

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

7 MAJA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\log_{\sqrt{2}} 2$ jest równa

A) 2

B) 4

C) $\sqrt{2}$

D) $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Skorzystamy z definicji logarytmu

$$\log_a a^b = b.$$

Ponieważ

$$2 = (\sqrt{2})^2,$$

mamy

$$\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Sposób II

Korzystamy ze wzoru

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

na zmianę podstawy logarytmu, oraz ze wzoru

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

Liczymy

$$\log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{1}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{1}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba naturalna $n = 2^{14} \cdot 5^{15}$ w zapisie dziesiętnym ma

- A) 14 cyfr B) 15 cyfr C) 16 cyfr D) 30 cyfr

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$n = 2^{14} \cdot 5^{15} = 2^{14} \cdot 5^{14} \cdot 5 = (2 \cdot 5)^{14} \cdot 5 = 10^{14} \cdot 5.$$

Jest to więc liczba o 15 cyfrach (piątka i 14 zer).

Odpowiedź: B

ZADANIE 3 (1 PKT)

W pewnym banku prowizja od udzielanych kredytów hipotecznych przez cały styczeń była równa 4%. Na początku lutego ten bank obniżył wysokość prowizji od wszystkich kredytów o 1 punkt procentowy. Oznacza to, że prowizja od kredytów hipotecznych w tym banku zmniejszyła się o

- A) 1% B) 25% C) 33% D) 75%

ROZWIĄZANIE

Prowizja zmalała o

$$\frac{1}{4} = 25\%.$$

Odpowiedź: B



ZADANIA.INFO

Podobają Ci się nasze rozwiązania?
Pokaż je koleżankom i kolegom ze szkoły!



ZADANIE 4 (1 PKT)

Równość $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{a} = 1$ jest prawdziwa dla

- A) $a = \frac{11}{20}$ B) $a = \frac{8}{9}$ C) $a = \frac{9}{8}$ D) $a = \frac{20}{11}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{20 - 5 - 4}{4 \cdot 5} = \frac{11}{20} \\ a &= \frac{1}{\frac{11}{20}} = \frac{20}{11}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 5 (1 PKT)

Para liczb $x = 2$ i $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} ax + y = 4 \\ -2x + 3y = 2a \end{cases}$ dla

A) $a = -1$

B) $a = 1$

C) $a = -2$

D) $a = 2$

ROZWIĄZANIE

Podstawiamy $x = 2$ i $y = 2$ w pierwszym równaniu.

$$2a + 2 = 4 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Równanie $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} = 0$

A) ma trzy różne rozwiązania: $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$.

B) ma trzy różne rozwiązania: $x = -1$, $x = -3$, $x = 2$.

C) ma dwa różne rozwiązania: $x = 1$, $x = -2$.

D) ma dwa różne rozwiązania: $x = -1$, $x = 2$.

ROZWIĄZANIE

Licznik zeruje się dla $x = 1$ i $x = -2$. Jednocześnie żadna z tych liczb nie zeruje mianownika, więc to są rozwiązania danego równania.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Miejsce zerowe funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = 3(x + 1) - 6\sqrt{3}$ jest liczba

A) $3 - 6\sqrt{3}$

B) $1 - 6\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{3} - 1$

D) $2\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$3(x + 1) - 6\sqrt{3} = 0 \quad / : 3$$

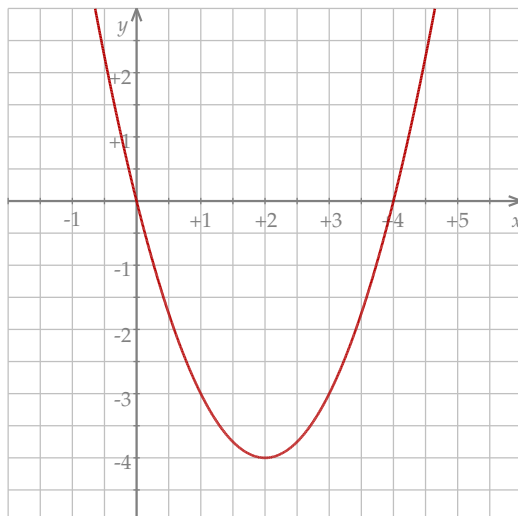
$$(x + 1) = 2\sqrt{3}$$

$$x = 2\sqrt{3} - 1.$$

Odpowiedź: **C**

Informacja do zadań 8 – 10

Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (2, -4)$. Liczby 0 i 4 to miejsca zerowe funkcji f .



ZADANIE 8 (1 PKT)

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- A) $(-\infty, 0)$ B) $\langle 0, 4 \rangle$ C) $\langle -4, +\infty \rangle$ D) $\langle 4, +\infty \rangle$

ROZWIĄZANIE

Zbiorem wartości funkcji przedstawionej na wykresie jest przedział $\langle -4, +\infty \rangle$.

Odpowiedź: C

ZADANIE 9 (1 PKT)

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$ jest równa

- A) -3 B) -4 C) 4 D) 0

ROZWIĄZANIE

Łatwo odczytać z wykresu, że największa wartość funkcji f na przedziale $\langle 1, 4 \rangle$, to

$$f(4) = 0.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 10 (1 PKT)

Oś symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu

- A) $y = -4$ B) $x = -4$ C) $y = 2$ D) $x = 2$

ROZWIĄZANIE

Oś symetrii jest pionowa prosta przechodząca przez wierzchołek paraboli, czyli prosta $x = 2$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 11 (1 PKT)

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $a_1 = 7$ oraz $a_8 = -49$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

- A) -168 B) -189 C) -21 D) -42

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Korzystamy ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Mamy zatem

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{7 - 49}{2} \cdot 8 = -21 \cdot 8 = -168.$$

Sposób II

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n - 1)r$ na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$\begin{aligned} -49 &= a_8 = a_1 + 7r = 7 + 7r \\ -56 &= 7r \quad \Rightarrow \quad r = -8. \end{aligned}$$

Korzystamy teraz ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n.$$

Mamy zatem

$$S_8 = \frac{2 \cdot 7 + 7 \cdot (-8)}{2} \cdot 8 = -168.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie i spełniony jest warunek $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$. Iloraz tego ciągu jest równy

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) 3 D) $\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy przez q iloraz ciągu geometrycznego (a_n) , to z podanej informacji mamy

$$\frac{1}{9} = \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_3 q^2}{a_3} = q^2 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

(Po drodze skorzystaliśmy z tego, że wyrazy ciągu są dodatnie, czyli z tego, że $q > 0$.)

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{4}{5}$. Wtedy

- A) $\cos \alpha = \frac{5}{4}$ B) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ C) $\cos \alpha = \frac{9}{25}$ D) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

ROZWIĄZANIE

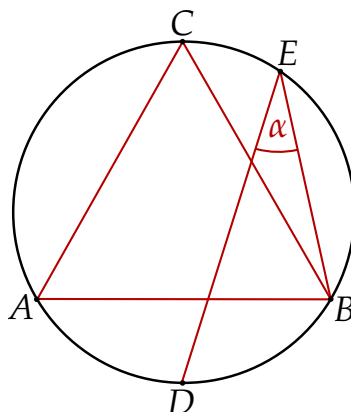
Obliczmy $\cos \alpha$ (z jedynki trygonometrycznej).

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Punkty D i E leżą na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC (zobacz rysunek). Odcinek CD jest średnicą tego okręgu. Kąt wpisany DEB ma miarę α .

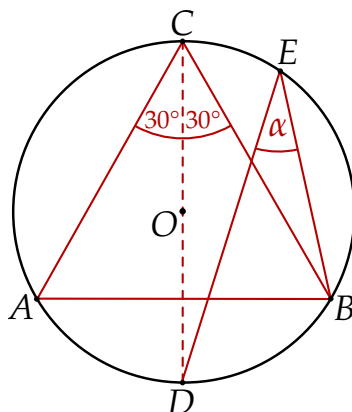


Zatem

- A) $\alpha = 30^\circ$ B) $\alpha < 30^\circ$ C) $\alpha > 45^\circ$ D) $\alpha = 45^\circ$

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy średnicę CD .



Jeżeli odcinek CD jest średnicą okręgu, to przechodzi przez środek trójkąta równobocznego ABC . Odcinek ten jest więc zawarty w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A tego trójkąta, czyli

$$\angle DCB = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ.$$

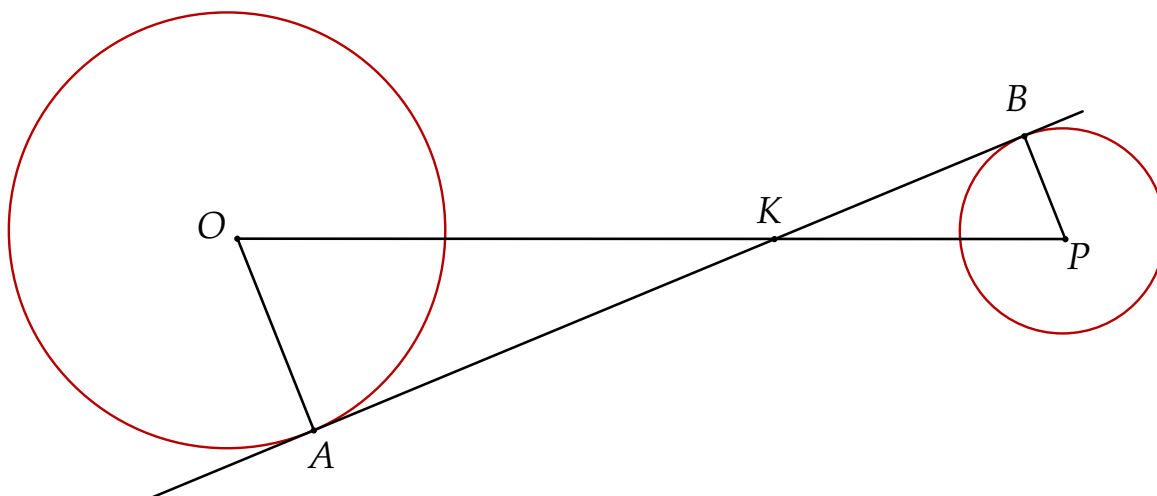
Kąty DCB i DEB są oparte na tym samym łuku, więc

$$\alpha = \angle DEB = \angle DCB = 30^\circ.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Dane są dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie O i promieniu 5 oraz okrąg o środku w punkcie P i promieniu 3. Odcinek OP ma długość 16. Prosta AB jest styczna do tych okręgów w punktach A i B . Ponadto prosta AB przecina odcinek OP w punkcie K (zobacz rysunek).



Wtedy

A) $|OK| = 6$

B) $|OK| = 8$

C) $|OK| = 10$

D) $|OK| = 12$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąty prostokątne AKO i BKP mają równe kąty. Są więc podobne i

$$\begin{aligned}\frac{OK}{KP} &= \frac{OA}{PB} \\ \frac{OK}{16 - OK} &= \frac{5}{3} \\ 3 \cdot OK &= 80 - 5 \cdot OK \Rightarrow OK = 10.\end{aligned}$$

Odpowiedź: C

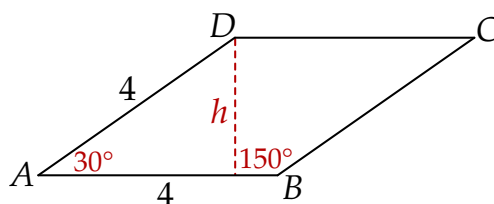
ZADANIE 16 (1 PKT)

Dany jest romb o boku długości 4 i kącie rozwartym 150° . Pole tego rombu jest równe

- A) 8 B) 12 C) $8\sqrt{3}$ D) 16

ROZWIĄZANIE

Najpierw szkicowy rysunek.



Kąt ostry rombu ma miarę

$$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

Sposób I

Obliczamy wysokość rombu

$$\frac{h}{4} = \sin 30^\circ \Rightarrow h = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Zatem pole rombu jest równe

$$P = 4 \cdot 2 = 8.$$

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na pole równoległoboku z sinusem

$$P = 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 17 (1 PKT)

Proste o równaniach $y = (2m + 2)x - 2019$ i $y = (3m - 3)x + 2019$ są równoległe, gdy

- A) $m = -1$ B) $m = 0$ C) $m = 1$ D) $m = 5$

ROZWIĄZANIE

Proste są równoległe jeżeli mają równe współczynniki kierunkowe. Mamy zatem równanie

$$2m + 2 = 3m - 3 \Rightarrow m = 5.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -4x + 1$ i przechodzi przez punkt $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, gdy

A) $a = -4$ i $b = -2$

B) $a = \frac{1}{4}$ i $b = -\frac{1}{8}$

C) $a = -4$ i $b = 2$

D) $a = \frac{1}{4}$ i $b = \frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

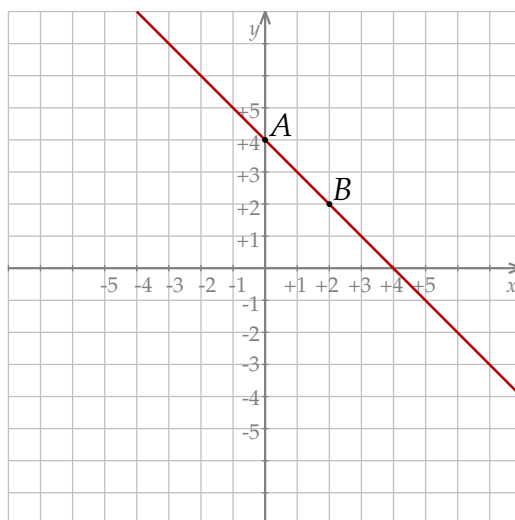
Proste $y = ax + b$ oraz $y = cx + d$ są prostopadłe jeżeli $ac = -1$. Zatem szukana prosta musi mieć współczynnik kierunkowy (liczbę przy x) równy $\frac{1}{4}$. Pozostało podstawić w równaniu $y = \frac{1}{4}x + b$ współrzędne punktu P .

$$0 = \frac{1}{8} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{8}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji liniowej f . Na wykresie tej funkcji leżą punkty $A = (0, 4)$ i $B = (2, 2)$.



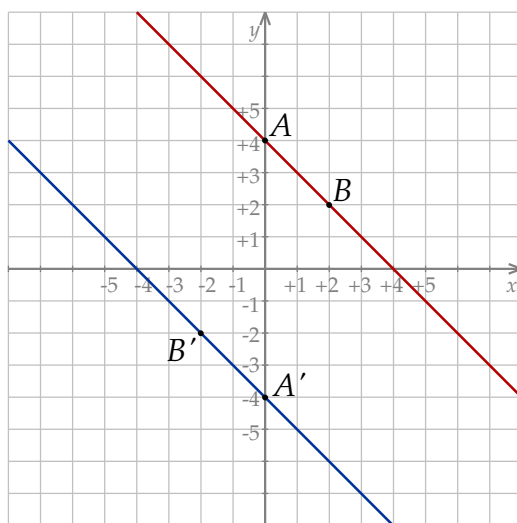
Obrazem prostej AB w symetrii względem początku układu współrzędnych jest wykres funkcji g określonej wzorem

- A) $g(x) = x + 4$ B) $g(x) = x - 4$ C) $g(x) = -x - 4$ D) $g(x) = -x + 4$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Jeżeli odbijemy dany wykres funkcji liniowej względem początku układu współrzędnych, to otrzymamy prostą przechodzącą przez punkty $A' = (0, -4)$ i $B' = (-2, -2)$.



Jest to więc prosta postaci $y = ax - 4$. Współczynnik a wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu $(-2, 2)$.

$$-2 = -2a - 4 \Rightarrow a = -1.$$

Odbita prosta ma więc równanie $y = -x - 4$.

Sposób II

Dana prosta przechodzi przez punkt $(0, 4)$, więc ma równanie postaci $y = ax + 4$. Przechodzi ponadto przez punkt $(2, 2)$, więc

$$2 = 2a + 4 \Rightarrow a = -1.$$

Jest to więc prosta $y = -x + 4$. Prosta symetryczna do niej względem początku układu współrzędnych ma ten sam współczynnik kierunkowy, bo tworzy z osią Ox taki sam kąt jak pierwsza prosta. Ponadto przecina oś Oy w punkcie $(0, -4)$, więc jest to prosta: $y = -x - 4$.

Odpowiedź: C

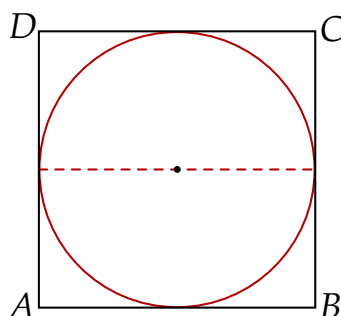
ZADANIE 20 (1 PKT)

Dane są punkty o współrzędnych $A = (-2, 5)$ oraz $B = (4, -1)$. Średnica okręgu wpisanego w kwadrat o boku AB jest równa

- A) 12 B) 6 C) $6\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{6}$

ROZWIĄZANIE

Średnica okręgu wpisanego w kwadrat jest równa długości boku tego kwadratu.



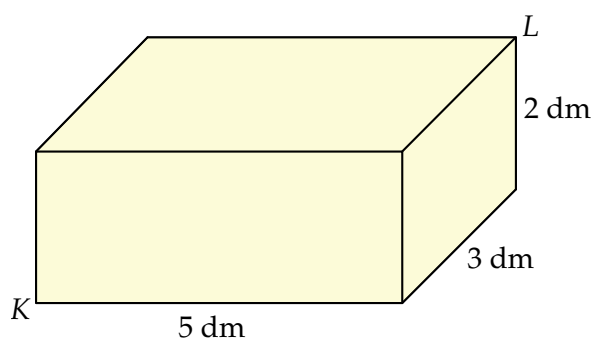
Jest więc ona równa

$$AB = \sqrt{(4+2)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 21 (1 PKT)

Pudełko w kształcie prostopadłościanu ma wymiary 5 dm × 3 dm × 2 dm (zobacz rysunek).

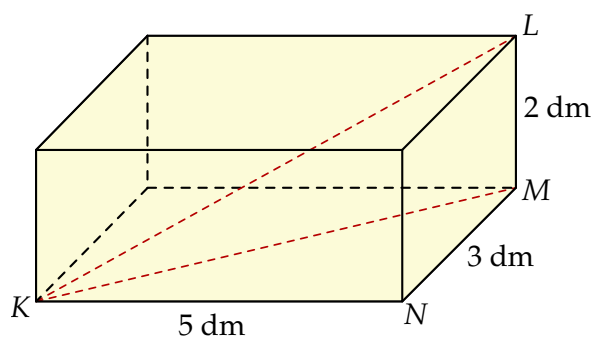


Przekątna KL tego prostopadłościanu jest – z dokładnością do 0,01 dm – równa

- A) 5,83 dm B) 6,16 dm C) 3,61 dm D) 5,39 dm

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy przekątną, o której mowa w treści zadania.



Korzystamy dwa razy z twierdzenia Pitagorasa.

$$KM^2 = KN^2 + NM^2 = 25 + 9 = 34$$

$$KL = \sqrt{KM^2 + ML^2} = \sqrt{34 + 4} = \sqrt{38} \approx 6,16 \text{ dm.}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 22 (1 PKT)

Promień kuli i promień podstawy stożka są równe 4. Pole powierzchni kuli jest równe polu powierzchni całkowitej stożka. Długość tworzącej stożka jest równa

- A) 8 B) 4 C) 16 D) 12

ROZWIĄZANIE

Pole powierzchni kuli o promieniu $R = 4$ jest równe

$$P = 4\pi R^2 = 64\pi.$$

Porównujemy to pole powierzchni z polem powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy $R = 4$.

$$64\pi = \pi R^2 + \pi Rl = 16\pi + 4l\pi \quad / : 4\pi$$

$$l = 12.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 23 (1 PKT)

Mediana zestawu sześciu danych liczb: 4, 8, 21, a , 16, 25 jest równa 14. Zatem

- A) $a = 7$ B) $a = 12$ C) $a = 14$ D) $a = 20$

ROZWIĄZANIE

Mediana z sześciu uporządkowanych liczb to średnia arytmetyczna dwóch środkowych. Dane wypisane w kolejności rosnącej (na razie z pominięciem a) to

$$4, 8, 16, 21, 25.$$

Widać teraz, że liczba a musi znajdować się między 8 i 16 oraz musi być

$$\frac{a + 16}{2} = 14 \quad \Rightarrow \quad a + 16 = 28 \quad \Rightarrow \quad a = 12.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 24 (1 PKT)

Wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których występują wyłącznie cyfry 0, 2, 5, jest

- A) 12 B) 36 C) 162 D) 243

ROZWIĄZANIE

Pierwszą cyfrę (od lewej) tworzonej liczby możemy wybrać na 2 sposoby (nie może być 0), drugą, trzecią, czwartą i piątą cyfrę możemy wybrać na 3 sposoby. W sumie są więc

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$$

takie liczby.

Odpowiedź: C

ZADANIE 25 (1 PKT)

W pudełku jest 40 kul. Wśród nich jest 35 kul białych, a pozostałe to kule czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej kuli jest takie samo. Z pudełka losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy kulę czerwoną, jest równe

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{40}$ D) $\frac{1}{35}$

ROZWIĄZANIE

Szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

Odpowiedź: A

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $(x^3 - 8)(x^2 - 4x - 5) = 0$.

ROZWIĄZANIE

Wyrażenie w pierwszym nawiasie zeruje się gdy

$$x^3 = 8 = 2^3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2,$$

a wyrażenie w drugim nawiasie gdy

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 + 20 = 36$$

$$x = \frac{4 - 6}{2} = -1 \quad \text{lub} \quad x = \frac{4 + 6}{2} = 5.$$

Odpowiedź: $x \in \{-1, 2, 5\}$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 16x + 16 > 0$.

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$3x^2 - 16x + 16 > 0$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 256 - 192 = 64$$

$$x_1 = \frac{16 - 8}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{16 + 8}{6} = 4$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty).$$

Odpowiedź: $x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0.$$

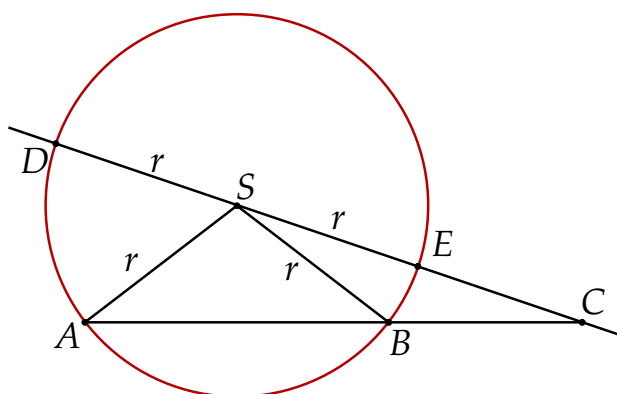
ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 = 2a^2 + 2b^2 + (a^2 - 2ab + b^2) = 2a^2 + 2b^2 + (a - b)^2 \geq 0.$$

ZADANIE 29 (2 PKT)

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu r . Na przedłużeniu cięciwy AB poza punkt B odłożono odcinek BC równy promieniowi danego okręgu. Przez punkty C i S poprowadzono prostą. Prosta CS przecina dany okrąg w punktach D i E (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli miara kąta ACS jest równa α , to miara kąta ASD jest równa 3α .



ROZWIĄZANIE

Z założenia trójkąt SBC jest równoramienny, więc

$$\begin{aligned}\angle BSC &= \alpha \\ \angle SBC &= 180^\circ - 2\alpha.\end{aligned}$$

Trójkąt ASB również jest równoramienny, więc

$$\angle SAB = \angle SBA = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Stąd

$$\angle ASD = 180^\circ - \angle ASB - \angle BSC = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha.$$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą.

ROZWIĄZANIE

Każdą liczbę możemy wybrać na 5 sposobów, więc

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25.$$

W zdarzeniach sprzyjających obie wylosowane liczby muszą być nieparzyste, więc jest

$$3 \cdot 3 = 9$$

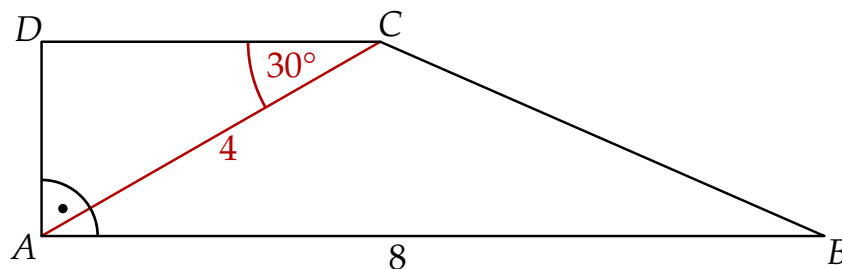
takich zdarzeń i interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{9}{25}.$$

Odpowiedź: $\frac{9}{25}$

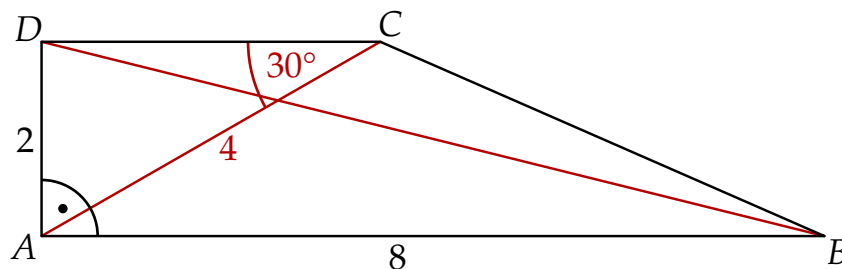
ZADANIE 31 (2 PKT)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 8. Przekątna AC tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą trapezu kąt o mierze 30° (zobacz rysunek). Oblicz długość przekątnej BD tego trapezu.



ROZWIĄZANIE

Dorysujmy przekątną BD trapezu.



Trójkąt ACD jest połówką trójkąta równobocznego o boku $AC = 4$, więc w szczególności $AD = \frac{1}{2}AC = 2$. Pozostało zastosować twierdzenie Pitagorasa w trójkącie ABD .

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

Odpowiedź: $2\sqrt{17}$

ZADANIE 32 (4 PKT)

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, jest równa 16.

- Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.
- Oblicz liczbę k , dla której $a_k = -78$.

ROZWIĄZANIE

- Wiemy, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 16 \cdot 6.$$

Ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, mamy więc

$$16 \cdot 6 = S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6 = (a_1 - 10) \cdot 6 \quad / : 6$$

$$16 = a_1 - 10 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 26.$$

Odpowiedź: $a_1 = 26$

- Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, mamy równanie

$$-78 = a_k = a_1 + (k - 1)r = 26 - 4(k - 1)$$

$$4(k - 1) = 104 \quad / : 4$$

$$k - 1 = 26 \quad \Rightarrow \quad k = 27.$$

Odpowiedź: $k = 27$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Dany jest punkt $A = (-18, 10)$. Prosta o równaniu $y = 3x$ jest symetralną odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .

ROZWIĄZANIE

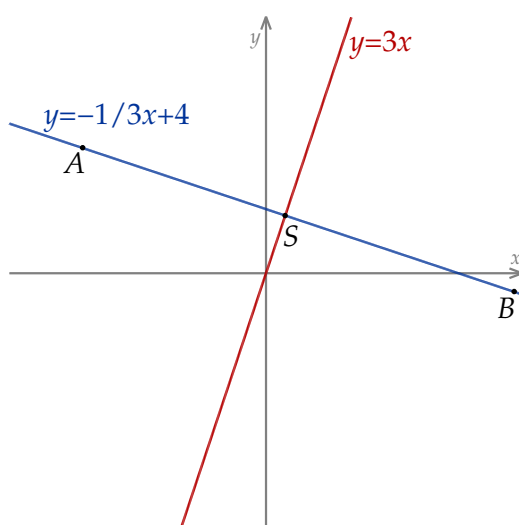
Symetralna odcinka jest do niego prostopadła, więc prosta AB ma równanie postaci

$$y = -\frac{1}{3}x + b.$$

Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu A .

$$10 = -\frac{1}{3} \cdot (-18) + b = 6 + b \Rightarrow b = 4.$$

Środek S odcinka AB to punkt wspólny prostej AB i podanej symetralnej.



Wyznamy jego współrzędne.

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$\begin{aligned} 0 &= 3x + \frac{1}{3}x - 4 \\ 4 &= \frac{10}{3}x \Rightarrow x = \frac{3}{10} \cdot 4 = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Stąd $y = 3x = \frac{18}{5}$ i $S = \left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right)$.

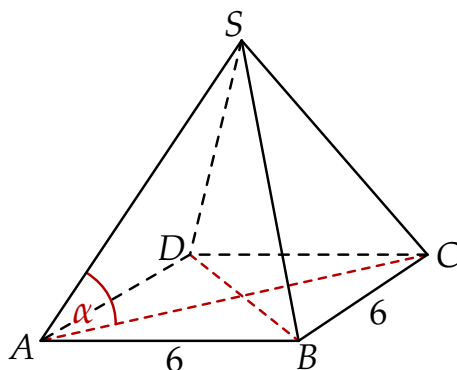
Pozostało skorzystać ze wzoru na środek odcinka.

$$S = \frac{A + B}{2} \Rightarrow B = 2S - A = \left(\frac{12}{5}, \frac{36}{5}\right) - (-18, 10) = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right).$$

Odpowiedź: $B = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right)$

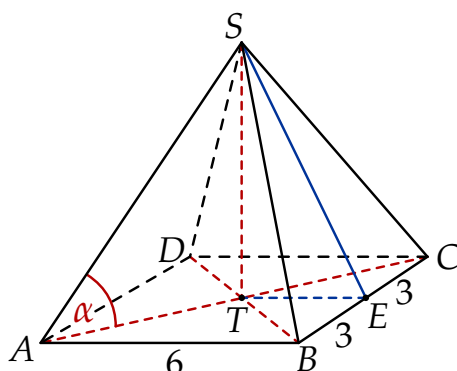
ZADANIE 34 (5 PKT)

Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest cztery razy większe od pola jego podstawy. Kąt α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta α .



ROZWIĄZANIE

Dorysujmy wysokość ST ostrosłupa oraz wysokość SE jego ściany bocznej.



Wiemy, że pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe

$$P_c = 4P_p = 4 \cdot 36.$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} 4 \cdot 36 &= P_c = P_p + 4P_{SBC} = 36 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot SE = 36 + 12SE \quad / : 12 \\ SE &= 12 - 3 = 9. \end{aligned}$$

Stosujemy teraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie SBE i obliczamy długość krawędzi bocznej ostrosłupa.

$$SB = \sqrt{SE^2 + BE^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Z trójkąta prostokątnego ATS obliczamy interesujący nas cosinus.

$$\cos \alpha = \frac{AT}{AS} = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Odpowiedź: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$