PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM PODSTAWOWY

16 MARCA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $3\log_4 3 - 2\log_4 12 - \frac{1}{2}\log_4 9$ jest równa

A) 4 B) 2 C) -4 D) -2

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} 3\log_4 3 - 2\log_4 12 - \frac{1}{2}\log_4 9 &= \log_4 3^3 - \log_4 12^2 - \frac{1}{2}\log_4 3^2 = \\ &= \log_4 \frac{27}{144} - \log_4 3 = \log_4 \frac{3}{16} - \log_4 3 = \\ &= \log_4 \left(\frac{3}{16} : 3\right) = \log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba $\frac{1}{4^{2019}} \cdot (0,005)^{2019}$ jest równa

A) $(0,001)^{2019}$ B) $\frac{1}{2000^{2019}}$ C) $(0,00125)^{2019}$ D) $(0,0125)^{2019}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^{2019}} \cdot (0,005)^{2019} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2019} \cdot (0,005)^{2019} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 0,005\right)^{2019} = (0,00125)^{2019}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Liczbę $-\frac{79}{17}$ zaokrąglamy do najbliższej liczby całkowitej. Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy

A) $\frac{6}{17}$ B) $\frac{11}{17}$ C) $-\frac{11}{17}$ D) $-\frac{6}{17}$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ $-\frac{79}{17} = -4\frac{11}{17}$, najbliższą liczbą całkowitą jest -5 (można też sprawdzić na kalkulatorze, że $-\frac{79}{17} \approx -4,65$). Błąd bezwzględny tego przybliżenia to

$$\left|-5-\left(-4\frac{11}{17}\right)\right| = \left|-\frac{6}{17}\right| = \frac{6}{17}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Cenę laptopa podwyższono o 12%, a następnie o 19%. W wyniku tych podwyżek cena laptopa wzrosła o 832 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przed podwyżkami ten laptop kosztował

A) 3332 zł B) 2500 zł C) 3000 zł D) 2375 zł

ROZWIĄZANIE

Niech x oznacza cenę laptopa przed podwyżkami.

Sposób I

Po pierwszej podwyżce laptop kosztował

$$112\%x = \frac{112}{100}x = \frac{28}{25}x.$$

Po drugiej podwyżce laptop kosztował

$$119\% \cdot \frac{28}{25}x = \frac{119}{100} \cdot \frac{28}{25} = \frac{119}{25} \cdot \frac{7}{25} = \frac{833}{625}x.$$

W takim razie cenę podwyższono o

$$\frac{833}{625}x - x = \frac{208}{625}x.$$

Stąd

$$\frac{208}{625}x = 832 \quad / \cdot \frac{625}{208}$$
$$x = 832 \cdot \frac{625}{208} = 4 \cdot 625 = 2500.$$

Sposób II

Po podwyżkach laptop kosztował

$$1,19 \cdot 1,12x = 1,3328x$$

Zatem

$$832 = 1,3328x - x = 0,3328x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{832}{0,3328} = 2500.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 5 (1 PKT)

Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{4} + \log_4 3 < 0$ jest

A) -5 B) -4 C) -81 D) -3

ROZWIĄZANIE

Przekształćmy daną nierówność.

$$\begin{aligned} &\frac{x}{4} + \log_4 3 < 0 \quad / \cdot 4 \\ &x < -4\log_4 3 \\ &x < -\log_4 3^4 = -\log_4 81. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że $\log_4 64 = 3$ i $\log_4 256 = 4$, więc $\log_4 81 \in (3,4)$. Zatem największa liczba całkowita spełniająca powyższą nierówność to -4

Odpowiedź: B

ZADANIE 6 (1 PKT)

Równość $\left(a+3\sqrt{2}\right)^2 = 22+12\sqrt{2}$ jest prawdziwa dla

A) $a = \sqrt{22}$ B) $a = 2$ C) $a = 1$ D) $a = \sqrt{22}+1$

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

$$22+12\sqrt{2} = \left(a+3\sqrt{2}\right)^2 = a^2+6a\sqrt{2}+18 = (a^2+18)+6a\sqrt{2}.$$

To oznacza, że równość ta jest spełniona np. dla $a = 2$.

Odpowiedź: B

ZADANIE 7 (1 PKT)

Liczbę $\frac{3072}{17\cdot 20^{10}}$ można zapisać w postaci nieskończonego ułamka dziesiętnego okresowego. piętnastą cyfrą po przecinku jego rozwinięcia jest

A) 6 B) 4 C) 7 D) 0

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\frac{3072}{17\cdot 20^{10}} = \frac{3\cdot 1024}{17\cdot 20^{10}} = \frac{3\cdot 2^{10}}{17\cdot 20^{10}} = \frac{3}{17}\cdot \frac{1}{10^{10}}.$$

Liczba ta powstaje z liczby $\frac{3}{17}$ przez przesunięcie przecinka o 10 miejsc w lewo. Zatem piętnasta cyfra po przecinku tej liczby jest taka sama jak piąta cyfra po przecinku liczby

$$\frac{3}{17} \approx 0,1764705,$$

czyli jest równa 7.

Odpowiedź: C

ZADANIE 8 (1 PKT)

Rozwiązaniem równania $\frac{\sqrt[3]{x}+5}{2-\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{5}$ jest liczba

A) $-\sqrt[3]{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) -27 D) -3

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt[3]{x}+5}{2-\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{5} \quad / \cdot 5(2-\sqrt[3]{x})\\
&5(\sqrt[3]{x}+5) = 2(2-\sqrt[3]{x})\\
&5\sqrt[3]{3}+25 = 4-2\sqrt[3]{x}\\
&7\sqrt[3]{x} = -21 \quad \iff \quad \sqrt[3]{x} = -3 \quad \iff \quad x = (-3)^3 = -27.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 9 (1 PKT)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2+6x-3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

A) $(6,-3)$ B) $(-3,-12)$ C) $(6,69)$ D) $(-6,-3)$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Liczymy współrzędne wierzchołka

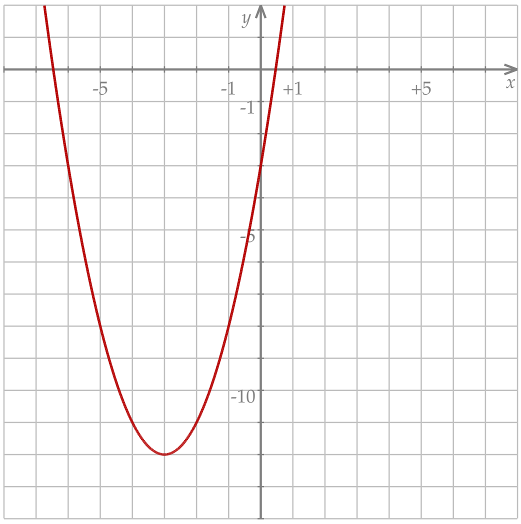
$$(x_w, y_w) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{6}{2}, -\frac{48}{4}\right) = (-3, -12).$$

Sposób II

Zauważmy, że

$$x^2 + 6x - 3 = (x+3)^2 - 12.$$

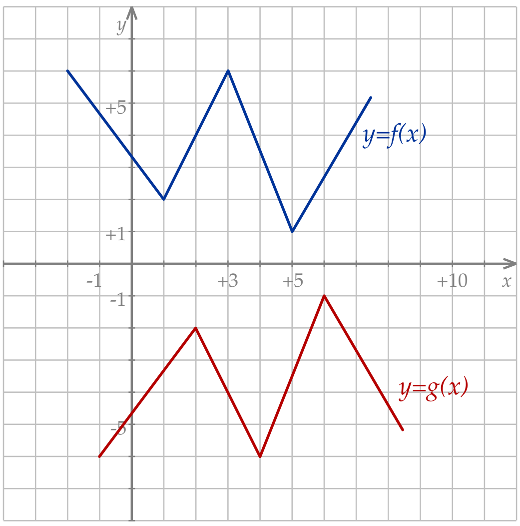
Wykresem jest więc parabola o wierzchołku w punkcie $(-3, -12)$.



Odpowiedź: B

ZADANIE 10 (1 PKT)

Rysunek przedstawia wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$.



Prawdziwa jest równość:

A) $g(x) = -f(x+1)$ B) $g(x) = -f(x) + 1$

C) $g(x) = -f(x) - 1$ D) $g(x) = -f(x-1)$

ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji g powstaje z wykresu funkcji f przez odbicie względem osi Ox, a potem przesunięcie o jedną jednostkę w prawo. Pierwsza operacja (odbicie) zmienia wzór funkcji na $-f(x)$, druga (przesunięcie w prawo) na $-f(x-1)$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Funkcja liniowa $f(x) = (4-m^2)x + m + 2$ nie ma miejsc zerowych dla

A) $m = -2$ B) $m = 0$ C) $m = 2$ D) $m = 4$

ROZWIĄZANIE

Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Jeżeli prosta ta ma nie przecinać osi Ox to musi być pozioma, czyli we wzorze funkcji nie może występować x. To oznacza, że

$$4 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 2.$$

Ponadto, dla $m = -2$ dana funkcja to $f(x) = 0$, która ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Dla $m = 2$ jest to funkcja $f(x) = 4$, która jest stale dodatnia.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Największą wartością funkcji $y = -(3-x)^2 - 2$ w przedziale $\langle -2, 1\rangle$ jest

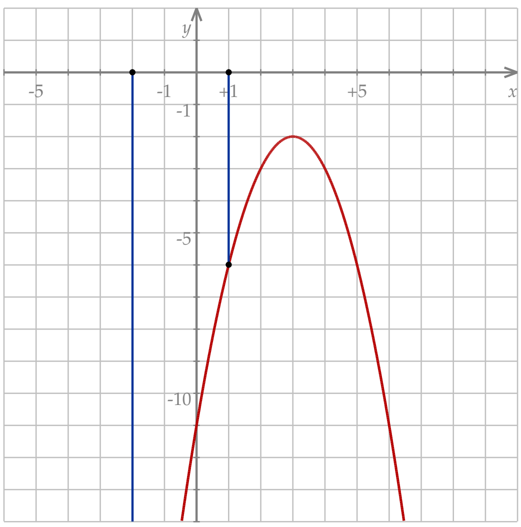
A) 2 B) -2 C) -27 D) -6

ROZWIĄZANIE

Wykresem funkcji

$$y = -(3-x)^2 - 2 = -(x-3)^2 - 2$$

jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie $(3, -2)$.



Jeżeli ją naszkicujemy, to widać, że na danym przedziale największa wartość to

$$f(1) = -(-2)^2 - 2 = -4 - 2 = -6.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 13 (1 PKT)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = 2$. Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa

A) $\frac{15}{\sqrt{2}-1}$ B) $6+7\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}+7$ D) $7+7\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy iloraz ciągu

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Sposób I

Obliczamy sześć pierwszych wyrazów ciągu (a_n).

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_2}{q} = \frac{a_2}{\sqrt{2}} = 1 \\ a_4 &= a_3q = 2\sqrt{2} \\ a_5 &= a_4q = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot 2 = 4 \\ a_6 &= a_5q = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Stąd

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+4\sqrt{2} = 7+7\sqrt{2}.$$

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na sumę S_n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego

$$\begin{aligned} S_6 &= a_1\cdot\frac{1-q^6}{1-q} = 1\cdot\frac{1-(\sqrt{2})^6}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-8}{1-\sqrt{2}} = \\ &= \frac{7(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{7\sqrt{2}+7}{2-1} = 7\sqrt{2}+7. \end{aligned}$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 14 (1 PKT)

Ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, spełnia warunek $a_{10}+a_{13}+a_{16} = 57$. Wtedy wartość wyrażenia $a_{39}-2a_{26}$ jest równa

A) -19 B) -17 C) 13 D) 19

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$57 = a_{10} + a_{13} + a_{16} = (a_1 + 9r) + (a_1 + 12r) + (a_1 + 15r) = 3a_1 + 36r \quad / : 3$$
$$19 = a_1 + 12r.$$

Zatem

$$a_{39} - 2a_{26} = a_1 + 38r - 2(a_1 + 25r) = -a_1 - 12r = -(a_1 + 12r) = -19.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Trójka liczb $(x, y, z) = (2, -1, -1)$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x^2 - y^3 + z = 4 \\ x^2 + ay^3 + z^2 = 2 \\ x^3 + 5y - 2z^2 = 1 \end{cases}$

gdy

A) $a = -3$ B) $a = -2$ C) $a = 2$ D) $a = 3$

ROZWIĄZANIE

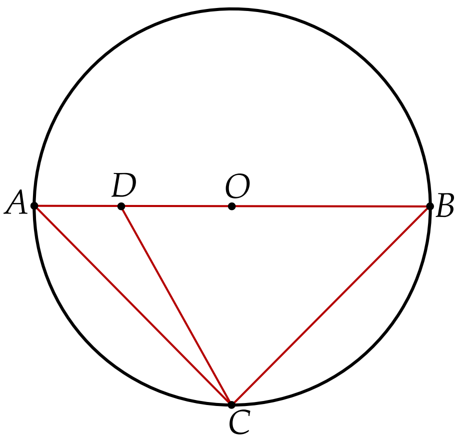
Podstawiamy $x = 2$, $y = -1$ i $z = -1$ w drugim równaniu.

$$4 - a + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 16 (1 PKT)

Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku O i promieniu r, a punkt C jest środkiem łuku o końcach A i B (zobacz rysunek). Na odcinku AB wybrano punkt D taki, że $|DC| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|OA|$.

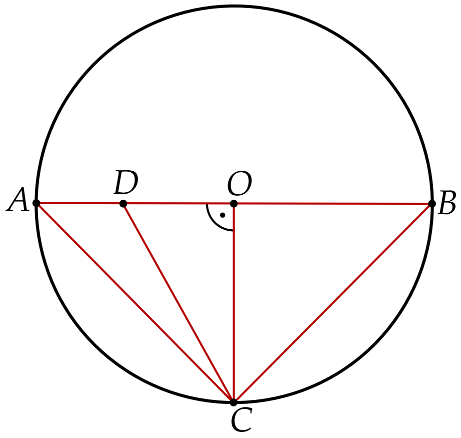


Pole trójkąta BDC jest równe

A) $\frac{(\sqrt{3}+1)r^2}{3}$ B) $\frac{(\sqrt{3}+3)r^2}{6}$ C) $\frac{(\sqrt{3}+1)r^2}{2}$ D) $\frac{(\sqrt{3}+3)r^2}{3}$

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy promień OC.



Trójkąt DOC jest prostokątny oraz $OC = r$. Zatem

$$\sin\measuredangle ODC = \frac{OC}{DC} = \frac{r}{\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot r} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

To oznacza, że $\measuredangle ODC = 60^\circ$, czyli trójkąt ODC jest połówką trójkąta równobocznego. W szczególności

$$OD = \frac{1}{2}DC = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot r$$

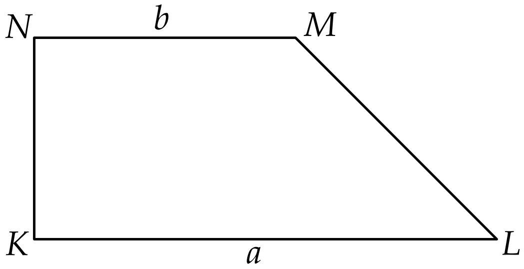
Korzystamy ze wzoru z sinusem na pole trójkąta

$$P_{BDC} = \frac{1}{2}\cdot DB\cdot DC\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot r + r\right)\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+3)r^2}{6}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 17 (1 PKT)

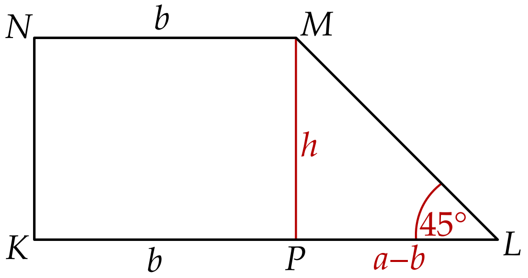
Dany jest trapez prostokątny $KLMN$, którego podstawy mają długości $|KL| = a$, $|MN| = b$, $a > b$. Kąt KLM ma miarę 45°. Długość ramienia LM tego trapezu jest równa



A) $a-b$ B) $(a-b)\sqrt{3}$ C) $\frac{a+b}{2}$ D) $(a-b)\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy wysokość MP trapezu.



Zauważmy, że

$$PL = KL - NM = a - b.$$

Sposób I

Trójkąt PLM to połówka kwadratu o boku długości PL, więc

$$ML = PL\sqrt{2} = (a-b)\sqrt{2}.$$

Sposób II

W trójkącie PLM mamy

$$\frac{PL}{ML} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad ML = \frac{PL}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = PL\sqrt{2} = (a-b)\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Jeżeli $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = 27\sin\alpha(\sin^2\alpha - 1)$, to

A) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ B) $\cos\alpha = 1$ C) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

ROZWIĄZANIE

Przekształćmy podany warunek korzystając z definicji tangensa i jedynki trygonometrycznej.

$$\operatorname{tg}\alpha = -27\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -27\sin\alpha\cos^2\alpha \quad / \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$1 = -27\cos^3\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: **A**

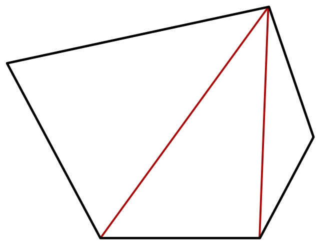
ZADANIE 19 (1 PKT)

Miary kątów wewnętrznych pewnego pięciokąta pozostają w stosunku $5:6:7:8:10$. Najmniejszy kąt wewnętrzny tego pięciokąta ma miarę

A) 45° B) 20° C) 75° D) 60°

ROZWIĄZANIE

Na mocy podanej informacji możemy oznaczyć kąty pięciokąta przez $5\alpha, 6\alpha, 7\alpha, 8\alpha, 10\alpha$. Pozostało teraz skorzystać z tego, że suma kątów w pięciokącie jest równa $3\cdot 180^\circ$ (bo pięciokąt można rozciąć na 3 trójkąty).



Mamy zatem

$$\begin{aligned} &3\cdot 180^\circ = 5\alpha + 6\alpha + 7\alpha + 8\alpha + 10\alpha = 36\alpha \quad / : 36 \\ &\alpha = 15^\circ \quad \Rightarrow \quad 5\alpha = 75^\circ. \end{aligned}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 20 (1 PKT)

Proste o równaniach: $mx + (m-3)y + 5 = 0$ i $mx + 7m + 3 = 0$ są równoległe, gdy

A) $m = 5$ B) $m = 0$ C) $m = -7$ D) $m = 3$

ROZWIĄZANIE

Druga z podanych prostych to pionowa prosta

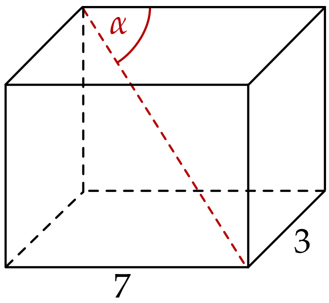
$$x = \frac{-7m-3}{m},$$

więc pierwsza prosta też musi być pionowa, czyli jej równanie nie może zawierać y. Zatem $m = 3$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 21 (1 PKT)

Podstawą graniastosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 7 i 3. Kąt α, jaki przekątna tego graniastosłupa tworzy z jedną z krawędzi górnej podstawy jest równy 45° (zobacz rysunek).

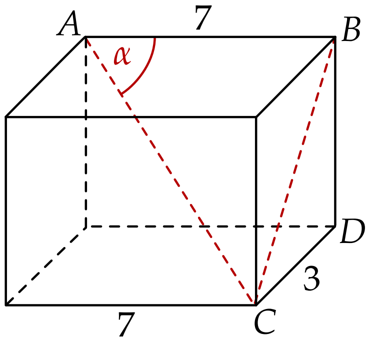


Wysokość graniastosłupa jest równa

A) $\sqrt{58}$ B) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{46}$ D) $2\sqrt{10}$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że trójkąt ACB jest prostokątny (bo krawędź AB jest prostopadła do ściany CDB).



To oznacza, że jest on równoramienny (bo $\measuredangle ACB = \measuredangle CAB = 45^\circ$). Zatem $BC = AB = 7$ i

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{49-9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 22 (1 PKT)

W grupie 50 kobiet i 50 mężczyzn przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie o liczbę książek przeczytanych w ostatnim roku. Wyniki ankiety zebrano w poniższej tabeli.

Liczba książek	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	23	14	28	17	11	7

W trakcie analizy tych danych zauważono, że kobiety przeczytały średnio o jedną książkę więcej niż mężczyźni. Średnia liczba przeczytanych książek przez jednego ankietowanego mężczyznę jest równa

A) 1,5 B) 1 C) 2 D) 2,5

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy przez n całkowitą liczbę książek przeczytanych przez mężczyzn, to kobiety w sumie przeczytały $50+n$ książek (bo średnia jest większa o 1). W takim razie

$$n + (50+n) = 0\cdot 23 + 1\cdot 14 + 2\cdot 28 + 3\cdot 17 + 4\cdot 11 + 5\cdot 7 = 200$$
$$2n = 150 \quad \Rightarrow \quad n = 75.$$

Zatem jeden mężczyzna przeczytał średnio

$$\frac{75}{50} = 1,5$$

książki.

Odpowiedź: **A**

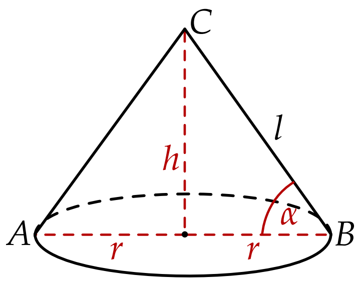
ZADANIE 23 (1 PKT)

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem o polu $12\sqrt{3}$. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe

A) 9π B) 36π C) $18\sqrt{3}\pi$ D) $36\sqrt{3}\pi$

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Ze wzoru na pole trójkąta z sinusem wiemy, że

$$12\sqrt{3} = P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot l\cdot \sin\alpha = \frac{2}{3}rl.$$

Stąd

$$rl = \frac{3}{2}\cdot 12\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

oraz pole powierzchni bocznej stożka jest równe

$$P_b = \pi rl = \pi\cdot 18\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi.$$

Odpowiedź: **C**

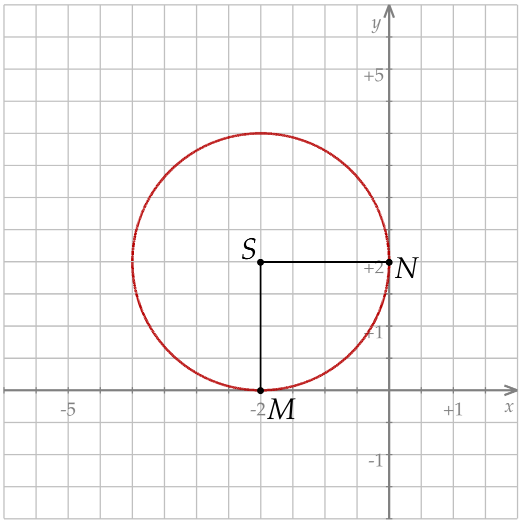
ZADANIE 24 (1 PKT)

Punkty $M = (-2,0)$ i $N = (0,2)$ są punktami styczności okręgu z osiami układu współrzędnych. Jakie współrzędne ma środek tego okręgu?

A) $(-2,2)$ B) $(2,2)$ C) $(2,-2)$ D) $(-2,-2)$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Jeżeli okrąg ma być styczny do osi układu w punktach $(-2,0)$ i $(0,2)$, to jego środek S musi leżeć na prostych $x = -2$ i $y = 2$. Zatem $S = (-2,2)$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 25 (1 PKT)

W pudełku jest 2400 kuponów, wśród których $\frac{21}{288}$ stanowią kupony przegrywające, a pozostałe kupony są wygrywające. Z tego pudełka w sposób losowy wyciągamy jeden kupon. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wyciągniemy kupon wygrywający, jest równe

A) $\frac{89}{96}$ B) $\frac{27}{35}$ C) $\frac{15}{16}$ D) $\frac{265}{288}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Z podanych informacji wiemy, że jest

$$\frac{21}{288} \cdot 2400 = \frac{7}{96} \cdot 2400 = 7 \cdot 25 = 175$$

losów przegrywających. To oznacza, że jest $2400 - 175 = 2225$ losów wygrywających i szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{2225}{2400} = \frac{89}{96}.$$

Sposób II

Z podanych informacji wiemy, że prawdopodobieństwo wylosowania losu przegrywającego jest równe

$$p = \frac{21}{288} = \frac{7}{96}.$$

Prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego jest więc równe

$$1 - p = 1 - \frac{7}{96} = \frac{89}{96}.$$

Odpowiedź: **A**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Iloczyn pierwszego i czwartego wyrazu malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 253, a przy dzieleniu wyrazu drugiego przez wyraz piąty otrzymujemy 2 i resztę pięć. Wyznacz różnicę tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

Zacznijmy od drugiej z podanych informacji.

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_5 + 5 \\ a_1 + r &= 2(a_1 + 4r) + 5 \\ 0 &= a_1 + 7r + 5 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -7r - 5. \end{aligned}$$

Teraz zapiszmy pierwszą z podanych informacji.

$$\begin{aligned} 253 &= a_1a_4 = a_1(a_1 + 3r) = (-7r - 5)(-7r - 5 + 3r) \\ 253 &= (7r + 5)(4r + 5) = 28r^2 + 55r + 25 \\ 0 &= 28r^2 + 55r - 228 \\ \Delta &= 3025 + 25536 = 28561 = 169^2 \\ r &= \frac{-55 + 169}{56} > 0 \quad \text{lub} \quad r = \frac{-55 - 169}{56} = -4. \end{aligned}$$

Ciąg ma być malejący, więc mamy stąd $r = -4$.

Odpowiedź: -4

ZADANIE 27 (2 PKT)

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola, na której leży punkt $A = (0, -4)$. Osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 6$. Oblicz wartości współczynników b i c.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Podana oś symetrii oznacza, że pierwsza współrzędna wierzchołka (p,q) paraboli jest równa $p=6$. Funkcja ma więc postać kanoniczną postaci

$$f(x)=(x-6)^2+q.$$

Współczynnik q obliczamy korzystając z podanej informacji $f(0)=-4$.

$$-4=(0-6)^2+q=36+q \quad \Rightarrow \quad q=-40.$$

Zatem

$$f(x)=(x-6)^2-40=x^2-12x-4.$$

Sposób II

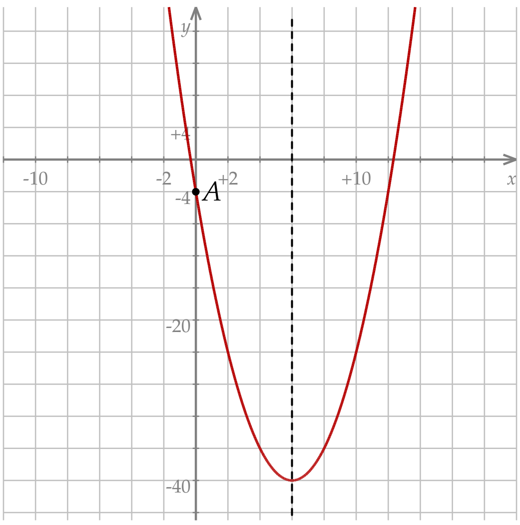
Wiemy, że

$$-4=f(0)=c,$$

więc pozostało wyznaczyć b. Oś symetrii paraboli przechodzi przez jej wierzchołek, więc

$$6=x_w=\frac{-b}{2a}=\frac{-b}{2} \quad \Rightarrow \quad b=-12.$$

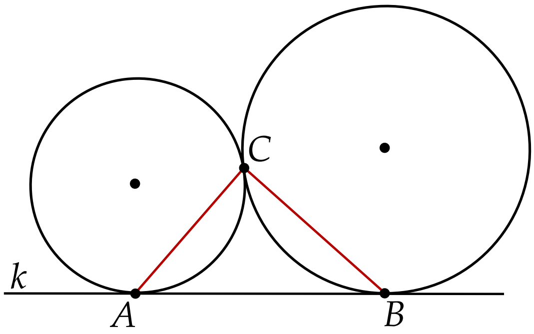
Na koniec wykres dla ciekawskich.



Odpowiedź: $b=-12$ **i** $c=-4$

ZADANIE 28 (2 PKT)

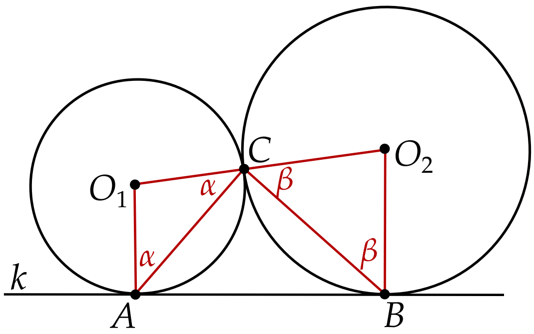
Dwa okręgi są zewnętrznie styczne w punkcie C oraz są styczne do prostej k w punktach A i B odpowiednio (zobacz rysunek).



Uzasadnij, że trójkąt ABC jest prostokątny.

ROZWIĄZANIE

Połączmy środki okręgów z punktami styczności.



Zauważmy, że

$$\measuredangle AO_1C + \measuredangle BO_2C = 180^\circ.$$

Tak jest, bo punkty O_1, O_2 i C leżą na jednej prostej, oraz odcinki O_1A i O_2B są do siebie równoległe (bo oba są prostopadłe do prostej AB)

Sposób I

Jeżeli oznaczymy kąty α i β jak na rysunku, to powyższą równość możemy zapisać jako

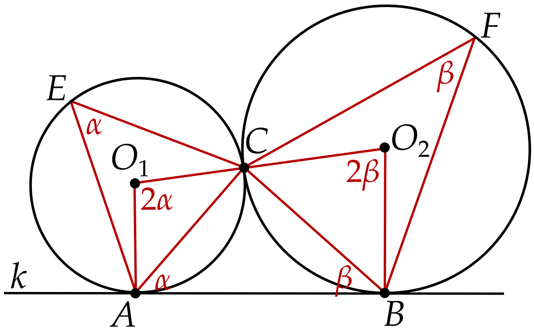
$$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Z drugiej strony,

$$\measuredangle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ.$$

Sposób II

Tym razem skorzystamy z twierdzenia o stycznej.



Jeżeli oznaczymy $\measuredangle CAB = \alpha$ i $\measuredangle CBA = \beta$, to na mocy twierdzenia o stycznej,

$$\measuredangle AO_1C = 2\measuredangle AEC = \measuredangle CAB = \alpha$$
$$\measuredangle BO_2C = 2\measuredangle BFC = \measuredangle CBA = \beta.$$

Stąd

$$2\alpha + 2\beta = \measuredangle AO_1C + \measuredangle BO_2C = 180^\circ,$$

czyli $\alpha + \beta = 90^\circ$. To oczywiście oznacza, że trójkąt ACB jest prostokątny.

ZADANIE 29 (2 PKT)

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}.$$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekształcamy daną nierówność w sposób równoważny.

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \quad / \cdot 4$$
$$a+b+c+d-2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd} \geqslant 0$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{d})^2 \geqslant 0.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a przekształcaliśmy ją przy pomocy równoważności, więc wyjściowa nierówność również musiała być prawdziwa.

Sposób II

Zauważmy najpierw, że prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Rzeczywiście, nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościom

$$\begin{aligned} &a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \quad / ()^2 \\ &a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab \\ &a^2-2ab+b^2 \geqslant 0 \\ &(a-b)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{cd}.$$

Stąd

$$\frac{a+b+c+d}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 6$ oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} 6 &= \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}. \end{aligned}$$

Zatem $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{6}$. Mamy stąd

$$\begin{aligned} (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 &= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \\ &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ponieważ kąt α jest ostry, to $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$ i

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

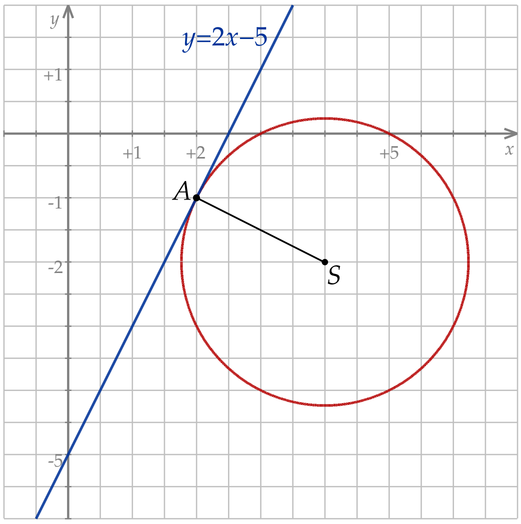
Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ZADANIE 31 (2 PKT)

Okrąg o środku $S = (4, -2)$ przechodzi przez punkt $A = (2, -1)$. Napisz równanie stycznej do tego okręgu przechodzącej przez punkt A.

ROZWIĄZANIE

Naszkicujmy opisaną sytuację.



Napiszmy najpierw równanie prostej zawierającej promień SA. Szukamy prostej w postaci $y = ax + b$ i podstawiamy współrzędne punktów S i A.

$$\begin{cases} -2 = 4a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$-1 = 2a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Współczynnika b możemy nie wyznaczać, bo nie jest nam potrzebny.

Szukana styczna jest prostopadła do promienia SA, więc ma równanie postaci $y = 2x + b$. Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu A.

$$-1 = 2 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = -5.$$

Szukana styczna ma więc równanie $y = 2x - 5$.

Odpowiedź: $y = 2x - 5$

ZADANIE 32 (4 PKT)

Dane są dwa zbiory:

$$A = \{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900\}$$
$$B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22\}.$$

Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 9.

ROZWIĄZANIE

Liczbę z pierwszego zbioru możemy wybrać na 9 sposobów, a liczbę z drugiego zbioru na 12 sposobów. Jest więc

$$9 \cdot 12 = 108$$

zdarzeń elementarnych. Łatwo wypisać wszystkie zdarzenia sprzyjające (suma cyfr otrzymanej liczby musi się dzielić przez 9):

$$(100, 17), (200, 16), (300, 15), (400, 14), (500, 13), (500, 22)$$
$$(600, 12), (600, 21), (700, 11), (700, 20), (800, 10), (800, 19).$$

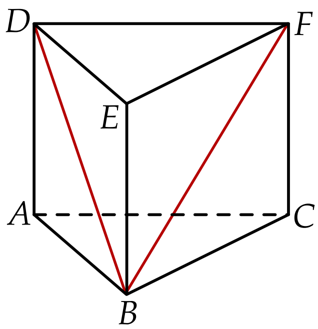
Jest tych zdarzeń $6 + 6 = 12$, więc interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{12}{108} = \frac{1}{9}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{9}$

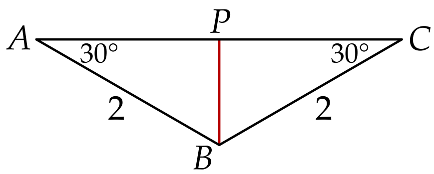
ZADANIE 33 (5 PKT)

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt ABC, w którym $|\measuredangle ABC| = 120^\circ$ oraz $|AB| = 2$ (zobacz rysunek). Trójkąt BFD jest równoboczny. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że trójkąty prostokątne ABD i BCF mają dwa takie same boki: $DA = FC$ i $DB = FB$. To oznacza, że trójkąty te są przystające i $BC = AB = 2$.



Niech P będzie środkiem odcinka AC. Z trójkąta prostokątnego ABP mamy

$$\frac{AP}{AB} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad AP = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Zatem $BD = BF = DF = AC = 2AP = 2\sqrt{3}$. Patrzymy teraz na trójkąt prostokątny ABD.

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{12-4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Liczymy teraz pole powierzchni całkowitej.

$$P_c = 2P_{ABC} + 2P_{ABED} + P_{ACFD} = AB \cdot BC \sin 120^\circ + 2AB \cdot AD + AC \cdot AD =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{6}.$$

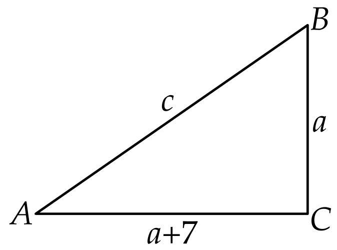
Odpowiedź: $2\sqrt{3} + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$

ZADANIE 34 (4 PKT)

W trójkącie prostokątnym ABC jedna z przyprostokątnych jest o 7 dłuższa od drugiej, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3. Oblicz obwód trójkąta ABC.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy trójkąt prostokątny.



Korzystamy ze wzoru

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

na promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c. Mamy więc

$$3 = r = \frac{a+a+7-c}{2} \quad \Rightarrow \quad 6 = 2a - c + 7 \quad \Rightarrow \quad c = 2a+1.$$

Ponadto, na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$\begin{aligned}
&a^2 + (a+7)^2 = c^2 = (2a+1)^2 \\
&a^2 + a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 4a + 1 \\
&0 = 2a^2 - 10a - 48 \quad / : 2 \\
&0 = a^2 - 5a - 24 \\
&\Delta = 25 + 96 = 121 = 11^2 \\
&a = \frac{5-11}{2} < 0 \quad \text{lub} \quad a = \frac{5+11}{2} = 8.
\end{aligned}$$

Pozostałe boki trójkąta ABC mają więc długości: $a+7 = 15$ i $c = 2a+1 = 17$. Obwód trójkąta jest równy

$$a+a+7+c = 8+15+17 = 40.$$

Odpowiedź: **40**