EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

(STARA FORMUŁA)

POZIOM PODSTAWOWY

7 MAJA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\log_{\sqrt{2}} 2$ jest równa

A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Skorzystamy z definicji logarytmu

$$\log_a a^b = b.$$

Ponieważ

$$2 = \left(\sqrt{2}\right)^2,$$

mamy

$$\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

Sposób II

Korzystamy ze wzoru

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

na zmianę podstawy logarytmu, oraz ze wzoru

$$\log_a b^c = c\log_a b.$$

Liczymy

$$\log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{1}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba naturalna $n = 2^{14} \cdot 5^{15}$ w zapisie dziesiętnym ma

A) 14 cyfr B) 15 cyfr C) 16 cyfr D) 30 cyfr

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$n = 2^{14} \cdot 5^{15} = 2^{14} \cdot 5^{14} \cdot 5 = (2 \cdot 5)^{14} \cdot 5 = 10^{14} \cdot 5.$$

Jest to więc liczba o 15 cyfrach (piątka i 14 zer).

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 3 (1 PKT)

W pewnym banku prowizja od udzielanych kredytów hipotecznych przez cały styczeń była równa 4%. Na początku lutego ten bank obniżył wysokość prowizji od wszystkich kredytów o 1 punkt procentowy. Oznacza to, że prowizja od kredytów hipotecznych w tym banku zmniejszyła się o

A) 1% B) 25% C) 33% D) 75%

ROZWIĄZANIE

Prowizja zmalała o

$$\frac{1}{4} = 25\%.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Równość $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{a} = 1$ jest prawdziwa dla

A) $a = \frac{11}{20}$ B) $a = \frac{8}{9}$ C) $a = \frac{9}{8}$ D) $a = \frac{20}{11}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{20-5-4}{4 \cdot 5} = \frac{11}{20}$$

$$a = \frac{1}{\frac{11}{20}} = \frac{20}{11}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Para liczb $x = 2$ i $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} ax + y = 4 \\ -2x + 3y = 2a \end{cases}$ dla

A) $a = -1$ B) $a = 1$ C) $a = -2$ D) $a = 2$

ROZWIĄZANIE

Podstawiamy $x = 2$ i $y = 2$ w pierwszym równaniu.

$$2a + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 6 (1 PKT)

Równanie $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} = 0$

A) ma trzy różne rozwiązania: $x = 1,\ x = 3,\ x = -2$.
B) ma trzy różne rozwiązania: $x = -1,\ x = -3,\ x = 2$.
C) ma dwa różne rozwiązania: $x = 1\ x = -2$.
D) ma dwa różne rozwiązania: $x = -1,\ x = 2$.

ROZWIĄZANIE

Licznik zeruje się dla $x = 1$ i $x = -2$. Jednocześnie żadna z tych liczb nie zeruje mianownika, więc to są rozwiązania danego równania.

Odpowiedź: C

ZADANIE 7 (1 PKT)

Miejscem zerowym funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = 3(x+1) - 6\sqrt{3}$ jest liczba

A) $3 - 6\sqrt{3}$ B) $1 - 6\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3} - 1$ D) $2\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

ROZWIĄZANIE

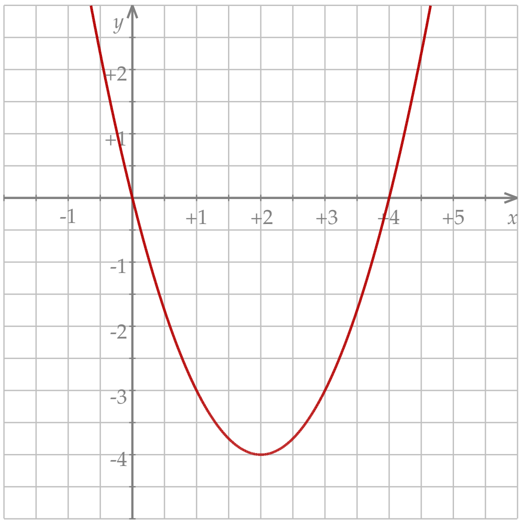
Liczymy

$$\begin{aligned} &3(x+1) - 6\sqrt{3} = 0 \quad / : 3 \\ &(x+1) = 2\sqrt{3} \\ &x = 2\sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

Odpowiedź: C

Informacja do zadań 8 – 10

Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (2, -4)$. Liczby 0 i 4 to miejsca zerowe funkcji f.



ZADANIE 8 (1 PKT)

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A) $(-\infty, 0\rangle$ B) $\langle 0, 4\rangle$ C) $\langle -4, +\infty)$ D) $\langle 4, +\infty\rangle$

ROZWIĄZANIE

Zbiorem wartości funkcji przedstawionej na wykresie jest przedział $\langle -4, +\infty)$.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4\rangle$ jest równa

A) -3 B) -4 C) 4 D) 0

ROZWIĄZANIE

Łatwo odczytać z wykresu, że największa wartość funkcji f na przedziale $\langle 1, 4\rangle$, to

$$f(4) = 0.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu

A) $y = -4$ B) $x = -4$ C) $y = 2$ D) $x = 2$

ROZWIĄZANIE

Osią symetrii jest pionowa prosta przechodząca przez wierzchołek paraboli, czyli prosta $x = 2$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 11 (1 PKT)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są dwa wyrazy: $a_1 = 7$ oraz $a_8 = -49$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A) -168 B) -189 C) -21 D) -42

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Korzystamy ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Mamy zatem

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{7 - 49}{2} \cdot 8 = -21 \cdot 8 = -168.$$

Sposób II

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$\begin{aligned} -49 &= a_8 = a_1 + 7r = 7 + 7r \\ -56 &= 7r \quad \Rightarrow \quad r = -8. \end{aligned}$$

Korzystamy teraz ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

Mamy zatem

$$S_8 = \frac{2 \cdot 7 + 7 \cdot (-8)}{2} \cdot 8 = -168.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 12 (1 PKT)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie i spełniony jest warunek $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$. Iloraz tego ciągu jest równy

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) 3 D) $\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy przez q iloraz ciągu geometrycznego (a_n), to z podanej informacji mamy

$$\frac{1}{9} = \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_3q^2}{a_3} = q^2 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

(Po drodze skorzystaliśmy z tego, że wyrazy ciągu są dodatnie, czyli z tego, że $q > 0$.)

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{4}{5}$. Wtedy

A) $\cos\alpha = \frac{5}{4}$ B) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ C) $\cos\alpha = \frac{9}{25}$ D) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

ROZWIĄZANIE

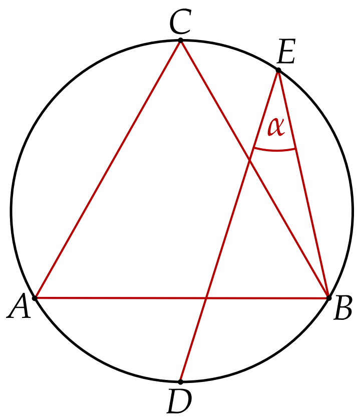
Obliczmy $\cos\alpha$ (z jedynki trygonometrycznej).

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Punkty D i E leżą na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC (zobacz rysunek). Odcinek CD jest średnicą tego okręgu. Kąt wpisany DEB ma miarę α.

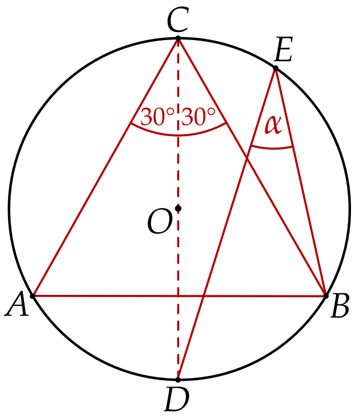


Zatem

A) $\alpha = 30^\circ$ B) $\alpha < 30^\circ$ C) $\alpha > 45^\circ$ D) $\alpha = 45^\circ$

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy średnicę CD.



Jeżeli odcinek CD jest średnicą okręgu, to przechodzi przez środek trójkąta równobocznego ABC. Odcinek ten jest więc zawarty w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A tego trójkąta, czyli

$$\measuredangle DCB = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = 30^\circ.$$

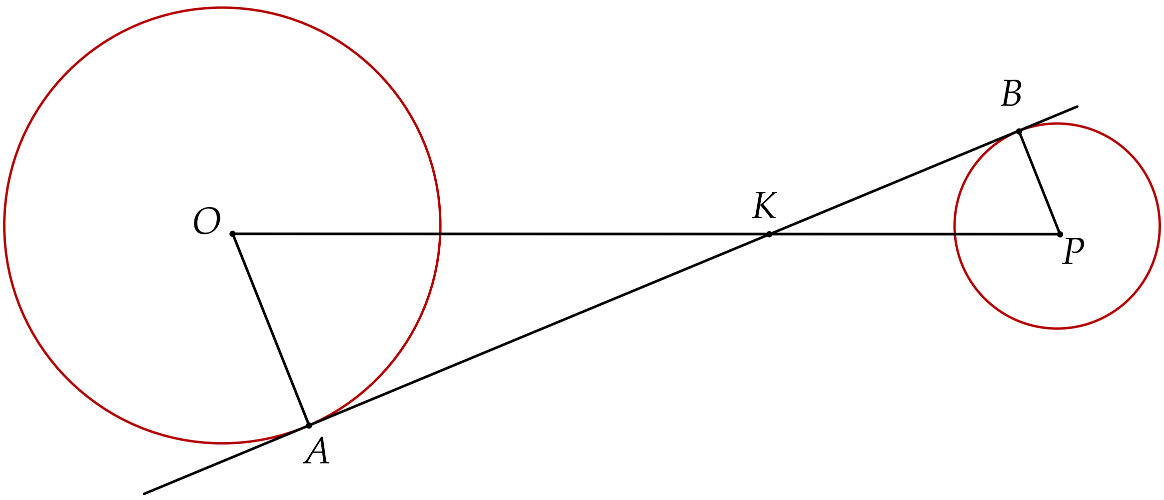
Kąty DCB i DEB są oparte na tym samym łuku, więc

$$\alpha = \measuredangle DEB = \measuredangle DCB = 30^\circ.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 15 (1 PKT)

Dane są dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie O i promieniu 5 oraz okrąg o środku w punkcie P i promieniu 3. Odcinek OP ma długość 16. Prosta AB jest styczna do tych okręgów w punktach A i B. Ponadto prosta AB przecina odcinek OP w punkcie K (zobacz rysunek).



Wtedy

A) $|OK| = 6$ B) $|OK| = 8$ C) $|OK| = 10$ D) $|OK| = 12$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąty prostokątne AKO i BKP mają równe kąty. Są więc podobne i

$$\begin{aligned}\frac{OK}{KP} &= \frac{OA}{PB}\\ \frac{OK}{16-OK} &= \frac{5}{3}\\ 3K &= 80-5K \quad \Rightarrow \quad OK = 10.\end{aligned}$$

Odpowiedź: C

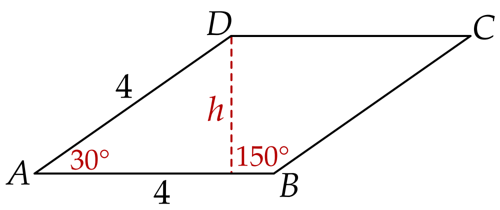
ZADANIE 16 (1 PKT)

Dany jest romb o boku długości 4 i kącie rozwartym 150°. Pole tego rombu jest równe

A) 8 B) 12 C) $8\sqrt{3}$ D) 16

ROZWIĄZANIE

Najpierw szkicowy rysunek.



Kąt ostry rombu ma miarę

$$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

Sposób I

Obliczamy wysokość rombu

$$\frac{h}{4} = \sin 30^\circ \quad \Rightarrow \quad h = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Zatem pole rombu jest równe

$$P = 4\cdot 2 = 8.$$

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na pole równoległoboku z sinusem

$$P = 4\cdot 4\cdot \sin 30^\circ = 16\cdot\frac{1}{2} = 8.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 17 (1 PKT)

Proste o równaniach $y = (2m+2)x - 2019$ i $y = (3m-3)x + 2019$ są równoległe, gdy

A) $m = -1$ B) $m = 0$ C) $m = 1$ D) $m = 5$

ROZWIĄZANIE

Proste są równoległe jeżeli mają równe współczynniki kierunkowe. Mamy zatem równanie

$$2m + 2 = 3m - 3 \quad \Rightarrow \quad m = 5.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 18 (1 PKT)

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -4x + 1$ i przechodzi przez punkt $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, gdy

A) $a = -4$ i $b = -2$ B) $a = \frac{1}{4}$ i $b = -\frac{1}{8}$

C) $a = -4$ i $b = 2$ D) $a = \frac{1}{4}$ i $b = \frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

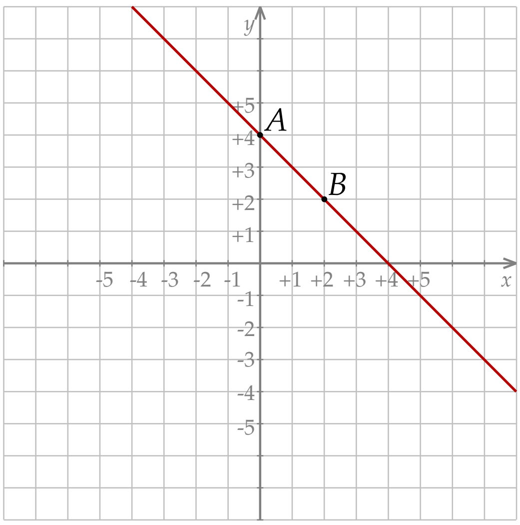
Proste $y = ax + b$ oraz $y = cx + d$ są prostopadłe jeżeli $ac = -1$. Zatem szukana prosta musi mieć współczynnik kierunkowy (liczbę przy x) równy $\frac{1}{4}$. Pozostało podstawić w równaniu $y = \frac{1}{4}x + b$ współrzędne punktu P.

$$0 = \frac{1}{8} + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{8}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 19 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji liniowej f. Na wykresie tej funkcji leżą punkty $A = (0, 4)$ i $B = (2, 2)$.



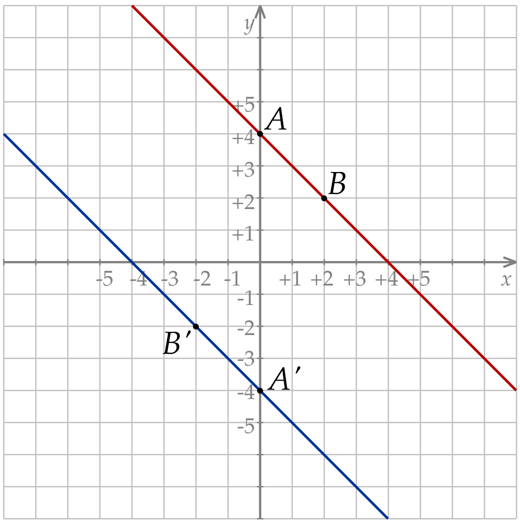
Obrazem prostej AB w symetrii względem początku układu współrzędnych jest wykres funkcji g określonej wzorem

A) $g(x) = x + 4$ B) $g(x) = x - 4$ C) $g(x) = -x - 4$ D) $g(x) = -x + 4$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli odbijemy dany wykres funkcji liniowej względem początku układu współrzędnych, to otrzymamy prostą przechodzącą przez punkty $A' = (0, -4)$ i $B' = (-2, -2)$.



Jest to więc prosta postaci $y = ax - 4$. Współczynnik a wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu $(-2, 2)$.

$$-2 = -2a - 4 \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

Odbita prosta ma więc równanie $y = -x - 4$.

Sposób II

Dana prosta przechodzi przez punkt $(0, 4)$, więc ma równanie postaci $y = ax + 4$. Przechodzi ponadto przez punkt $(2, 2)$, więc

$$2 = 2a + 4 \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

Jest to więc prosta $y = -x + 4$. Prosta symetryczna do niej względem początku układu współrzędnych ma ten sam współczynnik kierunkowy, bo tworzy z osią Ox taki sam kąt jak pierwsza prosta. Ponadto przecina oś Oy w punkcie $(0, -4)$, więc jest to prosta: $y = -x - 4$.

Odpowiedź: **C**

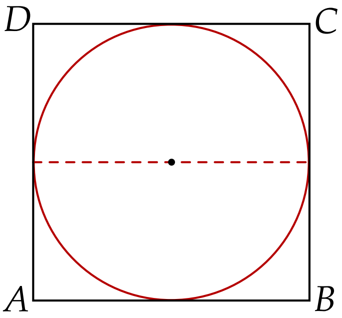
ZADANIE 20 (1 PKT)

Dane są punkty o współrzędnych $A = (-2, 5)$ oraz $B = (4, -1)$. Średnica okręgu wpisanego w kwadrat o boku AB jest równa

A) 12 B) 6 C) $6\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{6}$

ROZWIĄZANIE

Średnica okręgu wpisanego w kwadrat jest równa długości boku tego kwadratu.



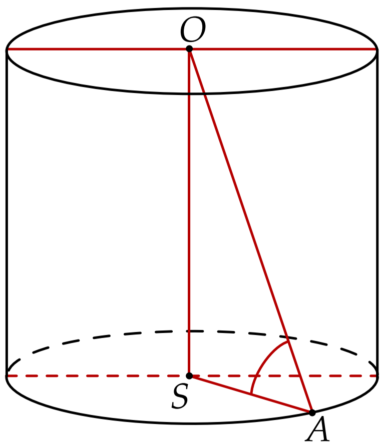
Jest więc ona równa

$$AB = \sqrt{(4+2)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 21 (1 PKT)

Promień AS podstawy walca jest równy połowie wysokości OS tego walca. Sinus kąta OAS (zobacz rysunek) jest równy



A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy $AS = r$, to $OS = 2r$ i

$$AO = \sqrt{AS^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + 4r^2} = r\sqrt{5}.$$

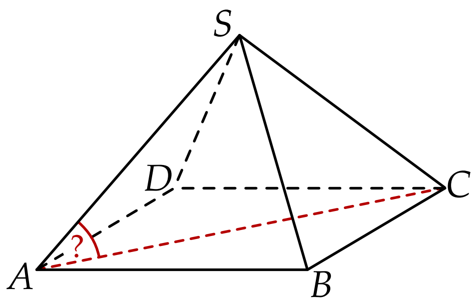
Stąd

$$\sin\alpha = \frac{OS}{AO} = \frac{2r}{r\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 22 (1 PKT)

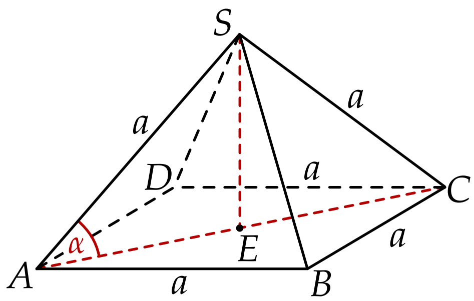
Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.



Miara kąta SAC jest równa
A) 90° B) 75° C) 60° D) 45°

ROZWIĄZANIE

Niech a oznacza długość każdej z krawędzi ostrosłupa.



Sposób I

W podstawie ostrosłupa jest kwadrat, więc

$$EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Z trójkąta SEA mamy więc

$$\cos\alpha = \frac{EA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

To oznacza, że $\alpha = 45^\circ$.

Sposób II

Zauważmy, że trójkąty ABC i ASC mają równe długości boków, więc są przystające. W takim razie

$$\measuredangle\alpha = \measuredangle CAS = \measuredangle CAB = 45^\circ.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 23 (1 PKT)

Mediana zestawu sześciu danych liczb: $4, 8, 21, a, 16, 25$ jest równa 14. Zatem

A) $a = 7$ B) $a = 12$ C) $a = 14$ D) $a = 20$

ROZWIĄZANIE

Mediana z sześciu uporządkowanych liczb to średnia arytmetyczna dwóch środkowych. Dane wypisane w kolejności rosnącej (na razie z pominięciem a) to

$$4, 8, 16, 21, 25.$$

Widać teraz, że liczba a musi znajdować się między 8 i 16 oraz musi być

$$\frac{a+16}{2} = 14 \quad \Rightarrow \quad a + 16 = 28 \quad \Rightarrow \quad a = 12.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 24 (1 PKT)

Wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których występują wyłącznie cyfry 0, 2, 5, jest

A) 12 B) 36 C) 162 D) 243

ROZWIĄZANIE

Pierwszą cyfrę (od lewej) tworzonej liczby możemy wybrać na 2 sposoby (nie może być 0), drugą, trzecią, czwartą i piątą cyfrę możemy wybrać na 3 sposoby. W sumie są więc

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$$

takie liczby.

Odpowiedź: C

ZADANIE 25 (1 PKT)

W pudełku jest 40 kul. Wśród nich jest 35 kul białych, a pozostałe to kule czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej kuli jest takie samo. Z pudełka losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy kulę czerwoną, jest równe

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{40}$ D) $\frac{1}{35}$

ROZWIĄZANIE

Szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

Odpowiedź: A

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $x^3-5x^2-9x+45=0$.

ROZWIĄZANIE

Grupujemy wyrazy

$$\begin{aligned} 0 &= x^3-5x^2-9x+45 = x^2(x-5)-9(x-5) = \\ &= (x-5)(x^2-9) = (x-5)(x-3)(x+3). \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniami równania są liczby

$$-3,3,5.$$

Odpowiedź: $x\in\{-3,3,5\}$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $3x^2-16x+16>0$.

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} &3x^2-16x+16>0 \\ &\Delta = 16^2-4\cdot 3\cdot 16 = 256-192 = 64 \\ &x_1 = \frac{16-8}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{16+8}{6} = 4 \\ &x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (4,+\infty). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $x\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\cup(4,+\infty)$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$3a^2-2ab+3b^2 \geqslant 0.$$

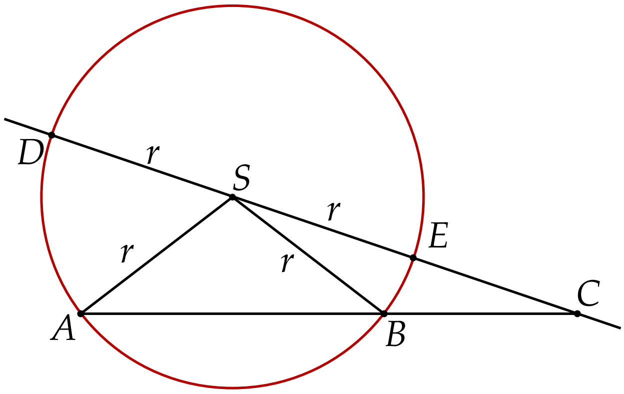
ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$3a^2-2ab+3b^2 = 2a^2+2b^2+(a^2-2ab+b^2) = 2a^2+2b^2+(a-b)^2 \geqslant 0.$$

ZADANIE 29 (2 PKT)

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Na przedłużeniu cięciwy AB poza punkt B odłożono odcinek BC równy promieniowi danego okręgu. Przez punkty C i S poprowadzono prostą. Prosta CS przecina dany okrąg w punktach D i E (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli miara kąta ACS jest równa α, to miara kąta ASD jest równa 3α.



ROZWIĄZANIE

Z założenia trójkąt SBC jest równoramienny, więc

$$\measuredangle BSC = \alpha$$
$$\measuredangle SBC = 180^\circ - 2\alpha.$$

Trójkąt ASB również jest równoramienny, więc

$$\measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Stąd

$$\measuredangle ASD = 180^\circ - \measuredangle ASB - \measuredangle BSC = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha.$$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą.

ROZWIĄZANIE

Każdą liczbę możemy wybrać na 5 sposobów, więc

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25.$$

W zdarzeniach sprzyjających obie wylosowane liczby muszą być nieparzyste, więc jest

$$3 \cdot 3 = 9$$

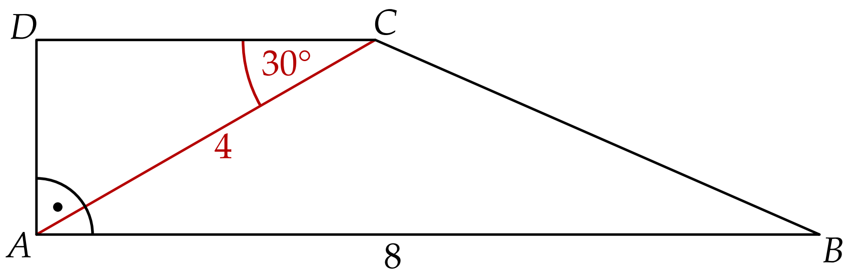
takich zdarzeń i interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{9}{25}.$$

Odpowiedź: $\frac{9}{25}$

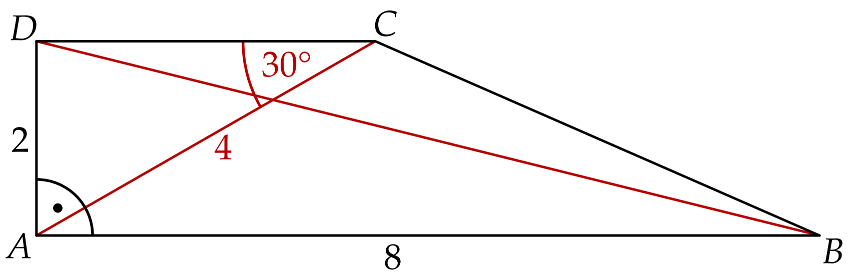
ZADANIE 31 (2 PKT)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 8. Przekątna AC tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą trapezu kąt o mierze 30° (zobacz rysunek). Oblicz długość przekątnej BD tego trapezu.



ROZWIĄZANIE

Dorysujmy przekątną BD trapezu.



Trójkąt ACD jest połówką trójkąta równobocznego o boku $AC = 4$, więc w szczególności $AD = \frac{1}{2}AC = 2$. Pozostało zastosować twierdzenie Pitagorasa w trójkącie ABD.

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

Odpowiedź: $2\sqrt{17}$

ZADANIE 32 (4 PKT)

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, jest równa 16.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz liczbę k, dla której $a_k = -78$.

ROZWIĄZANIE

a) Wiemy, że
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = 16 \cdot 6.$$
Ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, mamy więc
$$16 \cdot 6 = S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6 = (a_1 - 10) \cdot 6 \quad / : 6$$
$$16 = a_1 - 10 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 26.$$

Odpowiedź: $a_1 = 26$

b) Ze wzoru na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego, mamy równanie
$$-78 = a_k = a_1 + (k-1)r = 26 - 4(k-1)$$
$$4(k-1) = 104 \quad / : 4$$
$$k - 1 = 26 \quad \Rightarrow \quad k = 27.$$

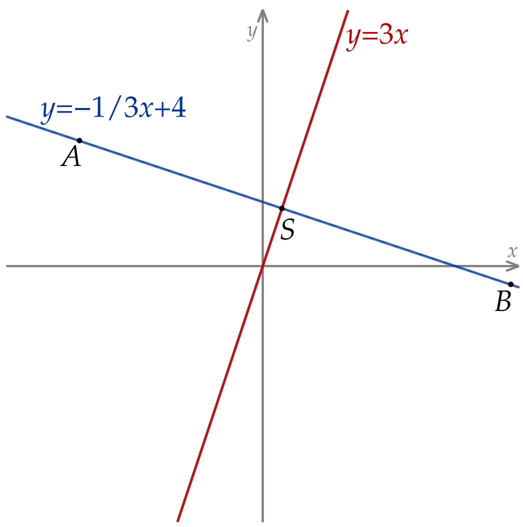
Odpowiedź: $k = 27$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Dany jest punkt $A = (-18, 10)$. Prosta o równaniu $y = 3x$ jest symetralną odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B.

ROZWIĄZANIE

Symetralna odcinka jest do niego prostopadła, więc prosta AB ma równanie postaci
$$y = -\frac{1}{3}x + b.$$
Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu A.
$$10 = -\frac{1}{3} \cdot (-18) + b = 6 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4.$$
Środek S odcinka AB to punkt wspólny prostej AB i podanej symetralnej.



Wyznaczmy jego współrzędne.

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$0 = 3x + \frac{1}{3}x - 4$$
$$4 = \frac{10}{3}x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{10} \cdot 4 = \frac{6}{5}.$$

Stąd $y = 3x = \frac{18}{5}$ i $S = \left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right)$.

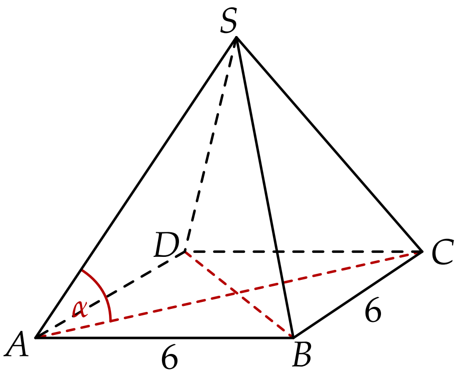
Pozostało skorzystać ze wzoru na środek odcinka.

$$S = \frac{A+B}{2} \quad \Rightarrow \quad B = 2S - A = \left(\frac{12}{5}, \frac{36}{5}\right) - (-18, 10) = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right).$$

Odpowiedź: $b = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right)$

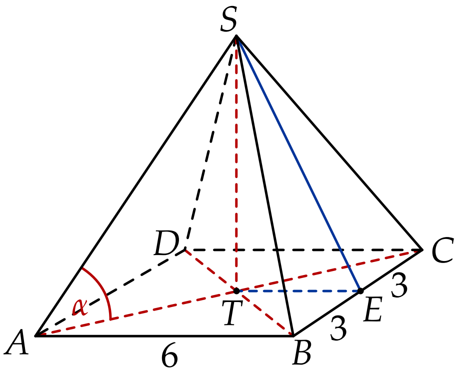
ZADANIE 34 (5 PKT)

Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest cztery razy większe od pola jego podstawy. Kąt α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta α.



ROZWIĄZANIE

Dorysujmy wysokość ST ostrosłupa oraz wysokość SE jego ściany bocznej.



Wiemy, że pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe

$$P_c = 4P_p = 4 \cdot 36.$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} &4 \cdot 36 = P_c = P_p + 4P_{SBC} = 36 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot SE = 36 + 12SE \quad / : 12 \\ &SE = 12 - 3 = 9. \end{aligned}$$

Stosujemy teraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie SBE i obliczamy długość krawędzi bocznej ostrosłupa.

$$SB = \sqrt{SE^2 + BE^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Z trójkąta prostokątnego ATS obliczamy interesujący nas cosinus.

$$\cos\alpha = \frac{AT}{AS} = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Odpowiedź: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$