LUBELSKA PRÓBA PRZED MATURĄ Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

GRUPA I

5 MARCA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Rozwiązaniem nierówności $(x-1)^2 \geqslant x^2 - 1$ jest zbiór

A) $(-\infty, 1)$ B) $(1, +\infty)$ C) $(-\infty, 1\rangle$ D) $\langle 1, +\infty)$

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy daną nierówność korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy.

$$\begin{aligned}
&(x-1)^2 \geqslant x^2 - 1\\
&x^2 - 2x + 1 \geqslant x^2 - 1\\
&2 \geqslant 2x \quad \iff \quad 1 \geqslant x.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 2 (1 PKT)

Wyrażenie $3\log x + \log y - 2\log z$ jest równe

A) $\log \frac{3xy}{z^2}$ B) $\log \frac{xy^2}{z}$ C) $\log \frac{3xy}{2z}$ D) $\log \frac{x^3y}{z^2}$

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzorów

$$\begin{aligned}
\log a + \log b &= \log(ab)\\
\log a - \log b &= \log \frac{a}{b}\\
n\log a &= \log a^n.
\end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
3\log x + \log y - 2\log z &= \log x^3 + \log y - \log z^2 =\\
&= \log(x^3y) - \log z^2 = \log \frac{x^3y}{z^2}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 3 (1 PKT)

Liczba o 10% mniejsza od liczby, która jest o 20% większa od liczby 1200 jest równa

A) 1340 B) 1296 C) 1440 D) 1080

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$90\% \cdot 120\% \cdot 1200 = 0,9 \cdot 1,2 \cdot 1200 = 0,9 \cdot 1440 = 1296.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 4 (1 PKT)

Suma liczby odwrotnej do $\frac{3}{x+1}$ i przeciwnej do $\frac{1-2x}{15}$ jest równa

A) $\frac{7x+4}{15}$ B) $\frac{x+7}{15}$ C) $\frac{4x+7}{15}$ D) $\frac{7x-4}{15}$

ROZWIĄZANIE

Wykonujemy działania

$$\frac{1}{\frac{3}{x+1}} + \left(-\frac{1-2x}{15}\right) = \frac{x+1}{3} + \frac{2x-1}{15} = \frac{5x+5}{15} + \frac{2x-1}{15} = \frac{7x+4}{15}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 5 (1 PKT)

Punkt o współrzędnych $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ należy do wykresu funkcji logarytmicznej opisanej wzorem

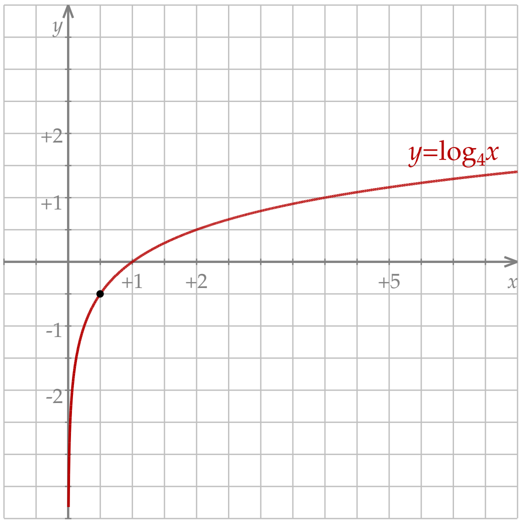
A) $f(x) = \log_2 x$ B) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ C) $f(x) = \log_4 x$ D) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$
$$\log_4 \frac{1}{2} = \log_4 4^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$
$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem podany punkt należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_4 x$.



Odpowiedź: C

ZADANIE 6 (1 PKT)

Jeżeli wiadomo, że punkt $P = (3,4)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2^x + m$, to

A) $m = -2$ B) $m = -4$ C) $m = 4$ D) $m = 2$

ROZWIĄZANIE

Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru funkcji

$$4 = 2^3 + m$$
$$4 - 8 = m$$
$$m = -4.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 7 (1 PKT)

Rozwiązaniem równania $\frac{2x-4}{x+4} = 3$ $(x \neq -4)$ jest liczba

A) -18 B) -16 C) 16 D) 18

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{2x-4}{x+4} = 3 \quad / \cdot (x+4)$$
$$2x - 4 = 3x + 12$$
$$-16 = x.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 8 (1 PKT)

Jeżeli argument funkcji $f(x) = 4x - 1$ wzrośnie o 5, to wartość funkcji wzrośnie o
A) 18 B) 19 C) 20 D) 21

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$f(x+5) - f(x) = 4(x+5) - 1 - (4x-1) = 4x + 20 - 1 - 4x + 1 = 20.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 9 (1 PKT)

W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (x,6)$, $B = (6,-4)$ oraz $M = (2,y)$. Jeżeli punkt M jest środkiem odcinka AB, to
A) $x = 2,\ y = -1$ B) $x = -2,\ y = 1$ C) $x = -2,\ y = 3$ D) $x = 2,\ y = 3$

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy układ równań

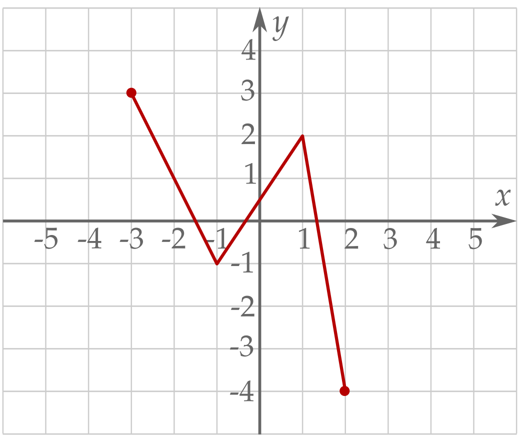
$$\begin{cases} 2 = \frac{x+6}{2} \\ y = \frac{6-4}{2}. \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy $x = 4 - 6 = -2$, a z drugiego $y = 1$.

Odpowiedź: B

ZADANIE 10 (1 PKT)

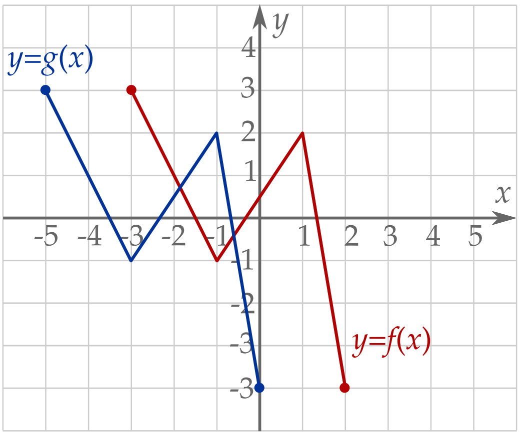
Jeśli na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$, to dziedziną funkcji $g(x) = f(x+2)$ jest zbiór



A) $\langle -2,5\rangle$ B) $\langle -1,4\rangle$ C) $\langle -5,0\rangle$ D) $\langle -7,1\rangle$

ROZWIĄZANIE

Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -3, 2\rangle$, a wykres funkcji g powstaje z wykresu funkcji f przez przesunięcie o 2 jednostki w lewo.



Zatem dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -5, 0\rangle$.

Odpowiedź: C

ZADANIE 11 (1 PKT)

Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{3x-7}$ jest liczba

A) -3 B) -2 C) 2 D) 3

ROZWIĄZANIE

Funkcja $\sqrt{x}$ jest określona tylko dla $x \geqslant 0$, zatem

$$3x - 7 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant \frac{7}{3} \approx 2,3.$$

Zatem najmniejszą liczbą całkowitą należącą do dziedziny jest $x = 3$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 12 (1 PKT)

Jeśli wiadomo, że wierzchołek funkcji $f(x) = 3x^2 - 4k$ należy do prostej $y = 5$, to wartość liczbowa współczynnika k jest równa

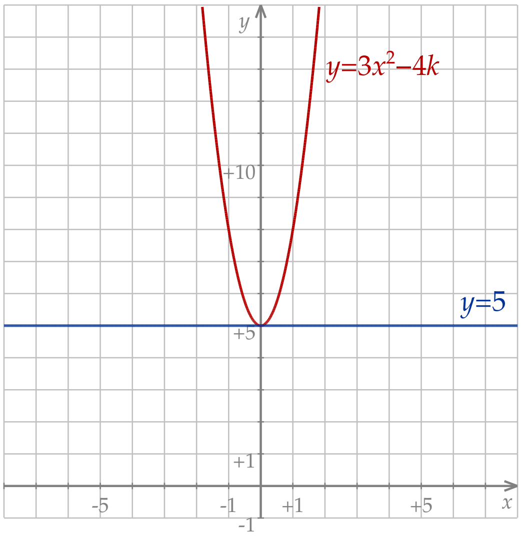
A) $k = -\frac{5}{4}$ B) $k = -\frac{4}{5}$ C) $k = \frac{4}{5}$ D) $k = \frac{5}{4}$

ROZWIĄZANIE

Wierzchołek paraboli w postaci kanonicznej

$$y = a(x - x_w)^2 + y_w$$

ma współrzędne (x_w, y_w). Zatem w naszej sytuacji jest to punkt $(0, -4k)$.



Z drugiej strony wiemy, że punkt ten ma drugą współrzędną równą 5. W takim razie

$$-4k = 5 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{5}{4}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 13 (1 PKT)

Liczbę $\frac{7}{11}$ przybliżono z dokładnością do 10^{-1}. Błąd względny tego przybliżenia jest równy

A) $\frac{3}{70}$ B) $\frac{4}{70}$ C) $\frac{5}{70}$ D) $\frac{6}{70}$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ

$$0,636363\ldots,$$

to przybliżenie, o którym mowa w treści zadania to 0,6. Liczymy błąd bezwzględny

$$\left|\frac{7}{11} - 0,6\right| = \frac{7}{11} - \frac{3}{5} = \frac{35-33}{55} = \frac{2}{55}.$$

Obliczamy błąd względny

$$\frac{\frac{2}{55}}{\frac{7}{11}} = \frac{2}{55} \cdot \frac{11}{7} = \frac{2}{35} = \frac{4}{70}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 14 (1 PKT)

Jeśli w ciągu arytmetycznym $a_2 = 12$ i $a_6 = 28$, to

A) $a_1 + a_4 = 30$ B) $a_6 - a_2 = 18$ C) $a_5 - a_3 = 10$ D) $a_2 + a_5 = 36$

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$\begin{cases} 12 = a_2 = a_1 + r \\ 28 = a_6 = a_1 + 5r. \end{cases}$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze mamy

$$16 = 4r \quad \Rightarrow \quad r = 4.$$

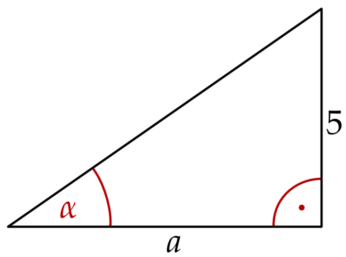
Zatem $a_1 = 12 - r = 8$ i

$$a_2 + a_5 = 12 + (28 - 4) = 12 + 24 = 36.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 15 (1 PKT)

Jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, to długość przyprostokątnej a danego trójkąta (patrz rysunek) jest równa



A) $4\sqrt{15}$ B) $5\sqrt{15}$ C) $6\sqrt{15}$ D) $7\sqrt{15}$

ROZWIĄZANIE

Z podanego sinusa obliczamy długość c przeciwprostokątnej

$$\frac{1}{4} = \sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{5}{c} \quad \Rightarrow \quad c = 20.$$

Stąd

$$a = \sqrt{c^2 - 5^2} = \sqrt{400 - 25} = 5\sqrt{16 - 1} = 5\sqrt{15}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 16 (1 PKT)

Tangens kąta ostrego α jest równy 0,6. Wówczas

A) $\alpha = 40^\circ$ B) $\alpha > 40^\circ$ C) $\alpha < 40^\circ$ D) $\alpha = 30^\circ$

ROZWIĄZANIE

Sprawdzamy w tablicach, że $\alpha \approx 31^\circ$.

Odpowiedź: **C**

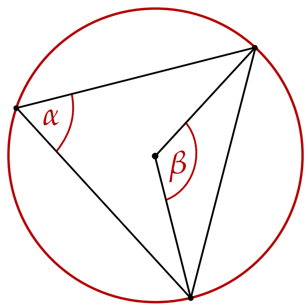
ZADANIE 17 (1 PKT)

Miara kąta wpisanego w okrąg jest o 50° mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Zatem miara kąta wpisanego jest równa

A) 40° B) 50° C) 60° D) 70°

ROZWIĄZANIE

Miara kąta środkowego jest zawsze dwa razy większa od miary kąta wpisanego opisanego na tym samym łuku, zatem przy oznaczeniach z obrazka mamy $\beta = 2\alpha$.



Ponadto wiemy, że

$$\alpha = \beta - 50^\circ = 2\alpha - 50^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 50^\circ.$$

Odpowiedź: **B**

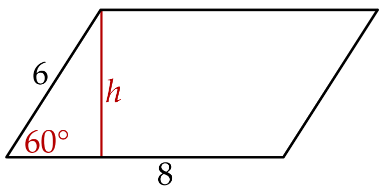
ZADANIE 18 (1 PKT)

Pole równoległoboku o kącie ostrym równym 60° i długości boków wychodzących z wierzchołka tego kąta równych 6 i 8 jest równe

A) $24\sqrt{3}$ B) $24\sqrt{2}$ C) 24 D) $16\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy równoległobok.



Sposób I

Ze wzoru z sinusem na pole równoległoboku mamy

$$P = 6 \cdot 8 \sin 60^\circ = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}.$$

Sposób II

Obliczamy wysokość równoległoboku.

$$\frac{h}{6} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad h = 3\sqrt{3}.$$

Zatem

$$P = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Funkcja liniowa $f(x) = (2+3k)x + 3k - 2$ nie ma miejsc zerowych dla

A) $k = -\frac{2}{3}$ B) $k = \frac{2}{3}$ C) $k = -\frac{1}{2}$ D) $k = \frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Funkcja f jest funkcją liniową, więc nie będzie miała miejsc zerowych jeżeli będzie funkcją stałą która nie jest tożsamościowo równa 0. Zatem musimy rozwiązać równanie

$$2 + 3k = 0$$
$$3k = -2 \quad \iff \quad k = -\frac{2}{3}.$$

W tej sytuacji mamy funkcję stałą $y = -4$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Jeżeli suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określona jest wzorem $S_n = 4n^2 - n$, to wartość piątego wyrazu tego ciągu jest równa

A) 33 B) 35 C) 60 D) 95

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$a_5 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = S_5 - S_4 =$$
$$= (4 \cdot 25 - 5) - (4 \cdot 16 - 4) = 95 - 60 = 35.$$

Odpowiedź: **B**

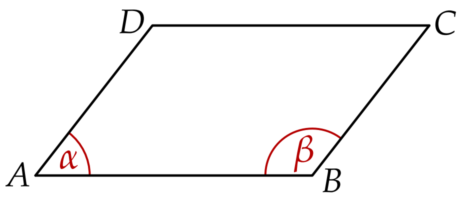
ZADANIE 21 (1 PKT)

Dwa sąsiednie kąty równoległoboku różnią się o 50°. Kąt ostry tego równoległoboku ma miarę

A) 45° B) 55° C) 65° D) 75°

ROZWIĄZANIE

Naszkicujmy sobie równoległobok.



Ponieważ suma dwóch sąsiednich kątów równoległoboku jest równa 180°, mamy układ równań

$$\begin{cases} \alpha+\beta=180^\circ \\ \beta-\alpha=50^\circ. \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$2\alpha=130^\circ \quad\Rightarrow\quad \alpha=65^\circ.$$

Odpowiedź: C

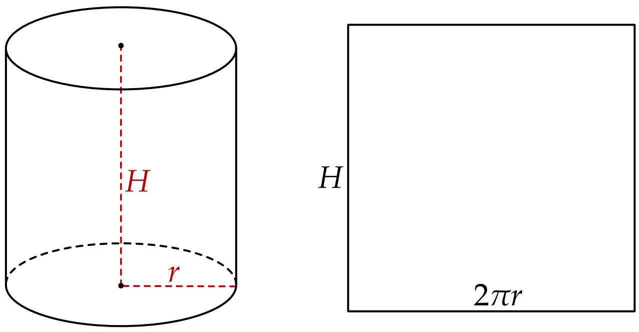
ZADANIE 22 (1 PKT)

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o polu $16\pi^2$. Objętość tego walca jest równa

A) $8\pi^3$ B) $16\pi^3$ C) $8\pi^2$ D) $16\pi^2$

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Widać, że po rozwinięciu powierzchni bocznej walca otrzymamy prostokąt o bokach długości H oraz $2\pi r$. W takim razie

$$\begin{aligned} 4\pi &= H \\ 4\pi &= 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = 2. \end{aligned}$$

Zatem objętość walca jest równa

$$V = \pi r^2 \cdot H = 4\pi \cdot 4\pi = 16\pi^2.$$

Odpowiedź: D

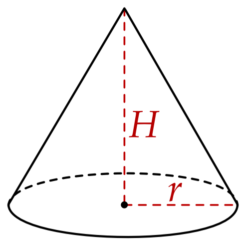
ZADANIE 23 (1 PKT)

Promień podstawy stożka o objętości 12π i wysokości 4 jest równy

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy stożek.



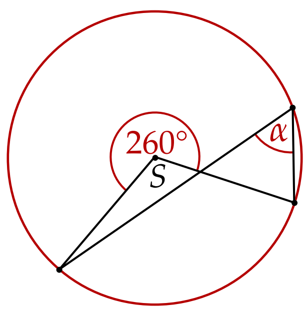
Jeżeli oznaczymy przez r promień podstawy stożka, to z podanej objętości mamy

$$\begin{aligned} 12\pi &= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{4}{3}\pi r^2 \quad / \cdot \frac{3}{4\pi} \\ 9 &= r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 3. \end{aligned}$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 24 (1 PKT)

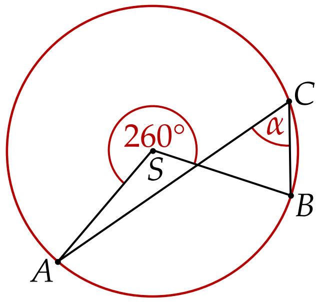
Miara kąta α (patrz rysunek obok) jest równa



A) 45° B) 50° C) 55° D) 60°

ROZWIĄZANIE

Zacznijmy od podpisania rysunku literkami.



Zauważmy, że kąt wypukły ASB ma miarę

$$\measuredangle AOB = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ.$$

Ponieważ kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, mamy

$$\alpha = \frac{1}{2}\measuredangle ASB = 50^\circ.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 25 (1 PKT)

Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 jest równe

A) $\frac{8}{20}$ B) $\frac{7}{20}$ C) $\frac{6}{20}$ D) $\frac{5}{20}$

ROZWIĄZANIE

Losujemy jedną liczbę spośród 20, więc liczba zdarzeń elementarnych wynosi

$$|\Omega| = 20.$$

Wypiszmy wszystkie liczby podzielne przez 3 z tego zbioru

$$3, 6, 9, 12, 15, 18.$$

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 wynosi

$$\frac{6}{20}.$$

Odpowiedź: C

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $-x(x-1) \leqslant -2$.

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy daną nierówność.

$$\begin{aligned}
& -x(x-1) \leqslant -2 \quad / \cdot (-1) \\
& x^2 - x - 2 \geqslant 0 \\
& \Delta = 1 + 8 = 9 \\
& x = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{lub} \quad x = \frac{1+3}{2} = 2 \\
& x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty).
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Uzasadnij, że nie istnieją dwie liczby rzeczywiste, których suma jest równa 4, a ich iloczyn jest równy 5.

ROZWIĄZANIE

Musimy wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania.

Sposób I

Podstawiamy $y = 4 - x$ z pierwszego równania do drugiego.

$$\begin{aligned}
& x(4-x) = 5 \\
& 4x - x^2 = 5 \quad / \cdot (-1) \\
& x^2 - 4x + 5 = 0 \\
& \Delta = 16 - 20 < 0.
\end{aligned}$$

Ponieważ Δ jest ujemna, równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Sposób II

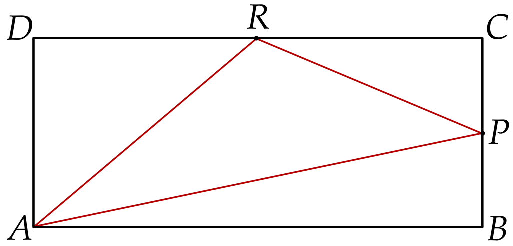
Na mocy wzorów Viète'a liczby x i y spełniające dany układ równań są pierwiastkami równania

$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$

To równanie nie ma jednak rozwiązań rzeczywistych (bo $\Delta < 0$), więc dany układ równań jest sprzeczny.

ZADANIE 28 (2 PKT)

W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD. Wykaż, że pole trójkąta APR jest równe sumie pól trójkątów ADR oraz PCR.



ROZWIĄZANIE

Oznaczmy $AB = CD = a$ i $AD = BC = b$. Mamy zatem

$$P_{ADR} = \frac{1}{2}AD \cdot DR = \frac{1}{4}ab$$
$$P_{PCR} = \frac{1}{2}PC \cdot CR = \frac{1}{8}ab$$
$$P_{ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot BP = \frac{1}{4}ab.$$

Stąd

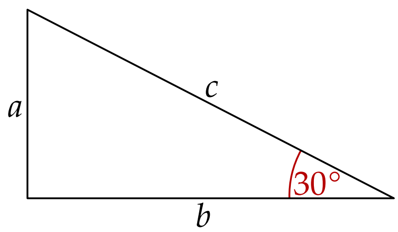
$$P_{APR} = P_{ABCD} - P_{ADR} - P_{PCR} - P_{ABP} = ab - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ab - \frac{1}{4}ab =$$
$$= \frac{3}{8}ab = P_{ADR} + P_{PCR}.$$

ZADANIE 29 (2 PKT)

Dany jest trójkąt prostokątny o polu $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ i kącie ostrym 30°. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Długości przyprostokątnych możemy wyznaczyć z następującego układu równań

$$\begin{cases} P = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}ab \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{b}.$$

Podstawimy do drugiego równania

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{b}}{b} \quad / \cdot b^2 \\
&\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot b^2 = 3\sqrt{3} \quad / \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \\
&b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3 \quad \text{lub} \quad b = -3.
\end{aligned}$$

Odrzucamy wynik ujemny i otrzymujemy

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

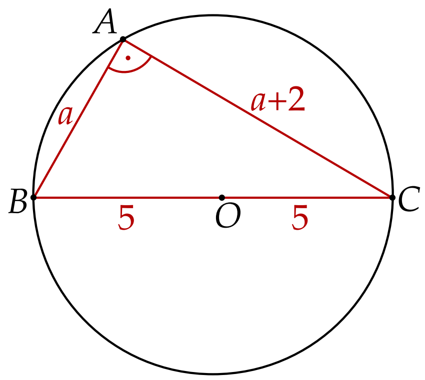
Odpowiedź: **3 i** $\sqrt{3}$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Z punktu leżącego na okręgu o promieniu 5 poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy. Różnica ich długości jest równa 2. Oblicz długości tych cięciw.

ROZWIĄZANIE

Niech A będzie punktem z którego zostały poprowadzone cięciwy AB i AC.



Ponieważ cięciwy są prostopadłe, odcinek BC jest średnicą okręgu i $BC = 10$. Oznaczmy $AC = a$ i $BC = a + 2$. Piszemy teraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie ABC.

$$\begin{aligned}
&a^2 + (a+2)^2 = 10^2 \\
&a^2 + a^2 + 4a + 4 = 100 \quad / : 2 \\
&a^2 + 2a - 48 = 0 \\
&\Delta = 4 + 192 = 196 = 14^2 \\
&a = \frac{-2-14}{2} = -8 \quad \text{lub} \quad a = \frac{-2+14}{2} = 6.
\end{aligned}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy i mamy $AB = a = 6$. Stąd $AC = a + 2 = 8$.

Odpowiedź: **6 i 8**

ZADANIE 31 (2 PKT)

Dany jest trójmian kwadratowy f o współczynniku 3 przy najwyższej potędze x. Wierzchołek paraboli będącej wykresem tego trójmianu ma współrzędne $W = (5; -10)$. Wyznacz $f(10)$.

ROZWIĄZANIE

Z podanych informacji wynika, że wzór funkcji w postaci kanonicznej ma postać

$$3(x-5)^2 - 10.$$

Zatem

$$f(10) = 3 \cdot 5^2 - 10 = 75 - 10 = 65.$$

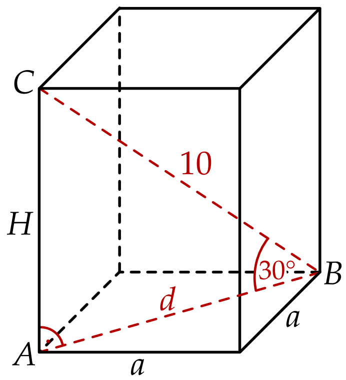
Odpowiedź: $f(10) = 65$

ZADANIE 32 (4 PKT)

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o długości 10 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku.



Ponieważ przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$, patrząc na trójkąt prostokątny ABC, mamy równanie

$$\frac{AB}{BC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{a\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Podobnie obliczamy wysokość $AC = H$.

$$\frac{AC}{BC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\frac{H}{10} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad H = 5.$$

Objętość graniastosłupa jest więc równa

$$V = a^2 \cdot H = \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot 5 = \frac{375}{2}.$$

Odpowiedź: $V = \frac{375}{2}$ **cm**^{3}

ZADANIE 33 (4 PKT)

Ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy liczbę x, a ze zbioru $\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$ liczbę y. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że $x + y > 2$.

ROZWIĄZANIE

Wszystkich zdarzeń sprzyjających jest

$$|\Omega| = 7 \cdot 7.$$

Jeżeli wylosujemy $x = 7$, to y może przyjąć jedną z wartości: $-4, -3, -2, -1$.
Jeżeli wylosujemy $x = 6$, to y może przyjąć jedną z wartości: $-3, -2, -1$.
Jeżeli wylosujemy $x = 5$, to y może przyjąć jedną z wartości: $-2, -1$.
Jeżeli wylosujemy $x = 4$, to musi być $y = -1$. Jest zatem

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

zdarzeń sprzyjających i prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{10}{7 \cdot 7} = \frac{10}{49}.$$

Odpowiedź: $\frac{10}{49}$

ZADANIE 34 (5 PKT)

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Ich suma jest równa 15. Jeśli pierwszą i trzecią liczbę pozostawimy bez zmian, a drugą pomniejszymy o jeden to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz wyrazy ciągu arytmetycznego.

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy szukane liczby przez $a-r, a, a+r$. Wtedy z podanej sumy mamy

$$a-r+a+a+r=15 \quad \Rightarrow \quad 3a=15 \quad \Rightarrow \quad a=5.$$

Zatem szukamy liczb postaci $5-r, 5$ i $5+r$.

Wiemy ponadto, że liczby $5-r, 4, 5+r$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, czyli

$$\begin{aligned}
&4^2=(5-r)(5+r)\\
&16=25-r^2\\
&r^2=9 \quad \Rightarrow \quad r=\pm 3.
\end{aligned}$$

Dla $r=-3$ mamy ciąg $(8,5,2)$, a dla $r=3$ ciąg $(2,5,8)$.

Odpowiedź: $(8,5,2),(2,5,8)$