Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

(CEN Bydgoszcz)

POZIOM PODSTAWOWY

8 marca 2019

Czas pracy: 170 minut

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (1 pkt)

Wśród liczb a, b, c, d liczbą całkowitą jest

A) $a = \frac{2^5 \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{4^9}$ B) $b = \frac{8^4 \cdot 2}{3^2}$ C) $c = \frac{3^5 \cdot 8^{\frac{4}{3}}}{36^{\frac{1}{2}}}$ D) $d = \frac{2^0}{2^2 \cdot 8}$

Rozwiązanie

Liczymy

$$a = \frac{2^5 \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{4^9} = \frac{2^5 \cdot \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(2^2\right)^9} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{2^{18}} = \frac{3^2}{2^{13}}$$

$$b = \frac{8^4 \cdot 2}{3^2} = \frac{(2^3)^4 \cdot 2}{3^2} = \frac{2^{13}}{3^2}$$

$$c = \frac{3^5 \cdot 8^{\frac{4}{3}}}{36^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^5 \cdot (2^3)^{\frac{4}{3}}}{(6^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^5 \cdot 2^4}{2 \cdot 3} = 3^4 \cdot 2^3$$

$$d = \frac{2^0}{2^2 \cdot 8} = \frac{1}{2^2 \cdot 2^3} = \frac{1}{2^5}.$$

Widać teraz, że liczbą całkowitą jest tylko c.

Odpowiedź: **C**

Zadanie 2 (1 pkt)

Jeżeli $a = \log_2(5\sqrt[3]{2}) - \log_2 5$ i $b = \log_3 15 + \log_3 \frac{\sqrt{3}}{45}$, to wartość wyrażenia a^b jest równa

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 9 D) $\sqrt[3]{2}$

Rozwiązanie

Liczymy

$$a = \log_2(5\sqrt[3]{2}) - \log_2 5 = \log_2 \frac{5\sqrt[3]{2}}{5} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$b = \log_3 15 + \log_3 \frac{\sqrt{3}}{45} = \log_3 \left(15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{45}\right) = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{3} = \log_3 \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Stąd

$$a^b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 3 (1 PKT)

Oszacowano, że do malowania pokoju potrzeba 17 litrów farby. W rzeczywistości zużyto 20 litrów. Błąd względny szacowania wyrażony w procentach wynosi

A) 0,15% B) 15% C) 17,6% D) 85%

ROZWIĄZANIE

Liczymy błąd bezwzględny

$$20 - 17 = 3.$$

Obliczamy błąd względny

$$\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0,15 = 15\%.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 4 (1 PKT)

Cenę towaru dwukrotnie obniżano o 20%. W wyniku obniżek cena towaru wynosi 96 zł. Przed zmianami towar kosztował

A) 138,24 zł B) 144,00 zł C) 150,00 zł D) 160,00 zł

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy cenę początkową przez x to mamy równanie

$$0,8 \cdot 0,8x = 96 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{96}{0,8 \cdot 0,8} = 150.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 5 (1 PKT)

Funkcja $f(x) = \frac{6x-x^2}{x^2-36}$

A) ma jedno miejsce zerowe $x = 0$

B) ma dwa miejsca zerowe: $x = 0,\ x = 6$

C) ma dwa miejsce zerowe: $x = 6,\ x = -6$

D) ma trzy miejsca zerowe: $x = 0,\ x = 6,\ x = -6$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

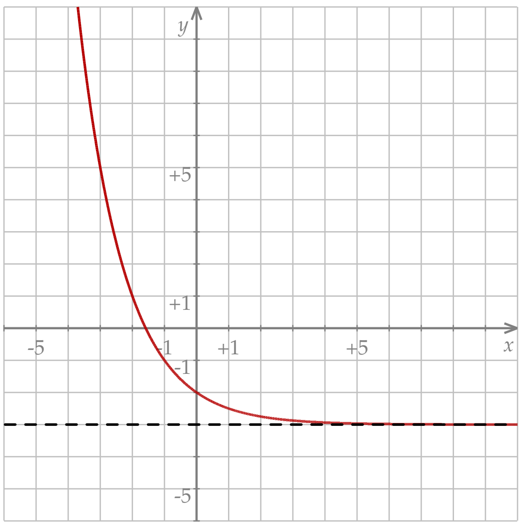
$$6x - x^2 = x(6-x),$$
$$x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$$

więc licznik zeruje się dla $x = 0$ i $x = 6$, ale druga z tych liczb zeruje też mianownik. Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 0$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem



A) $f(x) = 2^x - 3$ B) 2^{x-3} C) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$ D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

ROZWIĄZANIE

Wykres przedstawiony na rysunku to malejąca funkcja wykładnicza postaci $y = a^x$ przesunięta o 3 jednostki w dół. Wśród podanych odpowiedzi do tego opisu pasuje tylko wzór $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Wartość funkcji $f(x) = \frac{-x^2-2x}{x-2}$ dla argumentu równego $-2+\sqrt{2}$ wynosi

A) -1 B) $\sqrt{2}-2$ C) $\frac{\sqrt{2}-10}{7}$ D) $\frac{-3\sqrt{2}+2}{7}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$f(x) = \frac{-x^2-2x}{x-2} = \frac{-x(x+2)}{x-2} = \frac{(2-\sqrt{2})(-2+\sqrt{2}+2)}{-2+\sqrt{2}-2} =$$
$$= \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-4} = \frac{(2\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+4)}{(\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}+4)} = \frac{6\sqrt{2}-4}{-14} = \frac{-3\sqrt{2}+2}{7}.$$

Odpowiedź: **D**

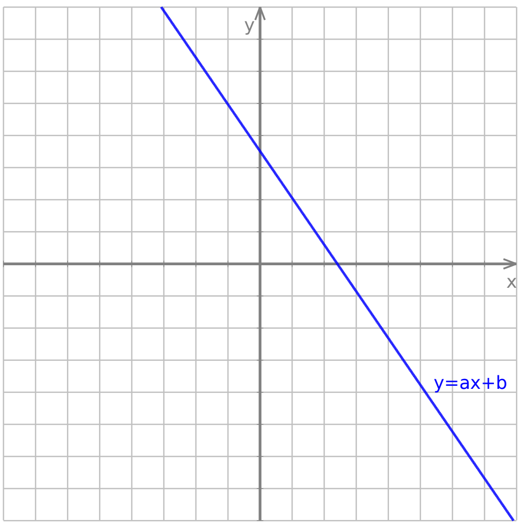
ZADANIE 8 (1 PKT)

Dana jest funkcja liniowa $y = ax+b$, o której wiadomo, że $a < 0 \wedge b > 0$. Wykres tej funkcji przechodzi przez następujące ćwiartki układu współrzędnych

A) I, II, III B) I, II, IV C) II, III, IV D) I, III, IV

ROZWIĄZANIE

Współczynnik $a < 0$ oznacza, że funkcja jest malejąca. Natomiast współczynnik $b > 0$ oznacza, że wykres przecina oś Oy powyżej osi Ox. Odpowiedź odczytujemy z wykresu.



Odpowiedź: **B**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Maksymalnym przedziałem, w którym funkcja kwadratowa $f(x) = -3(x+2)^2 - 7$ jest malejąca jest

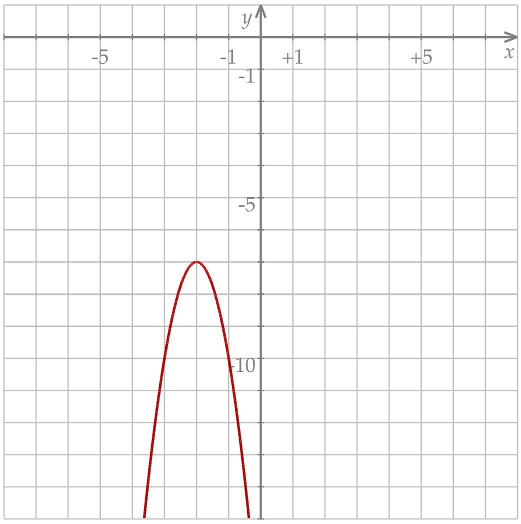
A) $\langle 2, +\infty)$ B) $(-\infty, 2\rangle$ C) $\langle -2, +\infty)$ D) $(-\infty, -2\rangle$

ROZWIĄZANIE

Z podanego wzoru łatwo wyznaczyć współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f

$$W = (-2, -7).$$

Teraz należy zauważyć, że współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, więc wykres będzie parabolą zwróconą ramionami w dół. Naszkicujmy wykres (dokładne zaznaczenie pierwiastków nie ma znaczenia dla odczytania przedziałów monotoniczności funkcji)



Teraz można łatwo odczytać, że funkcja f jest malejąca w zbiorze

$$\langle -2, +\infty).$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 10 (1 PKT)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 3^n - 3^2$. Wyraz a_{n+2} tego ciągu dla $n = 3$ jest równy

A) 3 B) 18 C) 27 D) 234

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$a_{n+2} = a_{3+2} = a_5 = 3^5 - 3^2 = 243 - 9 = 234.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 11 (1 PKT)

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 7, suma siedmiu początkowych wyrazów ciągu jest równa (-14). Czwarty wyraz ciągu jest równy
A) -11 B) -3 C) -2 D) 16

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n$ na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego obliczamy różnicę ciągu.

$$\begin{aligned} -14 &= S_7 = \frac{14+6r}{2} \cdot 7 = (7+3r) \cdot 7 \quad / : 7 \\ -2 &= 7+3r \quad \Rightarrow \quad 3r = -9 \quad \Rightarrow \quad r = -3. \end{aligned}$$

Obliczamy teraz czwarty wyraz ciągu.

$$a_4 = a_1 + 3r = 7 - 9 = -2.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 12 (1 PKT)

Za wykopanie pierwszego metra studni zapłacono 75 złotych. Wykopanie każdego następnego metra kosztowało dwa razy tyle co poprzedniego. Za wykopanie studni zapłacono 76725 złotych. Głębokość studni wynosiła
A) 7 m B) 8 m C) 9 m D) 10 m

ROZWIĄZANIE

Z podanego opisu wynika, że koszty wykopania każdego kolejnego metra studni tworzą ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 75$, $q = 2$ i $S_n = 76725$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} 76725 &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 75 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 75 \cdot (2^n - 1) \quad / : 75 \\ 1023 &= 2^n - 1 \\ 2^n &= 1024 = 2^{10} \quad \Rightarrow \quad n = 10. \end{aligned}$$

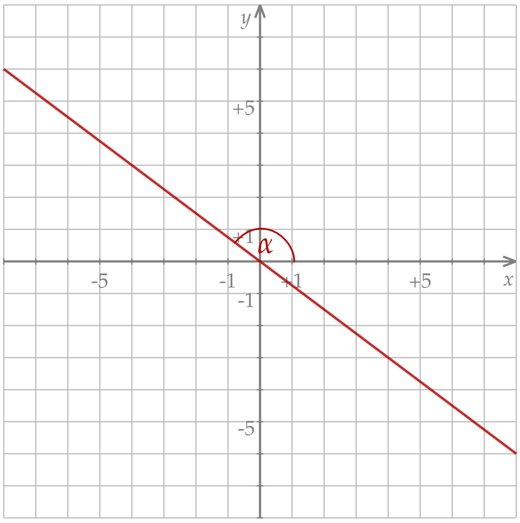
Odpowiedź: D

ZADANIE 13 (1 PKT)

Ramię końcowe kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ zawiera się w prostej $y = -\frac{3}{4}x$. Zatem
A) $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$ B) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ C) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ D) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

ROZWIĄZANIE

Naszkicujmy tę prostą.



Współczynnik kierunkowy tej prostej to dokładnie $\operatorname{tg}\alpha$, więc

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4} \qquad /()^2\\
&\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{9}{16}\\
&16\sin^2\alpha = 9(1-\sin^2\alpha)\\
&25\sin^2 = 9\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Ponieważ α jest kątem rozwartym, mamy stąd $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ (sinus jest dodatni w drugiej ćwiartce).

Odpowiedź: C

ZADANIE 14 (1 PKT)

Kąt α jest kątem ostrym i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Zatem

A) $\alpha = 30^\circ$ B) $\alpha \in (30^\circ, 45^\circ)$ C) $\alpha \in (45^\circ, 60^\circ)$ D) $\alpha = 60^\circ$

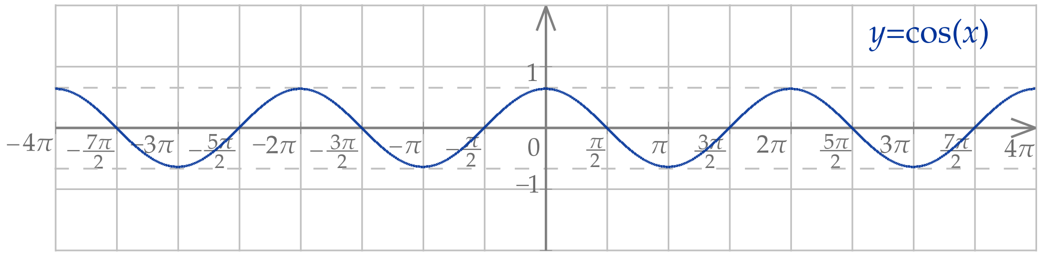
ROZWIĄZANIE

Sposób I

Odczytujemy z tablic, że jeżeli $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} =\approx 0,58$, to $\alpha \approx 55^\circ$. Zatem $\alpha \in (45^\circ, 60^\circ)$.

Sposób II

Jeżeli naszkicujemy wykres funkcji cosinus to widać, że jest ona malejąca w I ćwiartce.



Ponadto

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58 < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58 > 0,5 = \frac{1}{2}.$$

W takim razie $\alpha \in (45^\circ, 60^\circ)$.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 15 (1 PKT)

Dla ostrego kąta α wyrażenie $\cos\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$ jest równe

A) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ B) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ C) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ D) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

ROZWIĄZANIE

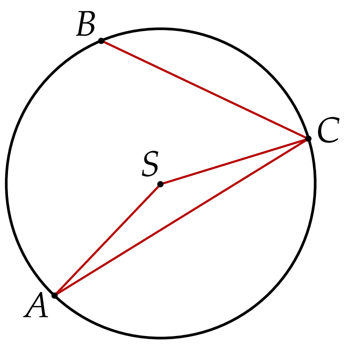
Liczymy

$$\cos\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha \cdot \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha} = 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 16 (1 PKT)

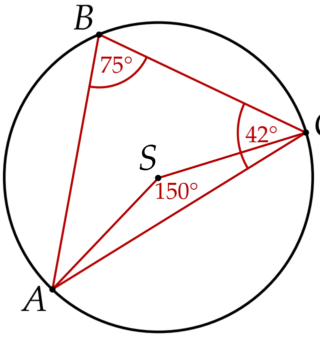
Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku S (rysunek), $|\measuredangle ASC| = 150^\circ$ oraz $|\measuredangle ACB| = 42^\circ$. Miara kąta BAC jest równa



A) 15° B) 42° C) $52,5^\circ$ D) 63°

Rozwiązanie

Dorysujmy odcinek AB.



Korzystając z twierdzenia o kątach wpisanym i środkowym mamy

$$\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\measuredangle ASC = \frac{1}{2}\cdot 150^\circ = 75^\circ.$$

Suma kątów w trójkącie ABC jest równa 180°, więc

$$\measuredangle BAC = 180^\circ - \measuredangle ACB - \measuredangle ABC = 180^\circ - 75^\circ - 42^\circ = 63^\circ.$$

Odpowiedź: **D**

Zadanie 17 (1 pkt)

Punkty A, B, C są punktami przecięcia paraboli o równaniu $y = -x^2 + 2x + 8$ z osiami układu współrzędnych. Pole trójkąta ABC jest równe
A) 8 B) 9 C) 24 D) 27

Rozwiązanie

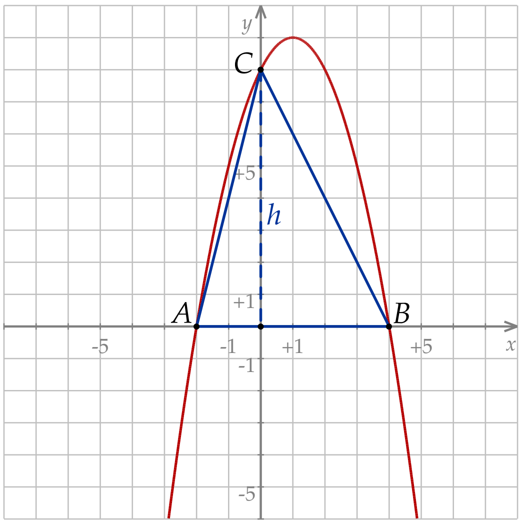
Dany wykres przecina oś Oy w punkcie

$$C = (0, f(0)) = (0, 8).$$

Aby wyznaczyć punkty przecięcia z osią Ox rozwiązujemy równanie

$$\begin{aligned}
&-x^2 + 2x + 8 = 0\\
&\Delta = 4 + 32 = 36\\
&x = \frac{-2-6}{-2} = 4 \quad \text{lub} \quad x = \frac{-2+6}{-2} = -2.
\end{aligned}$$

Wykres przecina więc oś Ox w punktach $A = (-2, 0)$ i $B = (4, 0)$. Szkicujemy tę sytuację.



Liczymy pole trójkąta ABC.

$$P = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}(4+2) \cdot 8 = 24.$$

Odpowiedź: **C**

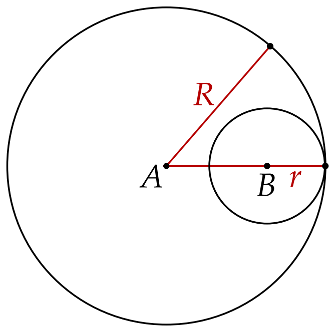
ZADANIE 18 (1 PKT)

Dane są okręgi styczne wewnętrznie o środkach A i B. Wiadomo, że promień jednego okręgu jest trzy razy dłuższy od promienia drugiego okręgu i $|AB| = 2\frac{2}{3}$. Promienie tych okręgów mają długość

A) $\frac{1}{3}$ i 3 B) $1\frac{1}{2}$ i $4\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ i 2 D) $1\frac{1}{3}$ i 4

ROZWIĄZANIE

Wykonujemy szkicowy rysunek.



Jeżeli oznaczymy przez r i R promienie odpowiednio mniejszego i większego okręgu, to wiemy, że $R = 3r$ oraz

$$\frac{8}{3} = AB = R - r = 3r - r = 2r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Stąd $R = 3r = 4$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Proste o równaniach $k:\ y=(3-2m)x+10$ i $l:\ y=\frac{3}{1-6m}x-2m$ są prostopadłe dla

A) $m=\frac{5}{6}$ B) $m=\frac{6}{5}$ C) $m=-\frac{5}{3}$ D) $m=\frac{5}{3}$

ROZWIĄZANIE

Proste są prostopadłe, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1. Mamy zatem

$$(3-2m)\cdot\frac{3}{(1-6m)}=-1 \quad /\cdot(1-6m)$$
$$9-6m=6m-1 \quad\Rightarrow\quad m=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 20 (1 PKT)

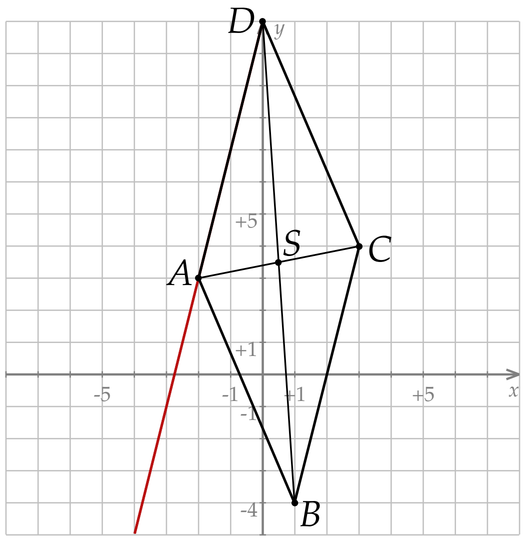
Punkty $A=(-2;3)$, $B=(1;-4)$, $C=(3;4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Równanie prostej zawierającej bok AD tego równoległoboku ma postać

A) $-4x+y-11=0$ B) $4x+y+11=0$

C) $-4x-y+3=0$ D) $4x-y+3=0$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Sposób I

Prosta AD jest równoległa BC i przechodzi przez A. Zacznijmy od wyznaczenia współczynnika kierunkowego prostej BC. Szukamy prostej w postaci $y=ax+b$ i podstawiamy współrzędne punktów B i C.

$$\begin{cases}-4=a+b\\ 4=3a+b.\end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze i mamy

$$8 = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 4.$$

W takim razie prosta AD ma równanie postaci $y = 4a + b$. Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu A.

$$3 = -8 + b \quad \Rightarrow \quad b = 11.$$

Prosta AD ma więc równanie $y = 4x + 11$.

Sposób II

Środek S równoległoboku ma współrzędne

$$S = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

To pozwala wyznaczyć współrzędne punktu D

$$S = \frac{B+D}{2} \quad \Rightarrow \quad D = 2S - B = (1,7) - (1,-4) = (0,11).$$

Piszemy teraz równanie prostej AD – szukamy prostej w postaci $y = ax + b$ i podstawiamy współrzędne punktów A i D.

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \\ 11 = b \end{cases}$$

Stąd

$$2a = b - 3 = 11 - 3 = 8 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

i prosta AD ma równanie

$$y = 4x + 11.$$

Odpowiedź: A

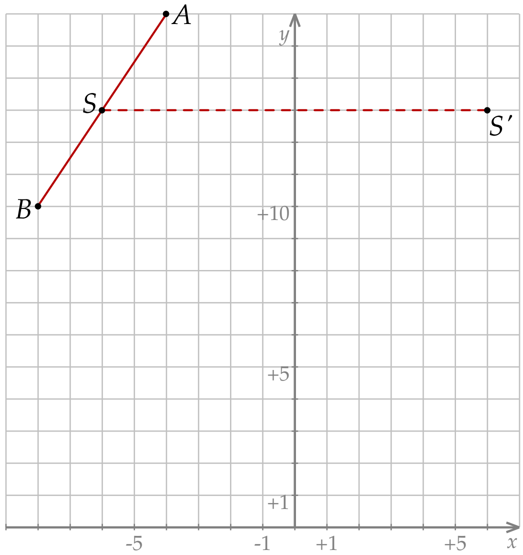
ZADANIE 21 (1 PKT)

Dany jest odcinek AB, gdzie $A(-4,16)$, $B(-8,10)$. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Obrazem punktu S w symetrii względem osi Oy jest punkt

A) $S'(-6,13)$ B) $S'(6,13)$ C) $S'(-6,-13)$ D) $S'(6,-13)$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



Środek S odcinka AB ma współrzędne

$$S = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-4-8}{2}, \frac{16+10}{2} \right) = (-6, 13).$$

Punkt S' symetryczny do tego punktu względem osi Oy ma współrzędne

$$S' = (6, 13).$$

Odpowiedź: **B**

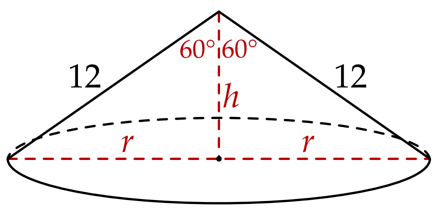
ZADANIE 22 (1 PKT)

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym o ramieniu długości 12. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120°. Objętość stożka wynosi

A) 72π B) $72\sqrt{3}\pi$ C) 216π D) $216\sqrt{3}\pi$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy stożek.



Przekrój osiowy stożka składa się z dwóch identycznych połówek trójkąta równobocznego o boku długości 12, więc

$$h = \frac{12}{2} = 6$$
$$r = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

Zatem objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 3 \cdot 6 = 216\pi.$$

Odpowiedź: **C**

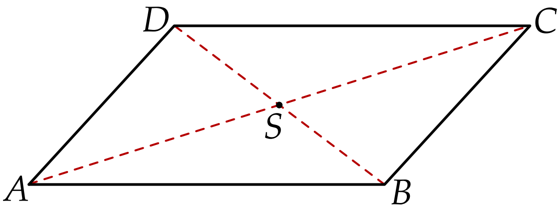
Zadanie 23 (1 pkt)

Przekątne dzielą równoległobok na cztery trójkąty

A) przystające B) podobne C) o równych polach D) o równych obwodach

Rozwiązanie

Szkicujemy równoległobok.



Ponieważ przekątne równoległoboku dzielą się na połowy, trójkąty ABS i BCS mają równe podstawy $AS = SC$ oraz wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B na przekątną AC. W takim razie mają równe pola. Ponadto trójkąt CDS jest przystający do trójkąta ABS, a trójkąt DAS jest przystający do trójkąta BCS. To oznacza, że te wszystkie cztery trójkąty mają równe pola.

Z drugiej strony, trójkąty te nie muszą być podobne, ani nie muszą mieć równych obwodów. Tym bardziej nie muszą być przystające.

Odpowiedź: **C**

Zadanie 24 (1 pkt)

Ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (x,y), gdzie x jest pierwszą wylosowaną liczbą, y jest drugą wylosowaną liczbą. Wszystkich par (x,y) takich, że suma $x+y$ jest liczbą parzystą jest

A) 20 B) 25 C) 50 D) 61

Rozwiązanie

Jeżeli suma ma być liczbą parzystą to obie wylosowane liczby muszą być tej samej parzystości. Dwie liczby parzyste możemy wylosować na

$$5 \cdot 4 = 20$$

sposobów, a dwie liczby nieparzyste na

$$6 \cdot 5 = 30$$

sposobów. W sumie jest więc 50 par spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 25 (1 PKT)

Wojtek notował temperaturę powietrza o godzinie 12.00 w pięciu kolejnych dniach stycznia. Otrzymał następujące wyniki:

Data	15.01	16.01	17.01	18.01	19.01
Temperatura	3°C	2°C	−2°C	−5°C	−3°C

Odchylenie standardowe od średniej temperatury w tych dniach, z dokładnością do 0,1 wynosi

A) $1,0°C$ B) $3,0°C$ C) $3,6°C$ D) $9,2°C$

ROZWIĄZANIE

Liczymy średnią temperaturę

$$\frac{3+2-2-5-3}{5} = -1.$$

Liczymy wariancję

$$\sigma^2 = \frac{(3-(-1))^2+(2-(-1))^2+(-2-(-1))^2+(-5-(-1))^2+(-3-(-1))^2}{5} =$$

$$= \frac{16+9+1+16+4}{5} = \frac{46}{5} = 9,2.$$

Liczymy odchylenie standardowe

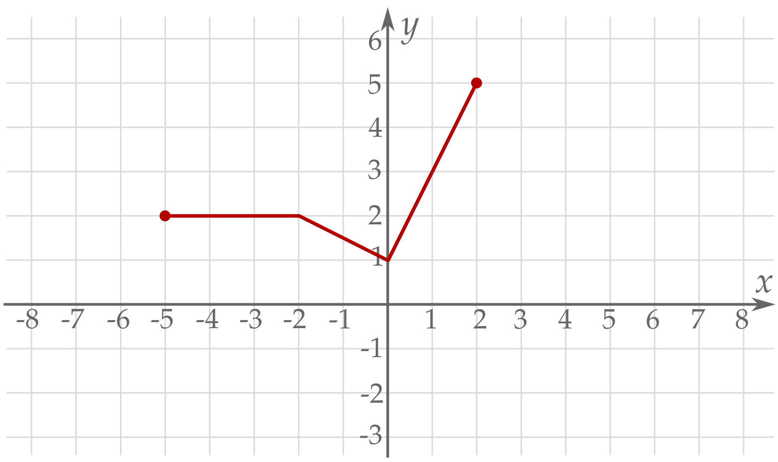
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9,2} \approx 3,0.$$

Odpowiedź: **B**

Zadania otwarte

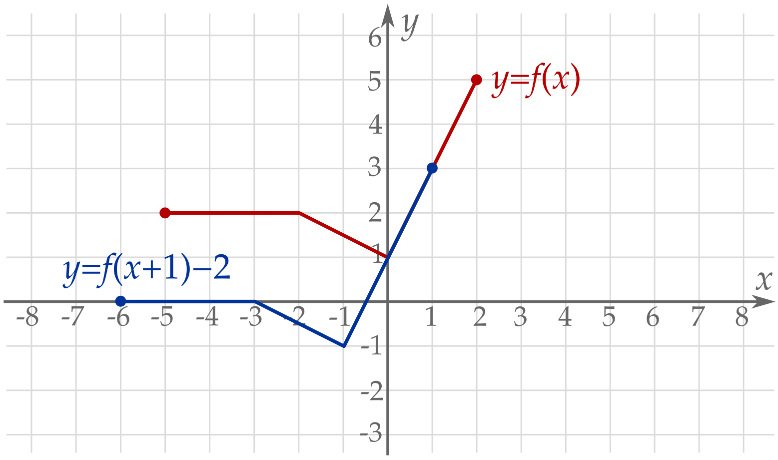
ZADANIE 26 (2 PKT)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Podaj zbiór wartości funkcji $g(x) = f(x+1) - 2$.



ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji $y = f(x+1)$ otrzymujemy z wykresu $y = f(x)$ przez przesunięcie o jedną jednostkę w lewo, a wykres funkcji $g(x) = f(x+1) - 2$ powstaje z tego ostatniego wykresu przez przesunięcie o dwie jednostki w dół.



Jeżeli naszkicujemy tę sytuację to widać, że zbiorem wartości funkcji $y = g(x)$ jest przedział $\langle -2, 3\rangle$.

Odpowiedź: $\langle -1, 3\rangle$

ZADANIE 27 (2 PKT)

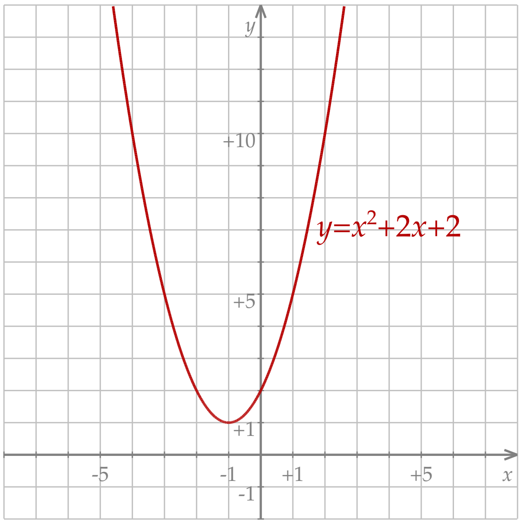
Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{2}x(x+2) < 1$.

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy daną nierówność.

$$-\frac{1}{2}x(x+2) < 1 \quad / \cdot (-2)$$
$$x^2 + 2x + 2 > 0$$
$$\Delta = 4 - 8 < 0.$$

To oznacza, że parabola będąca wykresem lewej strony powyższej nierówności znajduje się w całości powyżej osi Ox, czyli nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.



Odpowiedź: $x \in (-\infty, +\infty)$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Udowodnij, że reszta z dzielenia sumy kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, przy dzieleniu przez 18 jest równa 5.

ROZWIĄZANIE

Dwie kolejne liczby naturalne niepodzielne przez 3 możemy oznaczyć przez $x = 3n + 1$ i $y = 3n + 2$. Mamy wtedy

$$x^2 + y^2 = (3n+1)^2 + (3n+2)^2 =$$
$$= 9n^2 + 6n + 1 + 9n^2 + 12n + 4 = 18n^2 + 18n + 5.$$

Widać teraz, że liczba ta daje resztę 5 przy dzieleniu przez 18.

ZADANIE 29 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $5x(x^3+1)(2x-8)(x^2+4) = 0$.

ROZWIĄZANIE

Jednym z pierwiastków równania jest oczywiście $x = 0$. Pozostałe pierwiastki wyznaczamy sprawdzając, kiedy zerują się wyrażenia w nawiasach.

$$\begin{array}{lcl} x^3 + 1 = 0 & \iff & x = -1 \\ 2x - 8 = 0 & \iff & x = 4. \end{array}$$

Równanie ma więc 3 rozwiązania

$$\{-1, 0, 4\}.$$

Odpowiedź: $x \in \{-1, 0, 4\}$

ZADANIE 30 (2 PKT)

W dwóch pojemnikach znajdują się ponumerowane kule. W pierwszym pojemniku są kule z numerami: 1, 2, 3, 4, 5, w drugim z numerami: 4, 5, 6, 7, 8, 9. Losujemy po jednej kuli z każdego pojemnika i tworzymy liczbę dwucyfrową. Numer kuli wylosowanej z pierwszego pojemnika jest cyfrą dziesiątek, numer kuli wylosowanej z drugiego pojemnika jest cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzona liczba jest podzielna przez 4.

ROZWIĄZANIE

Liczbę z pierwszego pojemnika możemy wybrać 5, a z drugiego na 6 sposobów. W sumie jest więc

$$5 \cdot 6 = 30$$

zdarzeń elementarnych. Wypiszmy liczby podzielne przez 4, jakie możemy otrzymać w ten sposób.

$$16,\ 24,\ 28,\ 36,\ 44,\ 48,\ 56$$

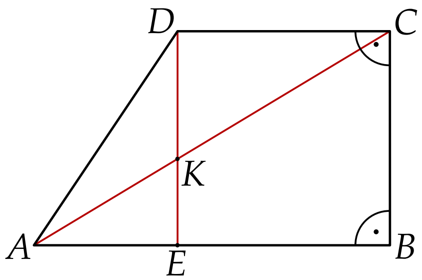
Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{7}{30}.$$

Odpowiedź: $\frac{7}{30}$

ZADANIE 31 (2 PKT)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ (rysunek) punkt K jest punktem przecięcia wysokości DE i przekątnej AC tego trapezu. Wiedząc, że $|CB| = |CD| = a$ i $|AB| = b$ wykaż, że pole P czworokąta $EBCK$ jest równe $P = \frac{2a^2b-a^3}{2b}$.



ROZWIĄZANIE

Zauważmy najpierw, że $AE = AB - EB = AB - CD = b - a$.

Sposób I

Trójkąty AEK i ABC sa podobne, więc

$$\begin{aligned}\frac{KE}{AE} &= \frac{BC}{AB}\\ \frac{KE}{b-a} &= \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad KE = \frac{a(b-a)}{b} = \frac{ab-a^2}{b}.\end{aligned}$$

Czworokąt $EBCK$ jest trapezem prostokątnym o podstawach KE i BC oraz wysokości EB. Jego pole jest więc równe

$$\frac{KE+BC}{2}\cdot EB = \frac{\frac{ab-a^2}{b}+a}{2}\cdot a = \frac{2ab-a^2}{2b}\cdot a = \frac{2a^2b-a^3}{2b}.$$

Sposób II

Tak jak poprzednio obliczamy: $KE = \frac{ab-a^2}{b}$. Pole czworokąta $EBCK$ obliczamy jako różnicę pól trójkątów ABC i AEK.

$$\begin{aligned}P &= P_{ABC} - P_{AEK} = \frac{1}{2}AB\cdot BC - \frac{1}{2}AE\cdot KE = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot\frac{a(b-a)}{b} = \\ &= \frac{a}{2b}\cdot\left(b^2-(b-a)^2\right) = \frac{a}{2b}\cdot\left(b^2-b^2+2ab-a^2\right) = \frac{a}{2b}(2ab-a^2) = \frac{2a^2b-a^3}{2b}.\end{aligned}$$

Sposób III

Trójkąty AEK i CDK mają równe kąty, więc są podobne. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\frac{DK}{DC} &= \frac{EK}{AE}\\ \frac{DK}{a} &= \frac{a-DK}{b-a}\\ DK(b-a) = a(a-DK) \quad &\Rightarrow \quad DK = \frac{a^2}{b}.\end{aligned}$$

Pole czworokąta $EBCK$ obliczamy jako różnicę pól kwadratu $EBCD$ i trójkąta prostokątnego CDK.

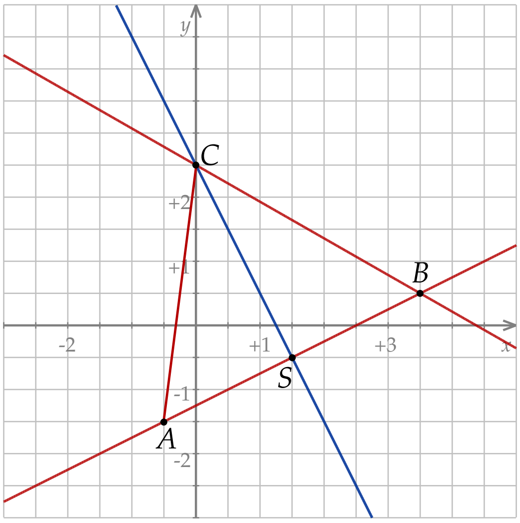
$$P = P_{EBCD} - P_{CDK} = a^2 - \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a^2}{b} = a^2\left(1-\frac{a}{2b}\right) = a^2\cdot\frac{2b-a}{2b} = \frac{2a^2b-a^3}{2b}.$$

ZADANIE 32 (5 PKT)

Punkty $A = \left(-\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$, $B = \left(3\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB. Ramię BC zawiera się w prostej o równaniu $8x+14y-35=0$. Oblicz współrzędne punktu C i pole tego trójkąta.

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od szkicowego rysunku.



Środek S odcinka AB ma współrzędne

$$S = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}}{2}, \frac{-1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Sposób I

Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny i AB jest jego podstawą, wierzchołek C leży na symetralnej odcinka AB. Napiszmy równanie tej symetralnej. Jest to zbiór punktów $P = (x,y)$, dla których

$$AP^2 = BP^2$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4} = x^2-7x+\frac{49}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}$$
$$8x+4y-10=0.$$

Szukamy teraz punktu wspólnego C tej symetralnej z podaną prostą BC

$$\begin{cases} 8x+4y-10=0 \\ 8x+14y-35=0. \end{cases}$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze i mamy

$$10y-25=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}.$$

Stąd $x = \frac{10-4y}{8} = 0$ i $C = \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Pozostało obliczyć pole trójkąta ABC.

$$AB = \sqrt{\left(3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$CS = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+9} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Pole trójkąta ABC jest więc równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CS = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{15}{2}.$$

Sposób II

Wiemy, że punkt C leży na prostej

$$\begin{aligned}
&8x+14y-35=0\\
&14y=-8x+35 \quad / : 14\\
&y=-\frac{4}{7}x+\frac{5}{2},
\end{aligned}$$

więc ma współrzędne postaci $C=\left(x,-\frac{4}{7}x+\frac{5}{2}\right)$. Wiemy ponadto, że trójkąt ABC jest równoramienny, więc

$$\begin{gathered}
AC^2 = BC^2\\
\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{4}{7}x+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{4}{7}x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\\
x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{16}{49}x^2-\frac{32}{7}x+16 = x^2-7x+\frac{49}{4}+\frac{16}{49}x^2-\frac{16}{7}x+4\\
\frac{40}{7}x=0 \quad\iff\quad x=0.
\end{gathered}$$

Stąd $C=\left(x,-\frac{4}{7}x+\frac{5}{2}\right)=\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

Pole obliczamy tak samo jak w poprzednim sposobie.

Odpowiedź: $C=\left(0,\frac{5}{2}\right)$, $P_{ABC}=\frac{15}{2}$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Funkcja kwadratowa $y=f(x)$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x\in(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$, a jej zbiorem wartości jest przedział $\left(-\infty,\frac{49}{8}\right\rangle$. Zapisz wzór funkcji kwadratowej $g(x)=f(x-2)$ w postaci ogólnej.

ROZWIĄZANIE

Ponieważ rozwiązaniem nierówności $f(x) < 0$ jest zbiór $(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$, więc wykres funkcji f jest parabolą zwróconą gałęziami w dół, która przecina oś Ox dla $x = -2$ i $x = 5$ Zatem funkcja f ma postać

$$f(x) = a(x+2)(x-5).$$

Ponieważ $a < 0$, więc największą wartość f przyjmuje w wierzchołku. Wierzchołek paraboli znajduje się dokładnie w środku między pierwiastkami, więc f przyjmuje wartość największą dla

$$x = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}.$$

Stąd

$$a\left(\frac{3}{2}+2\right)\left(\frac{3}{2}-5\right) = \frac{49}{8}$$

$$-\frac{49}{4}a = \frac{49}{8} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Zatem $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-5)$ i

$$g(x) = f(x-2) = -\frac{1}{2}((x-2)+2)((x-2)-5) =$$
$$= -\frac{1}{2}x(x-7) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x.$$

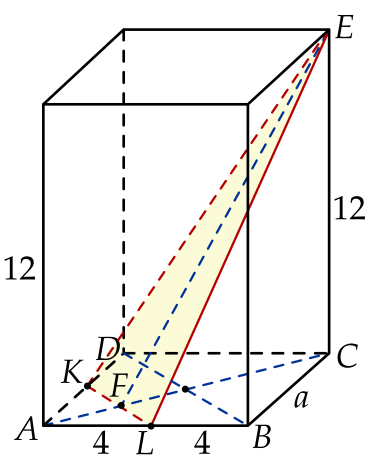
Odpowiedź: $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$

ZADANIE 34 (4 PKT)

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm, a jego wysokość 12 cm. Połączono środki dwóch sąsiednich krawędzi dolnej podstawy oraz najbardziej odległy od tego odcinka wierzchołek górnej podstawy. Oblicz pole otrzymanego trójkąta.

ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od szkicowego rysunku.



Podstawa KL otrzymanego trójkąta KLE jest odcinkiem łączącym środki boków w trójkącie ABD, więc

$$KL = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Ponadto

$$FC = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4} \cdot 8\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Wysokość FE trójkąta KLE obliczamy z trójkąta prostokątnego FCE.

$$FE = \sqrt{FC^2 + CE^2} = \sqrt{72 + 144} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}.$$

Pole przekroju jest więc równe

$$P_{KLE} = \frac{1}{2}KL \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{6} = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

Odpowiedź: $24\sqrt{3}$ $\mathbf{cm}^3$