PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM PODSTAWOWY

27 KWIETNIA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $(-\log_7 0,01)$ jest mniejsza od liczby $(-\log_7 0,0001)$ o

A) 100% B) 25% C) 50% D) 10%

ROZWIĄZANIE

Ponieważ

$$-\log_7 0,01 = -\log_7 10^{-2} = 2\log_7 10$$
$$-\log_7 0,0001 = -\log_7 10^{-4} = 4\log_7 10,$$

to pierwsza liczba jest mniejsza od drugiej o $2\log_7 10$, czyli o 50% drugiej liczby.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $\frac{x^4-81}{(x^2+9)(x-3)}$ dla $x=\sqrt{3}-3$ jest równa

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) 3 D) -3

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{x^4-81}{(x^2+9)(x-3)} = \frac{(x^2-9)(x^2+9)}{(x^2+9)(x-3)} = \frac{x^2-9}{x-3} =$$
$$= \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 = \sqrt{3}-3+3 = \sqrt{3}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Dane są liczby $x = 5,7\cdot 10^{-6}$ oraz $y = 1,9\cdot 10^{3}$. Wtedy iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy

A) $3\cdot 10^{-3}$ B) $10,83\cdot 10^{-3}$ C) $3\cdot 10^{-9}$ D) $10,83\cdot 10^{-9}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{x}{y} = \frac{5,7 \cdot 10^{-6}}{1,9 \cdot 10^{3}} = \frac{3 \cdot 1,9 \cdot 10^{-6}}{1,9 \cdot 10^{3}} = 3 \cdot 10^{-6-3} = 3 \cdot 10^{-9}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 4 (1 PKT)

Czas trwania zabiegu rehabilitacyjnego wydłużono o 35% do 108 minut. Ile początkowo miał trwać ten zabieg?

A) 80 minut B) 90 minut C) 60 minut D) 70 minut

ROZWIĄZANIE

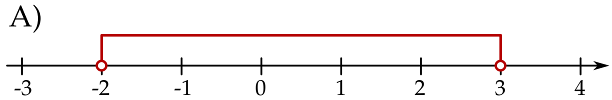
Jeżeli x jest początkowym czasem trwania zabiegu, to

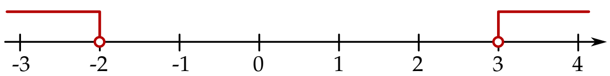
$$1,35x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{108}{1,35} = 80.$$

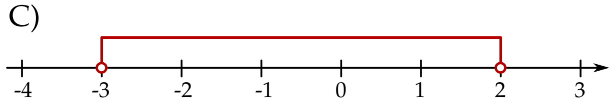
Odpowiedź: A

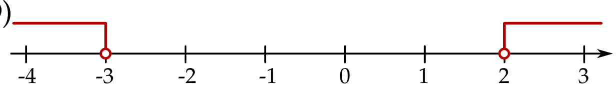
ZADANIE 5 (1 PKT)

Zbiorem rozwiązań nierówności $3(x+3)(2-x) > 0$ jest zbiór zaznaczony na osi liczbowej:

A)


B)


C)


D)


ROZWIĄZANIE

Daną nierówność możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} &3(x+3)(2-x) > 0 \quad / : (-3) \\ &(x+3)(x-2) < 0 \\ &(x-(-3))(x-2) < 0 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tej nierówności jest przedział $(-3,2)$.

Odpowiedź: C

ZADANIE 6 (1 PKT)

Równanie $x + \frac{1}{9x+6} = 0$
A) ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
B) ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste.
C) ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.
D) nie ma rozwiązań.

ROZWIĄZANIE

Ze względu na mianownik musi być $x \neq -\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
&x + \frac{1}{9x+6} = 0 \quad / \cdot (9x+6) \\
&x(9x+6) + 1 = 0 \\
&9x^2 + 6x + 1 = 0 \\
&(3x+1)^2 = 0 \\
&3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Równanie ma więc jedno rozwiązanie.

Odpowiedź: C

ZADANIE 7 (1 PKT)

Jeśli wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 3x + 2a$ jest styczny do prostej $y = -4$, to
A) $a = \frac{7}{4}$ B) $a = -\frac{9}{8}$ C) $a = \frac{9}{4}$ D) $a = -\frac{7}{8}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Zapiszmy wzór funkcji f w postaci kanonicznej

$$f(x) = x^2 + 3x + 2a = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2a - \frac{9}{4}\right).$$

Wykresem tej funkcji jest więc parabola o ramionach skierowanych w górę i wierzchołku w punkcie $\left(-\frac{3}{2}, 2a - \frac{9}{4}\right)$. Jeżeli wykres tej funkcji jest styczny do prostej $y = -4$, to wierzchołek paraboli musi leżeć na tej prostej, tzn.

$$2a - \frac{9}{4} = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2a = -\frac{7}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\frac{7}{8}.$$

Sposób II

Wykres funkcji f jest styczny do prostej $y = -4$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$\begin{aligned} & f(x) = -4 \\ & x^2 + 3x + 2a = -4 \\ & x^2 + 3x + 2a + 4 = 0 \end{aligned}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Aby tak było musi być spełniony warunek

$$\begin{aligned} & 0 = \Delta = 9 - 4(2a+4) = -7 - 8a \quad / : 8 \\ & a = -\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Sposób III

Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 3x + 2a$ jest parabola o ramionach skierowanych w górę i pierwszej współrzędnej wierzchołka równej

$$x_w = -\frac{3}{2}.$$

Jeżeli wykres tej funkcji ma jeden punkt wspólny z prostą $y = -4$, to wierzchołek paraboli musi leżeć na tej prostej, tzn.

$$\begin{aligned} & -4 = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2a \\ & 2a = -4 + \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **D**

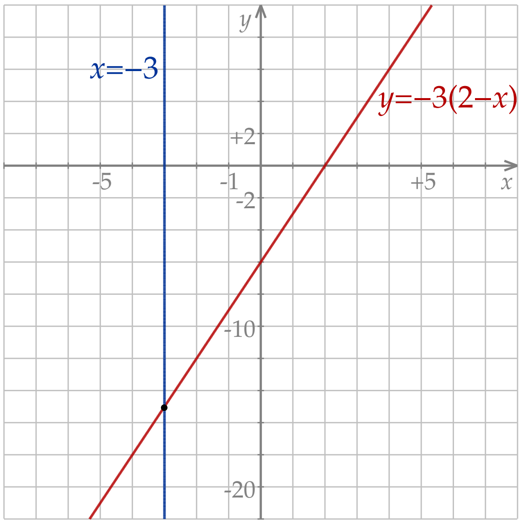
ZADANIE 8 (1 PKT)

Wykres funkcji liniowej $y = -3(2-x)$ przecina prostą $2x + 6 = 0$ w punkcie
A) $(-3, 9)$ B) $(-6, -24)$ C) $(-3, -15)$ D) $(2, 0)$

ROZWIĄZANIE

Podana prosta to pionowa prosta $x = -3$. Aby wyznaczyć drugą współrzędną punktu wspólnego tej prostej z danym wykresem funkcji liniowej $y = -3(2-x)$ podstawiamy $x = -3$ w tym wzorze.

$$y = -3 \cdot 5 = -15.$$



Zatem interesujący nas punkt ma współrzędne $(-3, -15)$.

Odpowiedź: C

ZADANIE 9 (1 PKT)

Dane są funkcje $f(x) = \frac{5^x}{(\sqrt{5})^x}$ oraz $g(x) = \frac{(\sqrt{5}-1)^x}{2^x}$, określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Punkt wspólny wykresów funkcji f i g

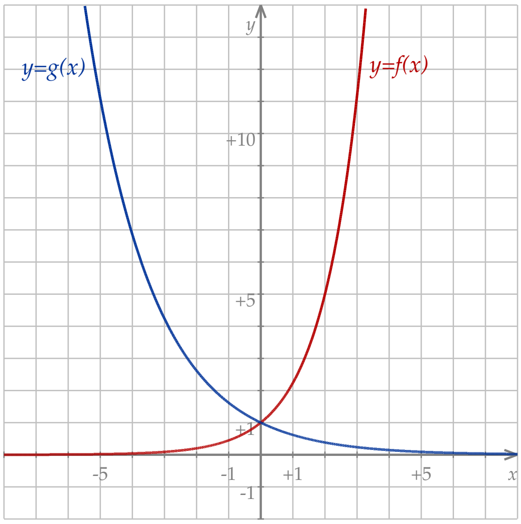
A) nie istnieje
B) ma współrzędne $(0, 1)$
C) ma współrzędne $(1, 0)$
D) ma współrzędne $(\sqrt{5}, 5)$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$f(x) = \frac{5^x}{(\sqrt{5})^x} = \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^x = (\sqrt{5})^x$$
$$g(x) = \frac{(\sqrt{5}-1)^x}{2^x} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$$

Ponadto $\sqrt{5} > 1$ i $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{3-1}{2} = 1$, więc funkcja $y = f(x)$ jest rosnącą funkcją wykładniczą, a $y = g(x)$ jest malejącą funkcją wykładniczą.



Nawet ze szkicowego rysunku powinno być widać, że wykresy te mają jeden punkt wspólny: $(0,1)$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Zbiorem wartości funkcji $y = \left(x - \sqrt{2}\right)^2 - 7$ określonej w przedziale $\left\langle -\sqrt[3]{19}, \sqrt[3]{19} \right\rangle$ jest

A) $\left\langle -7, (\sqrt[3]{19} + \sqrt{2})^2 - 7 \right\rangle$
B) $\left\langle -7, (\sqrt[3]{19} - \sqrt{2})^2 - 7 \right\rangle$
C) $\left\langle (\sqrt[3]{19} - \sqrt{2})^2 - 7, (\sqrt[3]{19} + \sqrt{2})^2 - 7 \right\rangle$
D) $\left\langle -7, (\sqrt[3]{19} + \sqrt{2})^2 \right\rangle$

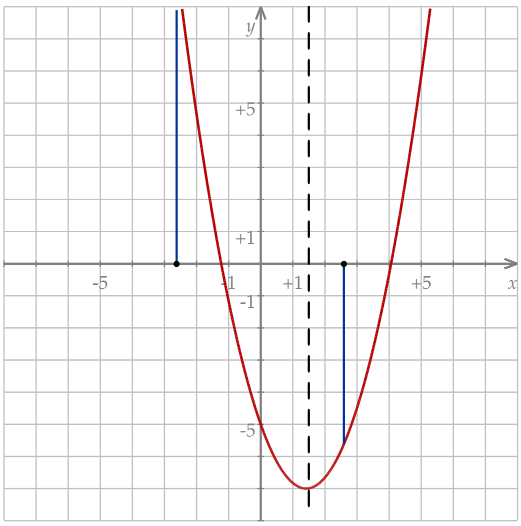
ROZWIĄZANIE

Sposób I

Zauważmy, że pierwsza współrzędna wierzchołka danej paraboli

$$x_w = \sqrt{2} \approx 1,41$$

znajduje się w podanym przedziale, więc na pewno najmniejszą wartością jest -7.



Ponadto, oś symetrii paraboli znajduje się po prawej stronie środka danego przedziału, więc większą wartość przyjmuje ta parabola w lewym końcu przedziału, niż w prawym. Zatem największa wartość to

$$f\left(-\sqrt[3]{19}\right) = (-\sqrt[3]{19}-\sqrt{2})^2 - 7 = (\sqrt[3]{19}+\sqrt{2})^2 - 7.$$

Sposób II

Sprawdzamy podane odpowiedzi. Jak w poprzednim sposobie zauważamy, że najmniejsza wartość to -7. Ponadto

$$8 < 19 < 27 \quad \Rightarrow \quad 2 < \sqrt[3]{19} < 3.$$

Stąd

$$\left(\sqrt[3]{19}+\sqrt{2}\right)^2 - 7 > (2+1)^2 - 7 > 0$$
$$\left(\sqrt[3]{19}-\sqrt{2}\right)^2 - 7 < (3-1)^2 - 7 < 0.$$

Zatem największą wartością musi być pierwsza z tych liczb.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = -3(2-5x)(5x+7)$. Liczby x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji f. Zatem

A) $x_1 + x_2 = -6$ B) $x_1 + x_2 = 10$ C) $x_1 + x_2 = \frac{9}{5}$ D) $x_1 + x_2 = -1$

ROZWIĄZANIE

Miejscami zerowymi danej funkcji

$$f(x) = -3(2-5x)(5x+7) = -3\cdot 5\cdot(-5)\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x+\frac{7}{5}\right)$$

są liczby $x_1 = \frac{2}{5}$ i $x_2 = -\frac{7}{5}$. Zatem

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{5} - \frac{7}{5} = -1.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 12 (1 PKT)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, spełniony jest warunek $a_{11} + a_{15} = 13$. Wtedy

A) $a_{13} = 13$ B) $a_{13} = 26$ C) $a_{13} = 6,5$ D) $a_{13} = 12,5$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli oznaczymy przez r różnicę ciągu a_n, to

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} - r = a_{13} - 2r \\ a_{15} &= a_{14} + r = a_{13} + 2r. \end{aligned}$$

Zatem

$$13 = a_{11} + a_{15} = a_{13} - 2r + a_{13} + 2r = 2a_{13} \quad \Rightarrow \quad a_{13} = 6,5.$$

Sposób II

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$\begin{aligned} &13 = a_{11} + a_{15} = (a_1 + 10r) + (a_1 + 14r) = 2a_1 + 24r \quad / : 2 \\ &6,5 = a_1 + 12r. \end{aligned}$$

Zatem $a_{13} = a_1 + 12r = 6,5$.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 13 (1 PKT)

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, spełniony jest warunek $27a_6^3 = 8a_3a_2a_7$. Iloraz tego ciągu jest równy

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt[6]{3}$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ $a_6 = a_1q^5$, $a_3 = a_1q^2$, $a_2 = a_1q$, $a_7 = a_1q^6$ mamy równanie

$$\begin{aligned} &27\left(a_1q^5\right)^3 = 8\left(a_1q^2\right) \cdot (a_1q) \cdot \left(a_1q^6\right) \\ &27a_1^3q^{15} = 8a_1^3q^9 \quad / : 27a_1^3q^9 \\ &q^6 = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Układ równań $\begin{cases} \sqrt{6}x - 2y = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{6}y - 3x = -3\sqrt{2} \end{cases}$

A) nie ma rozwiązań. B) ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C)ma nieskończenie wiele rozwiązań. D) ma dokładnie dwa rozwiązania.

ROZWIĄZANIE

Chcemy mieć ten sam współczynnik przy x w obu równaniach, więc mnożymy pierwsze przez $\sqrt{6}$, a drugie przez -2. Otrzymujemy wtedy układ równań

$$\begin{cases} 6x - 2\sqrt{6}y = 6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6}y + 6x = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

Równania układu są takie same, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Wtedy

A) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{9}{15}$ B) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{5}$ C) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{8}{15}$ D) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{16}{15}$

ROZWIĄZANIE

Na mocy jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

mamy

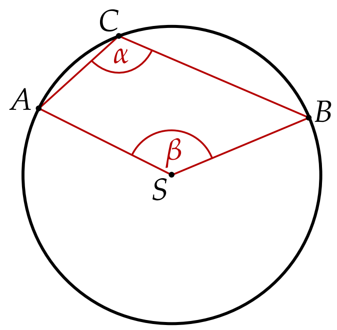
$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\frac{9}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{16}{15}.$$

Zauważmy, że w rozwiązaniu nie miało znaczenia to, że kąta α jest ostry.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek).



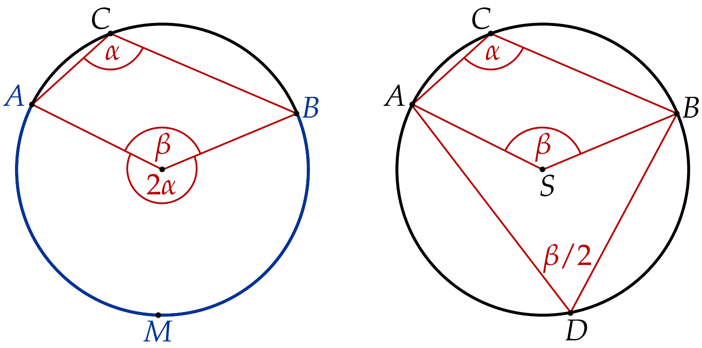
Miary α i β zaznaczonych kątów ACB i ASB spełniają warunek $\beta - \alpha = 45^\circ$. Wynika stąd, że

A) $\alpha = 315^\circ$ B) $\alpha = 225^\circ$ C) $\alpha = 150^\circ$ D) $\alpha = 105^\circ$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Korzystamy z faktu, że kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku (na danym obrazku jest to łuk AMB).



Zatem

$$\begin{cases} \beta + 2\alpha = 360^\circ \\ \beta - \alpha = 45^\circ \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$3\alpha = 315^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 105^\circ.$$

Sposób II

Jeżeli nie chcemy posługiwać się kątami wklęsłymi to dorysujmy punkt D na na okręgu. Wtedy

$$\measuredangle ADB = \frac{1}{2}\measuredangle ASB = \frac{\beta}{2}.$$

Zatem

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{2} = 180^\circ \\ \beta - \alpha = 45^\circ \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i mamy

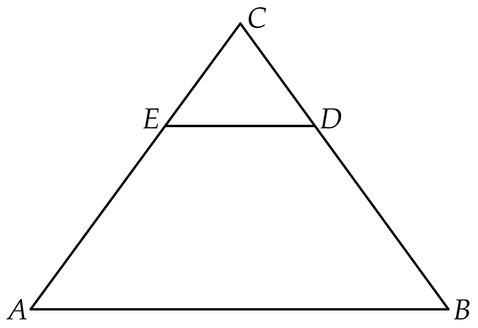
$$\frac{3}{2}\beta = 225^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2}{3} \cdot 225^\circ = 150^\circ.$$

Stąd $\alpha = \beta - 45^\circ = 105^\circ$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Podstawa trójkąta równoramiennego ABC ma długość 19. Na ramionach BC i AC wybrano punkty D i E odpowiednio tak, że $|CD| = |CE| = 5\frac{5}{6}$ oraz $|DB| = 10$.



Odległość między prostymi AB i DE jest równa

A) 5 B) 8 C) 10 D) 12

ROZWIĄZANIE

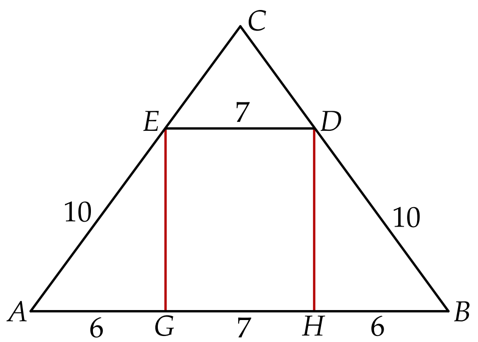
Trójkąty EDC i ABC są podobne i znamy ich skalę podobieństwa

$$\frac{CD}{CB} = \frac{\frac{35}{6}}{10 + \frac{35}{6}} = \frac{\frac{35}{6}}{\frac{95}{6}} = \frac{35}{95} = \frac{7}{19}.$$

W takim razie

$$ED = \frac{7}{19} \cdot AB = \frac{7}{19} \cdot 19 = 7.$$

Dorysujmy wysokości trapezu $ABDE$.



Korzystamy teraz z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AGE.

$$EG = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8.$$

Odpowiedź: **B**

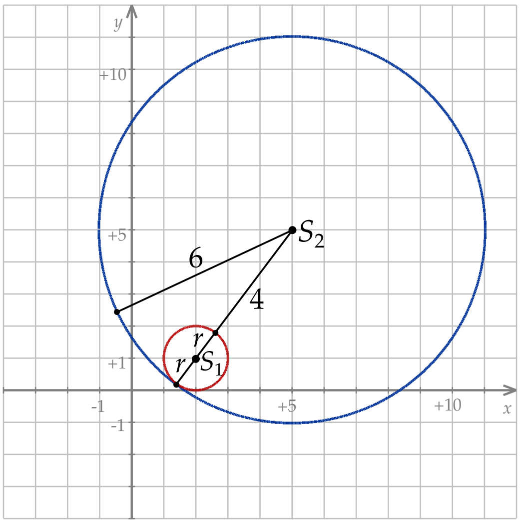
ZADANIE 18 (1 PKT)

Okrąg o środku $S_1 = (2,1)$ i promieniu r oraz okrąg o środku $S_2 = (5,5)$ i promieniu 6 są styczne wewnętrznie. Wtedy

A) $r = 4$ B) $r = 3$ C) $r = 2$ D) $r = 1$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Ponieważ odległość między środkami okręgów stycznych jest równa różnicy promieni tych okręgów, to mamy

$$6 - r = S_1S_2 = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \quad \Rightarrow \quad r = 1.$$

Odpowiedź: **D**

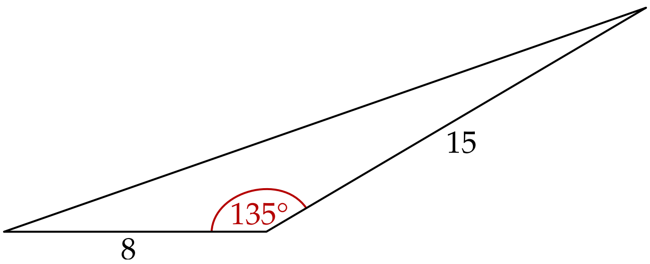
ZADANIE 19 (1 PKT)

Pole trójkąta o bokach długości 8 oraz 15 i kącie między nimi o mierze 135° jest równe

A) $30\sqrt{3}$ B) $60\sqrt{2}$ C) $30\sqrt{2}$ D) $60\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od rysunku.



Na mocy wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ mamy

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

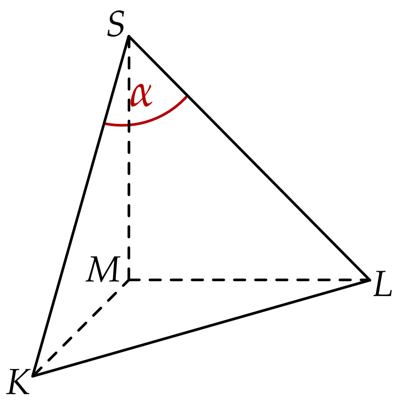
Ze wzoru na pole z sinusem mamy

$$P = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 15\cdot \sin 135^\circ = 4\cdot 15\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 30\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 20 (1 PKT)

Podstawą ostrosłupa jest równoramienny trójkąt prostokątny KLM o przeciwprostokątnej długości $4\sqrt{2}$. Wysokością tego ostrosłupa jest krawędź MS o długości 4 (zobacz rysunek).



Kąt α, jaki tworzą krawędzie KS i LS, spełnia warunek

A) $\alpha = 45^\circ$ B) $\alpha = 60^\circ$ C) $\alpha > 60^\circ$ D) $45^\circ < \alpha < 60^\circ$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że każdy z trójkątów KMS i LMS jest połówką kwadratu o boku długości $KM = SM = 4$. Zatem

$$SK = SL = KL = 4\sqrt{2}.$$

To oznacza, że trójkąt KLS jest równoboczny i $\alpha = 60^\circ$.

Odpowiedź: B

ZADANIE 21 (1 PKT)

Stożek o średnicy podstawy d i kula o promieniu d mają równe objętości. Tangens kąta między tworzącą i płaszczyzną podstawy tego stożka jest równy

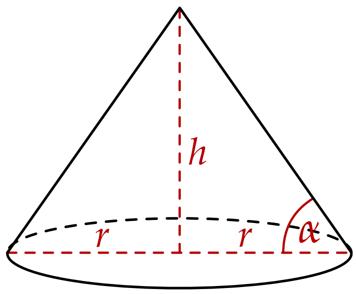
A) 32 B) $\frac{1}{8}$ C) $5\sqrt{41}$ D) 4

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy przez $r = \frac{d}{2}$ promień podstawy stożka, a przez h jego wysokość, to z podanej informacji o objętościach mamy

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{4}{3}\pi \cdot (2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3 \quad / \cdot \frac{3}{\pi r^2}$$
$$h = 32r.$$

Szkicujemy teraz stożek.



Interesujący nas tangens jest równy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{r} = \frac{32r}{r} = 32.$$

Odpowiedź: A

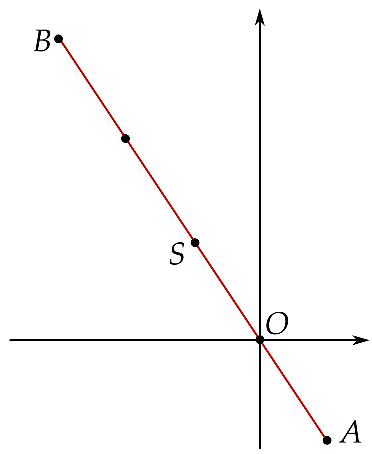
ZADANIE 22 (1 PKT)

Punkt $A = (13, -21)$ i środek S odcinka AB są położone symetrycznie względem początku układu współrzędnych. Zatem punkt B ma współrzędne

A) $(-13, 21)$ B) $(52, -84)$ C) $(-39, 63)$ D) $(26, -42)$

ROZWIĄZANIE

Naszkicujmy opisaną sytuację.



Wiemy, że punkt $O = (0,0)$, jest środkiem odcinka AS, więc

$$S = -A = (-13, 21).$$

Ponadto S jest środkiem odcinka AB, więc

$$S = \frac{A+B}{2} \quad \Rightarrow \quad B = 2S - A = (-26, 42) - (13, -21) = (-39, 63).$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 23 (1 PKT)

Punkty $A = (-4, -1)$ i $C = (2, -3)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Wierzchołki B i D tego rombu są zawarte w prostej o równaniu $y = mx + 1$. Zatem

A) $m = 3$ B) $m = \frac{1}{3}$ C) $m = -3$ D) $m = -\frac{1}{3}$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ przekątne rombu są prostopadłe i dzielą się na połowy, prosta $y = mx + 1$ jest symetralną odcinka AC.

Sposób I

Współczynnik kierunkowy prostej AC to

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-3+1}{2+4} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Symetralna odcinka jest do niego prostopadła, więc musi mieć współczynnik kierunkowy równy

$$m = -\frac{1}{a} = \frac{-1}{-\frac{1}{3}} = 3.$$

Sposób II

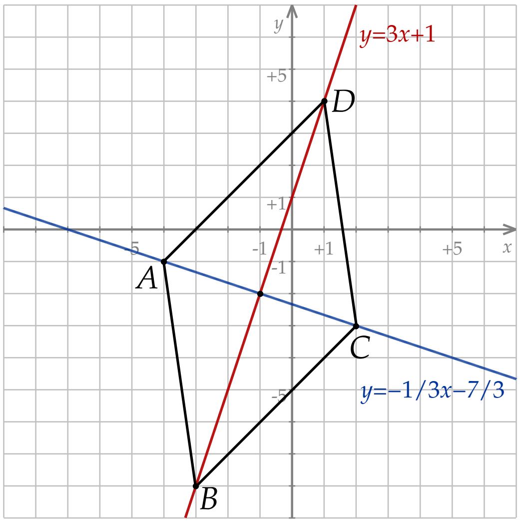
Wyznaczmy równanie prostej AC – szukamy równania w postaci $y = ax + b$.

$$\begin{cases} -1 = -4a + b \\ -3 = 2a + b \end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze i mamy

$$6a = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}.$$

To oznacza, że prosta prostopadła do AC musi mieć współczynnik kierunkowy równy 3.



Odpowiedź: **A**

ZADANIE 24 (1 PKT)

Ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych mniejszych od 2019 i podzielnych przez 4?

A) 256 B) 257 C) 255 D) 128

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Liczby czterocyfrowe mniejsze od 2019 podzielne przez 4 to

$$1000 = 4 \cdot 250,\ 1004 = 4 \cdot 251,\ 1008 = 4 \cdot 252, \ldots,\ 2016 = 4 \cdot 504.$$

Jest ich więc $504 - 249 = 255$.

Sposób II

Czterocyfrowe liczby podzielne przez 4 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r = 4$, w którym $a_1 = 1000$ i $a_n = 2016$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} 2016 &= a_n = a_1 + (n-1)r \\ 2016 &= 1000 + (n-1) \cdot 4 \\ 1016 &= (n-1) \cdot 4 \quad / : 4 \\ 254 &= (n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 255. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 25 (1 PKT)

W tabeli przedstawiono procentowy podział uczestników obozu ze względu na wiek.

Wiek uczestnika	Liczba uczestników
10 lat	20%
12 lat	40%
14 lat	25%
16 lat	15%

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Mediana wieku uczestników obozu jest równa
A) 12 lat B) 11 lat C) 10 lat D) 13 lat

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Wiemy, że osób w wieku 10 lat jest mniej niż 20%, więc mediana musi być większa. Z drugiej strony, osób w wieku 10 i 12 lat jest $20\% + 40\% = 60\%$. W takim razie mediana musi być równa 12.

Sposób II

Jeżeli przyjmiemy, że w obozie uczestniczyło 100 osób, to 10, 12, 14 i 16 lat miało odpowiednio 20, 40, 25 i 15 osób. W takim razie 49 i 50 dana to 12 i mediana jest równa

$$\frac{12+12}{2} = 12.$$

Odpowiedź: **A**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $2 - x + 3x(2-x) \geqslant 0$.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekształcamy daną nierówność

$$\begin{aligned}
&2 - x + 3x(2-x) \geqslant 0 \\
&(2-x)(1+3x) \geqslant 0 \quad / \cdot (-1) \\
&3(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right) \leqslant 0 \\
&x \in \left\langle -\frac{1}{3}, 2 \right\rangle.
\end{aligned}$$

Sposób II

Przekształcamy daną nierówność

$$\begin{aligned}
&2 - x + 3x(2 - x) \geqslant 0\\
&2 - x + 6x - 3x^2 \geqslant 0\\
&0 \geqslant 3x^2 - 5x - 2\\
&\Delta = 25 + 24 = 49\\
&x_1 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{5+7}{6} = 2\\
&x \in \left\langle -\frac{1}{3}, 2 \right\rangle.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $x \in \left\langle -\frac{1}{3}, 2 \right\rangle$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $(216 + 125x^3)(169x^2 - 256) = 0$.

ROZWIĄZANIE

Wyrażenie w pierwszym nawiasie zeruje się gdy

$$x^3 = -\frac{216}{125} = -\left(\frac{6}{5}\right)^3 \quad \iff \quad x = -\frac{6}{5},$$

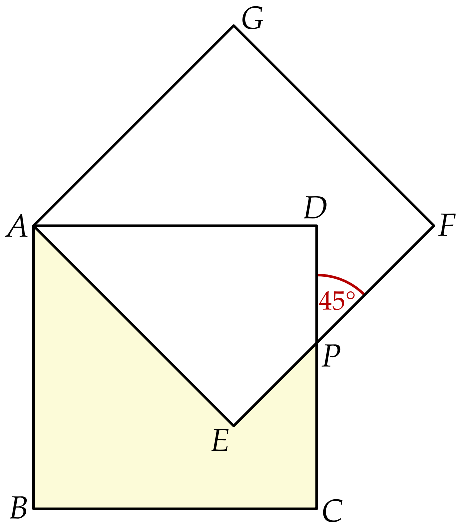
a wyrażenie w drugim nawiasie gdy

$$x^2 = \frac{256}{169} = \left(\frac{16}{13}\right)^2 \quad \iff \quad x = \pm\frac{16}{13}.$$

Odpowiedź: $x \in \left\{ -\frac{16}{13}, -\frac{6}{5}, \frac{16}{13} \right\}$

ZADANIE 28 (2 PKT)

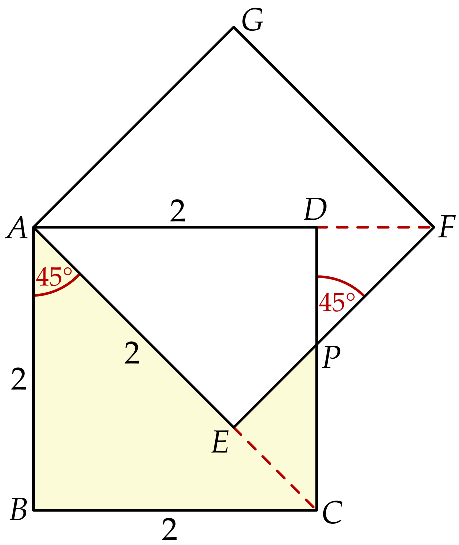
Dwa kwadraty $ABCD$ i $AEFG$ o boku długości 2 nałożono na siebie tak jak na rysunku poniżej. Oblicz pole pięciokąta $ABCPE$.



ROZWIĄZANIE

Sposób I

Interesujący nas pięciokąt składa się z dwóch równoramiennych trójkątów prostokątnych: ABC i CEP.



Ponadto, $EC = AC - AE = 2\sqrt{2} - 2$. W takim razie

$$P_{ABCPE} = P_{ABC} + P_{CEP} = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2}-2)^2 = 2 + 2(\sqrt{2}-1)^2 =$$
$$= 2 + 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 8 - 4\sqrt{2}.$$

Sposób II

Tym razem obliczmy najpierw pole czworokąta $AEPD$.

$$P_{AEPD} = P_{AEF} - P_{DPF} = \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}(2\sqrt{2}-2)^2 = 2 - 2(\sqrt{2}-1)^2 = \\ = 2 - 4 + 4\sqrt{2} - 2 = -4 + 4\sqrt{2}.$$

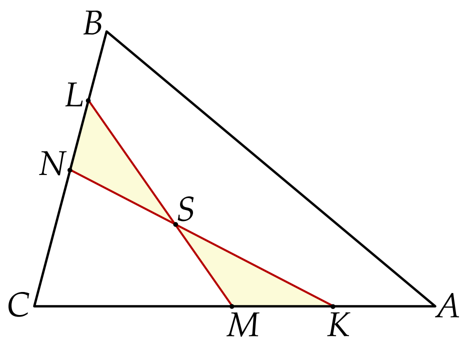
Stąd

$$P_{ABCPE} = P_{ABCD} - P_{AEPD} = 4 - (-4+4\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: $8 - 4\sqrt{2}$

ZADANIE 29 (2 PKT)

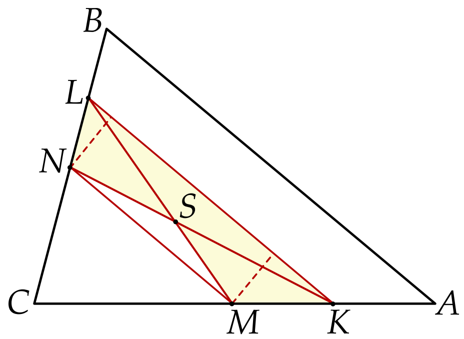
Punkty K i M oraz L i N dzielą odpowiednio boki AC i BC trójkąta ABC w stosunku $1:1:2$ (zobacz rysunek). Odcinki KN i LM przecinają się w punkcie S.



Uzasadnij, że pola trójkątów KMS i LNS są równe.

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy odcinki KL i MN.



Trójkąty CMN, CKL i CAB mają wspólny kąt przy wierzchołku C oraz proporcjonalne boki wychodzące z tego wierzchołka. Zatem każde dwa z nich są do siebie podobne. W szczególności $MN \parallel KL \parallel AB$, czyli czworokąt $KLNM$ jest trapezem (mogliśmy też to uzasadnić korzystając z twierdzenia Talesa). To z kolei oznacza, że trójkąty KNL i KML mają wspólną podstawę KL oraz równe wysokości opuszczone na tę podstawę. Zatem

$$\begin{aligned}
&P_{KNL} = P_{KML} \\
&P_{KSL} + P_{LNS} = P_{KSL} + P_{KMS} \quad / - P_{KSL} \\
&P_{LNS} = P_{KMS}.
\end{aligned}$$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a,\ b$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{2}{a}} \leqslant \frac{3a+2b}{6}$$

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy nierówność korzystając z podanego założenia o dodatniości liczb a i b.

$$\begin{aligned}
&\frac{3a+2b}{6} \geqslant \frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{2}{a}} = \frac{4}{\frac{3a+2b}{ab}} = \frac{4ab}{3a+2b} \quad / \cdot 6(3a+2b) \\
&(3a+2b)^2 \geqslant 24ab \\
&9a^2 + 12ab + 4b^2 \geqslant 24ab \\
&9a^2 - 12ab + 4b^2 \geqslant 0 \\
&(3a-2b)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a przekształcaliśmy przy pomocy równoważności, więc wyjściowa nierówność też musi być spełniona.

ZADANIE 31 (2 PKT)

Rzucamy pięć razy symetryczną monetą. Po przeprowadzonym doświadczeniu zapisujemy liczbę uzyskanych orłów (od 0 do 5) i liczbę uzyskanych reszek (również od 0 do 5). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tych pięciu rzutach liczba uzyskanych orłów będzie mniejsza niż liczba uzyskanych reszek.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

W każdym rzucie mamy dwa możliwe wyniki, więc jest

$$|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

wszystkich możliwych zdarzeń. Wypisujemy teraz zdarzenia sprzyjające

$$(R,R,R,R,R)$$
$$(R,R,R,R,O),(R,R,R,O,R),(R,R,O,R,R),(R,O,R,R,R),(O,R,R,R,R),$$
$$(R,R,R,O,O),(R,R,O,R,O),(R,O,R,R,O),(O,R,R,R,O)$$
$$(R,R,O,O,R),(R,O,R,O,R),(O,R,R,O,R),$$
$$(R,O,O,R,R),(O,R,O,R,R)$$
$$(O,O,R,R,R)$$

Jest więc 16 zdarzeń sprzyjających i interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Sposób II

Ponieważ orły i reszki pełnią takie same role w przeprowadzanym doświadczeniu, jest tyle samo darzeń, w których orłów jest więcej niż reszek, jak zdarzeń w których reszek jest więcej niż orłów. Z drugiej strony, liczba rzutów jest nieparzysta, więc zawsze zachodzi jedna z dwóch wymienionych sytuacji. To oznacza, że prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia musi być równe $\frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

ZADANIE 32 (4 PKT)

Siódmy wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geqslant 1$, jest równy 6, a suma jego sześciu początkowych wyrazów jest równa 756. Iloraz q tego ciągu spełnia warunek: $a_2 = 380q + 2$. Oblicz pierwszy wyraz oraz iloraz tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że

$$6 = a_7 = a_1 q^6$$

oraz

$$756 = S_6 = a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^6}{1-q} = \frac{a_1 - 6}{1-q} \quad / \cdot (1-q)$$
$$756(1-q) = a_1 - 6 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 756(1-q) + 6 = -756q + 762.$$

Wiemy ponadto, że

$$a_2 = 380q + 2$$
$$a_1 q = 380q + 2$$

Podstawiamy teraz w tej równości $a_1 = -756q + 762$.

$$(-756q + 762)q = 380q + 2 \quad / : 2$$
$$-378q^2 + 381q = 190q + 1$$
$$0 = 378q^2 - 191q + 1.$$

Rozwiązujemy teraz otrzymane równanie kwadratowe.

$$\Delta = 191^2 - 378 \cdot 4 = 36481 - 1512 = 34969 = 187^2$$
$$q = \frac{191-187}{756} = \frac{4}{756} = \frac{1}{189} \quad \text{lub} \quad q = \frac{191+187}{756} = \frac{378}{756} = \frac{1}{2}.$$

Mamy wtedy odpowiednio

$$a_1 = -756q + 762 = 758 \quad \text{lub} \quad a_1 = -756q + 762 = 384.$$

Zauważmy jeszcze, że w pierwszym przypadku

$$a_7 = a_1q^6 = 758 \cdot \left(\frac{1}{189}\right)^6 < 1$$

W takim razie pozostaje druga możliwość: $a_1 = 384$ i $q = \frac{1}{2}$. Łatwo sprawdzić, że przy tych danych spełnione są wszystkie warunki podane w treści zadania.

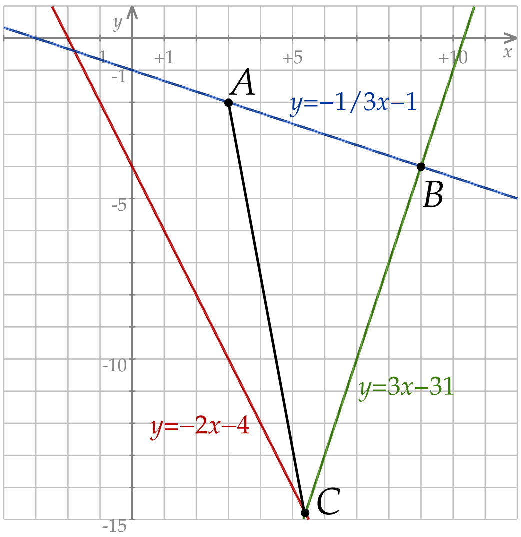
Odpowiedź: $a_1 = 384$, $q = \frac{1}{2}$

ZADANIE 33 (4 PKT)

W układzie współrzędnych punkty $A = (3, -2)$ i $B = (9, -4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -2x - 4$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Napiszmy najpierw równanie prostej AB. Szukamy równania w postaci $y = ax + b$ i podstawiamy współrzędne punktów A i B.

$$\begin{cases} -2 = 3a + b \\ -4 = 9a + b \end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze i mamy

$$-2 = 6a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Stąd $b = -2 - 3a = -2 + 1 = -1$ i prosta AB ma równanie $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

Łatwo teraz napisać równanie przyprostokątnej BC – jest to prosta prostopadła do AB, więc ma równanie postaci $y = 3x + b$. Ponadto przechodzi ona przez punkt B, więc

$$-4 = 27 + b \quad \Rightarrow \quad b = -31.$$

W takim razie prosta BC ma równanie $y = 3x - 31$. Pozostało wyznaczyć punkt wspólny C tej prostej z daną prostą $y = -2x - 4$.

$$\begin{cases} y = 3x - 31 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$0 = 5x - 27 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{27}{5} = 5,4.$$

Stąd

$$y = -2x - 4 = -\frac{54}{5} - 4 = -\frac{74}{5} = -14,8$$

i $C = \left(\frac{27}{5}, -\frac{74}{5}\right) = (5,4;\ -14,8)$.

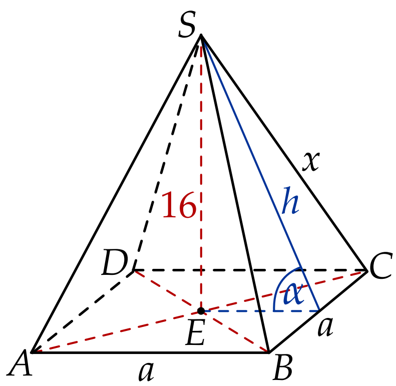
Odpowiedź: $C = \left(\frac{27}{5}, -\frac{74}{5}\right) = (5,4;\ -14,8)$

ZADANIE 34 (5 PKT)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H = 16$. Suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa $128\sqrt{2}$. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od rysunku.



Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy ostrosłupa i przez x długość jego krawędzi bocznej. Mamy zatem

$$128\sqrt{2} = 4a + 4x \quad \Rightarrow \quad x = 32\sqrt{2} - a.$$

Korzystając ze wzoru na długość przekątnej kwadratu mamy

$$EC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Piszemy teraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym SCE.

$$\begin{aligned}
&SE^2 + EC^2 = SC^2\\
&256 + \frac{a^2}{2} = x^2 = 2048 - 64\sqrt{2}a + a^2\\
&0 = \frac{a^2}{2} - 64\sqrt{2}a + 1792\\
&\Delta = 8192 - 3584 = 4608 = 2 \cdot 48^2\\
&a = 64\sqrt{2} - 48\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad a = 64\sqrt{2} + 48\sqrt{2} = 112\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Druga odpowiedź prowadzi jednak do sprzeczności, bo wtedy $x = 32\sqrt{2} - a < 0$. Mamy zatem $a = x = 16\sqrt{2}$.

Liczymy teraz wysokość ściany bocznej

$$\begin{aligned}
h^2 &= x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2\\
h &= \frac{\sqrt{3}}{2}a.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{3}}{3}$