PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM PODSTAWOWY

6 KWIETNIA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Do 2 kg roztworu soli dolano 0,25 litra wody i stężenie procentowe roztworu zmniejszyło się o 1 punkt procentowy. Jakie jest stężenie procentowe otrzymanego roztworu?

A) 8% B) 5% C) 9% D) 6%

ROZWIĄZANIE

Jeżeli początkowo w roztworze było x kilogramów soli, to wiemy, że

$$1\% = \frac{x}{2}\cdot 100\% - \frac{x}{2,25}\cdot 100\% = $$
$$= \frac{2,25x-2x}{2\cdot 2,25}\cdot 100\% = \frac{0,25x}{4,5}\cdot 100\% = \frac{x}{18}\cdot 100\%$$

Stąd

$$x = \frac{18\%}{100\%} = 0,18.$$

To oznacza, że stężenie otrzymanego roztworu jest równe

$$\frac{0,18}{2,25} = 0,08 = 8\%.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{72}{108}}$ jest równa

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2\sqrt[3]{21}}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{4}{9}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{72}{108}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9} \cdot \frac{72}{108}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Liczba $|\sqrt{7} - 2,65| - |2\pi - 6,28|$ jest równa

A) $-3,63 - \sqrt{7} - 2\pi$ B) $8,93 - \sqrt{7} - 2\pi$ C) $2\pi - \sqrt{7} - 3,63$ D) $3,63 + \sqrt{7} - 2\pi$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ $\sqrt{7} \approx 2,646$ oraz $\pi \approx 3,1415$ mamy

$$\begin{aligned} &|\sqrt{7} - 2,65| - |2\pi - 6,28| = \\ &= (2,65 - \sqrt{7}) - (2\pi - 6,28) = 8,93 - \sqrt{7} - 2\pi. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIA.INFO Podobają Ci się nasze rozwiązania? Pokaż je koleżankom i kolegom ze szkoły!

ZADANIE 4 (1 PKT)

Liczba $\log_{0,25} 2,744 - \log_{\frac{1}{4}} 1,4$ jest równa

A) $2\log_{0,25} 1,4$ B) $\log_{1,4} 1,96$ C) $\log_{0,25} 1,4$ D) 0

ROZWIĄZANIE

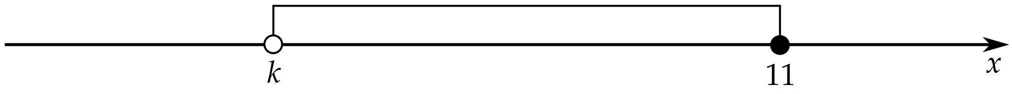
Liczymy

$$\begin{aligned} \log_{0,25} 2,744 - \log_{\frac{1}{4}} 1,4 = \log_{0,25} 2,744 - \log_{\frac{1}{4}} 1,4 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{2,744}{1,4} = \\ = \log_{\frac{1}{4}} 1,96 = \log_{\frac{1}{4}} 1,4^2 = 2\log_{0,25} 1,4. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiony jest przedział $\langle k, 11\rangle$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Suma wszystkich liczb całkowitych należących do tego przedziału jest równa -25.



Stąd wynika, że
A) $k=-14$ B) $k=-13$ C) $k=-21$ D) $k=-12$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Zauważmy, że suma liczb całkowitych w przedziale $\langle -11, 11\rangle$ jest równa 0, więc suma liczb w przedziale $(-14, 11\rangle$ jest równa $-12-13=-25$. Zatem $k=-14$.

Sposób II

Liczby całkowite w danym przedziale są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1=11$, $r=-1$, $S_{11-k}=-25$. Stąd

$$-50 = 2S_{11-k} = (2a_1 + (10-k)r)\cdot(11-k) = (12+k)(11-k).$$

Teraz albo zgadujemy rozwiązanie dodatnie: $k=-14$ albo rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\begin{aligned}
-50 &= -k^2 - k + 132 \\
k^2 + k - 182 &= 0 \\
\Delta = 1 + 728 &= 27^2 \\
k = \frac{-1-27}{2} = -14 \quad &\text{lub} \quad k = \frac{-1+27}{2} > 11.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=0$. Liczby x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji f. Zatem
A) $x_1+x_2=-2$ B) $x_1+x_2=-1$ C) $x_1+x_2=2$ D) $x_1+x_2=1$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Rozwiązujemy dane równanie.

$$\begin{aligned}
&\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=0\\
&\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4}\\
&x+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2} \quad \vee \quad x+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\\
&x=-\frac{8}{2}=-4 \quad \vee \quad x=\frac{6}{2}=3.
\end{aligned}$$

Stąd

$$x_1+x_2=-4+3=-1.$$

Sposób II

Rozwiązujemy dane równanie.

$$\begin{aligned}
&x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{49}{4}=0\\
&x^2+x-12=0\\
&\Delta=1+48=49\\
&x=\frac{-1-7}{2}=-4 \quad \vee \quad x=\frac{-1+7}{2}=3.
\end{aligned}$$

Stąd

$$x_1+x_2=-4+3=-1.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 7 (1 PKT)

W tabeli podano dane dotyczące wyników z pracy klasowej z matematyki uzyskanych w pewnej klasie.

Liczba uczniów	2	4	7	2	3	2
Ocena	1	2	3	4	5	6

Różnica średniej arytmetycznej ocen i mediany wynosi

A) 0,3 B) 3,3 C) $-0,2$ D) 3

ROZWIĄZANIE

Łącznie wystawionych ocen jest

$$2+4+7+2+3+2=20.$$

Liczymy średnią

$$\frac{2\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+2\cdot 6}{20}=$$
$$=\frac{2+8+21+8+15+12}{20}=\frac{66}{20}=3,3.$$

Ponieważ jest 20 wszystkich ocen, mediana jest równa średniej arytmetycznej ocen dziesiątej i jedenastej jeżeli są one wypisane w kolejności rosnącej. Ponieważ $2+4=6$ i $2+4+7=13$, więc dziesiątą i jedenastą oceną jest 3. Interesująca nas różnica jest więc równa

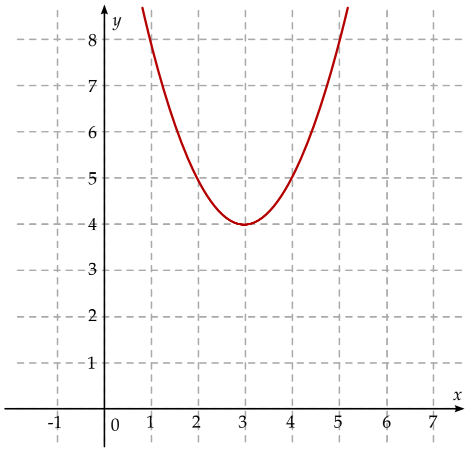
$$3,3-3=0,3.$$

Odpowiedź: **A**

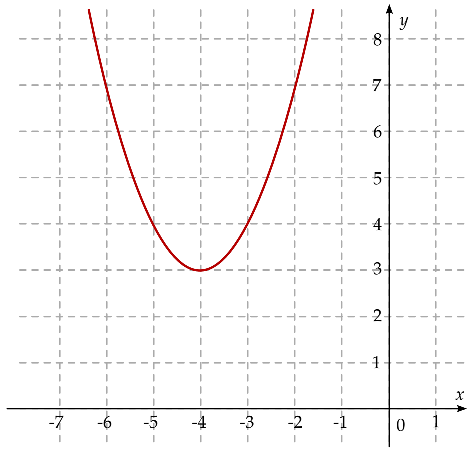
ZADANIE 8 (1 PKT)

Na jednym z rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x)=x^2+6x+13$. Wskaż ten rysunek.

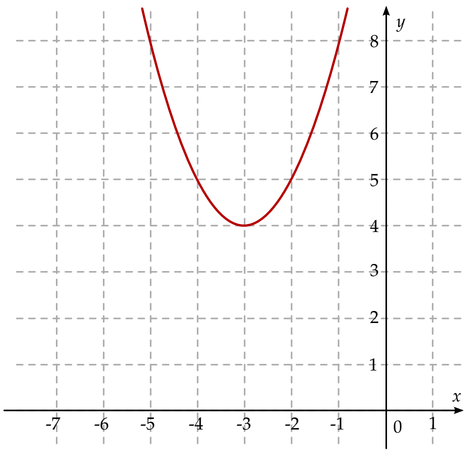
A)



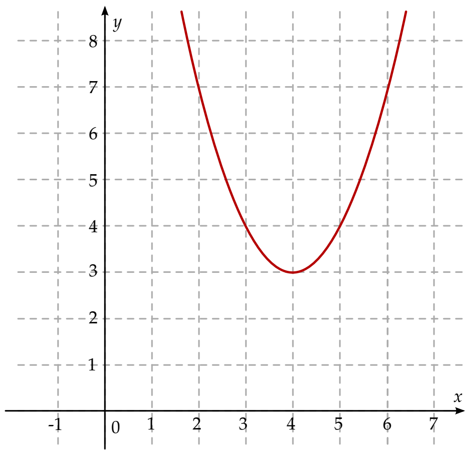
B)



C)



D)



ROZWIĄZANIE

Wykresem funkcji

$$f(x) = x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4$$

jest parabola o ramionach skierowanych w górę (bo współczynnik przy x^2 jest dodatni) i wierzchołku w punkcie $(-3,4)$. Te własności ma tylko funkcja z obrazka C.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Liczba $\frac{(13,5)^{60}-8\cdot(1,125)^{20}}{(0,75)^{20}\cdot(2,25)^{10}}$ jest równa

A) $3^{140} - 2^3$ B) $3^{180} - 8$ C) $3^9 - 2^8$ D) $3 - 2^{20}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że

$$13,5 = \frac{27}{2}$$
$$1,125 = 1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$
$$0,75 = \frac{3}{4}$$
$$2,25 = 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Mamy zatem

$$\frac{(13,5)^{60} - 8\cdot(1,125)^{20}}{(0,75)^{20}\cdot(2,25)^{10}} = \frac{\left(\frac{27}{2}\right)^{60} - 8\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{20}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{10}} =$$
$$= \frac{\frac{3^{180}}{2^{60}} - 8\cdot\frac{3^{40}}{2^{60}}}{\frac{3^{20}}{2^{40}}\cdot\frac{3^{20}}{2^{20}}} = \frac{3^{180} - 8\cdot 3^{40}}{3^{40}} = 3^{140} - 2^3.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Wyrażenie $\left(-1 - \frac{1}{1-n}\right)^n \cdot \left(-\frac{n-1}{n} + 1\right)^n$ jest równe wyrażeniu

A) $\frac{(n-2)^n}{(n-1)^n n^n}$ B) $\frac{(n-2)^n}{(n-1)^n}$ C) $\frac{1}{(n-1)^n}$ D) $\frac{(2-n)^n}{(n-1)^n n^n}$

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy dane wyrażenie

$$\left(-1-\frac{1}{1-n}\right)^n\cdot\left(-\frac{n-1}{n}+1\right)^n=(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{1-n}\right)^n\cdot(-1)^n\cdot\left(\frac{n-1}{n}-1\right)^n=$$
$$=\left(\frac{1-n+1}{1-n}\right)^n\cdot\left(\frac{n-1-n}{n}\right)^n=$$
$$=\frac{(2-n)^n}{(1-n)^n}\cdot\frac{(-1)^n}{n^n}=\frac{(2-n)^n}{(n-1)^n n^n}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Liczba -2 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=ax+b$, a punkt $M=(2,-3)$ należy do wykresu tej funkcji. Współczynnik a we wzorze tej funkcji jest równy

A) $-\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) -2

ROZWIĄZANIE

Szukamy funkcji w postaci $y=ax+b$. Podstawiamy współrzędne danych punktów i mamy

$$\begin{cases}-2a+b=0\\ 2a+b=-3\end{cases}$$

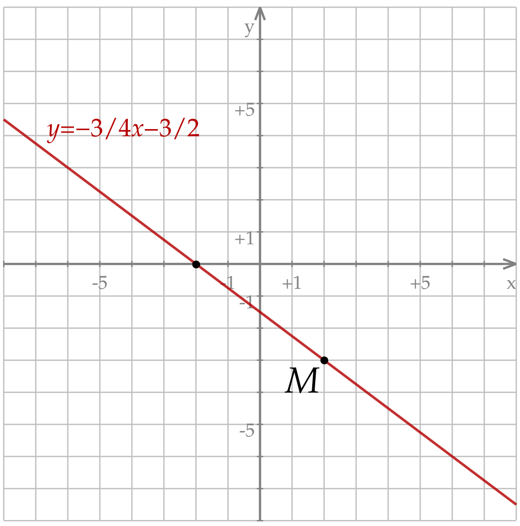
Dodajemy równania stronami i mamy

$$2b=-3\quad\Rightarrow\quad b=-\frac{3}{2}.$$

Stąd

$$2a=b=-\frac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad a=-\frac{3}{4}.$$

Na koniec wykres funkcji f dla ciekawskich.



Odpowiedź: **A**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Punkt $(1,2)$ jest wierzchołkiem paraboli o równaniu

A) $y = 8x - 4x^2$ B) $y = 12x - 6x^2$ C) $y = 4x - 2x^2$ D) $y = 2x - 4x^2$

ROZWIĄZANIE

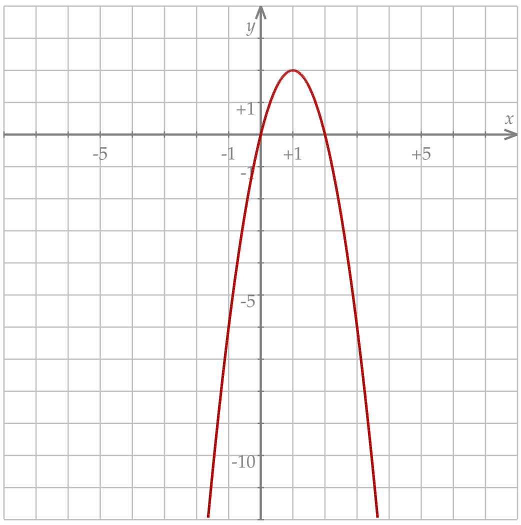
Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 8x - 4x^2 &= 4x(2-x) \\ 12x - 6x^2 &= 6x(2-x) \\ 4x - 2x^2 &= 2x(2-x) \\ 2x - 4x^2 &= 4x\left(\frac{1}{2} - x\right). \end{aligned}$$

Ponieważ wierzchołek paraboli znajduje się dokładnie w środku między pierwiastkami, to eliminuje to odpowiedź $y = 2x - 4x^2$. Pierwsza współrzędna wierzchołka dla pozostałych parabol jest równa $x_w = \frac{0+2}{2} = 1$. Teraz wystarczy sprawdzić, dla którego ze wzorów spełniony jest warunek

$$f(1) = f(x_w) = y_w = 2.$$

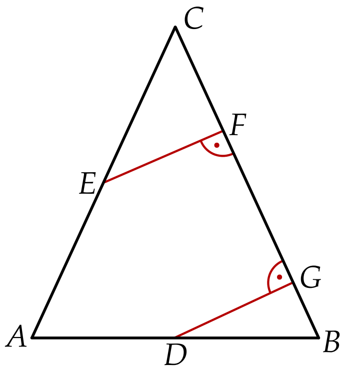
Gdy to zrobimy, okaże się, że warunek ten spełnia wzór $y = 4x - 2x^2$.



Odpowiedź: **C**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Punkty D i E są środkami odpowiednio podstawy AB i ramienia AC trójkąta równoramiennego ABC. Punkty F i G leżą na ramieniu BC tak, że odcinki DG i EF są prostopadłe do prostej BC (zobacz rysunek).



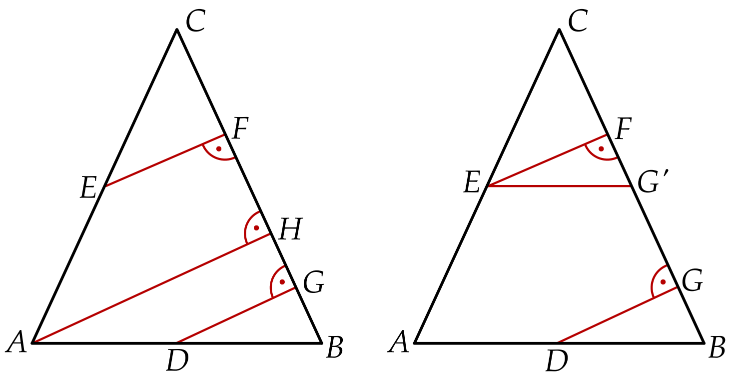
Pole trójkąta BGD jest równe 2, a pole trójkąta CFE jest równe 4. Zatem pole trójkąta ABC jest równe

A) 24 B) 8 C) 12 D) 16

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Dorysujmy wysokość AH trójkąta ABC.



Zauważmy teraz, że trójkąt CFE jest podobny do trójkąta CHA w skali $\frac{CE}{CA} = \frac{1}{2}$. Podobnie trójkąt BGD jest podobny do trójkąta BHA w skali $\frac{BD}{BA} = \frac{1}{2}$. Mamy stąd

$$P_{ABC} = P_{CHA} + P_{BHA} = 4P_{CFE} + 4P_{BGD} = 16 + 8 = 24.$$

Sposób II

Niech G' będzie takim punktem odcinka BC, że $EG' \parallel AB$. Wtedy trójkąty BGD i $G'FE$ są podobne oraz $EG' = \frac{1}{2}AB = DB$. Trójkąty te są więc przystające. Stąd

$$P_{CEG'} = P_{CFE} + P_{G'FE} = P_{CFE} + P_{BGD} = 4 + 2 = 6.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że trójkąt CEG' jest 2 razy mniejszy od trójkąta ABC, więc

$$P_{ABC} = 4P_{CEG'} = 4 \cdot 6 = 24.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{2(3-n)}{5}$ dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$. Różnica r tego ciągu jest równa

A) $r = -\frac{2}{5}$ B) $r = \frac{1}{5}$ C) $r = -\frac{1}{5}$ D) $r = \frac{2}{5}$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ

$$a_1 = \frac{4}{5}$$
$$a_2 = \frac{2}{5}$$

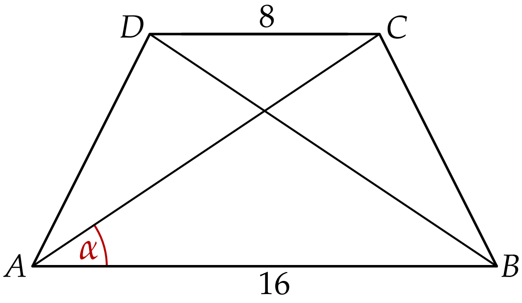
to

$$r = a_2 - a_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 15 (1 PKT)

Podstawy trapezu równoramiennego $ABCD$ mają długości 8 i 16, a przekątne tego trapezu mają długość 15 (zobacz rysunek).

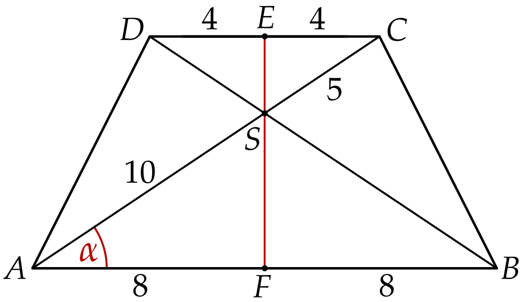


Wtedy miara α kąta ostrego BAC tego trójkąta spełnia warunek

A) $36^\circ < \alpha < 37^\circ$ B) $53^\circ < \alpha < 54^\circ$ C) $54^\circ < \alpha < 55^\circ$ D) $35^\circ < \alpha < 36^\circ$

ROZWIĄZANIE

Niech S będzie punktem wspólnym przekątnych trapezu, a E i F jego rzutami na podstawy.



Trójkąty ABS i DSC mają równe kąty, więc są podobne. Ponadto znamy ich skalę podobieństwa: $k = \frac{AB}{CD} = 2$. W takim razie

$$AS = 2SC = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10.$$

Patrzymy teraz na trójkąt prostokątny AFS.

$$\cos\alpha = \cos\measuredangle BAC = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Odczytujemy teraz z tablic, że $36^\circ < \alpha < 37^\circ$.

Odpowiedź: **A**

Zadanie 16 (1 pkt)

Dla pewnej liczby x ciąg $(12, x+3, x)$ jest geometryczny. Liczba x jest równa

A) -6 B) 9 C) 6 D) 3

Rozwiązanie

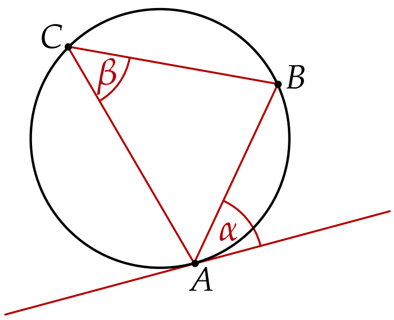
W ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (z wyjątkiem pierwszego) jest iloczynem wyrazów sąsiednich. Mamy więc

$$\begin{aligned}
&a_1a_3 = a_2^2 \\
&12 \cdot x = (x+3)^2 \\
&12x = x^2 + 6x + 9 \\
&0 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: **D**

Zadanie 17 (1 pkt)

Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A (zobacz rysunek obok).



Jeżeli $2\alpha + 3\beta = 275^\circ$, to

A) $\alpha = 55^\circ$ B) $\alpha = 45^\circ$ C) $\alpha = 50^\circ$ D) $\alpha = 40^\circ$

ROZWIĄZANIE

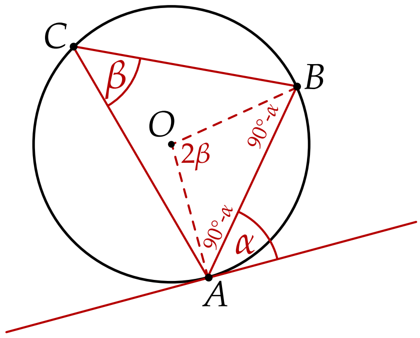
Sposób I

Na mocy twierdzenia o stycznej i siecznej $\alpha = \beta$. W takim razie

$$275^\circ = 2\alpha + 3\beta = 5\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 55^\circ.$$

Sposób II

Dorysujmy promienie OA i OB.



Trójkąt AOB jest równoramienny, więc

$$\measuredangle OBA = \measuredangle OAB = 90^\circ - \alpha$$

Z drugiej strony, na mocy twierdzenia o kątach: wpisanym i środkowym, mamy

$$\measuredangle AOB = 2\beta.$$

Zatem

$$180^\circ = 2\beta + (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ + 2(\beta - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Stąd

$$275^\circ = 2\alpha + 3\beta = 5\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 55^\circ.$$

Odpowiedź: **A**

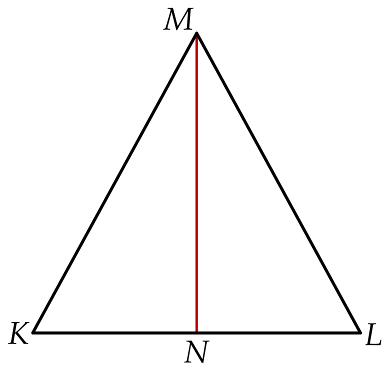
ZADANIE 18 (1 PKT)

Punkt $K = (-3, 1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego KLM, w którym $|KM| = |LM|$. Odcinek MN jest wysokością trójkąta i $N = (-1, -5)$. Zatem

A) $L = (1, -11)$ B) $L = (-2, -2)$ C) $L = (-5, -9)$ D) $L = (-4, -4)$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli narysujemy trójkąt równoramienny to widać,



że spodek wysokości MN to dokładnie środek podstawy KL. Zatem

$$N = \frac{K+L}{2} \quad \Rightarrow \quad 2N = K+L \quad \Rightarrow \quad L = 2N-K = (-2,-10)-(-3,1) = (1,-11).$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 19 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $\sin 32^\circ \cos 58^\circ + \cos 32^\circ \sin 58^\circ$ jest równa

A) -1 B) 1 C) 0 D) 2

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Skorzystamy z następujących wzorów

$$\sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Liczymy

$$\sin 32^\circ \cos 58^\circ + \cos 32^\circ \sin 58^\circ =$$
$$= \sin 32^\circ \cos(90^\circ-32^\circ) + \cos 32^\circ \sin(90^\circ-32^\circ) =$$
$$= \sin^2 32^\circ + \cos^2 32^\circ = 1.$$

Sposób II

Tym razem skorzystamy ze wzoru na sinus sumy.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x.$$

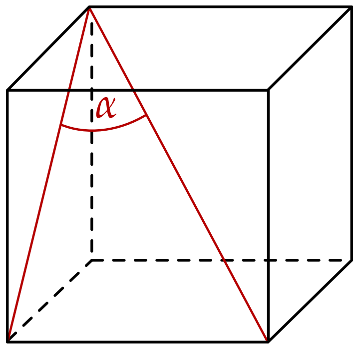
Liczymy

$$\begin{aligned} &\sin 32^\circ \cos 58^\circ + \cos 32^\circ \sin 58^\circ = \\ &= \sin(32^\circ + 58^\circ) = \sin 90^\circ = 1. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 20 (1 PKT)

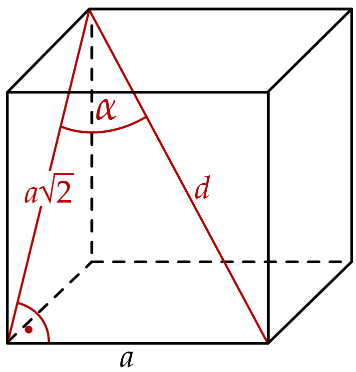
Jeżeli α oznacza miarę kąta między przekątną sześcianu a przekątną ściany bocznej tego sześcianu (zobacz rysunek), to



A) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy długość krawędzi sześcianu przez a.



Długość przekątnej sześcianu jest wtedy równa

$$d = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

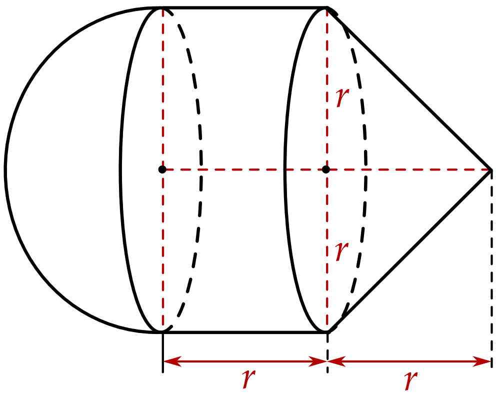
Stąd

$$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 21 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono bryłę zbudowaną z walca, stożka i półkuli. Wysokość walca jest równa r i jest taka sama jak wysokość stożka, oraz taka sama jak promień półkuli, promień podstawy walca i promień podstawy stożka.



Objętość tej bryły jest równa

A) $\frac{5}{3}\pi r^3$ B) $\frac{7}{3}\pi r^3$ C) $3\pi r^3$ D) $2\pi r^3$

ROZWIĄZANIE

Objętość walca jest równa

$$V_1 = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3.$$

Objętość stożka jest trzy trzy mniejsza.

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3.$$

Objętość połowy kuli jest równa

$$V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

W sumie daje to

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 = 2\pi r^3.$$

Odpowiedź: **D**

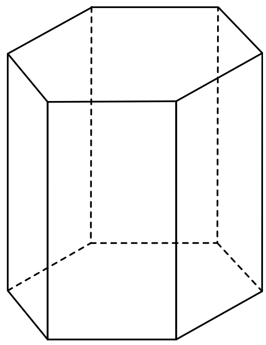
ZADANIE 22 (1 PKT)

Gdy dodamy liczbę wszystkich krawędzi pewnego graniastosłupa do liczby wszystkich jego wierzchołków, to otrzymamy w wyniku 25. Liczba wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa

A) 9 B) 5 C) 6 D) 15

ROZWIĄZANIE

Jeżeli w podstawie graniastosłupa jest n–kąt to graniastosłup ma $3n$ krawędzi i $2n$ wierzchołków.



Mamy więc równanie

$$\begin{aligned} 25 &= 3n + 2n = 5n \quad / : 5 \\ 5 &= n. \end{aligned}$$

To oznacza, że graniastosłup ma $3n = 15$ krawędzi.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 23 (1 PKT)

Liczba wszystkich dodatnich liczb pięciocyfrowych, które są podzielne przez 3, i których cyfry należą do zbioru $\{0, 1, 2\}$, jest równa

A) 81 B) 54 C) 162 D) 243

ROZWIĄZANIE

Pierwszą cyfrę a liczby opisanej w treści zadania możemy wybrać na 2 sposoby (nie może być zerem), potem każdą z kolejnych 3 cyfr b, c, d wybieramy na 3 sposoby.

Zastanówmy się teraz nad ostatnią cyfrą e – musimy ją dobrać tak, aby suma

$$a + b + c + d + e$$

dzieliła się przez 3. To oznacza, że przy wyborze e nie mamy żadnego wyboru: wybieramy 0, gdy $a + b + c + d$ dzieli się przez 3, wybieramy 2 jeżeli $a + b + c + d$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, i wreszcie wybieramy 1 jeżeli $a + b + c + d$ daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3.

W sumie są więc

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$$

takie liczby.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 24 (1 PKT)

Pewnego dnia w klasie Ib było dwa razy więcej uczniów, niż w klasie Ia. Tego samego dnia dziewczynki stanowiły 60% uczniów klasy Ia, oraz 40% uczniów klasy Ib. Jeżeli tego dnia wylosujemy jednego ucznia z klas Ia i Ib, to prawdopodobieństwo wylosowania chłopca jest równe

A) $\frac{8}{15}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{13}{30}$ D) $\frac{17}{30}$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli w klasie Ia było n uczniów, a w klasie Ib $2n$ uczniów, to prawdopodobieństwo wylosowania chłopca jest równe

$$\frac{0,4n + 0,6 \cdot 2n}{n + 2n} = \frac{0,4 + 1,2}{3} = \frac{1,6}{3} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}.$$

Odpowiedź: **A**

Zadania otwarte

ZADANIE 25 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $3x^2 + 2x \leqslant 5$.

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$3x^2 + 2x - 5 \leqslant 0$$
$$\Delta = 2^2 + 4 \cdot 15 = 64 = 8^2$$
$$x = \frac{-2-8}{6} = -\frac{5}{3} \quad \text{lub} \quad x = \frac{-2+8}{6} = 1$$
$$x \in \left\langle -\frac{5}{3}, 1 \right\rangle.$$

Odpowiedź: $x \in \left\langle -\frac{5}{3}, 1 \right\rangle$

ZADANIE 26 (2 PKT)

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych nieparzystych liczb naturalnych przez 16 jest równa 4.

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez n dowolną liczbę naturalną. Wówczas czterema kolejnymi liczbami naturalnymi nieparzystymi będą

$$2n+1,\ 2n+3,\ 2n+5,\ 2n+7.$$

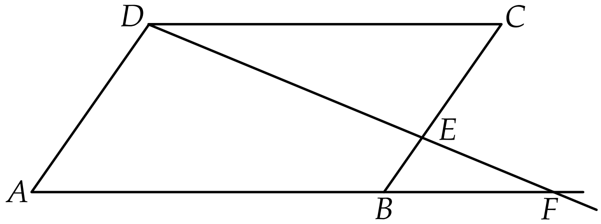
Obliczmy ile wynosi suma kwadratów tych liczb

$$\begin{aligned}&(2n+1)^2+(2n+3)^2+(2n+5)^2+(2n+7)^2=\\&=4n^2+4n+1+4n^2+12n+9+4n^2+20n+25+4n^2+28n+49=\\&=16n^2+64n+84=16(n^2+4n+5)+4.\end{aligned}$$

Widać teraz, że liczba ta daje resztę 4 przy dzieleniu przez 16.

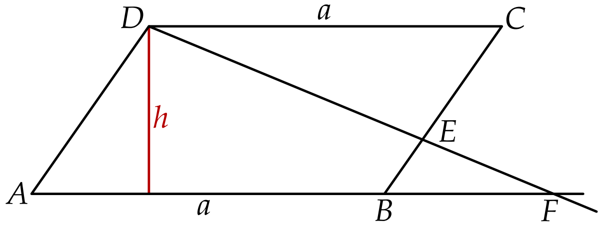
ZADANIE 27 (2 PKT)

W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest takim punktem boku BC, że $|BE|=\frac{1}{3}|BC|$. Z wierzchołka D poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie E. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że pole trójkąta BFE stanowi $\frac{1}{12}$ pola równoległoboku $ABCD$.



ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez h wysokość równoległoboku opuszczoną na bok AB oraz niech $AB=CD=a$.



Zauważmy, że trójkąty BFE oraz AFD są podobne (bo mają równe kąty) oraz znamy skalę k ich podobieństwa

$$k=\frac{BE}{AD}=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}.$$

W szczególności $BF=\frac{1}{3}AF$, czyli $BF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$ oraz

$$P_{BFE}=\frac{1}{9}P_{AFD}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot AF\cdot h=\frac{1}{18}\cdot\frac{3}{2}a\cdot h=\frac{1}{12}ah=\frac{1}{12}P_{ABCD}.$$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Uzasadnij, że rozwinięcie dziesiętne liczby 16^{180} ma więcej niż 216 cyfr.

ROZWIĄZANIE

Musimy udowodnić, że

$$16^{180} \geqslant 10^{216}$$

(bo 10^{216} to najmniejsza liczba całkowita o 217 cyfrach).

Sposób I

Zauważmy, że

$$16^{180} = \left(2^4\right)^{180} = 2^{720} = \left(2^{10}\right)^{72} = 1024^{72} > \left(10^3\right)^{72} = 10^{216}.$$

Sposób II

Przekształcamy nierówność

$$\begin{aligned} &\left(2^4\right)^{180} > 2^{216} \cdot 5^{216} \qquad / : 2^{216} \\ &2^{504} > 5^{216} \\ &\left(2^7\right)^{72} > \left(5^3\right)^{72} \\ &128^{72} > 125^{72}. \end{aligned}$$

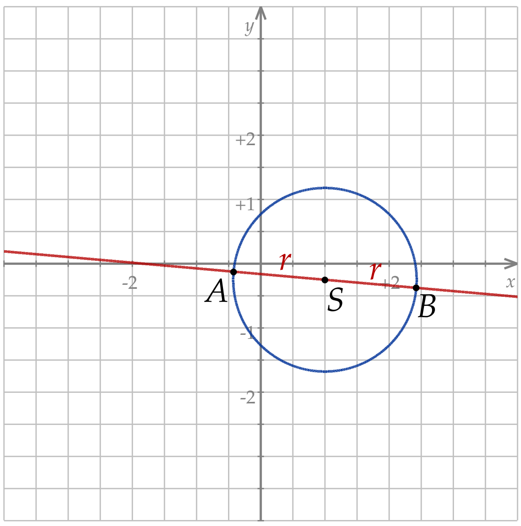
Teraz jest jasne, że nierówność rzeczywiście jest spełniona.

ZADANIE 29 (2 PKT)

Prosta l przecina okrąg o środku S w punktach $A = \left(1-\sqrt{2}, -\frac{1}{8}\right)$ i $B = \left(1+\sqrt{2}, -\frac{3}{8}\right)$. Punkt S leży na prostej l. Oblicz pole koła ograniczonego tym okręgiem.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Z podanych informacji wiemy, że odcinek AB jest średnicą danego okręgu, więc jego promień jest równy

$$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{8+\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{129}{16}} = \frac{\sqrt{129}}{8}.$$

Pole koła jest więc równe

$$\pi r^2 = \frac{129\pi}{64}.$$

Odpowiedź: $\frac{129\pi}{64}$

ZADANIE 30 (4 PKT)

Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x + b$ (gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$) przesunięto o 4 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół. W rezultacie otrzymano wykres funkcji $g(x)$, który przecina oś Ox w punkcie $(4,0)$ oraz przechodzi przez punkt $(8,3)$. Wyznacz a i b oraz rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant 5$.

ROZWIĄZANIE

Przesuwając wykres $y = f(x)$ o 4 jednostki w prawo otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x-4)$. Następnie przesuwamy ten wykres o dwie jednostki w dół i otrzymujemy wykres $y = f(x-4) - 2$. Zatem

$$g(x) = f(x-4) - 2 = a^{x-4} + b - 2$$

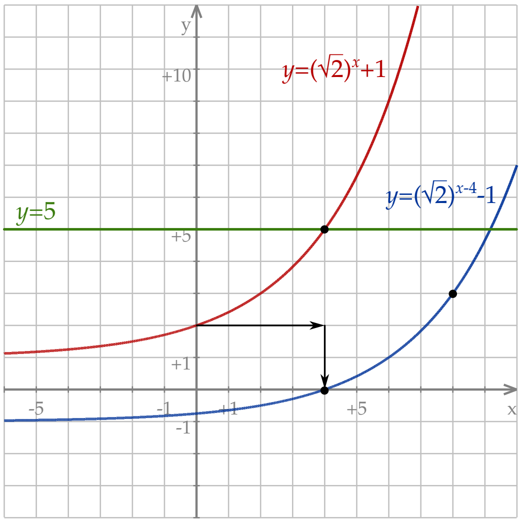
oraz

$$\begin{cases} 0 = g(4) = a^0 + b - 2 = b - 1 \\ 3 = g(8) = a^4 + b - 2. \end{cases}$$

Z pierwszego równania $b = 1$, a z drugiego

$$a^4 = 3 - (b-2) = 4 = 2^2 = (\sqrt{2})^4.$$

Zatem $a = \sqrt{2}$ (bo z założenia $a > 0$) i $f(x) = (\sqrt{2})^x + 1$. Szkicujemy teraz wykres tej funkcji wykładniczej oraz prostą $y = 5$.



Zauważmy, że

$$f(4) = (\sqrt{2})^4 + 1 = 4 + 1 = 5,$$

więc wykres $y = f(x)$ przecina prostą $y = 5$ w punkcie $(4, 5)$. W takim razie rozwiązaniem nierówności $f(x) \leqslant 5$ jest przedział

$$(-\infty, 4\rangle.$$

Odpowiedź: $a = \sqrt{2}, b = 1, (-\infty, 4\rangle$.

ZADANIE 31 (4 PKT)

Ze zbioru $A = (-23, 23)$ losujemy dwucyfrową liczbę całkowitą a, natomiast ze zbioru $B = (-5, 5)$ losujemy liczbę całkowitą b. Te liczby są współczynnikami funkcji $f(x) = (ax + b)x$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wykres otrzymanej funkcji f ma co najmniej dwa punkty wspólne z prostą $y = 1$.

ROZWIĄZANIE

Liczby całkowite w zbiorach A i B to odpowiednio

$$\begin{aligned} &-22, -21, -20, \ldots, -11, -10, -9, \ldots, 9, 10, 11, \ldots, 20, 21, 22 \\ &-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

W takim razie parę liczb całkowitych (a, b) taką, że $a \in A$, $b \in B$ i a dwucyfrowa możemy wybrać na

$$26 \cdot 9$$

sposobów. Pozostało teraz ustalić dla ilu par (a, b) funkcja

$$f(x) - 1 = ax^2 + bx - 1$$

ma co najmniej dwa miejsca zerowe. Aby tak było musi być oczywiście $a \neq 0$ oraz

$$0 < \Delta = b^2 + 4a.$$

Zauważmy, że jeżeli $a < 0$, to automatycznie $a \leqslant -10$, czyli $4a \leqslant -40$. Wtedy jednak nie uda nam się dobrać b, bo $b^2 \leqslant 16$. Odwrotnie, jeżeli $a > 0$, to automatycznie

$$b^2 + 4a > 0.$$

W takim razie jest

$$13 \cdot 9$$

par, dla których parabola $f(x) = (ax+b)x$ ma co najmniej dwa punkty wspólne z prostą $y = -1$ i interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{13 \cdot 9}{26 \cdot 9} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

ZADANIE 32 (4 PKT)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, w którym suma pierwszych 60 wyrazów jest równa 108 750, a suma wyrazów o numerach od 31 do 50 (włącznie) jest równa 34 850. Wyznacz największy wyraz tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Mamy zatem

$$\begin{cases} 108750 = S_{60} = \frac{2a_1+59r}{2} \cdot 60 = 30(2a_1 + 59r) \quad / : 30 \\ 34850 = S_{50} - S_{30} = \frac{2a_1+49r}{2} \cdot 50 - \frac{2a_1+29r}{2} \cdot 30 \quad / : 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3625 = 2a_1 + 59r \\ 6970 = 10a_1 + 245r - (6a_1 + 87r) = 4a_1 + 158r \quad / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3625 = 2a_1 + 59r \\ 3485 = 2a_1 + 79r. \end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze i mamy

$$20r = -140 \quad \Rightarrow \quad r = -7.$$

Z drugiego równania

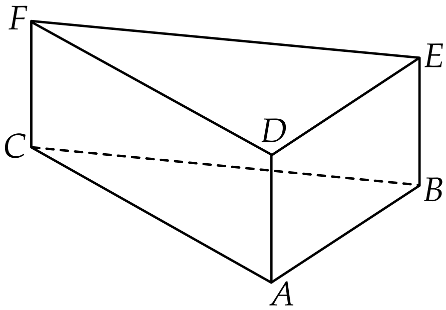
$$2a_1 = 3485 - 79r = 4038 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2019.$$

Ponieważ ciąg a_n jest malejący (bo $r < 0$), więc jego największym wyrazem jest $a_1 = 2019$.

Odpowiedź: $a_1 = 2019$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Objętość tego graniastosłupa jest równa 324. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy graniastosłupa, a przez b długość jego krawędzi bocznej. W takim razie pole podstawy jest równe

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

a pole jednej ściany bocznej jest równe

$$\frac{1}{3}P_b = ab = P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Korzystamy teraz z podanej informacji o objętości graniastosłupa

$$324 = P_p \cdot b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{16} \quad / \cdot \frac{16}{3}$$
$$a^3 = 324 \cdot \frac{16}{3} = 108 \cdot 16 = 27 \cdot 64.$$

Zatem $a = 3 \cdot 4 = 12$ i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe

$$P_c = 2P_p + P_b = 2P_p + 3P_p = 5P_p = 5 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5 \cdot \frac{144\sqrt{3}}{4} = 180\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: $P_c = 180\sqrt{3}$