# LUBELSKA PRÓBA PRZED MATURĄ Z MATEMATYKI

## (DLA KLAS PIERWSZYCH)

## POZIOM PODSTAWOWY

GRUPA I

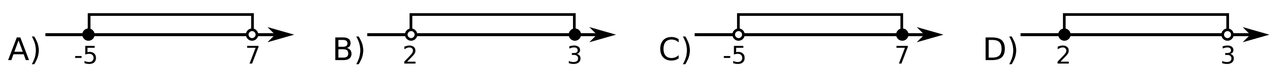
23 MAJA 2018

CZAS PRACY: 170 MINUT

### Zadania zamknięte

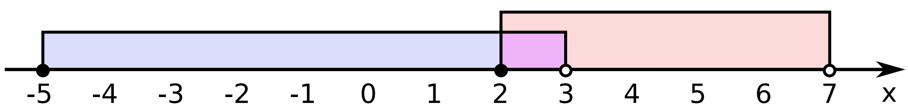
#### ZADANIE 1 (1 PKT)

Dane są zbiory: $A = \langle -5;3)$ oraz $B = \langle 2;7)$. Zbiór $A \cap B$ zaznaczony jest na rysunku:




ROZWIĄZANIE

Zaznaczamy oba zbiory na osi liczbowej i wyznaczamy ich część wspólną.




Widać z rysunku, że

$$A \cap B = \langle 2,3).$$

---

**Odpowiedź: D**

#### ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba $||4-7|-|13-5||$ jest równa

A) 29 B) 5 C) 7 D) 11

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$||4-7|-|13-5|| = ||-3|-|8|| = |3-8| = |-5| = 5.$$

---

**Odpowiedź: B**

## ZADANIE 3 (1 PKT)

Odwrotnością liczby $2\sqrt{2}-3$ jest

A) $3-2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}+3$ C) $-3-2\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{2\sqrt{2}+3}$

## ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-3}=\frac{(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}=\frac{2\sqrt{2}+3}{8-9}=-2\sqrt{2}-3.$$

---

**Odpowiedź: C**



## ZADANIE 4 (1 PKT)

Liczba $\sqrt[3]{9^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9:27^{-1}}$ jest równa

A) $3^0$ B) $3^2$ C) $3^6$ D) $3^8$

## ROZWIĄZANIE

### Sposób I

Liczymy

$$\sqrt[3]{9^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9:27^{-1}}=\sqrt[3]{(3^2)^6\cdot 3^{-9}\cdot 3^3}=\sqrt[3]{3^{12-9+3}}=\sqrt[3]{3^6}=3^2.$$

### Sposób II

Liczymy

$$\sqrt[3]{9^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9:27^{-1}}=\left(9^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9:(3^3)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=9^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3:3^{-1}=81\cdot\frac{1}{27}\cdot 3=9=3^2.$$

---

**Odpowiedź: B**

## ZADANIE 5 (1 PKT)

Liczba $-2\log_3 6+3\log_3 2$ jest równa

A) $\log_3\frac{2}{9}$ B) $-1$ C) $\log_3\frac{1}{18}$ D) $\log_3 288$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned}-2\log_3 6+3\log_3 2 &= -\log_3 6^2+\log_3 2^3 = \\ &= \log_3 8-\log_3 36=\log_3\frac{8}{36}=\log_3\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

---

**Odpowiedź: A**

## ZADANIE 6 (1 PKT)

Liczba $\sqrt{128}-0,5\sqrt{32}$ jest równa

A) $\sqrt{112}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $\sqrt{8}$ D) $4\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt{128}-0,5\sqrt{32}=\sqrt{64\cdot 2}-0,5\sqrt{16\cdot 2}=8\sqrt{2}-0,5\cdot 4\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

---

**Odpowiedź: B**

## ZADANIE 7 (1 PKT)

Koszt uczestnictwa w obozie sportowym w 2018 r. wynosi 1620 zł. Wzrósł on w stosunku do kosztu z 2017 r. o 35%. Koszt uczestnictwa w obozie w 2017 r. wynosił

A) 1215 zł B) 1053 zł C) 1200 zł D) 567 zł

ROZWIĄZANIE

Jeżeli $x$ jest kosztem uczestnictwa w obozie w roku 2017, to

$$135\%x=1,35x=1620 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1620}{1,35}=1200.$$

---

**Odpowiedź: C**

## ZADANIE 8 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $(-1-x^3)(x^3-1)$ dla $x=-\sqrt[3]{3}$ jest równa

A) $-8$ B) $2$ C) $-4$ D) $-2$

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

$$(-1-x^3)(x^3-1) = -(x^3+1)(x^3-1) = -(x^6-1) = 1-x^6 =$$
$$= 1-(-\sqrt[3]{3})^6 = 1-(-3)^2 = 1-9 = -8.$$

---

**Odpowiedź: A**

## ZADANIE 9 (1 PKT)

Do zbioru rozwiązań równania $x(x+2)(x^2-1) = 0$ nie należy liczba
A) 0 B) 1 C) 2 D) $-1$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ

$$x(x+2)(x^2-1) = x(x+2)(x-1)(x+1),$$

to pierwiastkami danego równania są

$$-2, 0, -1, 1.$$

---

**Odpowiedź: C**

## ZADANIE 10 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $(4-\sqrt{3})^2 - (4+\sqrt{3})^2$ wynosi
A) $-6$ B) $-4\sqrt{3}$ C) 6 D) $-16\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy korzystając ze wzorów skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$$

Mamy więc

$$(4-\sqrt{3})^2 - (4+\sqrt{3})^2 = 4^2 - 8\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - (4^2+8\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2) =$$
$$= 16-8\sqrt{3}+3-16-8\sqrt{3}-3 = -16\sqrt{3}.$$

---

**Odpowiedź: D**

## ZADANIE 11 (1 PKT)

Marta oszacowała, że wyda na zakupy około 50 zł. W rzeczywistości zapłaciła 48 zł. Błąd względny, jaki popełniła szacując wartość zakupów wynosi:

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{1}{24}$ C) 2 D) $\frac{2}{25}$

### ROZWIĄZANIE

Liczymy błąd bezwzględny

$$|50 - 48| = 2.$$

Obliczamy błąd względny

$$\frac{2}{48} = \frac{1}{24}.$$

---

**Odpowiedź: B**

## ZADANIE 12 (1 PKT)

Dany jest zbiór $A = \left\{ \frac{\pi}{2};\ -1;\ \sqrt{7\frac{1}{9}};\ 0;\ 1,(3);\ \frac{1-\sqrt{3}}{4} \right\}$. Liczb wymiernych w zbiorze $A$ jest

A) pięć B) dwie C) trzy D) cztery

### ROZWIĄZANIE

Liczbami wymiernymi są oczywiście: $-1$ i 0. Ponadto, wymierne są też

$$1,(3) = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{7\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}.$$

Pozostałe liczby są niewymierne. Są zatem dokładnie 4 liczby wymierne w zbiorze $A$.

---

**Odpowiedź: D**

## ZADANIE 13 (1 PKT)

Układ równań $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ -6x + (a+3)y = 10 \end{cases}$ jest sprzeczny dla

A) $a = -11$ B) $a = 5$ C) $a = 3$ D) $a = -2$

### ROZWIĄZANIE

#### Sposób I

Dodajmy do drugiego równania pierwsze pomnożone przez 2 (żeby skrócić $x$) i mamy

$$6x - 6x - 8y + (a+3)y = 20$$
$$(a-5)y = 20.$$

Widać teraz, że układ jest sprzeczny tylko dla $a = 5$.

## Sposób II

Jeżeli układ ma być sprzeczny, to jego równania muszą opisywać dwie różne proste równoległe. Ponieważ $-6x = (-2)\cdot 3x$, to musimy też mieć

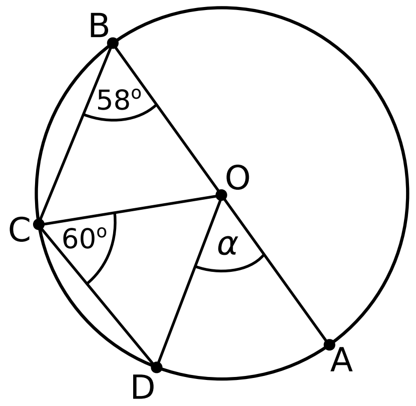
$$(a+3)y = (-2)\cdot(-4y) = 8y \quad \Rightarrow \quad a = 5.$$

---

Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 14 (1 PKT)

Odcinek $AB$ jest średnicą okręgu (rysunek).




Miara kąta $\alpha$ jest równa

A) $58^\circ$ B) $56^\circ$ C) $60^\circ$ D) $116^\circ$

## ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że oba trójkąty $OBC$ i $OCD$ są równoramienne (bo $OB = OC = OD$). W takim razie

$$\measuredangle OCB = \measuredangle OBC = 58^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle COB = 180^\circ - 2\cdot 58^\circ = 64^\circ$$
$$\measuredangle ODC = \measuredangle OCD = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle DOC = 180^\circ - 2\cdot 60^\circ = 60^\circ.$$

Stąd

$$\alpha = 180^\circ - \measuredangle COB - \measuredangle DOC = 180^\circ - 64^\circ - 60^\circ = 56^\circ.$$

---

Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 15 (1 PKT)

Długości boków trójkąta nie mogą być równe:
A) 3, 4, 4 B) 3, 4, 5 C) 3, 4, 2 D) 3, 4, 8

## ROZWIĄZANIE

Z trzech odcinków można zbudować trójkąt jeżeli suma długości dwóch najkrótszych jest większa od długości najdłuższego. Widać, że warunek ten nie jest spełniony w przypadku odcinków długości: 3, 4, 8, bo

$$3 + 4 = 7 < 8.$$

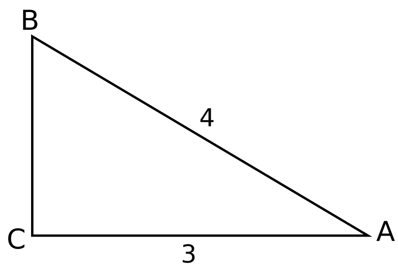
Odpowiedź: **D**

## ZADANIE 16 (1 PKT)

Dwa dłuższe boki trójkąta prostokątnego mają długości 3 cm oraz 4 cm. Długość najkrótszego boku tego trójkąta wynosi
A) 5 cm B) $\sqrt{7}$ cm C) 2,6 cm D) $\sqrt{5}$ cm

## ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od szkicowego rysunku.




Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość najkrótszego boku trójkąta.

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

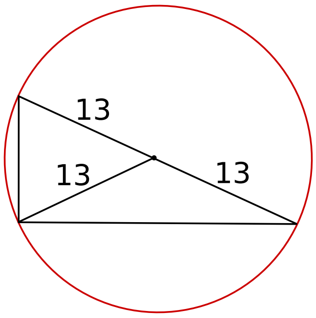
Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 17 (1 PKT)

Pole koła opisanego na trójkącie prostokątnym o bokach długości 10, 24, 26 jest równe
A) $144\pi$ B) $25\pi$ C) $169\pi$ D) $26\pi$

## Rozwiązanie

Zaczynamy od rysunku




Zauważmy, że przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest średnicą okręgu, który jest opisany na tym trójkącie. Zatem promień $R$ okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy połowie długości przeciwprostokątnej $R = \frac{26}{2} = 13$. Stąd

$$P = \pi \cdot 13^2 = 169\pi.$$

---

**Odpowiedź: C**

## Zadanie 18 (1 pkt)

Trójkąty $ABC$ oraz $A'B'C'$ są podobne. Obwód trójkąta $A'B'C'$ jest równy 12, a jego pole 6. Jeżeli pole trójkąta $ABC$ jest równe $13\frac{1}{2}$, to jego obwód wynosi

A) 18 B) $6\frac{3}{4}$ C) 27 D) 9

## Rozwiązanie

Oznaczmy przez $k$ skalę podobieństwa trójkątów ($ABC$ do $A'B'C'$). Ponieważ stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, mamy

$$k = \sqrt{\frac{13\frac{1}{2}}{6}} = \sqrt{\frac{\frac{27}{2}}{6}} = \sqrt{\frac{27}{12}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2},$$

czyli drugi trójkąt ma obwód

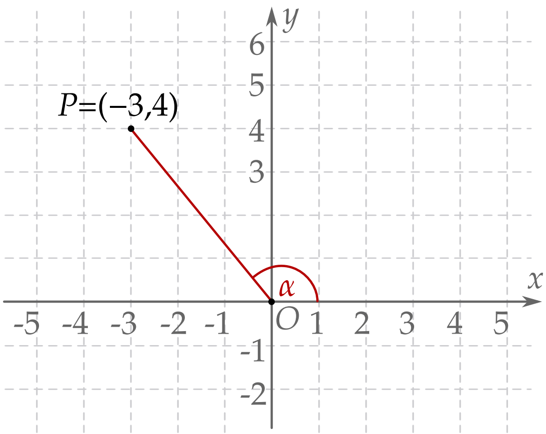
$$12 \cdot \frac{3}{2} = 18.$$

---

**Odpowiedź: A**

## ZADANIE 19 (1 PKT)

Na końcowym ramieniu kąta $\alpha$ (rysunek) leży punkt $P = (-3;4)$.

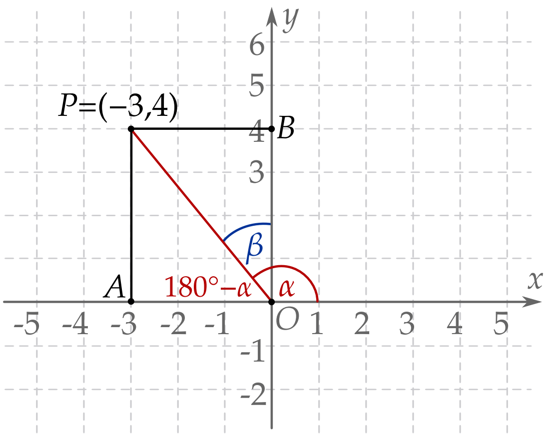



Wówczas

A) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ B) $\cos\alpha = -\frac{4}{3}$ C) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ D) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

## ROZWIĄZANIE

Dorysujmy rzuty punktu $P$ na osie okładu współrzędnych.




### Sposób I

Korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego.

$$\cos\alpha = \frac{x_P}{OP} = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{y_P}{OP} = \frac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_P}{x_P} = -\frac{4}{3}.$$

### Sposób II

Zauważmy, że
$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{OA}{OP} = \frac{3}{5}.$$
Stąd
$$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}.$$

## Sposób III

Tym razem popatrzmy na trójkąt $POB$.
$$\sin\beta = \frac{BP}{OP} = \frac{3}{5}.$$
Stąd
$$\cos\alpha = \cos(90^\circ + \beta) = -\sin\beta = -\frac{3}{5}.$$

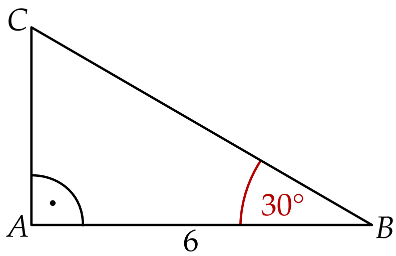
## Sposób IV

Napiszmy równanie prostej $OP$. Jest to prosta postaci $y = ax$. Współczynnik $a$ obliczamy podstawiając współrzędne punktu $P$.
$$4 = -3a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{4}{3}.$$
Otrzymany współczynnik kierunkowy to dokładnie $\operatorname{tg}\alpha$, więc
$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3} \quad /()^2\\
&\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{16}{9}\\
&9(1-\cos^2\alpha) = 16\cos^2\alpha\\
&25\cos^2\alpha = 9 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\frac{5}{3}
\end{aligned}$$
Ponieważ $\alpha$ jest kątem rozwartym, mamy stąd $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Odpowiedź: **C**

### ZADANIE 20 (1 PKT)

Długość boku $AC$ w trójkącie przedstawionym na poniższym rysunku jest równa




A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

## Sposób I

Dany trójkąt to połówka trójkąta równobocznego, więc jeżeli oznaczymy $a = BC = 2AC$, to

$$6 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Stąd $AC = \frac{a}{2} = 2\sqrt{3}$.

## Sposób II

Korzystamy z funkcji trygonometrycznych.

$$\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 = 2\sqrt{3}.$$

---

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 21 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $\cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$ wynosi

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że

$$\cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ = \cos 120^\circ \cdot \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \sin 120^\circ.$$

## Sposób I

Korzystamy ze wzoru

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha.$$

Mamy zatem

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## Sposób II

Korzystamy ze wzoru

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Mamy zatem

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

---

Odpowiedź: **D**

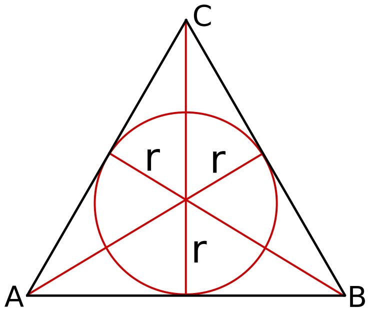
## ZADANIE 22 (1 PKT)

Długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny wynosi $6\pi$. Długość boku tego trójkąta jest równa

A) 9 B) $6\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 6

## ROZWIĄZANIE

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny to $\frac{1}{3}$ długości jego wysokości.




Mamy zatem

$$3 = r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad / \cdot \frac{6}{\sqrt{3}}$$
$$a = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$$

**Odpowiedź: B**

## ZADANIE 23 (1 PKT)

Zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ jest dziedziną funkcji

A) $f(x) = \frac{x}{(x-3)^2}$ B) $f(x) = \frac{2}{x^2-9}$ C) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3}$ D) $f(x) = x - 3$

## ROZWIĄZANIE

Dziedziną funkcji liniowej $f(x) = x - 3$ jest $\mathbb{R}$, a w przypadku pozostałych funkcji wymiernych musimy z dziedziny usunąć miejsca zerowe mianownika. Zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ jest więc dziedziną funkcji

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)^2}.$$

**Odpowiedź: A**

## ZADANIE 24 (1 PKT)

Do wykresu funkcji $f(x) = 2\sqrt{3}x - 4$ należy punkt o współrzędnych

A) $(-4, 0)$ B) $(\sqrt{3}, -2)$ C) $(-\sqrt{3}, -10)$ D) $(2\sqrt{3}, 2)$

## ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$f(-4) = -8\sqrt{3} - 4$$
$$f(\sqrt{3}) = 6 - 4 = 2$$
$$f(-\sqrt{3}) = -6 - 4 = -10$$
$$f(2\sqrt{3}) = 12 - 4 = 8.$$

Zatem wśród podanych punktów tylko $(-\sqrt{3}, -10)$ należy do wykresu $y = f(x)$.

**Odpowiedź: C**

## ZADANIE 25 (1 PKT)

Wykres funkcji $f(x) = (x-3)^2$ przesunięto równolegle o 2 jednostki w prawo. W wyniku tego przekształcenia otrzymano wykres funkcji

A) $g(x) = (x-5)^2$ B) $g(x) = (x-3)^2 + 2$ C) $g(x) = (x-1)^2$ D) $g(x) = (x-3)^2 - 2$

## ROZWIĄZANIE

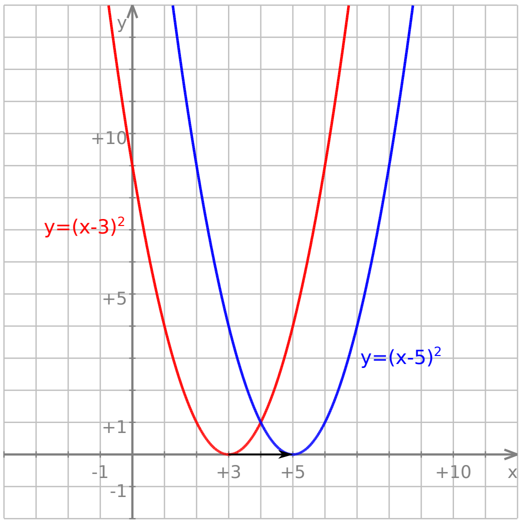
Przypomnijmy, że wykresem funkcji kwadratowej

$$f(x) = a(x - x_w)^2 + y_w$$

jest parabola o wierzchołku $(x_w, y_w)$. W takim razie parabola będąca wykresem funkcji $f$ ma wierzchołek w punkcie $(3, 0)$. Po przesunięciu o 2 jednostki w prawo wierzchołek będzie w punkcie $(5, 0)$. Otrzymamy więc wykres funkcji

$$y = (x-5)^2.$$

Dla ciekawskich obrazek.




**Odpowiedź: A**

## Zadania otwarte

### Zadanie 26 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $(x-3)(x+3)+5=(x-2)^2$.

**Rozwiązanie**

Będziemy korzystać ze wzorów:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Liczymy

$$(x-3)(x+3)+5=(x-2)^2$$
$$x^2-9+5=x^2-4x+4$$
$$4x=8 \quad \Rightarrow \quad x=2.$$

---

Odpowiedź: $x=2$

### Zadanie 27 (2 pkt)

Wykaż, że jeżeli $a+b=6$, to $a^2+b^2 \geqslant 18$.

**Rozwiązanie**

#### Sposób I

Podstawiamy w nierówności, która mamy wykazać $b=6-a$ i przekształcamy ją w sposób równoważny.

$$a^2+(6-a)^2 \geqslant 18$$
$$a^2+36-12a+a^2 \geqslant 18$$
$$2a^2-12a+18 \geqslant 0$$
$$2(a-3)^2 \geqslant 0.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście spełniona, więc wyjściowa nierówność też musiała być prawdziwa.

#### Sposób II

Korzystamy z nierówności

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

pomiędzy średnią kwadratową i arytmetyczną. Mamy zatem

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=9$$
$$a^2+b^2 \geqslant 18.$$

## Zadanie 28 (2 pkt)

Kąt $\alpha$ jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha - 4\sin^2\alpha$.

### Rozwiązanie

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$$

Mamy zatem

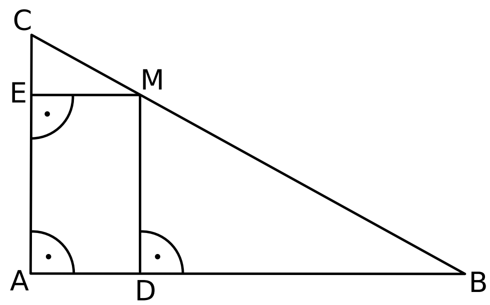
$$\cos^3\alpha - 4\sin^2\alpha = \frac{27}{64} - 4\cdot\frac{7}{16} = \frac{27-112}{64} = -\frac{85}{64}.$$

---

Odpowiedź: $-\frac{85}{64}$

## Zadanie 29 (2 pkt)

W trójkącie prostokątnym $ABC$ punkt $M$ leży na przeciwprostokątnej $BC$. Z punktu $M$ poprowadzono odcinki $DM$ i $EM$ prostopadłe odpowiednio do przyprostokątnych $AB$ i $AC$ (rysunek). Udowodnij, że $\frac{|DM|}{|AC|} + \frac{|EM|}{|AB|} = 1$.




### Rozwiązanie

Zauważmy, że trójkąty prostokątne $DBM$ i $EMC$ są podobne do trójkąta $ABC$, więc

$$\frac{DM}{AC} = \frac{MB}{BC}$$
$$\frac{EM}{AB} = \frac{MC}{BC}.$$

Stąd

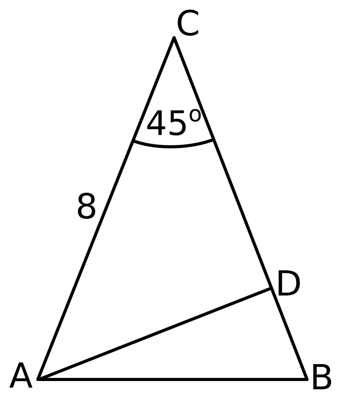
$$\frac{DM}{AC} + \frac{EM}{AB} = \frac{MB}{BC} + \frac{MC}{BC} = \frac{MB+MC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

## Zadanie 30 (2 pkt)

W trójkącie $ABC$ dane są: $|AC| = |BC| = 8$ oraz $|\measuredangle ACB| = 45^\circ$. Oblicz długość wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka $A$.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy trójkąt równoramienny.




### Sposób I

W trójkącie $ADC$ mamy

$$\frac{AD}{AC} = \sin 45^\circ$$

$$\frac{AD}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad AD = 4\sqrt{2}.$$

### Sposób II

Liczymy pole trójkąta $ABC$ na dwa sposoby

$$\frac{1}{2}BC \cdot AD = P = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \sin 45^\circ \quad / \cdot \frac{2}{BC}$$

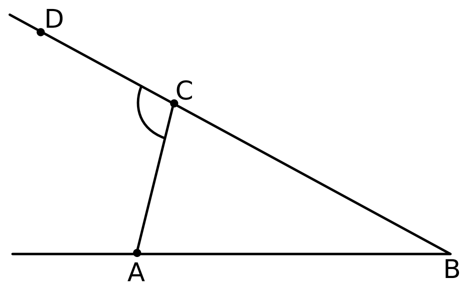
$$AD = AC \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

---

Odpowiedź: $4\sqrt{2}$

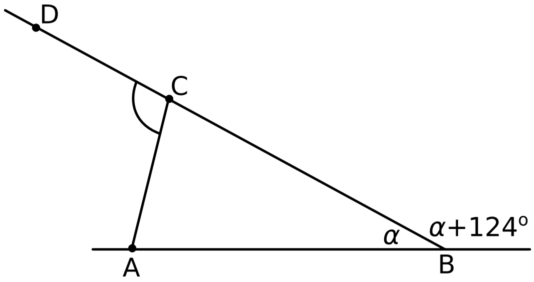
ZADANIE 31 (2 PKT)

Odcinki $AB$ oraz $BC$ (rysunek) są równej długości. Kąt $ABC$ ma miarę o $124^\circ$ mniejszą od miary kąta do niego przyległego. Oblicz miarę kąta $ACD$.



## ROZWIĄZANIE

Oznaczmy $\measuredangle ABC = \alpha$.




Wiemy wtedy, że kąt przyległy do kąta $ABC$ ma miarę $\alpha + 124^\circ$, więc

$$\alpha + \alpha + 124^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 56^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 28^\circ.$$

Trójkąt $ABC$ jest równoramienny, więc

$$\measuredangle ACB = \measuredangle CAB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - 28^\circ}{2} = 76^\circ.$$

Stąd

$$\measuredangle ACD = 180^\circ - \measuredangle ACB = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ.$$

---

Odpowiedź: $104^\circ$

## ZADANIE 32 (5 PKT)

Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Na podstawie tego wykresu podaj:

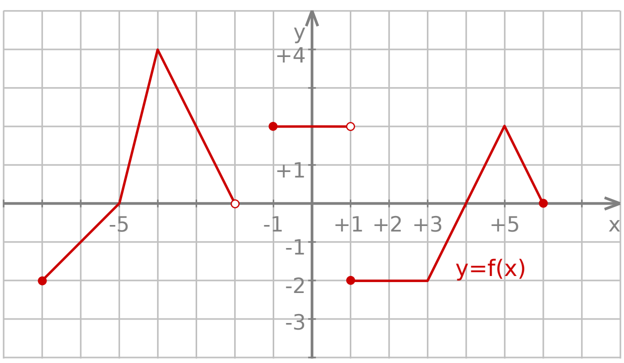
a) dziedzinę funkcji $f$,

b) zbiór wartości funkcji $f$,

c) maksymalne przedziały, w których funkcja $f$ jest malejąca,

d) miejsca zerowe funkcji $f$,

e) zbiór argumentów, dla których funkcja $f$ przyjmuje wartości nieujemne.



## Rozwiązanie

Odczytujemy z wykresu

a)

Odpowiedź: $\langle -7,-2) \cup \langle -1,6\rangle$

b)

Odpowiedź: $\langle -2,4\rangle$

c)

Odpowiedź: $\langle -4,-2)$, $\langle 5,6\rangle$

d)

Odpowiedź: $\{-5,4,6\}$

e)

Odpowiedź: $\langle -5,-2) \cup \langle -1,1) \cup \langle 4,6\rangle$

## Zadanie 33 (4 pkt)

Karol zarabiał miesięcznie 4200 zł, a Jan 3800 zł. Obaj otrzymali w swoich firmach podwyżki. Podwyżka otrzymana przez Jana była o 3 punkty procentowe wyższa niż podwyżka otrzymana przez Karola. Po podwyżce obaj panowie zarabiają łącznie 9074 zł. Ile zarabia każdy z panów po podwyżce? Zapisz wszystkie obliczenia.

## Rozwiązanie

Powiedzmy, że Karol otrzymał $x$% podwyżki. Wtedy Jan otrzymał $(x+3)$% podwyżki i w sumie po podwyżce zarabiają

$$\begin{aligned} 9074 &= \left(4200 + 4200\cdot\frac{x}{100}\right) + \left(3800+3800\cdot\frac{x+3}{100}\right) \\ 1074 &= 42x + 38(x+3) = 80x + 114 \\ 960 &= 80x \quad \Rightarrow \quad x = 12. \end{aligned}$$

W takim razie po podwyżce pan Karol zarabia

$$112\%\cdot 4200 = 112\cdot 42 = 4704 \text{ zł},$$

a pan Jan

$$115\%\cdot 3800 = 115\cdot 38 = 4370 \text{ zł}.$$

Odpowiedź: **Karol: 4704 zł, Jan: 4370 zł.**

## ZADANIE 34 (4 PKT)

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze, które należą do zbioru $A \setminus B$, gdzie $A$ jest zbiorem rozwiązań nierówności

$$(\log_6 18 - \log_6 3) + 2x \geqslant -2 - x,$$

a $B$ jest zbiorem rozwiązań nierówności

$$1 - \frac{x-2}{3} < -2.$$

## ROZWIĄZANIE

Rozwiązujemy pierwszą nierówność

$$\begin{aligned}
&(\log_6 18 - \log_6 3) + 2x \geqslant -2 - x\\
&\log_6 6 + 3x \geqslant -2\\
&1 + 3x \geqslant -2 \quad \iff \quad 3x \geqslant -3 \quad \iff \quad x \geqslant -1.
\end{aligned}$$

Zatem $A = \langle -1, +\infty)$.

Rozwiązujemy teraz drugą nierówność

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{x-2}{3} < -2 \quad / \cdot (-3)\\
&-3 + (x-2) > 6 \quad \iff \quad x > 11.
\end{aligned}$$

Zatem $B = (11, +\infty)$ i

$$A \setminus B = \langle -1, 11 \rangle.$$

Liczby pierwsze w tym przedziale to

$$\{2, 3, 5, 7, 11\}.$$

---

Odpowiedź: $\{2, 3, 5, 7, 11\}$