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Oznaczmy szukany ułamek przez $\frac{a}{b} = k$. Mamy zatem $a = kb$ oraz

$$\frac{2}{5} = \frac{a+a}{b+a} = \frac{kb+kb}{b+kb} = \frac{2k}{k+1}$$
$$2(k+1) = 10k$$
$$2 = 8k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}.$$

To jednak nie koniec, bo nie wiemy, czy dany ułamek jest nieskracalny. Na razie wiemy tylko, że szukany ułamek ma postać $\frac{a}{4a}$. Zapiszmy teraz drugi z podanych warunków.

$$\frac{a+6}{4a+6} = \frac{1}{2}$$
$$2a+12 = 4a+6 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

Zatem szukany ułamek to $\frac{a}{4a} = \frac{3}{12}$.

Sposób II

Oznaczmy szukany ułamek przez $\frac{a}{b}$. Z podanych informacji otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{a+a}{b+a} = \frac{2}{5} \\ \frac{a+6}{b+6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2a}{b+a} = \frac{2}{5} \\ 2a + 12 = b + 6 \end{cases}$$

Podstawiamy teraz $b = 2a + 6$ z drugiego równania do pierwszego i mamy

$$\begin{aligned} &\frac{2a}{2a+6+a} = \frac{2}{5} \\ &\frac{2a}{3a+6} = \frac{2}{5} \\ &10a = 6a + 12 \quad \Rightarrow \quad a = 3. \end{aligned}$$

Mamy stąd $b = 2a + 6 = 12$ i szukany ułamek to $\frac{3}{12}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{12}$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$1 + \frac{x^6 + y^6}{2} \geqslant x^3 + y^3$$

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy daną nierówność w sposób równoważny.

$$\begin{aligned} &1 + \frac{x^6 + y^6}{2} \geqslant x^3 + y^3 \quad / \cdot 2 \\ &2 + x^6 + y^6 \geqslant 2x^3 + 2y^3 \\ &(x^6 - 2x^3 + 1) + (y^6 - 2y^3 + 1) \geqslant 0 \\ &(x^3 - 1)^2 + (y^3 - 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a przekształcaliśmy ją w sposób równoważny, więc wyjściowa nierówność też musiała być prawdziwa.

ZADANIE 28 (2 PKT)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola styczna do prostej $y = 8$ w punkcie $A = (5, 8)$ oraz przechodząca przez punkt $B = (-1, -8)$. Wyznacz wartości współczynników a, b i c.

ROZWIĄZANIE

Podany punkt styczności $A = (5,8)$ paraboli z poziomą prostą musi być wierzchołkiem tej paraboli. To oznacza, że parabola ta ma postać kanoniczną

$$f(x) = a(x-5)^2 + 8.$$

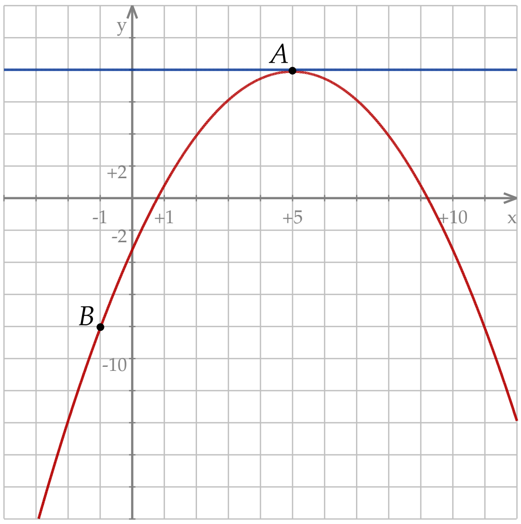
Współczynnik a wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu $B = (-1,-8)$.

$$-8 = a(-1-5)^2 + 8 = 36a + 8 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}$$

Stąd

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{4}{9}(x-5)^2 + 8 = -\frac{4}{9}(x^2 - 10x + 25) + 8 = \\ &= -\frac{4}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{100}{9} + 8 = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{28}{9}. \end{aligned}$$

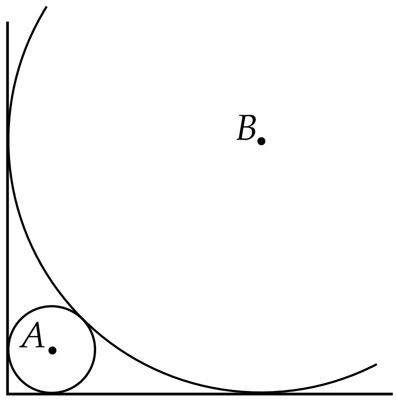
Na koniec wykres dla ciekawskich.



Odpowiedź: $(a,b,c) = \left(-\frac{4}{9}, \frac{40}{9}, -\frac{28}{9}\right)$

ZADANIE 29 (2 PKT)

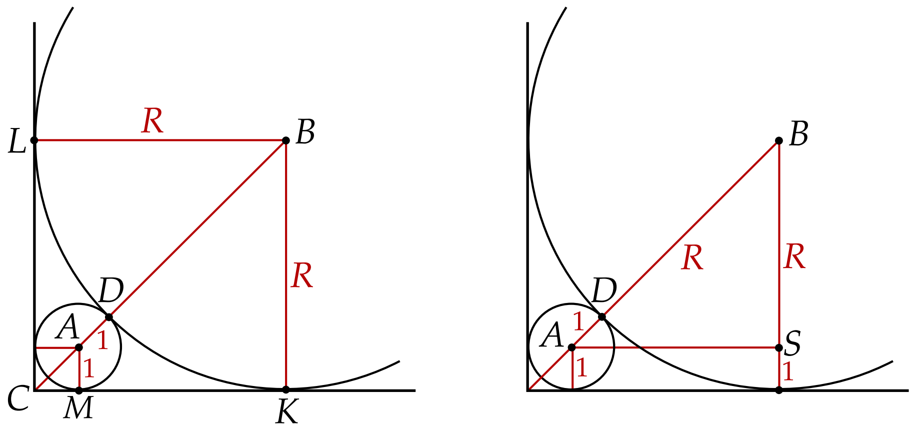
Okręgi o środkach odpowiednio A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego (zobacz rysunek). Promień okręgu o środku A jest równy 1.



Uzasadnij, że promień okręgu o środku B jest większy niż $2+2\sqrt{2}$.

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od dorysowania, wszystkiego co się da.



Sposób I

Zauważmy, że

$$R\sqrt{2} = BC = CD + DB > 2 + R$$

$$R(\sqrt{2}-1) > 2 \quad / : (\sqrt{2}-1)$$

$$R > \frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2\sqrt{2}+2.$$

Sposób II

Popatrzmy na trójkąt prostokątny BCK. Mamy w nim

$$CK = BK = R$$

$$BC = AC + AD + BD = \sqrt{2}+1+R.$$

Wystarczy teraz napisać twierdzenie Pitagorasa, lub jeszcze prościej, zauważyć, że $BC = BK\sqrt{2}$ (przekątna w kwadracie $CKBL$). Mamy więc

$$\begin{aligned}
&BC = BK\sqrt{2}\\
&\sqrt{2}+1+R = R\sqrt{2}\\
&R(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1\\
&R = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} > \frac{\sqrt{2}+1}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}+2.
\end{aligned}$$

Sposób III

Tym razem popatrzmy na trójkąt prostokątny ABS. Jego boki mają długości $AS = BS = R-1$ oraz $AB = 1+R$. Możemy napisać w nim twierdzenie Pitagorasa, albo lepiej zauważyć, że jest to połówka kwadratu, czyli

$$\begin{aligned}
&AB = AS\sqrt{2}\\
&1+R = (R-1)\sqrt{2}\\
&R(\sqrt{2}-1) = 1+\sqrt{2}\\
&R = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} > \frac{\sqrt{2}+1}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}+2.
\end{aligned}$$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

ROZWIĄZANIE

Podnosimy równość

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

do kwadratu.

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{5}{4}\\
&(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5}{4}\\
&1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5}{4}\\
&2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}\\
&\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8.$$

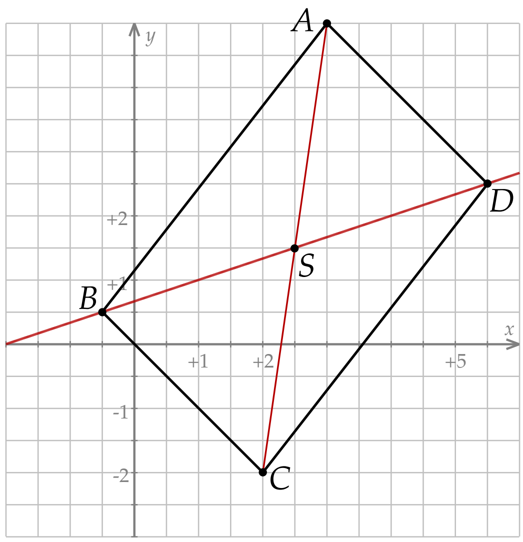
Odpowiedź: **8**

ZADANIE 31 (2 PKT)

Punkty $A=(3,5)$, $B=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $C=(2,-2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz równanie przekątnej BD tego równoległoboku.

ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od szkicowego rysunku.



Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy, więc punkt przecięcia się przekątnych S to środek odcinka AC, czyli

$$S=\frac{A+C}{2}=\frac{(3,5)+(2,-2)}{2}=\frac{(5,3)}{2}=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right).$$

Pozostało napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty $B=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ i $S=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$. Można skorzystać ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty, ale można też wprost: szukamy prostej w postaci $y=ax+b$ i podstawiamy współrzędne punktów B i S.

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}a+b\\ \frac{3}{2}=\frac{5}{2}a+b.\end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze i mamy

$$1=3a \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{3}.$$

Stąd

$$b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

i szukana prosta ma równanie $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

Odpowiedź: $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

ZADANIE 32 (4 PKT)

Ze zbioru $\{9, 10, 11, \ldots, 48\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3.

ROZWIĄZANIE

W danym zbiorze jest

$$48 - 8 = 40$$

liczb, więc zdarzeń elementarnych jest

$$40 \cdot 40.$$

Aby obliczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zauważmy, że liczby w danym zbiorze możemy podzielić na trzy grupy:

$$\begin{array}{l} 9 = 3 \cdot 3,\ 12 = 4 \cdot 3,\ 15 = 5 \cdot 3, \ldots,\ 48 = 16 \cdot 3 \\ 10 = 3 \cdot 3 + 1,\ 13 = 4 \cdot 3 + 1,\ 16 = 5 \cdot 3 + 1, \ldots,\ 46 = 15 \cdot 3 + 1 \\ 11 = 3 \cdot 3 + 2,\ 14 = 4 \cdot 3 + 2,\ 17 = 5 \cdot 3 + 2, \ldots,\ 47 = 15 \cdot 3 + 2. \end{array}$$

W pierwszej grupie jest $16 - 2 = 14$ liczb, a dwóch pozostałych po 13 liczb.

Zauważmy teraz, że jeżeli pierwszą liczbę wylosujemy z pierwszej grupy (czyli podzielną przez 3), to druga też musi być podzielna przez 3 (żeby suma była podzielna przez 3). Jest więc

$$14 \cdot 14$$

takich zdarzeń. Jeżeli natomiast pierwsza liczba jest z drugiej grupy (czyli daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3), to druga liczba musi być z trzeciej grupy. Analogicznie, gdy pierwsza liczba jest z trzeciej grupy, to druga musi być z pierwszej grupy. W sumie jest więc

$$13 \cdot 13 + 13 \cdot 13 = 26 \cdot 13$$

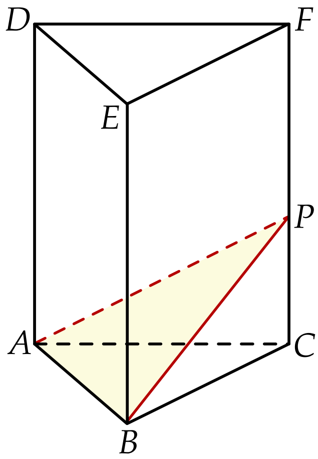
takich zdarzeń i interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{14 \cdot 14 + 26 \cdot 13}{40 \cdot 40} = \frac{7 \cdot 14 + 13 \cdot 13}{20 \cdot 40} = \frac{267}{800}.$$

Odpowiedź: $\frac{267}{800}$

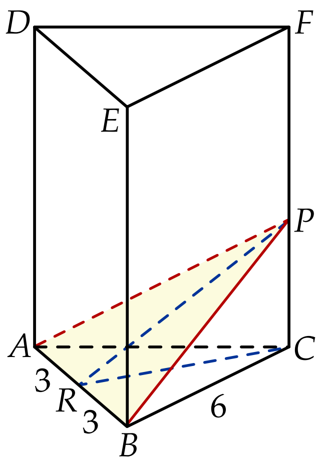
ZADANIE 33 (5 PKT)

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$ jest równa 6 (zobacz rysunek). Punkt P dzieli krawędź boczną CF w stosunku $|CP| : |PF| = 2 : 3$. Pole trójkąta ABP jest równe $15\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



ROZWIĄZANIE

Dorysujmy wysokości PR i CR trójkątów ABP i ABC.



Z podanego pola przekroju obliczamy długość odcinka PR.

$$15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot PR = 3PR$$
$$PR = 5\sqrt{3}.$$

Ze wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym mamy

$$CR = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie PRC i obliczamy długość odcinka PC.

$$PC = \sqrt{PR^2 - CR^2} = \sqrt{75 - 27} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Stąd $FC = \frac{5}{2}PC = 10\sqrt{3}$ i objętość graniastosłupa jest równa

$$V = \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 10\sqrt{3} = 270.$$

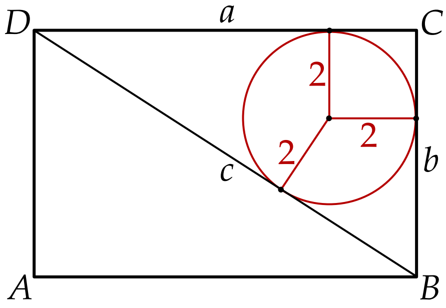
Odpowiedź: **270**

ZADANIE 34 (4 PKT)

Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 60, a promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy 2. Oblicz obwód tego prostokąta.

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez a i b długości boków prostokąta, a c niech będzie długością jego przekątnej.



W szczególności

$$60 = P_{ABCD} = ab.$$

Sposób I

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta z promieniem okręgu wpisanego:

$$P_{BCD} = pr,$$

gdzie $r = 2$ i $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu. Mamy zatem

$$30 = \frac{a+b+c}{2} \cdot 2 = a+b+c$$

Korzystamy teraz z twierdzenia Pitagorasa.

$$c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (30-c)^2 - 120 = 900 - 60c + c^2 - 120$$
$$60c = 780 \quad \Rightarrow \quad c = 13.$$

Stąd $a + b = 30 - c = 17$ i obwód prostokąta jest równy

$$2a + 2b = 34.$$

Sposób II

Korzystamy ze wzoru

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

na promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c. Mamy zatem

$$2 = \frac{a+b-c}{2} \quad \Rightarrow \quad a+b-c = 4.$$

Korzystamy teraz z twierdzenia Pitagorasa.

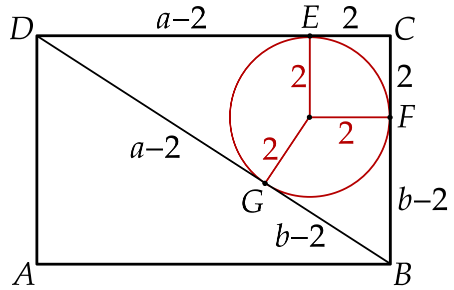
$$\begin{aligned} &c^2 = a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (4+c)^2 - 120 = 16 + 8c + c^2 - 120 \\ &104 = 8c \quad \Rightarrow \quad c = 13. \end{aligned}$$

Stąd $a+b = 30 - c = 17$ i obwód prostokąta jest równy

$$2a + 2b = 34.$$

Sposób III

Tym razem nie będziemy korzystać z żadnych wzorów z promieniem okręgu wpisanego – zamiast tego trochę dokładniej popatrzymy na rysunek.



Zauważmy, że jeżeli E, F i G są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt BCD i odpowiednio prostymi CD, BC i BD, to $DG = DE = a-2$ i $BG = BF = b-2$. Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$a^2+b^2 = BC^2 + CD^2 = BD^2 = (a+b-4)^2 = a^2+b^2+16-8a-8b+2ab$$

Korzystamy teraz z podanego pola: $ab = 60$ i mamy

$$\begin{aligned} &a^2+b^2 = a^2+b^2+16-8a-8b+120 \\ &8a+8b = 136 \quad \Rightarrow \quad 2a+2b = 34. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **34**