PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM PODSTAWOWY

4 MAJA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Wyrażenie $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ jest równe

A) $\sqrt{x+y}$ B) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ C) $\sqrt{x-y}$ D) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Sposób II

Rozkładamy licznik ułamka korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba $\log_3\left[\log_{64}(\log_{\sqrt{3}}9)\right]$ jest równa

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) -1

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\log_3\left[\log_{64}(\log_{\sqrt{3}}9)\right] = \log_3\left[\log_{64}\left(\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^4\right)\right] =$$
$$= \log_3\left[\log_{64}4\right] = \log_3\left[\log_{64}64^{\frac{1}{3}}\right] = \log_3\frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 3 (1 PKT)

Liczbami spełniającymi równanie $|3+x| = 8$ są
A) 11 i 5 B) 3 i 8 C) -11 i 5 D) -3 i 8

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Sprawdzamy, które z podanych liczb spełniają dane równanie. Gdy to zrobimy okaże się, że te liczby to: -11 i 5.

Sposób II

Przekształcamy dane równanie

$$\begin{array}{l} |3+x| = 8 \\ 3+x=-8 \quad \text{lub} \quad 3+x=8 \\ x=-11 \quad \text{lub} \quad x=5. \end{array}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 4 (1 PKT)

Badając pewien roztwór stwierdzono, że zawiera on 0,06 g chloru, co stanowi 0,04% masy roztworu. Jaka była masa roztworu?
A) 1,5 kg B) 15 g C) 150 g D) 1,5 g

ROZWIĄZANIE

Jeżeli x jest masą roztworu, to mamy równanie

$$0,04\%x = 0,06$$
$$0,0004x = 0,06 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0,06}{0,0004} = \frac{6}{0,04} = 6 \cdot \frac{100}{4} = 150.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 5 (1 PKT)

Nierówność $2x - 5mx + 4 < 8$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą jeżeli

A) $m = 0$ B) $m = \frac{1}{2}$ C) $m = \frac{5}{2}$ D) $m = \frac{2}{5}$

ROZWIĄZANIE

Zapiszmy nierówność w postaci

$$(2 - 5m)x < 4.$$

Wykresem lewej strony jest prosta i jeżeli ma ona w całości znajdować się poniżej prostej $y = 4$, to musi to być pozioma prosta, czyli musimy mieć $m = \frac{2}{5}$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 6 (1 PKT)

Rozwiązaniem równania $\frac{2x-1}{3x+1} = \frac{5-2x}{2-3x}$ jest

A) $x = \frac{7}{6}$ B) $x = -\frac{7}{6}$ C) $x = \frac{1}{2}$ D) $x = -\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Oczywiście mianowniki muszą być niezerowe, czyli $x \neq -\frac{1}{3}$ i $x \neq \frac{2}{3}$.

Przekształcamy równanie

$$\frac{2x-1}{3x+1} = \frac{5-2x}{2-3x} \quad / \cdot (3x+1)(2-3x)$$
$$(2x-1)(2-3x) = (5-2x)(3x+1)$$
$$4x - 6x^2 - 2 + 3x = 15x + 5 - 6x^2 - 2x$$
$$-7 = 6x \quad / : 6$$
$$x = -\frac{7}{6}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 7 (1 PKT)

Kwotę 1000 zł wpłacamy do banku na 3 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 8%. Po trzech latach otrzymamy kwotę

A) $1000 \cdot (1,08)^{12}$ B) $1000 \cdot (1,2)^3$ C) $1000 \cdot (1,02)^{12}$ D) $1000 \cdot (1,02)^3$

ROZWIĄZANIE

Oprocentowanie roczne wynosi 8%, czyli kwartalne wynosi

$$\frac{8\%}{4} = 2\%.$$

Korzystamy ze wzoru na procent składany.

$$K_{12} = 1000 \cdot (1 + 0,02)^{12} = 1000 \cdot (1,02)^{12}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 8 (1 PKT)

Liczba $\frac{\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}}$ jest równa

A) 2 B) 1 C) $\sqrt[6]{54} - \sqrt[6]{16}$ D) $\sqrt[3]{19}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

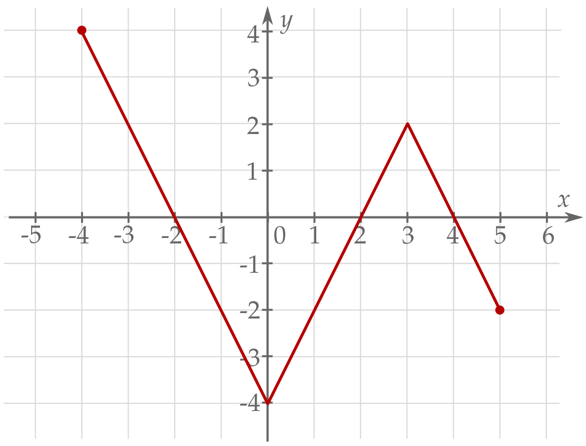
$$\frac{\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^2}}} = \frac{\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{54}{2}} - \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} = 3 - 2 = 1.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 9 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Maksymalnym zbiorem, w którym funkcja f przyjmuje tylko wartości ujemne, jest

A) $(-2,2)$ B) $(-2,5\rangle$ C) $(-2,2) \cup (4,5\rangle$ D) $\langle -4,0)$

ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji znajduje się poniżej osi Ox na zbiorze: $(-2,2) \cup (4,5\rangle$.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Zbiorem wartości funkcji $y = (x+2)(x-4)$ jest przedział

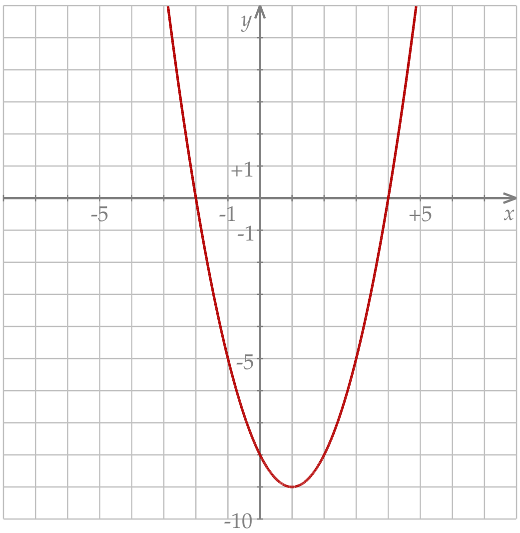
A) $\langle -9, +\infty)$ B) $\langle 4, +\infty)$ C) $\langle -2, 4\rangle$ D) $\langle -2, +\infty)$

ROZWIĄZANIE

Wykresem podanej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w górę i miejscach zerowych -2 i 4. Wierzchołek tej paraboli znajduje się dokładnie w środku między pierwiastkami, czyli pierwsza współrzędna wierzchołka jest równa $\frac{-2+4}{2} = 1$. Druga współrzędna wierzchołka jest równa

$$f(1) = (1+2)(1-4) = 3 \cdot (-3) = -9.$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest więc przedział $\langle -9, +\infty)$.



Odpowiedź: **A**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Poniżej zamieszczono fragment tabeli wartości funkcji liniowej

x	1	2	4
$f(x)$	4	1	

W pustym miejscu w tabeli powinna znajdować się liczba:

A) -5 B) 5 C) -2 D) 2

ROZWIĄZANIE

Jeżeli $f(x) = ax + b$ to wiemy, że

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 1 = 2a + b. \end{cases}$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze mamy $a = -3$. Stąd $b = 4 - a = 7$ i $f(x) = -3x + 7$. Zatem

$$f(4) = -12 + 7 = -5.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 12 (1 PKT)

Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 10$ powstaje z wykresu funkcji $g(x) = x^2 + 1$ przez przesunięcie o 3 jednostki

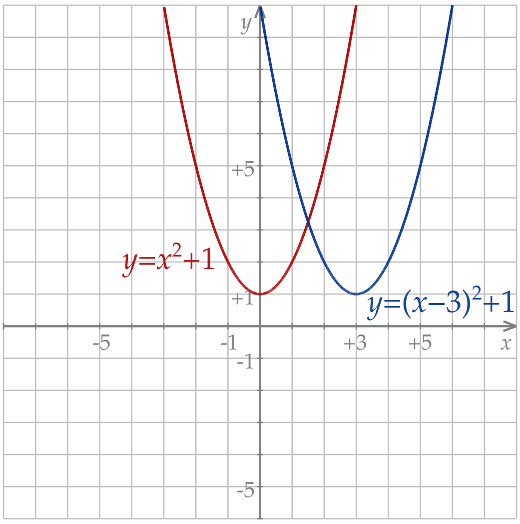
A) w prawo B) w lewo C) w górę D) w dół

ROZWIĄZANIE

Zapiszmy podaną funkcję w postaci kanonicznej

$$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1.$$

Widać, że wykres ten powstaje z wykresu $y = x^2 + 1$ przez przesunięcie o 3 jednostki w prawo (bo wierzchołek jest w punkcie $(3, 1)$).



Odpowiedź: A

ZADANIE 13 (1 PKT)

Ciągiem geometrycznym jest ciąg określony wzorem

A) $a_n = n^4 - 1$ B) $a_n = (-1)^n$ C) $a_n = \frac{1}{n}$ D) $a_n = 1 - 3n$

ROZWIĄZANIE

Ciąg geometryczny to ciąg postaci $a_n = a_1 q^{n-1}$. Z podanych odpowiedzi tylko ciąg $a_n = -(-1)^{n-1}$ ma tę postać (z $a_1 = -1$ i $q = -1$).

Odpowiedź: B

ZADANIE 14 (1 PKT)

Ciąg $(\log 36, \log 6, k)$ jest arytmetyczny. Wobec tego

A) $k = 0$ B) $k = 1$ C) $k = 6$ D) $k = 10$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Różnica danego ciągu jest równa

$$r = \log 6 - \log 36 = \log \frac{6}{36} = \log \frac{1}{6},$$

więc

$$k = \log 6 + r = \log 6 + \log \frac{1}{6} = \log \left(6 \cdot \frac{1}{6}\right) = \log 1 = 0.$$

Sposób II

Jeżeli ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny to

$$2b = a + c.$$

W naszej sytuacji otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2\log 6 &= \log 36 + k \\ \log 36 &= \log 36 + k \quad \Rightarrow \quad k = 0. \end{aligned}$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 15 (1 PKT)

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$. Zatem

A) $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$ B) $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$ C) $\sin \alpha = \frac{1}{17}$ D) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

ROZWIĄZANIE

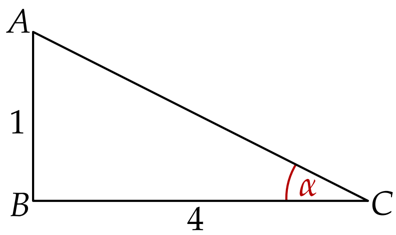
Sposób I

Z podanego tangensa wyliczymy sinus i cosinus.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4} \quad /()^2\\
&\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{16}\\
&\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{16}\\
&16\sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha\\
&17\sin^2\alpha = 1\\
&\sin^2\alpha = \frac{1}{17} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}\\
&\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Sposób II

Narysujmy trójkąt prostokątny, w którym $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$.



Łatwo teraz obliczyć sinus i cosinus. Najpierw obliczmy z twierdzenia Pitagorasa długość przeciwprostokątnej.

$$AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}.$$

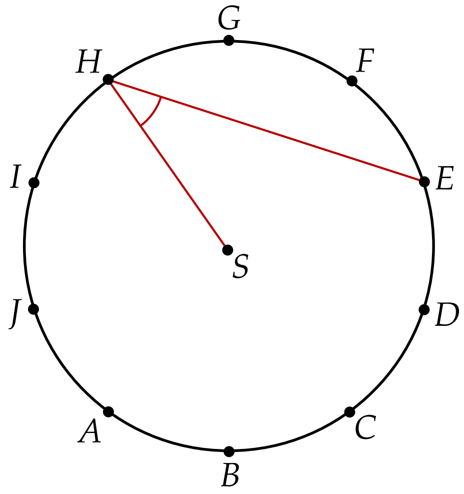
Zatem

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{17}}\\
\cos\alpha &= \frac{BC}{AC} = \frac{4}{\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 16 (1 PKT)

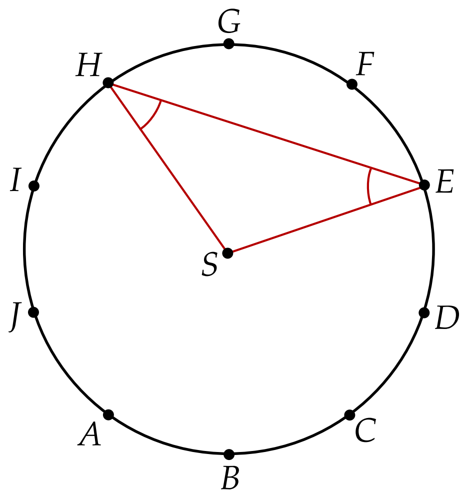
Punkty $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ dzielą okrąg o środku S na dziesięć równych łuków. Oblicz miarę kąta SHE zaznaczonego na rysunku.



A) 54° B) 72° C) 36° D) 45°

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy odcinek SE.



Zauważmy, że trójkąt HSE jest równoramienny i kąt HSE jest kątem środkowym opartym na łuku HE o długości równej $\frac{3}{10}$ długości okręgu. Zatem

$$\measuredangle HSE = \frac{3}{10} \cdot 360^\circ = 108^\circ$$

oraz

$$\measuredangle SHE = \frac{180^\circ - \measuredangle HSE}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Odpowiedź: **C**

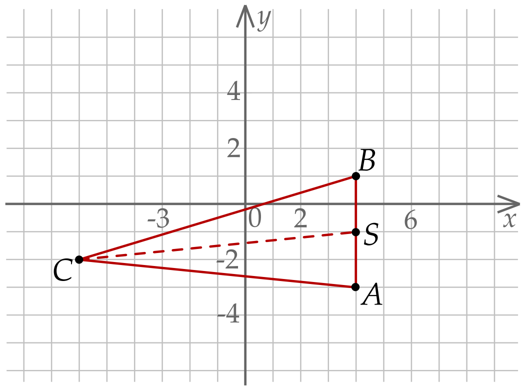
ZADANIE 17 (1 PKT)

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (4,-3)$, $B = (4,1)$, $C = (-6,-2)$. Długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka C jest równa

A) $\sqrt{101}$ B) $\sqrt{102}$ C) 10 D) $\sqrt{10}$

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Liczymy współrzędne środka odcinka AB

$$S = \left(\frac{4+4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (4,-1).$$

Obliczamy długość odcinka CS

$$|CS| = \sqrt{(4+6)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{101}.$$

Odpowiedź: A

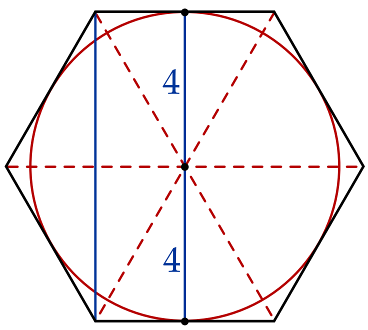
ZADANIE 18 (1 PKT)

Krótsza przekątna sześciokąta foremnego ma długość 8. Wówczas pole koła wpisanego w ten sześciokąt jest równe

A) 4π B) 8π C) 16π D) 64π

ROZWIĄZANIE

Robimy szkicowy rysunek



Z rysunku widać, że długość krótszej przekątnej sześciokąta jest równa średnicy koła wpisanego w ten sześciokąt. Zatem pole tego koła jest równe

$$\pi \cdot 4^2 = 16\pi.$$

Odpowiedź: **C**

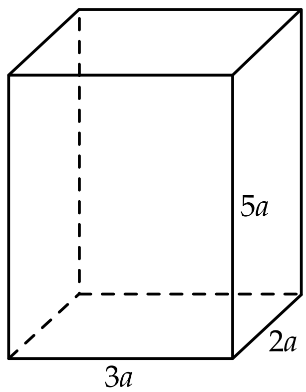
ZADANIE 19 (1 PKT)

Stosunek długości trzech krawędzi prostopadłościanu o objętości 240 jest równy 2:3:5. Pole powierzchni tego prostopadłościanu jest równe:

A) 124 B) 248 C) 496 D) 62

ROZWIĄZANIE

Powiedzmy, że krawędzie prostopadłościanu mają długości: $2a, 3a, 5a$.



Z podanej objętości mamy

$$240 = 2a \cdot 3a \cdot 5a = 30a^3 \quad / : 30$$
$$8 = a^3 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

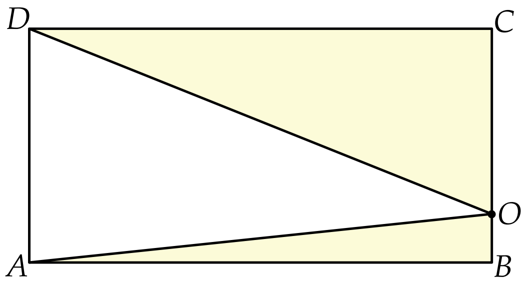
Pole powierzchni prostopadłościanu jest więc równe

$$2(3a \cdot 2a + 3a \cdot 5a + 2a \cdot 5a) = 62a^2 = 248.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 20 (1 PKT)

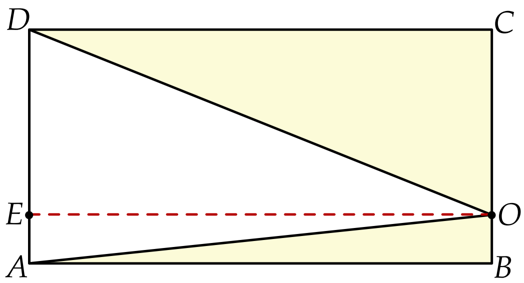
Z prostokąta $ABCD$ o polu 30 wycięto trójkąt AOD (tak jak na rysunku). Pole zacieniowanej figury jest równe



A) 7,5 B) 15 C) 20 D) 25

ROZWIĄZANIE

Niech OE będzie wysokością wyciętego trójkąta opuszczoną z wierzchołka O.



Pole wyciętego trójkąta jest więc równe

$$P_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot OE = \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{2} P_{ABCD} = 15.$$

Zatem zacieniowana część ma pole równe

$$30 - 15 = 15.$$

Odpowiedź: B

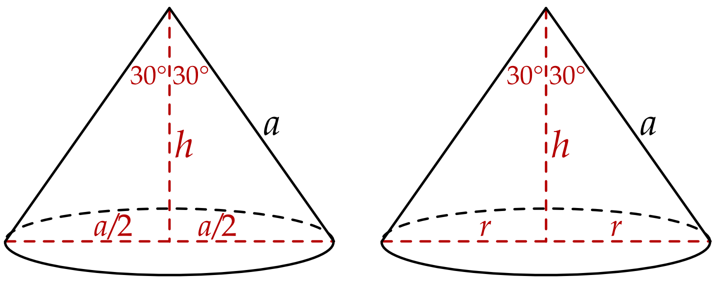
ZADANIE 21 (1 PKT)

Objętość stożka o wysokości $\sqrt{3}$ i kącie rozwarcia 60° jest równa

A) $3\sqrt{3}\pi$ B) $\sqrt{3}\pi$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy obrazek.



Z obrazka widać, że mamy do czynienia ze stożkiem, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o wysokości $\sqrt{3}$

Sposób I

Korzystając ze wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym mamy

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Zatem objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Sposób II

Obliczamy promień podstawy stożka

$$\begin{aligned} \frac{r}{h} &= \operatorname{tg} 30^\circ \\ \frac{r}{\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad r = 1. \end{aligned}$$

Zatem objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Odpowiedź: **D**

Zadanie 22 (1 pkt)

Mediana uporządkowanego niemalejąco zestawu liczb: $1, 2, 3, x, 5, 8$ nie zmienia się po dopisaniu liczby 10. Wtedy

A) $x = 2$ B) $x = 3$ C) $x = 4$ D) $x = 5$

Rozwiązanie

Po dopisaniu liczby 10 medianę liczmy z 7 liczb, czyli jest ona równa x. Mamy zatem równanie

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{2} &= x \\ x+3 &= 2x \\ 3 &= x. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **B**

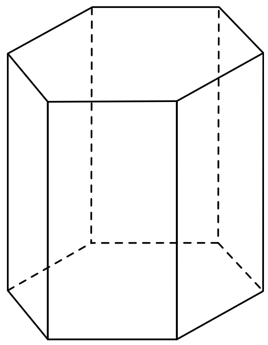
ZADANIE 23 (1 PKT)

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 12 większa od liczby wszystkich jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest

A) czworokąt B) pięciokąt C) sześciokąt D) dziesięciokąt

ROZWIĄZANIE

Jeżeli w podstawie graniastosłupa jest n–kąt to graniastosłup ma $3n$ krawędzi i n ścian bocznych.



Mamy więc równanie

$$\begin{aligned} 3n &= n+12 \\ 2n &= 12 \\ n &= 6. \end{aligned}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 24 (1 PKT)

Każdy bok trójkąta prostokątnego o bokach 3, 4, 5 kolorujemy jednym z 6 kolorów tak, aby żadne dwa boki nie były pokolorowane tym samym kolorem. Ile jest takich pokolorowań?

A) 15 B) 120 C) 216 D) 20

ROZWIĄZANIE

Pierwszy bok trójkąta możemy pokolorować na 6 sposobów, drugi na 5 (bo ma mieć inny kolor niż pierwszy), a trzeci na 4 sposoby. W sumie jest więc

$$6\cdot 5\cdot 4 = 120$$

sposobów.

Odpowiedź: B

ZADANIE 25 (1 PKT)

Ze zbioru dzielników naturalnych liczby 8 losujemy dwa razy po jednej liczbie (otrzymane liczby mogą się powtarzać). Prawdopodobieństwo, że iloczyn wybranych liczb jest dzielnikiem liczby 4 jest równe

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{8}$

ROZWIĄZANIE

Dzielniki liczby 8 to: $1,2,4,8$. Jeżeli za zdarzenia elementarne przyjmiemy pary wylosowanych liczb, to

$$\Omega = 4 \cdot 4 = 16.$$

Łatwo wypisać zdarzenia sprzyjające:

$$(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,4),(4,1).$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Odpowiedź: **C**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

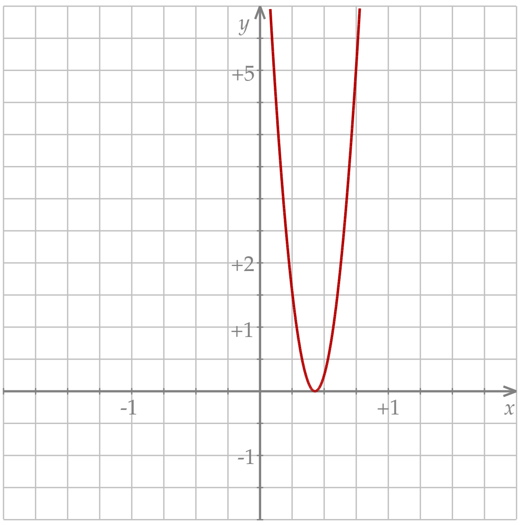
Rozwiąż nierówność $42t - 49t^2 \geqslant 9$.

ROZWIĄZANIE

Przenosimy wszystkie składniki na prawą stronę.

$$0 \geqslant 49t^2 - 42t + 9$$
$$\Delta = 42^2 - 4 \cdot 9 \cdot 49 = 1764 - 1764 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} = \frac{42}{2 \cdot 49} = \frac{3}{7}.$$

Ponieważ współczynnik przy t^2 jest dodatni, wykres tego trójmianu jest parabolą o ramionach skierowanych w górę.



Otrzymujemy stąd rozwiązanie nierówności $t = \frac{3}{7}$.

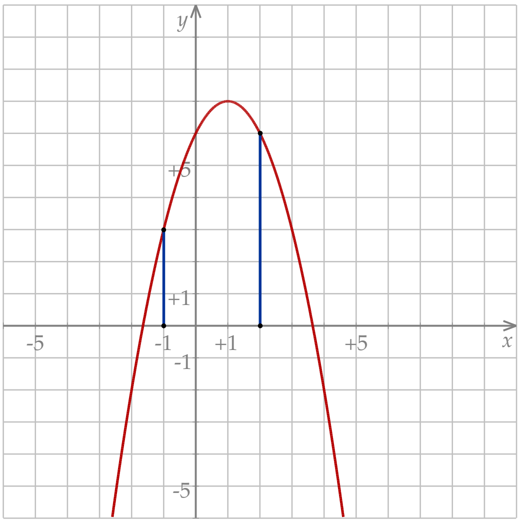
Odpowiedź: $t = \frac{3}{7}$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 6$ w przedziale $\langle -1, 2\rangle$.

ROZWIĄZANIE

Widać, że wykres funkcji f jest parabolą zwróconą ramionami w dół czyli, największą wartość przyjmuje w wierzchołku.



Najpierw sprawdzamy czy pierwsza współrzędna wierzchołka należy do przedziału $\langle -1, 2\rangle$

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Zatem wierzchołek należy do interesującego nas przedziału, więc największą wartością w tym przedziale jest

$$f_{max} = f(1) = -1 + 2 + 6 = 7.$$

Wartość najmniejszą otrzymamy w jednym z końców przedziału. W którym? – liczymy i sprawdzamy.

$$f(-1) = -1 - 2 + 6 = 3$$
$$f(2) = -4 + 4 + 6 = 6.$$

Odpowiedź: $f_{max} = f(1) = 7$, $f_{min} = f(-1) = 3$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to

$$(a - b + c)(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekształcamy lewą stronę równości, którą mamy udowodnić (korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów).

$$\begin{aligned} L =&(a-b+c)(a+b+c) = ((a+c)-b)((a+c)+b) = (a+c)^2 - b^2 = \\ &= a^2+2ac+c^2-b^2. \end{aligned}$$

Wiemy ponadto, liczby a,b,c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, więc $b^2 = ac$. Mamy zatem

$$L = a^2+2ac+c^2-b^2 = a^2+2b^2+c^2-b^2 = P.$$

Sposób II

Skoro liczby a,b,c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $b = aq$ i $c = aq^2$ dla pewnego q. Równość, którą mamy udowodnić przyjmuje więc postać.

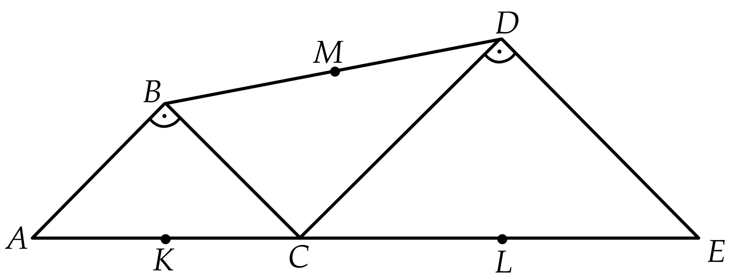
$$\begin{aligned} &(a-aq+aq^2)(a+aq+aq^2) = a^2+a^2q^2+a^2q^4 \quad / : a^2 \\ &(1-q+q^2)(1+q+q^2) = 1+q^2+q^4. \end{aligned}$$

Aby udowodnić tę równość przekształcamy lewą stronę (korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów).

$$\begin{aligned} L =&(1-q+q^2)(1+q+q^2) = ((1+q^2)-q)((1+q^2)+q) = \\ &= (1+q^2)^2-q^2 = 1+2q^2+q^4-q^2 = 1+q^2+q^4 = P. \end{aligned}$$

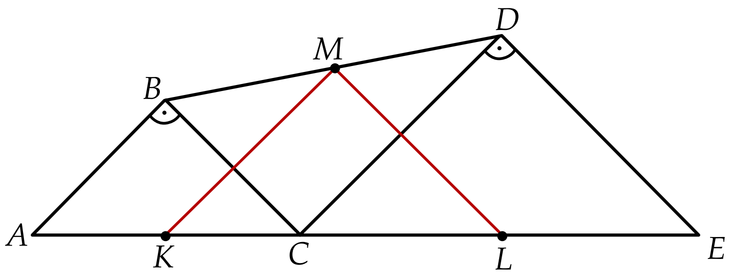
ZADANIE 29 (2 PKT)

Trójkąty ABC i CDE są równoramienne i prostokątne. Punkty A, C i E leżą na jednej prostej, a punkty K, L i M są środkami odcinków AC, CE i BD (zobacz rysunek). Wykaż, że $|MK| = |ML|$.



ROZWIĄZANIE

Dorysujmy odcinki MK i ML.



Sposób I

Zauważmy, że odcinki AB i CD są do siebie równoległe. Odcinek KM łączy środki ramion w trapezie $ACDB$, więc jest równoległy do podstaw AB i CD. Zatem $\measuredangle MKL = \measuredangle BAC = 45^\circ$.

Podobnie, patrząc na odcinki BC i DE, uzasadniamy, że odcinek ML jest równoległy do BC i DE. Zatem $\measuredangle MLK = \measuredangle DEC = \beta = 45^\circ$. To oznacza, że trójkąt KLM jest równoramiennym trójkątem prostokątnym. W szczególności $MK = ML$.

Sposób II

Tak jak poprzednio zauważamy, że odcinki MK i ML łączą środki ramion w trapezach $ACDB$ i $CEDB$. Ponieważ odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość równą średniej arytmetycznej długości podstaw, mamy

$$MK = \frac{AB + CD}{2} = \frac{CB + ED}{2} = ML.$$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{3}$. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Ponieważ mamy obliczyć tangens, podzielmy licznik i mianownik danego ułamka przez $\cos\alpha$.

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha + 1 = 3\operatorname{tg}\alpha - 3$$

$$4 = 2\operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

Sposób II

Przekształcamy daną równość tak, aby otrzymać $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{3}\\
&3\sin\alpha-3\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha\\
&2\sin\alpha=4\cos\alpha \quad / : 2\cos\alpha\\
&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\\
&\operatorname{tg}\alpha=2.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $\operatorname{tg}\alpha=2$

ZADANIE 31 (2 PKT)

W 8 pudełkach umieszczamy 5 ponumerowanych kulek tak, aby w żadnym pudełku nie było więcej niż jednej kulki. Na ile sposobów możemy to zrobić?

ROZWIĄZANIE

Każdej kulce musimy przyporządkować unikalny numer pudełka. Można to zrobić na

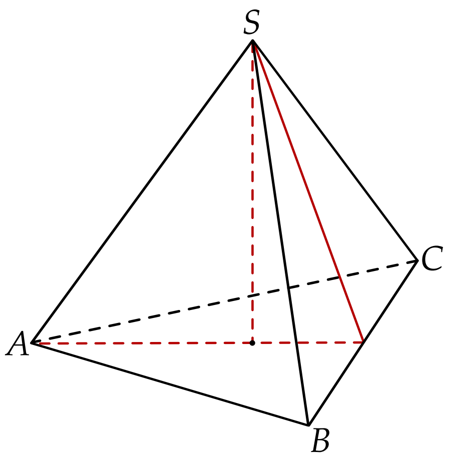
$$8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=6720$$

sposobów (pierwsza trafia do dowolnego z pudełek, druga nie może znaleźć się w tym co pierwsza, trzecia musi być w innym niż dwie pierwsze itd.).

Odpowiedź: **6720**

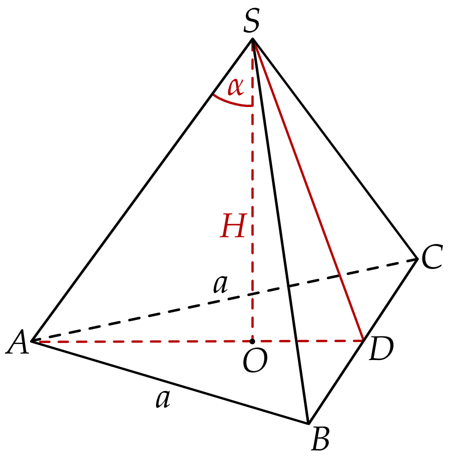
ZADANIE 32 (4 PKT)

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ (tak jak na rysunku) jest równa 243, a promień okręgu wpisanego w podstawę ABC tego ostrosłupa jest równy 3. Oblicz tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa, a jego krawędzią boczną.



ROZWIĄZANIE

Dorysujmy wysokość ściany bocznej.



Promień r okręgu wpisanego w podstawę to $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta w podstawie, więc jeżeli przez a oznaczymy długość krawędzi podstawy to mamy równanie

$$r = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3$$
$$\frac{a\sqrt{3}}{6} = 3 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$

Możemy teraz wykorzystać informację o objętości ostrosłupa do obliczenia długości jego wysokości

$$243 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{108\sqrt{3}}{4}\cdot H = 9\sqrt{3}H$$
$$H = \frac{243}{9\sqrt{3}} = \frac{27}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}.$$

Pozostało teraz obliczyć żądany tangens.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AE}{SE} = \frac{2r}{H} = \frac{6}{9\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Liczby $(4, x, y)$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Jeśli liczbę x zwiększymy o 1, a liczbę y zwiększymy o 3, to otrzymane liczby będą kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz x i y.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Wiemy, że liczby $(4, x, y)$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, więc $x = 4 + r$ i $y = 4 + 2r$ dla pewnego r. Wiemy ponadto, że ciąg $(4, x + 1, y + 3)$ jest ciągiem geometrycznym, więc

$$\begin{aligned}
&(x+1)^2 = 4(y+3)\\
&(4+r+1)^2 = 4(4+2r+3)\\
&(5+r)^2 = 4(2r+7)\\
&r^2 + 10r + 25 = 8r + 28\\
&r^2 + 2r - 3 = 0\\
&\Delta = 4 + 12 = 16 = 4^2\\
&r = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \vee \quad r = \frac{-2+4}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd dwa ciągi: $(4, 1, -2)$ i $(4, 5, 6)$.

Sposób II

Wiemy, że ciąg $(4, x, y)$ jest arytmetyczny, więc

$$2x = 4 + y \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 4.$$

Wiemy ponadto, że ciąg $(4, x + 1, y + 3)$ jest geometryczny, więc

$$\begin{aligned}
&(x+1)^2 = 4(y+3)\\
&(x+1)^2 = 4(2x-4+3)\\
&x^2 + 2x + 1 = 8x - 4\\
&x^2 - 6x + 5 = 0\\
&\Delta = 36 - 20 = 4^2\\
&x = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \vee \quad x = \frac{6+4}{2} = 5.
\end{aligned}$$

Mamy wtedy odpowiednio $y = 2x - 4 = -2$ i $y = 2x - 4 = 6$.

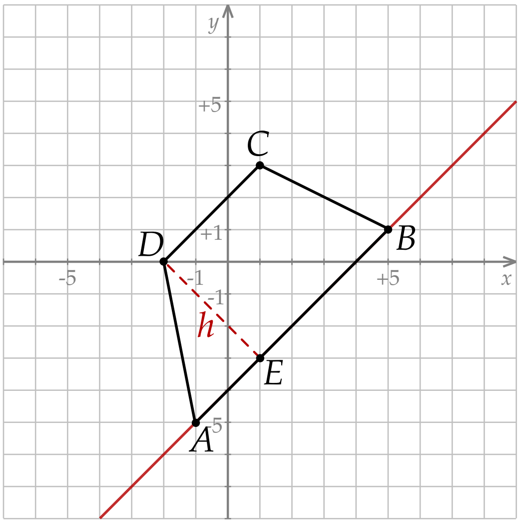
Odpowiedź: $(x, y) = (1, -2)$ **lub** $(x, y) = (5, 6)$

ZADANIE 34 (5 PKT)

Punkty $A = (-1, -5), B = (5, 1), C = (1, 3), D = (-2, 0)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu $ABCD$. Oblicz pole tego trapezu.

ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy oczywiście od szkicowego rysunku.



Aby obliczyć pole trapezu musimy znać długości jego podstaw oraz długość wysokości. Długości podstaw łatwo obliczyć.

$$AB = \sqrt{(5+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$
$$CD = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

Napiszmy teraz równanie prostej AB. Szukamy prostej w postaci $y = ax + b$. Podstawiamy współrzędne punktów A i B.

$$\begin{cases} -5 = -a + b \\ 1 = 5a + b. \end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze i mamy $6a = 6$, czyli $a = 1$. Stąd $b = -5 + a = -4$ i prosta AB ma równanie: $y = x - 4$.

Dalszą część rozwiązania poprowadzimy na dwa sposoby.

Sposób I

Wysokość trapezu możemy łatwo obliczyć ze wzoru na odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

W naszej sytuacji mamy $P = D = (-2, 0)$, a prosta to: $x - y - 4 = 0$. Mamy zatem

$$h = \frac{|-2-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}}.$$

Pole trapezu jest więc równe

$$P = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 27.$$

Sposób II

Jeżeli ktoś nie chce korzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej, to wysokość trapezu możemy wyznaczyć bardziej wprost, wyznaczając równanie wysokości DE opuszczonej z wierzchołka D na bok AB.

Prosta DE jest prostopadła do prostej AB, więc ma równanie postaci $y = -x + b$. Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu D.

$$0 = 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = -2.$$

Szukamy teraz punku wspólnego prostych AB i DE.

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x - 2. \end{cases}$$

Odejmując od pierwszego równania drugie (żeby skrócić y), mamy $0 = 2x - 2$, czyli $x = 1$ i $y = x - 4 = -3$. Zatem $E = (1, -3)$ i

$$h = DE = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

Pole trapezu jest równe

$$P = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 27.$$

Odpowiedź: **27**