PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM PODSTAWOWY

23 MARCA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Różnica $6\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} - \log_{\sqrt{2}} 8$ jest równa

A) 0 B) -3 C) $\log_6 \frac{3}{16}$ D) 3

ROZWIĄZANIE

Liczymy z definicji logarytmu

$$6\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} = \log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{3}\right)^6 = \log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^3 = 3$$
$$\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} 2^3 = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6 = 6.$$

Stąd

$$6\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} - \log_{\sqrt{2}} 8 = 3 - 6 = -3.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Dla $x = \sqrt{3}+1$ oraz $y = \frac{3}{\sqrt{3}} - 1$ wartość wyrażenia $x^2+2xy+y^2$ jest równa

A) 3 B) 12 C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że

$$y = \frac{3}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{3\sqrt{3}}{3} - 1 = \sqrt{3} - 1.$$

Stąd

$$x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 = (\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1))^2 = (2\sqrt{3})^2 = 4\cdot 3 = 12.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Liczba $\sqrt[3]{0,216 \cdot 10^{-51}}$ jest równa

A) $0,06 \cdot 10^{-17}$ B) $0,6 \cdot 10^{-48}$ C) $0,6 \cdot 10^{-17}$ D) $0,06 \cdot 10^{-54}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że $216 = 6^3$. Stąd

$$0,216 = 216 \cdot 0,001 = (6 \cdot 0,1)^3 = 0,6^3$$

oraz

$$\sqrt[3]{0,216 \cdot 10^{-51}} = \sqrt[3]{0,216} \cdot \sqrt[3]{10^{-51}} = \sqrt[3]{(0,6)^3} \cdot \sqrt[3]{(10^{-17})^3} = 0,6 \cdot 10^{-17}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Kacper jest o 12,5% wyższy od Ali i jest wyższy od Ewy o 11 cm. Ala jest niższa od Ewy o 5%. Wzrost Kacpra jest równy

A) 171 cm B) 160 cm C) 180 cm D) 164 cm

ROZWIĄZANIE

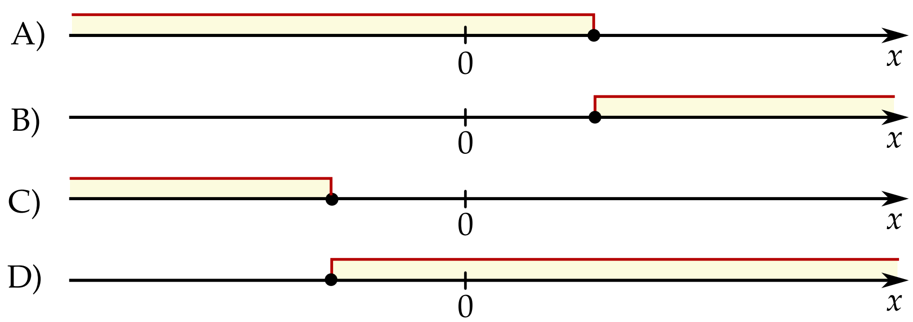
Jeżeli oznaczymy przez x wzrost Kacpra, to wzrost Ali jest równy $\frac{x}{1,125}$, a wzrost Ewy $x - 11$. Wiemy ponadto, że pierwsza z tych liczb jest o 5% mniejsza od drugiej. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{x}{1,125} &= 0,95 \cdot (x-11) = 0,95x - 10,45 \quad / \cdot 1,125 \\ x &= 1,06875x - 11,75625 \\ 0,06875x &= 11,75625 \quad \Rightarrow \quad x = 171. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Wskaż rysunek, na którym może być przedstawiony zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $4 - 3x \geqslant \sqrt[3]{30}(1 - x)$.



ROZWIĄZANIE

Przekształćmy daną nierówność

$$\begin{aligned} 4 - 3x &\geqslant \sqrt[3]{30}(1 - x) \\ 4 - 3x &\geqslant \sqrt[3]{30} - \sqrt[3]{30}x \\ 4 - \sqrt[3]{30} &\geqslant x(3 - \sqrt[3]{30}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że $\sqrt[3]{30} > \sqrt[3]{27} = 3$ i $\sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{64} = 4$. Zatem nierówność możemy zapisać w postaci

$$\frac{4 - \sqrt[3]{30}}{3 - \sqrt[3]{30}} \leqslant x$$

i

$$\frac{4 - \sqrt[3]{30}}{3 - \sqrt[3]{30}} < 0.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 6 (1 PKT)

Jednym z rozwiązań równania $\frac{x-5}{\sqrt{3}-x} = \frac{\sqrt{3}+x}{x}$ jest

A) $x = \frac{1}{3}$ B) $x = -\frac{1}{2}$ C) $x = \frac{1}{2}$ D) $x = -3$

ROZWIĄZANIE

Oczywiście mianowniki muszą być niezerowe, czyli $x \neq \sqrt{3}$ i $x \neq 0$.

Przekształcamy równanie

$$\begin{aligned} &\frac{x-5}{\sqrt{3}-x} = \frac{\sqrt{3}+x}{x} \quad / \cdot x(\sqrt{3}-x) \\ &(x-5)x = (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x) \\ &x^2 - 5x = 3 - x^2 \\ &2x^2 - 5x - 3 = 0 \\ &\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2 \\ &x = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{5+7}{4} = 3. \end{aligned}$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 7 (1 PKT)

Jeśli funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 - 6x + 4a$ ma dwa miejsca zerowe, to liczba a spełnia warunek

A) $a < -\frac{9}{4}$ B) $0 \leqslant a < 1$ C) $-\frac{1}{3} \leqslant a < 0$ D) $a > -\frac{9}{4}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Zapiszmy wzór funkcji f w postaci kanonicznej

$$f(x) = -x^2 - 6x + 4a = -(x+3)^2 + (4a+9).$$

Wykresem tej funkcji jest więc parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie $(-3, 4a+9)$. Jeżeli funkcja ma dwa miejsca zerowe, to jej wykres musi przecinać oś Ox, tzn.

$$4a + 9 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a > -\frac{9}{4}.$$

Sposób II

Wiemy, że równanie

$$-x^2 - 6x + 4a = 0$$

ma dwa rozwiązania, więc musi być

$$0 < \Delta = 36 + 16a \quad \Longleftrightarrow \quad -36 < 16a \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{9}{4} < a.$$

Sposób III

Wykresem funkcji $f(x) = -x^2 - 6x + 4a$ jest parabola o ramionach skierowanych w dół i pierwszej współrzędnej wierzchołka równej

$$x_w = -\frac{6}{-2} = -3.$$

Jeżeli funkcja ma mieć dwa miejsca zerowe, to jej wykres musi przecinać oś Ox, tzn.

$$0 < f(-3) = -9 + 18 + 4a = 4a + 9 \quad \Longleftrightarrow \quad a > -\frac{9}{4}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 8 (1 PKT)

Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż zdanie prawdziwe.

A) Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś Ox w punkcie $(6,0)$
B) Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś Ox w punkcie $(2,0)$
C) Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś Ox w punkcie $(2,0)$
D) Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś Ox w punkcie $(6,0)$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ dana funkcja ma ujemny współczynnik kierunkowy jest malejąca.

$$2-\frac{1}{3}x=0 \quad \iff \quad \frac{1}{3}x=2 \quad \iff \quad x=6,$$

czyli wykres przecina oś Ox w punkcie $(6,0)$.

Odpowiedź: A

ZADANIE 9 (1 PKT)

Dane są funkcje $f(x)=2^x$ oraz $g(x)=-f(x)+4$, określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Punkt wspólny wykresów funkcji f i g

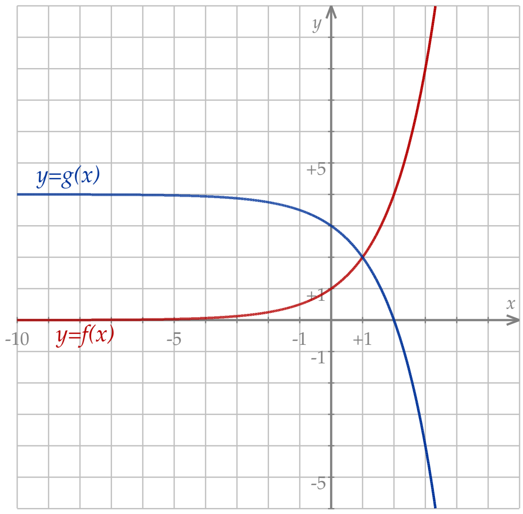
A) nie istnieje
B) ma współrzędne $(1,0)$
C) ma współrzędne $(0,1)$
D) ma współrzędne $(1,2)$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy wykresy obu podanych funkcji: funkcja $f(x)=2^x$ jest rosnącą funkcją wykładniczą, a wykres funkcji

$$g(x)=-f(x)+4=-2^x+4$$

powstaje z wykresu $y=f(x)$ przez obicie względem osi Ox, a potem przesunięcie o 4 jednostki do góry.



Nawet ze szkicowego rysunku powinno być widać, że wykresy te mają jeden punkt wspólny: $(1,2)$.

Odpowiedź: D

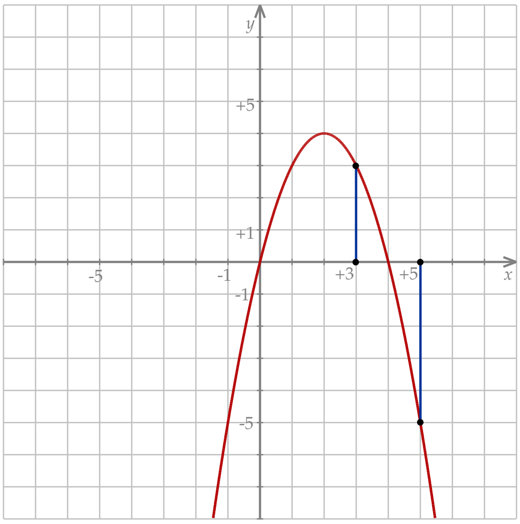
ZADANIE 10 (1 PKT)

Najmniejszą wartością funkcji $y=-(x-2)^2+4$ w przedziale $\langle 3,5\rangle$ jest

A) 4
B) 3
C) 0
D) -5

ROZWIĄZANIE

Wykresem funkcji $y = -(x-2)^2 + 4$ jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie $(2,4)$.



Jeżeli ją naszkicujemy, to widać, że na danym przedziale najmniejsza wartość to

$$f(5) = -9 + 4 = -5.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Funkcje kwadratowe f i g określone są wzorami $f(x) = -2(x-7)(x+3)$ i $g(x) = 3(7-x)(x-1)$. Liczby x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji $f - g$. Zatem

A) $x_1 + x_2 = 12$ B) $x_1 + x_2 = -10$ C) $x_1 + x_2 = 2$ D) $x_1 + x_2 = 16$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -2(x-7)(x+3) - 3(7-x)(x-1) = \\ &= -2(x-7)(x+3) + 3(x-7)(x-1) = \\ &= (x-7)\left(-2(x+3) + 3(x-1)\right) = (x-7)(x-9). \end{aligned}$$

Miejscami zerowymi tej funkcji są więc liczby $x_1 = 7$ i $x_2 = 9$. Zatem

$$x_1 + x_2 = 7 + 9 = 16.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 12 (1 PKT)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, spełniony jest warunek $a_7 + a_8 + a_9 = 2019$. Suma $a_6 + a_{10}$ jest równa

A) 673 B) 1346 C) 1009,5 D) 2019

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli oznaczymy przez r różnicę ciągu a_n, to

$$a_7 = a_8 - r$$
$$a_9 = a_8 + r.$$

Zatem

$$2019 = a_7 + a_8 + a_9 = a_8 - r + a_8 + a_8 + r = 3a_8 \quad \Rightarrow \quad a_8 = 673.$$

Stąd $a_7 + a_9 = 2019 - 673 = 1346$ oraz

$$a_6 + a_{10} = a_7 - r + a_9 + r = a_7 + a_9 = 1346.$$

Sposób II

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$2019 = a_7 + a_8 + a_9 = (a_1 + 6r) + (a_1 + 7r) + (a_1 + 8r) = 3a_1 + 21r \quad / : 3$$
$$673 = a_1 + 7r.$$

Zatem

$$a_6 + a_{10} = a_1 + 5r + a_1 + 9r = 2a_1 + 14r = 2(a_1 + 7r) = 2 \cdot 673 = 1346.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 13 (1 PKT)

Pięć liczb tworzy ciąg geometryczny. Iloczyn tych liczb jest równy 59049. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy

A) 243 B) 9 C) 3 D) 27

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru $a_n = a_1 q^{n-1}$ na n–ty wyraz ciągu geometrycznego mamy

$$59049 = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot a_1 q^3 \cdot a_1 q^4 = a_1^5 q^{10} = (a_1 q^2)^5$$

Zauważmy ponadto, że

$$59049 = 9 \cdot 6561 = 9 \cdot 9 \cdot 729 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 81 = 9^5.$$

W takim razie

$$a_3 = a_1 q^2 = 9.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 14 (1 PKT)

Układ równań $\begin{cases} y - \frac{3}{8}x = -3 \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 3 \end{cases}$

A) nie ma rozwiązań. B) ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C) ma dokładnie dwa rozwiązania. D) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

ROZWIĄZANIE

Chcemy mieć ten sam współczynnik przy x w obu równaniach, więc mnożymy pierwsze przez -8, a drugie przez 12. Otrzymujemy wtedy układ równań

$$\begin{cases} -8y + 3x = 24 \\ 3x - 8y = 36. \end{cases}$$

Widać teraz, że układ jest sprzeczny.

Odpowiedź: A

ZADANIE 15 (1 PKT)

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

A) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{169}$ B) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ C) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{144}{65}$ D) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

ROZWIĄZANIE

Na mocy jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

mamy

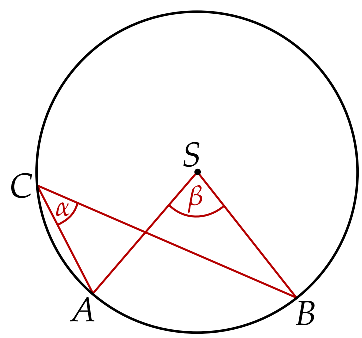
$$\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\frac{25}{169}}{\frac{5}{13}} = \frac{\frac{144}{169}}{\frac{5}{13}} = \frac{144}{65}.$$

Zauważmy, że w rozwiązaniu nie miało znaczenia to, że kąt α jest ostry.

Odpowiedź: C

ZADANIE 16 (1 PKT)

Dany jest okrąg o środku S. Punkty A, B i C leżą na tym okręgu. Na łuku AB tego okręgu są oparte kąty ACB i ASB (zobacz rysunek), których miary α i β spełniają warunek $4\beta = 3\alpha + 365^\circ$. Wynika stąd, że



A) $\beta = 146^\circ$ B) $\beta = 73^\circ$ C) $\beta = 123^\circ$ D) $\beta = 219^\circ$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, mamy

$$4\beta = 3 \cdot \frac{1}{2}\beta + 365^\circ$$
$$\frac{5}{2}\beta = 365^\circ \quad / \cdot \frac{2}{5}$$
$$\beta = \frac{2}{5} \cdot 365^\circ = 2 \cdot 73^\circ = 146^\circ.$$

Odpowiedź: **A**

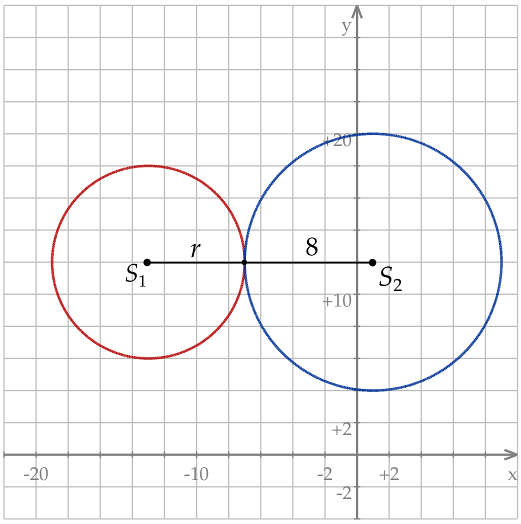
ZADANIE 17 (1 PKT)

Okrąg o środku $S_1 = (-13, 12)$ oraz okrąg o środku S_2 i promieniu 8 są styczne zewnętrznie w punkcie $(-7, 12)$. Wtedy

A) $S_2 = (-1, 12)$ B) $S_2 = (2, 12)$ C) $S_2 = (1, 12)$ D) $S_2 = (0, 12)$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Zauważmy, że środek S_1 i punkt styczności leżą na tej samej poziomej prostej $y = 12$. W takim razie punkt S_2 też leży na tej prostej, więc jego druga współrzędna jet równa 12. Ponadto, odległość S_1S_2 między środkami okręgów stycznych zewnętrznie jest równa sumie ich promieni, czyli jest równa

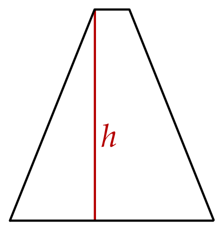
$$r_1 + r_2 = (-7 - (-13)) + 8 = 6 + 8 = 14.$$

To oznacza, że pierwsza współrzędna punktu S_2 musi być równa $-13 + 14 = 1$.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Długości boków trapezu równoramiennego są równe 19, 17, 3, 17.

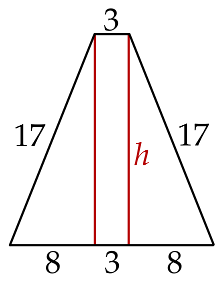


Wysokość h tego trapezu jest równa

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy drugą wysokość trapezu.



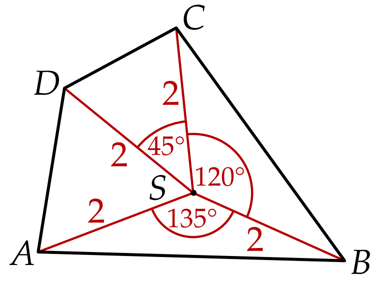
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość wysokości.

$$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 19 (1 PKT)

Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg o środku S i promieniu $r = 2$ (zobacz rysunek). Pole tego czworokąta jest równe



A) $2 + 2\sqrt{2}$ B) 4 C) $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ D) $2 + 2\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że

$$\measuredangle ASD = 360^\circ - \measuredangle ASB - \measuredangle BSC - \measuredangle CSD = 360^\circ - 135^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 60^\circ.$$

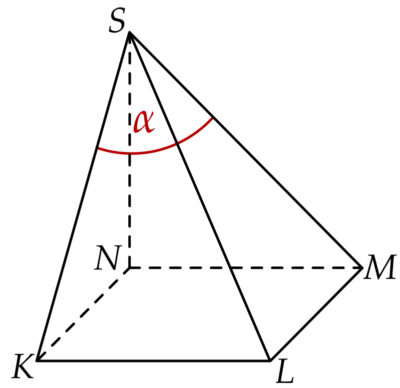
Pole czworokąta $ABCD$ jest więc równe (korzystamy ze wzoru z sinusem)

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ASB} + P_{BSC} + P_{CSD} + P_{DSA} = \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot (\sin 135^\circ + \sin 120^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ) = \\ &= 2\left(\sin(180^\circ - 45^\circ) + \sin(180^\circ - 60^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= 2\left(\sin 45^\circ + \sin 60^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\sqrt{2}+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $KLMN$ o boku długości 4. Wysokością tego ostrosłupa jest krawędź NS, a jej długość jest równa 6 (zobacz rysunek).

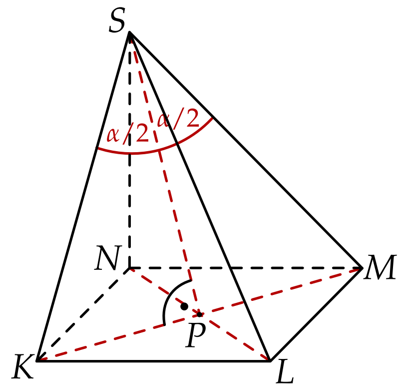


Kąt α, jaki tworzą krawędzie KS i MS, spełnia warunek

A) $\alpha = 45^\circ$ B) $45^\circ < \alpha < 60^\circ$ C) $\alpha > 60^\circ$ D) $\alpha = 60^\circ$

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy przekątne podstawy.



W trójkącie prostokątnym KPS mamy

$$KP = \frac{1}{2}KM = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
$$KS = \sqrt{KN^2 + NS^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Stąd

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{KP}{KS} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{2}{13}} \approx 0,39.$$

Odczytujemy teraz z tablic, że $\frac{\alpha}{2} \approx 23^\circ$, czyli $\alpha \approx 46^\circ$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 21 (1 PKT)

Pięć identycznych metalowych stożków o promieniu podstawy r przetopiono na jeden walec, którego wysokość jest równa $2r$ i jest dwa razy krótsza od jego promienia podstawy. Gdyby te same stożki przetopiono na kule o promieniu r, to ile takich kul by otrzymano?

A) 32 B) 16 C) 8 D) 24

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że pięć stożków ma taką samą objętość V jak walec o wysokości $2r$ i promieniu podstawy $4r$. Zatem

$$V = \pi(4r)^2 \cdot 2r = 32\pi r^3.$$

Jedna kula o promieniu r ma objętość $\frac{4}{3}\pi r^3$ oraz

$$32\pi r^3 = 24 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

więc otrzymamy 24 takie kule.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 22 (1 PKT)

Na której z podanych prostych leżą wszystkie punkty o współrzędnych $(7-2t, 3t+5)$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą?

A) $x+y=12$ B) $2y+3x=31$ C) $2y+3x=30$ D) $3y+2x=30$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Dla $t=0$ i $t=1$ otrzymujemy odpowiednio punkty $(7,5)$ i $(5,8)$. Wśród podanych prostych tylko

$$2y+3x=31$$

przechodzi przez te dwa punkty.

Sposób II

Jeżeli oznaczymy $x = 7 - 2t$ i $y = 3t + 5$, to

$$2y + 3x = 2(3t + 5) + 3(7 - 2t) = 6t + 10 + 21 - 6t = 31.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 23 (1 PKT)

Wykonano pomiary wagi pięciu arbuzów i każde dwa rezultaty były różne. Agata zapisała wyniki w kilogramach i odchylenie standardowe jej danych było równe σ_A. Basia zapisała te same wyniki w gramach i odchylenie standardowe jej danych było równe σ_B. Wynika stąd, że

A) $100\sigma_A = \sigma_B$ B) $1000\sigma_A = \sigma_B$ C) $\sigma_A = 100\sigma_B$ D) $\sigma_A = 1000\sigma_B$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ 1 kg = 1000 g, mamy

$$1000\sigma_A = \sigma_B.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 24 (1 PKT)

Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 12 i niepodzielnych przez 8?

A) 20 B) 38 C) 75 D) 35

ROZWIĄZANIE

Trzycyfrowe liczby podzielne przez 12 to

$$108 = 12 \cdot 9,\ 120 = 12 \cdot 10, \ldots, 996 = 12 \cdot 83.$$

Jest ich więc $83 - 8 = 75$. Liczby podzielne przez 12 i 8 to liczby podzielne przez 24, czyli liczby:

$$120 = 24 \cdot 5,\ 144 = 24 \cdot 6, \ldots, 984 = 24 \cdot 41.$$

W sumie jest więc $41 - 4 = 37$ liczb trzycyfrowych podzielnych przez 24.

Liczb spełniających warunki zadania jest więc $75 - 37 = 38$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 25 (1 PKT)

W tabeli poniżej przedstawione są wyniki pracy klasowej w dwóch klasach pierwszych.

Ocena	3,25	2,75	4,25	4	2	5,25	3,75	4,75	1	3	5	2,25	6	5,75
Liczba ocen	2	5	2	1	5	1	3	2	1	4	3	1	2	3

Mediana ocen w tych dwóch klasach jest równa

A) 4 B) 3 C) 3,25 D) 3,75

ROZWIĄZANIE

Przepiszmy oceny w kolejności rosnącej.

Ocena	1	2	2,25	2,75	3	3,25	3,75	4	4,25	4,75	5	5,25	5,75	6
Liczba ocen	1	5	1	5	4	2	3	1	2	2	3	1	3	2

Łącznie wystawionych ocen jest

$$1+5+1+5+4+2+3+1+2+2+3+1+3+2=35,$$

więc mediana jest równa 18 ocenie (w kolejności rosnącej). Ponieważ

$$1+5+1+5+4+2=18,$$

to osiemnastą oceną jest 3,25.

Odpowiedź: **C**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $17x(14x-9) \geqslant 13(9-14x)$.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekształcamy daną nierówność

$$\begin{aligned}
&17x(14x-9) \geqslant 13(9-14x)\\
&17x(14x-9) - 13(9-14x) \geqslant 0\\
&17x(14x-9) + 13(14x-9) \geqslant 0\\
&(17x+13)(14x-9) \geqslant 0\\
&17\cdot 14\cdot \left(x+\frac{13}{17}\right)\left(x-\frac{9}{14}\right) \geqslant 0\\
&x \in \left(-\infty, -\frac{13}{17}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{14}, +\infty\right).
\end{aligned}$$

Sposób II

Przekształcamy daną nierówność

$$\begin{aligned}
&17x(14x-9) \geqslant 13(9-14x)\\
&238x^2-153x \geqslant 117-182x\\
&238x^2+29x-117 \geqslant 0\\
&\Delta = 841+111384 = 112225 = 335^2\\
&x_1 = \frac{-29-335}{476} = -\frac{364}{476} = -\frac{13}{17}, \quad x_2 = \frac{-29+335}{476} = \frac{306}{476} = \frac{9}{14}\\
&x \in \left(-\infty, -\frac{13}{17}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{14}, +\infty\right).
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{13}{17}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{14}, +\infty\right)$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $\frac{(x^5-32)(x^4-81)}{x^2+x-6} = 0$.

ROZWIĄZANIE

Rozłóżmy najpierw trójmian w mianowniku

$$\begin{aligned}
&x^2+x-6 = 0\\
&\Delta = 1+24 = 25\\
&x = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{lub} \quad x = \frac{-1+5}{2} = 2.
\end{aligned}$$

To oznacza, że liczby $x=-3$ i $x=2$ nie należą do dziedziny równania.

Teraz patrzymy na licznik. Wyrażenie w pierwszym nawiasie zeruje się gdy

$$x^5 = 32 = 2^5 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2,$$

a wyrażenie w drugim nawiasie gdy

$$x^4 = 81 = 3^4 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 3.$$

W połączeniu z dziedziną równania, oznacza to, że równanie ma jedno rozwiązanie $x=3$.

Odpowiedź: $x = 3$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb ujemnych a, b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b} \leqslant \frac{1}{a+b}.$$

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy nierówność korzystając z podanego założenia o ujemności liczb a i b.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\leqslant\frac{1}{a+b} \quad / \cdot 4ab(a+b)\\
&b(a+b)+a(a+b)\geqslant 4ab\\
&ab+b^2+a^2+ab-4ab\geqslant 0\\
&a^2-2ab+b^2\geqslant 0\\
&(a-b)^2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a przekształcaliśmy przy pomocy równoważności, więc wyjściowa nierówność też musi być spełniona.

ZADANIE 29 (2 PKT)

Jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n\geqslant 1$, jest równy -8, a suma jego dziesięciu początkowych wyrazów jest równa -3. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Korzystamy ze wzorów na a_n i S_n.

$$\begin{cases}-8=a_{11}=a_1+10r\\ -3=S_{10}=\frac{2a_1+9r}{2}\cdot 10=5(2a_1+9r)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-8=a_1+10r\\ -3=10a_1+45r\end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze pomnożone przez 10 (żeby skrócić a_1) i mamy

$$-3+80=45r-100r \quad\Rightarrow\quad 77=-55r \quad\Rightarrow\quad r=-\frac{7}{5}$$

Z drugiego równania mamy

$$a_1=-8-10r=-8+14=6.$$

Sposób II

Na mocy wzoru $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n), mamy

$$-11=S_{10}+a_{11}=S_{11}=\frac{a_1+a_{11}}{2}\cdot 11 \quad\Rightarrow\quad a_1+a_{11}=-2.$$

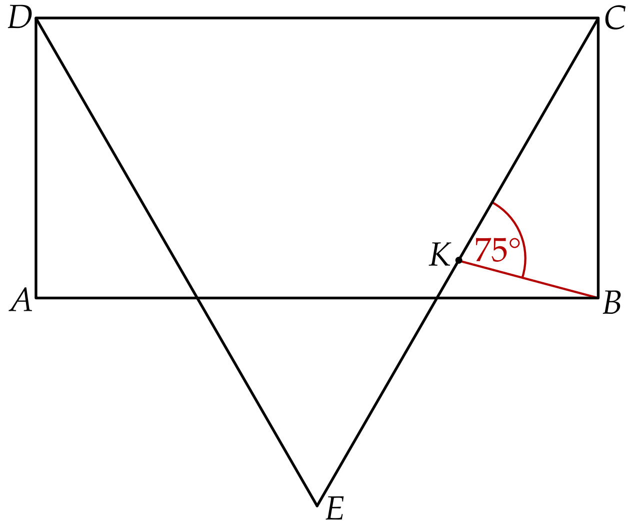
Stąd $a_1=-2-a_{11}=-2-(-8)=6$. Korzystamy teraz ze wzoru na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego.

$$-8=a_{11}=a_1+10r \quad\Rightarrow\quad 10r=-8-6=-14 \quad\Rightarrow\quad r=-\frac{14}{10}=-\frac{7}{5}.$$

Odpowiedź: $a_1=6, r=-\frac{7}{5}$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Dany jest prostokąt $ABCD$, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Na boku DC zbudowano trójkąt równoboczny CDE (zobacz rysunek). Punkt K jest takim punktem odcinka CE, że $|\measuredangle BKC| = 75^\circ$. Udowodnij, że punkt K jest środkiem odcinka CE.



ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że

$$\measuredangle ECB = \measuredangle DCB - \measuredangle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Stąd

$$\measuredangle KBC = 180^\circ - \measuredangle ECB - \measuredangle BKC = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ.$$

To oznacza, że trójkąt CKB jest równoramienny i

$$CK = CB = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}CE.$$

Zatem rzeczywiście punkt K jest środkiem odcinka CE.

ZADANIE 31 (2 PKT)

Rzucamy dziesięć razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tych dziesięciu rzutach otrzymaliśmy dokładnie cztery razy sześć oczek, przy czym wyrzucono je w następującej konfiguracji

$$\ldots 66x66 \ldots$$

tzn. w pewnym momencie w dwóch kolejnych rzutach otrzymaliśmy szóstki, potem wyrzuciliśmy inną liczbę x oczek, a następnie znowu wyrzuciliśmy dwie szóstki w dwóch kolejnych rzutach.

ROZWIĄZANIE

W każdym rzucie mamy sześć możliwych wyników, więc jest

$$|\Omega| = 6^{10}$$

wszystkich możliwych zdarzeń. Zastanówmy się teraz ile jest zdarzeń sprzyjających – myślimy o nich jak o ciągach 10 wyników rzutu kostką. Jest 6 możliwości umieszczenia ciągu

$$\ldots 66x66 \ldots$$

w 10 elementowym ciągu wyników (tzn. pierwsza szóstka może być na miejscach: 1,2,3,4,5,6). Potem możemy na 5 sposobów wybrać każdy z pozostałych wyników (nie może być szóstka). Jest więc

$$6 \cdot 5^6$$

ciągów spełniających warunki zadania i interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{6 \cdot 5^6}{6^{10}} = \frac{5^6}{6^9}.$$

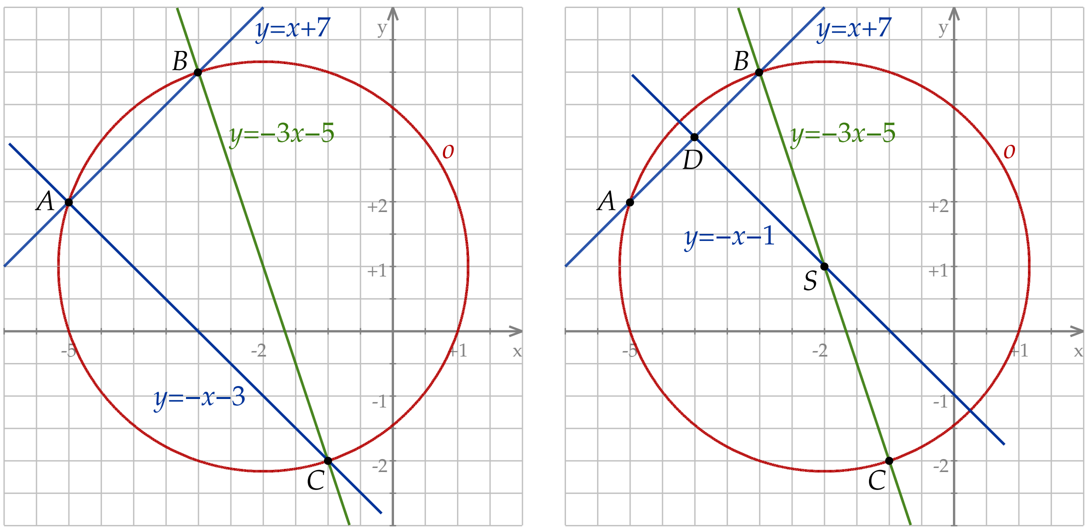
Odpowiedź: $\frac{5^6}{6^9}$

ZADANIE 32 (4 PKT)

W układzie współrzędnych punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (-3, 4)$ są końcami cięciwy okręgu o. Średnica BC tego okręgu jest zwarta w prostej o równaniu $y = -3x - 5$. Wyznacz współrzędne punktu C.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Sposób I

Napiszmy najpierw równanie prostej AB. Szukamy prostej w postaci $y = ax + b$ i podstawiamy współrzędne punktów A i B.

$$\begin{cases} 2 = -5a + b \\ 4 = -3a + b \end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze i mamy

$$2 = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Stąd $b = 4 + 3a = 7$ i prosta AB ma równanie $y = x + 7$.

Ponieważ BC jest średnicą okręgu, to $\measuredangle BAC = 90^\circ$. To pozwala łatwo wyznaczyć punkt C – jest to punkt wspólny podanej prostej BC i prostej prostopadłej do AB przechodzącej przez A. Prosta prostopadła do AB ma równanie postaci $y = -x + b$. Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu A.

$$2 = -(-5) + b \quad \Rightarrow \quad b = -3.$$

Zatem prosta AC ma równanie $y = -x - 3$ i pozostało znaleźć jej punkt wspólny z prostą BC.

$$\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$0 = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Stąd $y = -x - 3 = -2$ i $C = (-1, -2)$.

Sposób II

Tym razem najpierw wyznaczymy środek S danego okręgu – jest to punkt wspólny symetralnej odcinka AB i danej średnicy BC. Symetralna odcinka AB to zbiór punktów $X = (x, y)$ spełniających warunek

$$\begin{aligned} & AX^2 = BX^2 \\ & (x+5)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2 \\ & x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \\ & 4y = -4x - 4 \quad \Longleftrightarrow \quad y = -x - 1 \end{aligned}$$

Szukamy teraz punktu wspólnego S tej symetralnej z daną średnicą BC.

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$0 = 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

Stąd $y = -x - 1 = 1$ i $S = (-2, 1)$. Korzystamy teraz z tego, że S jest środkiem średnicy BC.

$$S = \frac{B+C}{2} \quad \Rightarrow \quad 2S = B + C \quad \Rightarrow \quad C = 2S - B = (-4, 2) - (-3, 4) = (-1, -2).$$

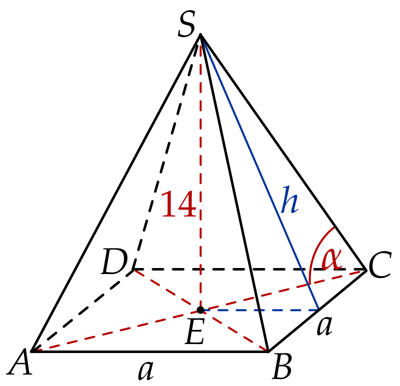
Odpowiedź: $C = (-1, -2)$

ZADANIE 33 (5 PKT)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H = 14$. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od rysunku.



Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy graniastosłupa. Korzystając ze wzoru na długość przekątnej kwadratu mamy

$$EC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Z podanego cosinusa kąta α między krawędzią ostrosłupa, a płaszczyzną podstawy mamy

$$\frac{3}{4} = \cos\alpha = \frac{EC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{SC} \quad \Rightarrow \quad SC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a.$$

Piszemy teraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym SCE.

$$SE^2 + EC^2 = SC^2$$
$$196 + \frac{a^2}{2} = \frac{8}{9}a^2$$
$$196 = \frac{8a^2}{9} - \frac{a^2}{2} = \frac{16-9}{18}a^2 = \frac{7}{18}a^2 \quad / \cdot \frac{18}{7}$$
$$a^2 = 14 \cdot 36 \quad \Rightarrow \quad a = 6\sqrt{14}.$$

Obliczamy jeszcze wysokość h ściany bocznej ostrosłupa.

$$h = \sqrt{SE^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{196 + 126} = \sqrt{322}.$$

Pozostało obliczyć pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

$$P_b = 4P_{BCS} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 12\sqrt{14} \cdot \sqrt{322} = 168\sqrt{23}.$$

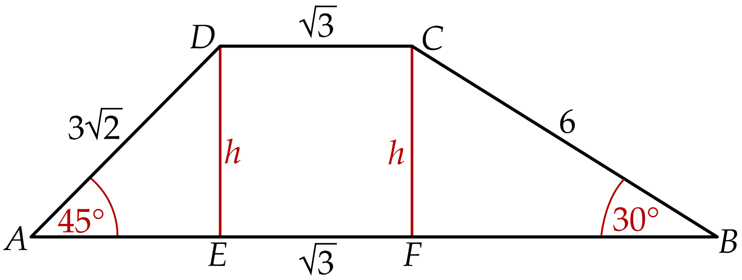
Odpowiedź: $P_b = 168\sqrt{23}$

ZADANIE 34 (4 PKT)

Krótsza podstawa trapezu ma długość $\sqrt{3}$, a ramiona długości $3\sqrt{2}$ i 6 tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 45° i 30° odpowiednio. Oblicz pole trapezu.

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od szkicowego rysunku.



Sposób I

Zauważmy, że trójkąt AED jest połówką kwadratu o boku 3, więc jego pole jest równe

$$P_{AED} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Ponadto $ED = 3$ i

$$P_{EFCD} = 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Patrzymy teraz na trójkąt FBC – jest to połówka trójkąta równobocznego o boku 6, więc jego pole jest równe

$$P_{FBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Pole trapezu jest więc równe

$$P_{ABCD} = P_{AED} + P_{EFCD} + P_{FBC} = \frac{9}{2} + 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Sposób II

Patrzymy najpierw na trójkąt prostokątny AED – możemy z niego obliczyć długości odcinków $ED = h$ i AE.

$$\frac{h}{3\sqrt{2}} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 3.$$

$$\frac{AE}{3\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 3.$$

Podobnie, korzystając z trójkąta FBC obliczamy długość odcinka FB.

$$\frac{FB}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad FB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}.$$

Zatem

$$AB = AE + EF + FB = 3 + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3}$$

i pole trapezu jest równe

$$P = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{3 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{9 + 15\sqrt{3}}{2}.$$

Odpowiedź: $\frac{9}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}$