Lubelska próba przed maturą z matematyki

(dla klas pierwszych)

Poziom podstawowy

grupa II

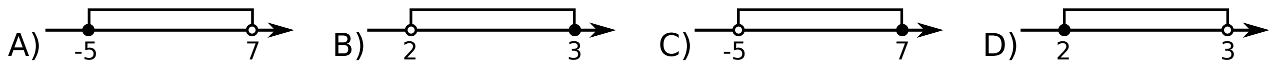
23 maja 2018

Czas pracy: 170 minut

Zadania zamknięte

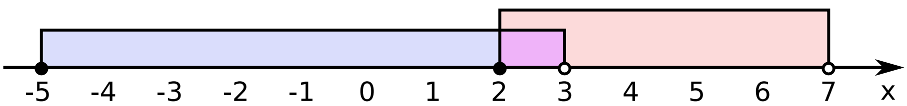
Zadanie 1 (1 pkt)

Dane są zbiory: $A = \langle -5;3)$ oraz $B = \langle 2;7)$. Zbiór $A \cap B$ zaznaczony jest na rysunku:



Rozwiązanie

Zaznaczamy oba zbiory na osi liczbowej i wyznaczamy ich część wspólną.



Widać z rysunku, że

$$A \cap B = \langle 2,3).$$

Odpowiedź: D

Zadanie 2 (1 pkt)

Liczba $||4-7|-|13-5||$ jest równa

A) 5 B) 7 C) 11 D) 29

Rozwiązanie

Liczymy

$$||4-7|-|13-5|| = ||-3|-|8|| = |3-8| = |-5| = 5.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 3 (1 PKT)

Odwrotnością liczby $2\sqrt{2}-3$ jest

A) $-3-2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}+3$ C) $\frac{1}{2\sqrt{2}+3}$ D) $3-2\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-3} = \frac{(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)} = \frac{2\sqrt{2}+3}{8-9} = -2\sqrt{2}-3.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 4 (1 PKT)

Liczba $\sqrt[3]{9^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9 : 27^{-1}}$ jest równa

A) 3^8 B) 3^6 C) 3^0 D) 3^2

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Liczymy

$$\sqrt[3]{9^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9 : 27^{-1}} = \sqrt[3]{(3^2)^6\cdot 3^{-9}\cdot 3^3} = \sqrt[3]{3^{12-9+3}} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2.$$

Sposób II

Liczymy

$$\sqrt[3]{9^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9 : 27^{-1}} = \left(9^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9 : (3^3)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 9^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 : 3^{-1} = 81\cdot\frac{1}{27}\cdot 3 = 9 = 3^2.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 5 (1 PKT)

Liczba $-2\log_3 6+3\log_3 2$ jest równa

A) $\log_3\frac{1}{18}$ B) $\log_3 288$ C) $\log_3\frac{2}{9}$ D) -1

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$-2\log_3 6 + 3\log_3 2 = -\log_3 6^2 + \log_3 2^3 =$$
$$= \log_3 8 - \log_3 36 = \log_3 \frac{8}{36} = \log_3 \frac{2}{9}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 6 (1 PKT)

Liczba $\sqrt{128} - 0,5\sqrt{32}$ jest równa

A) $\sqrt{112}$ B) $\sqrt{8}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt{128} - 0,5\sqrt{32} = \sqrt{64\cdot 2} - 0,5\sqrt{16\cdot 2} = 8\sqrt{2} - 0,5\cdot 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 7 (1 PKT)

Koszt uczestnictwa w obozie sportowym w 2018 r. wynosi 1620 zł. Wzrósł on w stosunku do kosztu z 2017 r. o 35%. Koszt uczestnictwa w obozie w 2017 r. wynosił

A) 567 zł B) 1200 zł C) 1053 zł D) 1215 zł

ROZWIĄZANIE

Jeżeli x jest kosztem uczestnictwa w obozie w roku 2017, to

$$135\%x = 1,35x = 1620 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1620}{1,35} = 1200.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 8 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $(-1-x^3)(x^3-1)$ dla $x = -\sqrt[3]{3}$ jest równa

A) -2 B) 2 C) -8 D) -4

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

$$(-1-x^3)(x^3-1) = -(x^3+1)(x^3-1) = -(x^6-1) = 1-x^6 =$$
$$= 1-(-\sqrt[3]{3})^6 = 1-(-3)^2 = 1-9 = -8.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 9 (1 PKT)

Do zbioru rozwiązań równania $x(x+2)(x^2-1)=0$ nie należy liczba

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1

ROZWIĄZANIE

Ponieważ

$$x(x+2)(x^2-1) = x(x+2)(x-1)(x+1),$$

to pierwiastkami danego równania są

$$-2, 0, -1, 1.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 10 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $(4-\sqrt{3})^2-(4+\sqrt{3})^2$ wynosi

A) 6 B) $-16\sqrt{3}$ C) $-4\sqrt{3}$ D) -6

ROZWIĄZANIE

Liczymy korzystając ze wzorów skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$$

Mamy więc

$$(4-\sqrt{3})^2-(4+\sqrt{3})^2 = 4^2-8\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-(4^2+8\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2) =$$
$$= 16-8\sqrt{3}+3-16-8\sqrt{3}-3 = -16\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 11 (1 PKT)

Marta oszacowała, że wyda na zakupy około 50 zł. W rzeczywistości zapłaciła 48 zł. Błąd względny, jaki popełniła szacując wartość zakupów wynosi:

A) $\frac{2}{25}$ B) 2 C) $\frac{1}{24}$ D) $\frac{1}{25}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy błąd bezwzględny

$$|50-48| = 2.$$

Obliczamy błąd względny

$$\frac{2}{48} = \frac{1}{24}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 12 (1 PKT)

Dany jest zbiór $A = \left\{\frac{\pi}{2};\ -1;\ \sqrt{7\frac{1}{9}};\ 0;\ 1,(3);\ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right\}$. Liczb wymiernych w zbiorze A jest

A) pięć B) trzy C) cztery D) dwie

ROZWIĄZANIE

Liczbami wymiernymi są oczywiście: -1 i 0. Ponadto, wymierne są też

$$1,(3) = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{7\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}.$$

Pozostałe liczby są niewymierne. Są zatem dokładnie 4 liczby wymierne w zbiorze A.

Odpowiedź: C

ZADANIE 13 (1 PKT)

Układ równań $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -6x+(a+3)y=10 \end{cases}$ jest sprzeczny dla

A) $a=-2$ B) $a=-11$ C) $a=3$ D) $a=5$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Dodajmy do drugiego równania pierwsze pomnożone przez 2 (żeby skrócić x) i mamy

$$\begin{aligned} &6x - 6x - 8y + (a+3)y = 20 \\ &(a-5)y = 20. \end{aligned}$$

Widać teraz, że układ jest sprzeczny tylko dla $a = 5$.

Sposób II

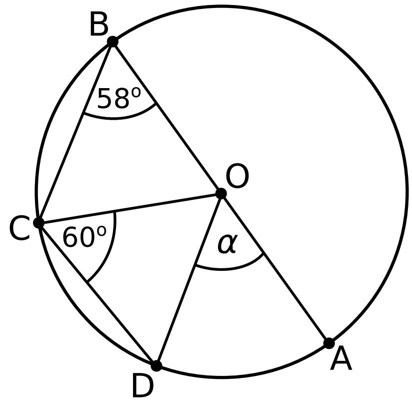
Jeżeli układ ma być sprzeczny, to jego równania muszą opisywać dwie różne proste równoległe. Ponieważ $-6x = (-2) \cdot 3x$, to musimy też mieć

$$(a+3)y = (-2) \cdot (-4y) = 8y \quad \Rightarrow \quad a = 5.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Odcinek AB jest średnicą okręgu (rysunek).



Miara kąta α jest równa

A) 56° B) 116° C) 58° D) 60°

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że oba trójkąty OBC i OCD są równoramienne (bo $OB = OC = OD$). W takim razie

$$\begin{aligned} &\measuredangle OCB = \measuredangle OBC = 58^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle COB = 180^\circ - 2 \cdot 58^\circ = 64^\circ \\ &\measuredangle ODC = \measuredangle OCD = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle DOC = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ. \end{aligned}$$

Stąd

$$\alpha = 180^\circ - \measuredangle COB - \measuredangle DOC = 180^\circ - 64^\circ - 60^\circ = 56^\circ.$$

Odpowiedź: **A**

Zadanie 15 (1 pkt)

Długości boków trójkąta nie mogą być równe:

A) 3, 4, 4 B) 3, 4, 8 C) 3, 4, 5 D) 3, 4, 2

Rozwiązanie

Z trzech odcinków można zbudować trójkąt jeżeli suma długości dwóch najkrótszych jest większa od długości najdłuższego. Widać, że warunek ten nie jest spełniony w przypadku odcinków długości: 3, 4, 8, bo

$$3 + 4 = 7 < 8.$$

Odpowiedź: **B**

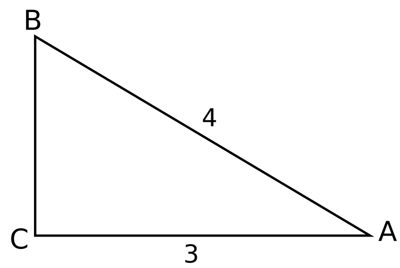
Zadanie 16 (1 pkt)

Dwa dłuższe boki trójkąta prostokątnego mają długości 3 cm oraz 4 cm. Długość najkrótszego boku tego trójkąta wynosi

A) 5 cm B) 2,6 cm C) $\sqrt{5}$ cm D) $\sqrt{7}$ cm

Rozwiązanie

Rozpoczynamy od szkicowego rysunku.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość najkrótszego boku trójkąta.

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

Odpowiedź: **D**

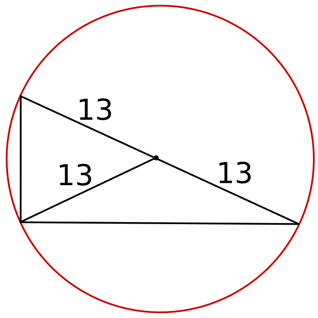
Zadanie 17 (1 pkt)

Pole koła opisanego na trójkącie prostokątnym o bokach długości 10, 24, 26 jest równe

A) 169π B) 26π C) 144π D) 25π

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Zauważmy, że przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest średnicą okręgu, który jest opisany na tym trójkącie. Zatem promień R okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy połowie długości przeciwprostokątnej $R = \frac{26}{2} = 13$. Stąd

$$P = \pi \cdot 13^2 = 169\pi.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 18 (1 PKT)

Trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są podobne. Obwód trójkąta $A'B'C'$ jest równy 12, a jego pole 6. Jeżeli pole trójkąta ABC jest równe $13\frac{1}{2}$, to jego obwód wynosi

A) $6\frac{3}{4}$ B) 27 C) 18 D) 9

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez k skalę podobieństwa trójkątów (ABC do $A'B'C'$). Ponieważ stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, mamy

$$k = \sqrt{\frac{13\frac{1}{2}}{6}} = \sqrt{\frac{\frac{27}{2}}{6}} = \sqrt{\frac{27}{12}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2},$$

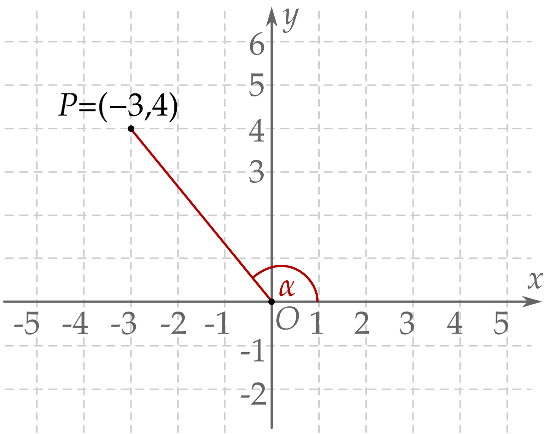
czyli drugi trójkąt ma obwód

$$12 \cdot \frac{3}{2} = 18.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 19 (1 PKT)

Na końcowym ramieniu kąta α (rysunek) leży punkt $P = (-3;4)$.

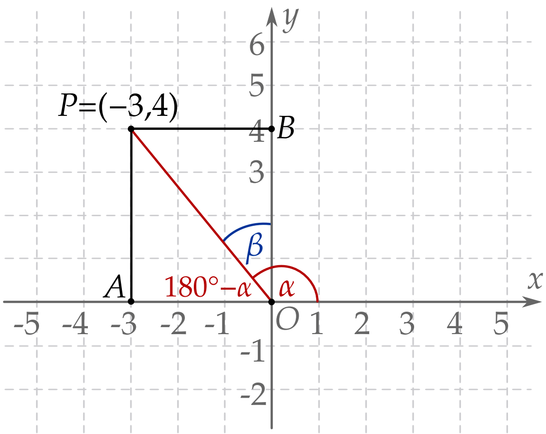


Wówczas

A) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ B) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ C) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ D) $\cos\alpha = -\frac{4}{3}$

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy rzuty punktu P na osie okładu współrzędnych.



Sposób I

Korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego.

$$\cos\alpha = \frac{x_P}{OP} = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = -\frac{3}{5}$$
$$\sin\alpha = \frac{y_P}{OP} = \frac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = -\frac{4}{5}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_P}{x_P} = -\frac{4}{3}.$$

Sposób II

Zauważmy, że

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{OA}{OP} = \frac{3}{5}.$$

Stąd

$$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}.$$

Sposób III

Tym razem popatrzmy na trójkąt POB.

$$\sin\beta = \frac{BP}{OP} = \frac{3}{5}.$$

Stąd

$$\cos\alpha = \cos(90^\circ + \beta) = -\sin\beta = -\frac{3}{5}.$$

Sposób IV

Napiszmy równanie prostej OP. Jest to prosta postaci $y = ax$. Współczynnik a obliczamy podstawiając współrzędne punktu P.

$$4 = -3a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{4}{3}.$$

Otrzymany współczynnik kierunkowy to dokładnie $\operatorname{tg}\alpha$, więc

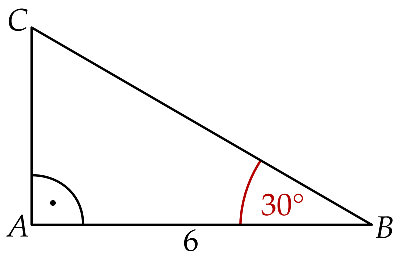
$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3} \quad / ()^2 \\
&\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{16}{9} \\
&9(1-\cos^2\alpha) = 16\cos^2\alpha \\
&25\cos^2\alpha = 9 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Ponieważ α jest kątem rozwartym, mamy stąd $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Długość boku AC w trójkącie przedstawionym na poniższym rysunku jest równa



A) $3\sqrt{2}$ B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Dany trójkąt to połówka trójkąta równobocznego, więc jeżeli oznaczymy $a = BC = 2AC$, to

$$6 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Stąd $AC = \frac{a}{2} = 2\sqrt{3}$.

Sposób II

Korzystamy z funkcji trygonometrycznych.

$$\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 = 2\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 21 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $\cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$ wynosi

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że

$$\cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ = \cos 120^\circ \cdot \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \sin 120^\circ.$$

Sposób I

Korzystamy ze wzoru

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha.$$

Mamy zatem

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sposób II

Korzystamy ze wzoru

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Mamy zatem

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odpowiedź: **A**

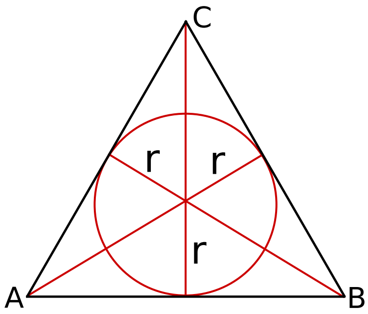
ZADANIE 22 (1 PKT)

Długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny wynosi 6π. Długość boku tego trójkąta jest równa

A) $2\sqrt{3}$ B) 6 C) 9 D) $6\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny to $\frac{1}{3}$ długości jego wysokości.



Mamy zatem

$$3 = r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad / \cdot \frac{6}{\sqrt{3}}$$
$$a = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 23 (1 PKT)

Zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ jest dziedziną funkcji

A) $f(x) = x - 3$ B) $f(x) = \frac{x}{(x-3)^2}$ C) $f(x) = \frac{2}{x^2-9}$ D) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3}$

ROZWIĄZANIE

Dziedziną funkcji liniowej $f(x) = x - 3$ jest $\mathbb{R}$, a w przypadku pozostałych funkcji wymiernych musimy z dziedziny usunąć miejsca zerowe mianownika. Zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ jest więc dziedziną funkcji

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)^2}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 24 (1 PKT)

Do wykresu funkcji $f(x) = 2\sqrt{3}x - 4$ należy punkt o współrzędnych

A) $(2\sqrt{3}, 2)$ B) $(-4, 0)$ C) $(-\sqrt{3}, -10)$ D) $(\sqrt{3}, -2)$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$f(-4) = -8\sqrt{3} - 4$$
$$f(\sqrt{3}) = 6 - 4 = 2$$
$$f(-\sqrt{3}) = -6 - 4 = -10$$
$$f(2\sqrt{3}) = 12 - 4 = 8.$$

Zatem wśród podanych punktów tylko $(-\sqrt{3}, -10)$ należy do wykresu $y = f(x)$.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 25 (1 PKT)

Wykres funkcji $f(x) = (x-3)^2$ przesunięto równolegle o 2 jednostki w prawo. W wyniku tego przekształcenia otrzymano wykres funkcji

A) $g(x) = (x-3)^2 + 2$ B) $g(x) = (x-1)^2$ C) $g(x) = (x-3)^2 - 2$ D) $g(x) = (x-5)^2$

ROZWIĄZANIE

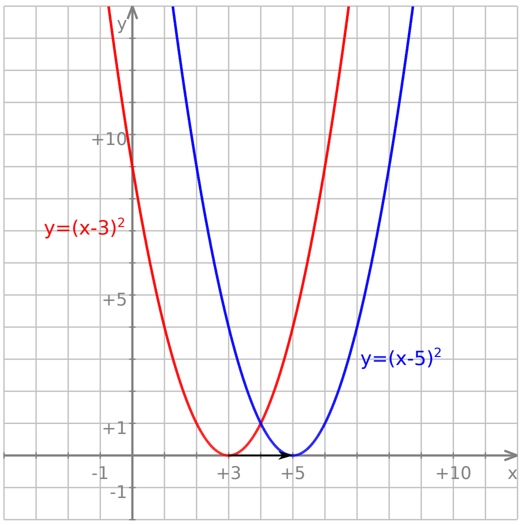
Przypomnijmy, że wykresem funkcji kwadratowej

$$f(x) = a(x - x_w)^2 + y_w$$

jest parabola o wierzchołku (x_w, y_w). W takim razie parabola będąca wykresem funkcji f ma wierzchołek w punkcie $(3,0)$. Po przesunięciu o 2 jednostki w prawo wierzchołek będzie w punkcie $(5,0)$. Otrzymamy więc wykres funkcji

$$y = (x-5)^2.$$

Dla ciekawskich obrazek.



Odpowiedź: **D**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $(x-2)^2 - 1 = (x-2)(x+2)$.

ROZWIĄZANIE

Będziemy korzystać ze wzorów:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Liczymy

$$(x-2)^2 - 1 = (x-2)(x+2)$$
$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4$$
$$8 = 4x \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Odpowiedź: $x = 2$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Wykaż, że jeżeli $a + b = 4$, to $a^2 + b^2 \geqslant 8$.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Podstawiamy w nierówności, która mamy wykazać $b = 4 - a$ i przekształcamy ją w sposób równoważny.

$$a^2 + (4-a)^2 \geqslant 8$$
$$a^2 + 16 - 8a + a^2 \geqslant 8$$
$$2a^2 - 8a + 8 \geqslant 0$$
$$2(a-2)^2 \geqslant 0.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście spełniona, więc wyjściowa nierówność też musiała być prawdziwa.

Sposób II

Korzystamy z nierówności

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

pomiędzy średnią kwadratową i arytmetyczną. Mamy zatem

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4$$
$$a^2 + b^2 \geqslant 8.$$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^3\alpha - 3\cos^2\alpha$.

ROZWIĄZANIE

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

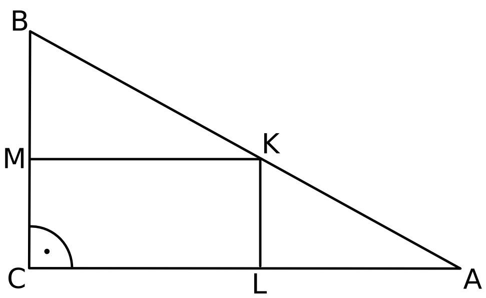
Mamy zatem

$$\sin^3\alpha - 3\cos^2\alpha = \frac{8}{27} - 3\cdot\frac{5}{9} = \frac{8-45}{27} = -\frac{37}{27}.$$

Odpowiedź: $-\frac{37}{27}$

ZADANIE 29 (2 PKT)

Trójkąt ABC jest prostokątny. Z punktu K należącego do przeciwprostokątnej AB poprowadzono odcinki KM oraz KL prostopadłe odpowiednio do przyprostokątnych BC oraz AC (rysunek).



Wykaż, że $\frac{|KM|}{|AC|} + \frac{|KL|}{|BC|} = 1$.

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąty prostokątne BMK i KLA są podobne do trójkąta BCA, więc

$$\frac{KM}{AC} = \frac{KB}{AB}$$
$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB}.$$

Stąd

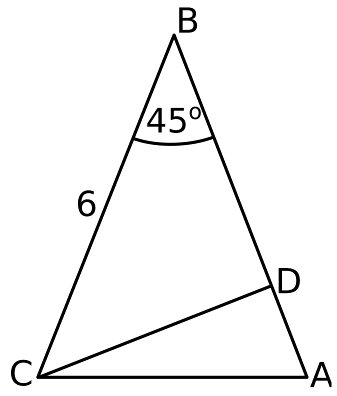
$$\frac{KM}{AC} + \frac{KL}{BC} = \frac{KB}{AB} + \frac{AK}{AB} = \frac{KB+AK}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

ZADANIE 30 (2 PKT)

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = |BC| = 6$ oraz $|\measuredangle ABC| = 45^\circ$. Oblicz długość wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy trójkąt równoramienny.



Sposób I

W trójkącie CDB mamy

$$\frac{CD}{BC} = \sin 45^\circ$$
$$\frac{CD}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad CD = 3\sqrt{2}.$$

Sposób II

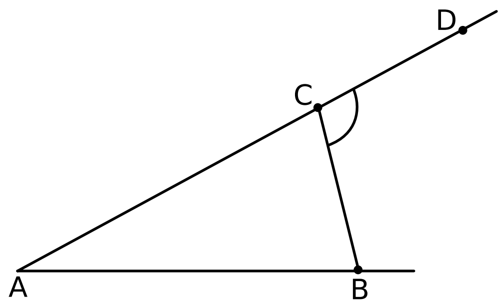
Liczymy pole trójkąta ABC na dwa sposoby

$$\frac{1}{2}AB \cdot CD = P = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \sin 45^\circ \quad / \cdot \frac{2}{AB}$$
$$CD = BC \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: $3\sqrt{2}$

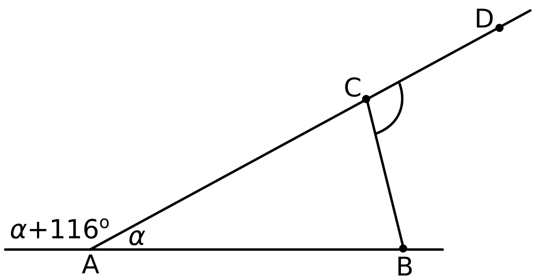
ZADANIE 31 (2 PKT)

Odcinki AB oraz AC (rysunek) są równej długości. Kąt CAB ma miarę o 116° mniejszą od miary kąta do niego przyległego. Oblicz miarę kąta BCD.



Rozwiązanie

Oznaczmy $\measuredangle BAC = \alpha$.



Wiemy wtedy, że kąt przyległy do kąta BAC ma miarę $\alpha + 116^\circ$, więc

$$\alpha + \alpha + 116^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 64^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 32^\circ.$$

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ABC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - 32^\circ}{2} = 74^\circ.$$

Stąd

$$\measuredangle BCD = 180^\circ - \measuredangle ACB = 180^\circ - 66^\circ = 106^\circ.$$

Odpowiedź: 106°

Zadanie 32 (5 pkt)

Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Na podstawie tego wykresu podaj:

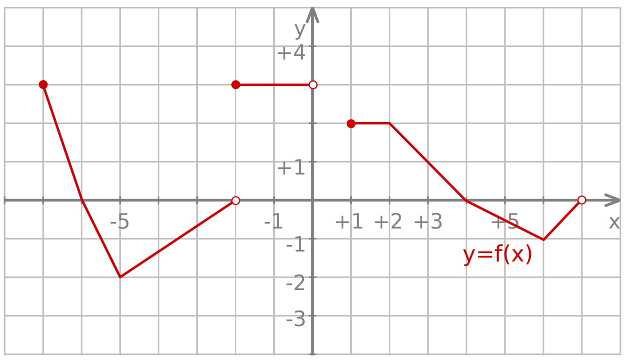
a) dziedzinę funkcji f,

b) zbiór wartości funkcji f,

c) maksymalne przedziały, w których funkcja f jest rosnąca,

d) miejsca zerowe funkcji f,

e) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.



ROZWIĄZANIE

Odczytujemy z wykresu

a)

Odpowiedź: $\langle -7,0) \cup \langle 1,7)$

b)

Odpowiedź: $\langle -2,3\rangle$

c)

Odpowiedź: $\langle -5,-2)$, $\langle 6,7)$

d)

Odpowiedź: $\{-6,4\}$

e)

Odpowiedź: $\langle -6,-2) \cup \langle 4,7)$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Marcin zarabiał miesięcznie 3400 zł, a Adam 4300 zł. Obaj otrzymali w swoich firmach podwyżki. Podwyżka otrzymana przez Adama była o 4 punkty procentowe niższa niż podwyżka otrzymana przez Marcina. Po podwyżce obaj panowie zarabiają łącznie 8452 zł. Ile zarabia każdy z panów po podwyżce? Zapisz wszystkie obliczenia.

ROZWIĄZANIE

Powiedzmy, że Marcin otrzymał x% podwyżki. Wtedy Adam otrzymał $(x-4)$% podwyżki i w sumie po podwyżce zarabiają

$$\begin{aligned} 8452 &= \left(3400 + 3400\cdot\frac{x}{100}\right) + \left(4300 + 4300\cdot\frac{x-4}{100}\right) \\ 752 &= 34x + 43(x-4) = 77x - 172 \\ 924 &= 77x \quad \Rightarrow \quad x = 12. \end{aligned}$$

W takim razie po podwyżce pan Marcin zarabia

$$112\% \cdot 3400 = 112 \cdot 34 = 3808 \text{ zł},$$

a pan Adam

$$108\% \cdot 4300 = 108 \cdot 43 = 4644 \text{ zł}.$$

Odpowiedź: **Marcin: 3808 zł, Adam: 4644 zł.**

ZADANIE 34 (4 PKT)

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze, które należą do zbioru $A \setminus B$, gdzie A jest zbiorem rozwiązań nierówności

$$(\log_4 24 - \log_4 6) + 3x \geqslant -7 - x,$$

a B jest zbiorem rozwiązań nierówności

$$3 - \frac{x-1}{2} < -3.$$

ROZWIĄZANIE

Rozwiązujemy pierwszą nierówność

$$\begin{array}{l} (\log_4 24 - \log_4 6) + 3x \geqslant -7 - x \\ \log_4 4 + 4x \geqslant -7 \\ 1 + 4x \geqslant -7 \quad \iff \quad 4x \geqslant -8 \quad \iff \quad x \geqslant -2. \end{array}$$

Zatem $A = \langle -2, +\infty)$.

Rozwiązujemy teraz drugą nierówność

$$\begin{array}{l} 3 - \frac{x-1}{2} < -3 \quad / \cdot (-2) \\ -6 + (x-1) > 6 \quad \iff \quad x > 13. \end{array}$$

Zatem $B = (13, +\infty)$ i

$$A \setminus B = \langle -2, 13 \rangle.$$

Liczby pierwsze w tym przedziale to

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}.$$

Odpowiedź: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$