POPRAWKOWY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

20 SIERPNIA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\log_{\sqrt{7}} 7$ jest równa

A) 2 B) 7 C) $\sqrt{7}$ D) $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Skorzystamy z definicji logarytmu

$$\log_a a^b = b.$$

Ponieważ

$$7 = \left(\sqrt{7}\right)^2,$$

mamy

$$\log_{\sqrt{7}} 7 = \log_{\sqrt{7}} \left(\sqrt{7}\right)^2 = 2.$$

Sposób II

Korzystamy ze wzoru

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

na zmianę podstawy logarytmu, oraz ze wzoru

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

Liczymy

$$\log_{\sqrt{7}} 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 \sqrt{7}} = \frac{1}{\log_7 7^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 2 (1 PKT)

Kwadrat liczby $x = 8 - 3\sqrt{7}$ jest równy

A) $127 + 48\sqrt{7}$ B) $127 - 48\sqrt{7}$ C) $1 - 48\sqrt{7}$ D) $1 + 48\sqrt{7}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} x^2 &= (8-3\sqrt{7})^2 = 8^2 - 2\cdot 8\cdot 3\sqrt{7} + (3\sqrt{7})^2 = \\ &= 64 - 48\sqrt{7} + 3^2\cdot(\sqrt{7})^2 = 64 - 48\sqrt{7} + 63 = \\ &= 127 - 48\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Jeżeli 75% liczby a jest równe 177 i 59% liczby b jest równe 177, to

A) $b - a = 26$ B) $b - a = 64$ C) $a - b = 26$ D) $a - b = 64$

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że

$$\begin{aligned} 75\%a = 177 \quad &\Rightarrow \quad a = \frac{177}{0,75} = 236 \\ 59\%b = 177 \quad &\Rightarrow \quad b = \frac{177}{0,59} = 300. \end{aligned}$$

Zatem

$$b - a = 300 - 236 = 64.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Równanie $x(5x+1) = 5x + 1$ ma dokładnie

A) jedno rozwiązanie: $x = 1$. B) dwa rozwiązania: $x = 1$ i $x = -1$.

C) dwa rozwiązania: $x = -\frac{1}{5}$ i $x = 1$. D) dwa rozwiązania: $x = \frac{1}{5}$ i $x = -1$.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Zauważmy, że po obu stronach równości mamy wyrażenie $(5x+1)$. Widać więc, że jednym z pierwiastków jest $x = -\frac{1}{5}$. Aby wyznaczyć drugi pierwiastek dzielimy obie strony równania przez $(5x+1)$.

$$x = 1.$$

Sposób II

Przekształcamy dane równanie.

$$5x^2 + x = 5x + 1$$
$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$\Delta = 16 + 20 = 36$$
$$x = \frac{4-6}{10} = -\frac{1}{5} \quad \text{lub} \quad x = \frac{4+6}{10} = 1.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 5 (1 PKT)

Para liczb $x = 3$ i $y = 1$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -x + 12y = a^2 \\ 2x + ay = 9, \end{cases}$ dla

A) $a = \frac{7}{3}$ B) $a = -3$ C) $a = 3$ D) $a = -\frac{7}{3}$

ROZWIĄZANIE

Podstawiamy $x = 2$ i $y = 1$ w drugim równaniu.

$$9 = 6 + a \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 6 (1 PKT)

Równanie $\frac{(x-2)(x+4)}{(x-4)^2} = 0$ ma dokładnie

A) jedno rozwiązanie: $x = 2$ B) jedno rozwiązanie: $x = -2$
C) dwa rozwiązania: $x = 2,\ x = -4$ D) dwa rozwiązania: $x = -2,\ x = 4$

ROZWIĄZANIE

Wyrażenia w liczniku zerują się dla $x = 2$ i $x = -4$. Ponadto żadna z tych liczb nie zeruje mianownika, więc liczby te są rozwiązaniami danego równania.

Odpowiedź: C

ZADANIE 7 (1 PKT)

Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = 9 - (3-x)^2$ są liczby
A) 0 oraz 3 B) -6 oraz 6 C) 0 oraz -6 D) 0 oraz 6

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekształcamy dany wzór korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów

$$\begin{aligned} 9-(3-x)^2 &= 3^2-(3-x)^2 = \\ &= (3-(3-x))(3+(3-x)) = x(6-x). \end{aligned}$$

Widać teraz, że miejscami zerowymi tej funkcji są $x = 0$ i $x = 6$.

Sposób II

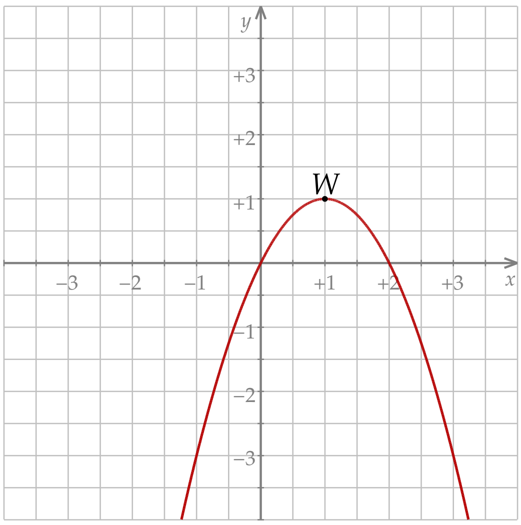
Rozwiązujemy równanie

$$\begin{aligned} &9-(3-x)^2 = 0 \\ &9-(9-6x+x^2) = 0 \\ &0 = x^2-6x = x(x-6) \\ &x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 6. \end{aligned}$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 8 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej g. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1,1)$.



Zbiorem wartości funkcji g jest przedział
A) $(-\infty, 0\rangle$ B) $\langle 0, 2\rangle$ C) $\langle 1, +\infty)$ D) $(-\infty, 1\rangle$

ROZWIĄZANIE

Zbiorem wartości funkcji przedstawionej na wykresie jest przedział $(-\infty,1\rangle$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 9 (1 PKT)

Liczbą większą od 5 jest

A) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ B) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{5}}$ C) $125^{\frac{2}{3}}$ D) $125^{\frac{1}{3}}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{5}} = (25)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{25} < \sqrt{25} = 5$$

$$125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$$

$$125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 10 (1 PKT)

Punkt $A=(a,3)$ leży na prostej określonej równaniem $y=\frac{3}{4}x+6$. Stąd wynika, że

A) $a=-4$ B) $a=4$ C) $a=\frac{33}{4}$ D) $a=\frac{39}{4}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$3 = \frac{3}{4}a+6$$

$$-3 = \frac{3}{4}a \quad \Rightarrow \quad a=(-3)\cdot\frac{4}{3}=-4.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 11 (1 PKT)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są dwa wyrazy: $a_1=-11$ oraz $a_9=5$. Suma dziewięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A) -24 B) -27 C) -16 D) -18

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Korzystamy ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Mamy zatem

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{-11+5}{2} \cdot 9 = -3 \cdot 9 = -27.$$

Sposób II

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$5 = a_9 = a_1 + 8r = -11 + 8r$$
$$16 = 8r \quad \Rightarrow \quad r = 2.$$

Korzystamy teraz ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

Mamy zatem

$$S_9 = \frac{2 \cdot (-11) + 8 \cdot 2}{2} \cdot 9 = (-3) \cdot 9 = -27.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geqslant 1$, są liczbami dodatnimi. Drugi wyraz tego ciągu jest równy 162, a piąty wyraz jest równy 48. Oznacza to, że iloraz tego ciągu jest równy

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru $a_n = a_1q^{n-1}$ na n-ty wyraz ciągu geometrycznego mamy

$$48 = a_5 = a_2q^3 = 162q^3 \quad / : 162$$
$$q^3 = \frac{48}{162} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27} \quad / \sqrt[3]{\ }$$
$$q = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: **A**

Zadanie 13 (1 pkt)

Cosinus kąta ostrego α jest równy $\frac{12}{13}$. Wtedy

A) $\sin\alpha = \frac{13}{12}$ B) $\sin\alpha = \frac{1}{13}$ C) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ D) $\sin\alpha = \frac{25}{169}$

Rozwiązanie

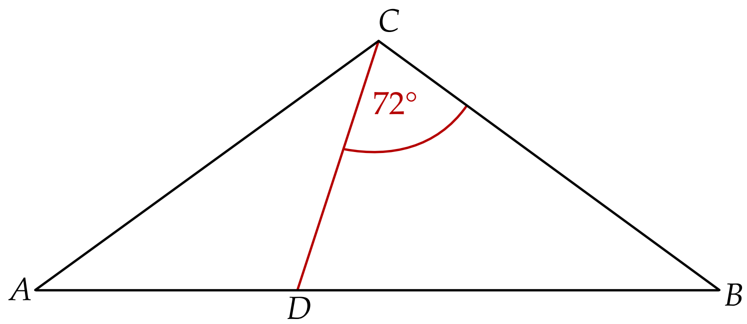
Obliczmy $\sin\alpha$ (z jedynki trygonometrycznej).

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

Odpowiedź: C

Zadanie 14 (1 pkt)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Na podstawie AB tego trójkąta leży punkt D, taki że $|AD| = |CD|$, $|BC| = |BD|$ oraz $\measuredangle BCD = 72^\circ$ (zobacz rysunek).

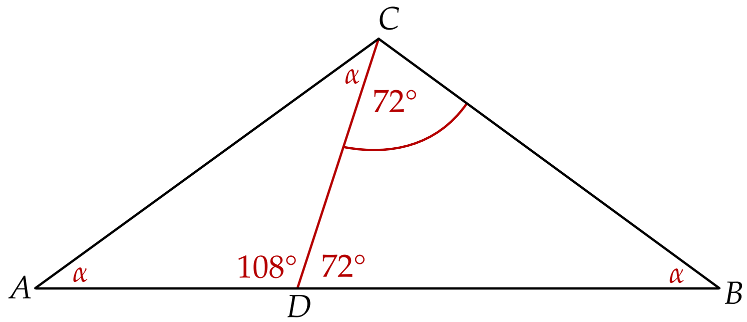


Wynika stąd, że kąt ACD ma miarę

A) 38° B) 36° C) 42° D) 40°

Rozwiązanie

Wiemy, że trójkąty ACD i ABC są równoramienne,



więc jeżeli oznaczymy $\alpha = \measuredangle ACD$, to

$$\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = \measuredangle ACD = \alpha.$$

Sposób I

Suma kątów w trójkącie ABC jest równa 180°, więc

$$180^\circ = \alpha + \alpha + \alpha + 72^\circ = 3\alpha + 72^\circ$$
$$108 = 3\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36^\circ.$$

Sposób II

Wiemy, że trójkąt DBC jest równoramienny, więc

$$\measuredangle BDC = \measuredangle BCD = 72^\circ$$
$$\alpha = \measuredangle DBC = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ.$$

Sposób III

Tak jak poprzednio zauważamy, że $\measuredangle BDC = \measuredangle BCD = 72^\circ$. Stąd

$$\measuredangle ADC = 180^\circ - \measuredangle BDC = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Patrzymy teraz na trójkąt równoramienny ADC.

$$\alpha = \frac{180^\circ - \measuredangle ADC}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Odpowiedź: **B**

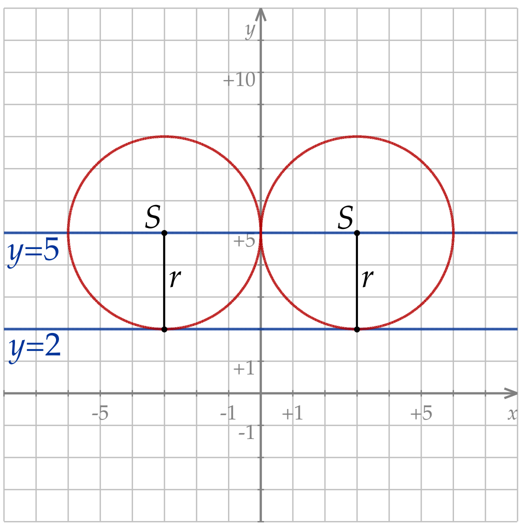
ZADANIE 15 (1 PKT)

Okrąg, którego środkiem jest punkt $S = (a, 5)$, jest styczny do osi Oy i do prostej o równaniu $y = 2$. Promień tego okręgu jest równy

A) 3 B) 5 C) 2 D) 4

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.



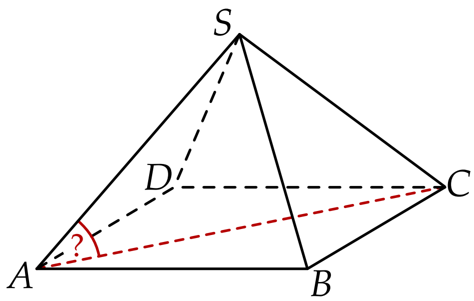
Wiemy, że środek okręgu leży na prostej $y = 5$ i okrąg ten jest styczny do prostej $y = 2$. To oznacza, że promień tego okręgu jest równy odległości między tymi prostymi

$$r = 5 - 2 = 3.$$

Odpowiedź: **A**

Zadanie 16 (1 pkt)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.

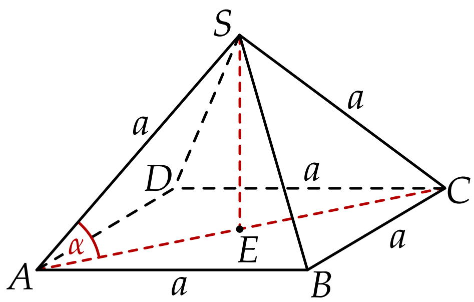


Miara kąta SAC jest równa

A) 60° B) 45° C) 90° D) 75°

Rozwiązanie

Niech a oznacza długość każdej z krawędzi ostrosłupa.



Sposób I

W podstawie ostrosłupa jest kwadrat, więc

$$EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Z trójkąta SEA mamy więc

$$\cos\alpha = \frac{EA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

To oznacza, że $\alpha = 45^\circ$.

Sposób II

Zauważmy, że trójkąty ABC i ASC mają równe długości boków, więc są przystające. W takim razie

$$\measuredangle\alpha = \measuredangle CAS = \measuredangle CAB = 45^\circ.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Proste o równaniach $y = (4m+1)x - 19$ i $y = (5m-4)x + 20$ są równoległe, gdy
A) $m = 5$ B) $m = -\frac{1}{4}$ C) $m = \frac{5}{4}$ D) $m = -5$

ROZWIĄZANIE

Proste są równoległe jeżeli mają równe współczynniki kierunkowe. Mamy zatem równanie

$$4m + 1 = 5m - 4 \quad \iff \quad m = 5.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 18 (1 PKT)

W układzie współrzędnych punkt $S = (40, 40)$ jest środkiem odcinka KL, którego jednym z końców jest punkt $K = (0, 8)$. Zatem
A) $L = (20, 24)$ B) $L = (-80, -72)$ C) $L = (-40, -24)$ D) $L = (80, 72)$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Wiemy, że $S = \frac{K+L}{2}$, więc

$$\begin{aligned} 2S = K + L \quad \Rightarrow \quad L &= 2S - K = 2(40, 40) - (0, 8) = \\ &= (80, 80) - (0, 8) = (80, 72). \end{aligned}$$

Sposób II

Ze wzoru:

$$(x_S, y_S) = \left(\frac{x_K + x_L}{2}, \frac{y_K + y_L}{2}\right)$$

na współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka o końcach $K = (x_K, y_K)$ i $L = (x_L, y_L)$ mamy

$$S = (40, 40) = \left(\frac{0 + x_L}{2}, \frac{8 + y_L}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 40 = \frac{0+x_L}{2} & / \cdot 2 \\ 40 = \frac{8+y_L}{2} & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80 = 0 + x_L \\ 80 = 8 + y_L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_L = 80 \\ y_L = 72. \end{cases}$$

Zatem $L = (80, 72)$.

Odpowiedź: **D**

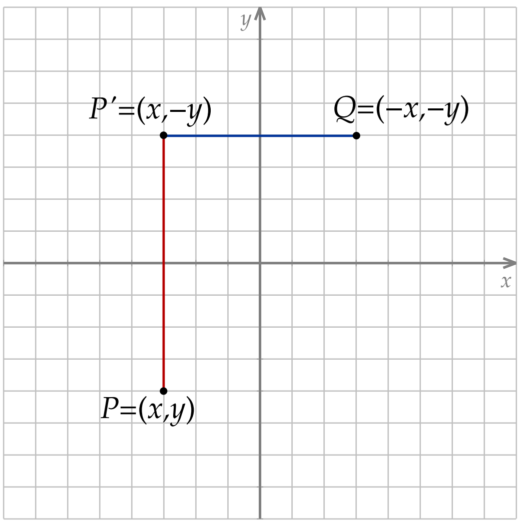
ZADANIE 19 (1 PKT)

Punkt $P = (-6, -8)$, przekształcono najpierw w symetrii względem osi Ox, a potem w symetrii względem osi Oy. W wyniku tych przekształceń otrzymano punkt Q. Zatem

A) $Q = (6, 8)$ B) $Q = (-6, -8)$ C) $Q = (8, 6)$ D) $Q = (-8, -6)$

ROZWIĄZANIE

Robimy szkicowy rysunek.



Z rysunku jest jasne, że

$$P' = (-6, 8)$$
$$Q = (6, 8).$$

Odpowiedź: **A**

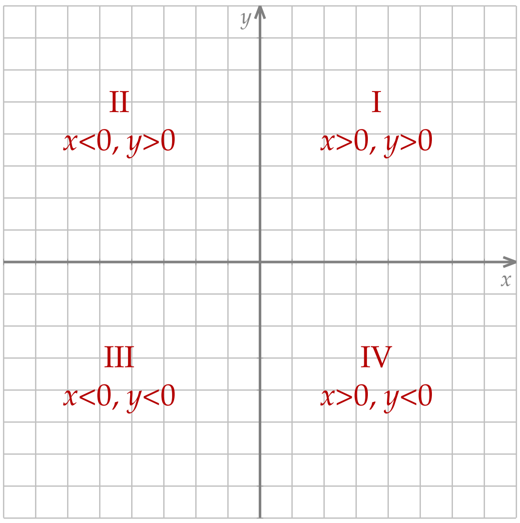
Zadanie 20 (1 pkt)

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie danych jest 5 punktów: $A = (1,4)$, $B = (-5,-1)$, $C = (-5,3)$, $D = (6,-4)$, $P = (-30,-76)$. Punkt P należy do tej samej ćwiartki układu współrzędnych co punkt

A) A B) B C) C D) D

Rozwiązanie

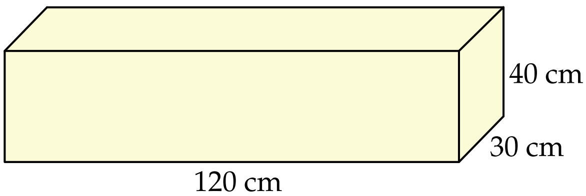
Punkt P ma obie współrzędne ujemne, więc znajduje się w III ćwiartce układu współrzędnych. Dokładnie tak samo jak punkt B.



Odpowiedź: B

Zadanie 21 (1 pkt)

Dany jest prostopadłościan o wymiarach 30 cm $\times$ 40 cm $\times$ 120 cm (zobacz rysunek), a ponadto dane są cztery odcinki a,b,c,d, o długościach – odpowiednio – 119 cm, 121 cm, 129 cm i 131 cm.



Przekątna tego prostopadłościanu jest dłuższa

A) tylko od odcinka a.

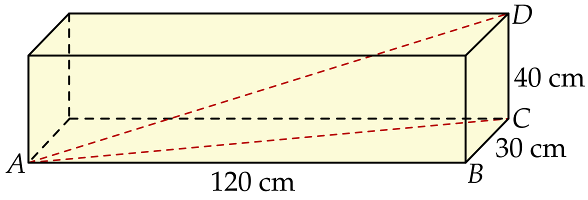
B) tylko od odcinków a i b.

C) tylko od odcinków a,b i c.

D) od wszystkich czterech danych odcinków.

ROZWIĄZANIE

Dorysujmy przekątną, o której mowa w treści zadania.



Korzystamy dwa razy z twierdzenia Pitagorasa.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 144 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^2 = 153 \cdot 10^2$$
$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{153 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10^2} = \sqrt{169 \cdot 10^2} = 13 \cdot 10 = 130 \text{ cm}.$$

Przekątna jest więc dłuższa tylko od pierwszych trzech odcinków.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 22 (1 PKT)

Pole powierzchni całkowitej pewnego stożka jest 3 razy większe od pola powierzchni pewnej kuli. Promień tej kuli jest równy 2 i jest taki sam jak promień podstawy tego stożka. Tworząca tego stożka ma długość równą

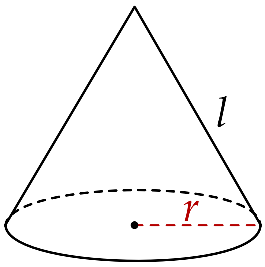
A) 12 B) 11 C) 24 D) 22

ROZWIĄZANIE

Pole powierzchni kuli o promieniu $r = 2$ jest równe

$$4\pi r^2 = 16\pi,$$

więc pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $3 \cdot 16\pi = 48\pi$.



Mamy stąd

$$48\pi = \pi r^2 + \pi r l = 4\pi + 2\pi l \quad / : 2\pi$$
$$l = 24 - 2 = 22.$$

Odpowiedź: **D**

Zadanie 23 (1 pkt)

Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb naturalnych: 3, 10, 5, x, x, x, x, 12, 19, 7 jest równa 12. Mediana tych liczb jest równa

A) 14 B) 12 C) 16 D) x

Rozwiązanie

Wykorzystujemy podaną informację o średniej, aby obliczyć x.

$$\frac{3+10+5+x+x+x+x+12+19+7}{10} = 12 \quad / \cdot 10$$
$$56+4x = 120 \quad \Rightarrow \quad 4x = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 16.$$

Wypisujemy teraz dane liczby w kolejności rosnącej.

$$3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 16,\ 16,\ 16,\ 16,\ 19.$$

Liczb jest 10, więc mediana to średnia dwóch środkowych liczb.

$$\frac{12+16}{2} = 14.$$

Odpowiedź: **A**

Zadanie 24 (1 pkt)

Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych parzystych, w których występują wyłącznie cyfry 1, 2, 3, jest

A) 54 B) 81 C) 8 D) 27

Rozwiązanie

Cyfrą jedności utworzonej liczby musi być 2 (bo ma być parzysta). Każdą z pozostałych cyfr możemy wybrać na 3 sposoby, więc jest

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

liczb spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: **D**

Zadanie 25 (1 pkt)

W grupie 60 osób (kobiet i mężczyzn) jest 35 kobiet. Z tej grupy losujemy jedną osobę. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej osoby jest takie samo. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy mężczyznę, jest równe

A) $\frac{1}{60}$ B) $\frac{1}{25}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{5}{12}$

ROZWIĄZANIE

Prawdopodobieństwo wybrania mężczyzny jest równe

$$\frac{60-35}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}.$$

Odpowiedź: **D**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $(x^2 - 16)(x^3 - 1) = 0$.

ROZWIĄZANIE

Wyrażenie w pierwszym nawiasie zeruje się gdy

$$x^2 = 16 = 4^2 \quad \iff \quad x = \pm 4.$$

a wyrażenie w drugim nawiasie gdy

$$x^3 = 1 \quad \iff \quad x = 1.$$

Odpowiedź: $x \in \{-4, 1, 4\}$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$.

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$$
$$\Delta = 25 - 24 = 1$$
$$x = \frac{5-1}{4} = 1 \quad \text{lub} \quad x = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$x \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle.$$

Odpowiedź: $\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Wykaż, że dla dowolnej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x + \frac{1-x}{x} \geqslant 1$.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekształcamy daną nierówność w sposób równoważny. Ponieważ $x > 0$, możemy nierówność pomnożyć stronami przez x.

$$\begin{aligned} & x+\frac{1-x}{x} \geqslant 1 \quad / \cdot x \\ & x^2+(1-x) \geqslant x \\ & x^2-2x+1 \geqslant 0 \\ & (x-1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a przekształcaliśmy przy pomocy równoważności, więc wyjściowa nierówność też musiała być prawdziwa.

Sposób II

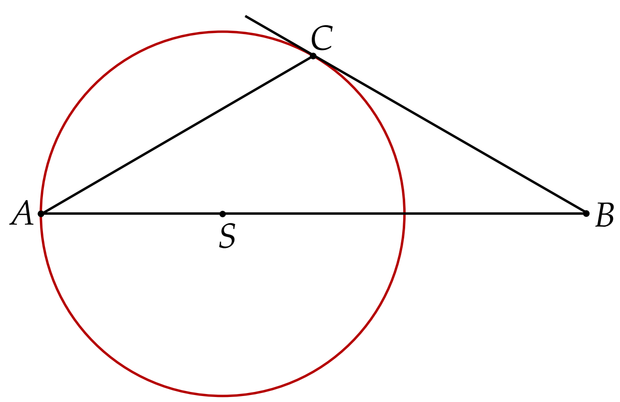
Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$\begin{aligned} & x+\frac{1-x}{x} \geqslant 1 \\ & \frac{x^2+1-x-x}{x} \geqslant 0 \\ & \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście spełniona (bo $x > 0$), więc wyjściowa nierówność też musi być prawdziwa.

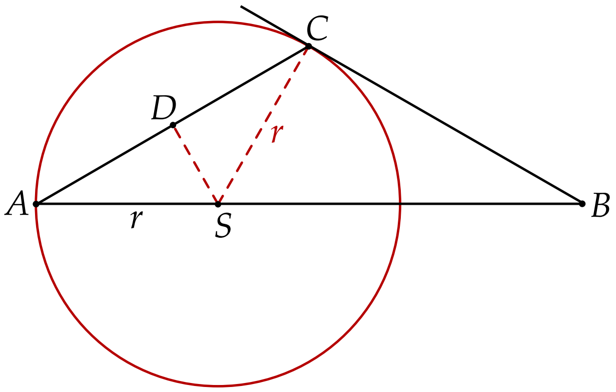
ZADANIE 29 (2 PKT)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r, a środek S tego okręgu leży na boku AB trójkąta (zobacz rysunek). Prosta BC jest styczna do tego okręgu w punkcie C, a ponadto $|AC| = r\sqrt{3}$. Wykaż, że kąt ACB ma miarę 120°.



Rozwiązanie

Dorysujmy promień SC i niech D będzie środkiem cięciwy AC.



Styczna BC jest prostopadła do promienia SC, więc

$$\measuredangle SCB = 90^\circ.$$

Ponadto

$$\cos \measuredangle SCD = \frac{DC}{SC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{SC} = \frac{\frac{1}{2}\cdot r\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

To oznacza, że $\measuredangle SCD = 30^\circ$ i

$$\measuredangle ACB = \measuredangle SCD + \measuredangle SCB = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ.$$

Zadanie 30 (2 pkt)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana liczba ma w zapisie dziesiętnym cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru $\{1,3,5,7,9\}$, i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru $\{0,2,4,6,8\}$.

Rozwiązanie

Wszystkich liczb dwucyfrowych jest

$$|\Omega| = 99 - 9 = 90,$$

a liczb dwucyfrowych spełniających warunki zadania jest

$$5 \cdot 5 = 25$$

(każdą z cyfr możemy wybrać na 5 sposobów). Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{25}{90} = \frac{5}{18}.$$

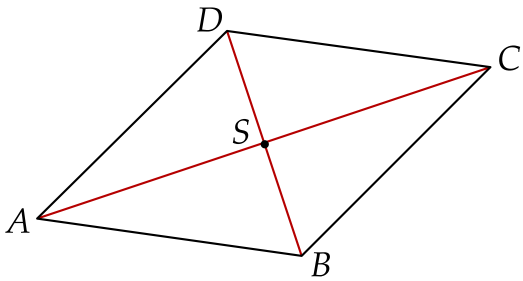
Odpowiedź: $\frac{5}{18}$

ZADANIE 31 (2 PKT)

Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = \left(-\frac{21}{2}, -1\right)$. Punkty A i C leżą na prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$. Wyznacz równanie prostej BD.

ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od szkicowego rysunku.



Ponieważ przekątne rombu są prostopadłe więc prosta BD jest prostopadła do AC, czyli jest to prosta postaci $y = -3x + b$. Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu S.

$$-1 = -3 \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) + b \quad / \cdot 2$$
$$-2 = 63 + 2b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{65}{2}.$$

Zatem przekątna BD ma równanie: $y = -3x - \frac{65}{2}$.

Odpowiedź: $y = -3x - \frac{65}{2}$

ZADANIE 32 (4 PKT)

W ciągu arytmetycznym $\{a_1, a_2, \ldots, a_{39}, a_{40}\}$ suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400. Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu arytmetycznego.

ROZWIĄZANIE

Ponieważ

$$a_2 = a_1 + r,\ a_4 = a_3 + r, \ldots, a_{40} = a_{39} + r,$$

mamy

$$\begin{cases} 1340 = a_2 + a_4 + \cdots + a_{40} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{39} + 20r \\ 1400 = a_1 + a_3 + \cdots + a_{39}. \end{cases}$$

Odejmując od pierwszego równania drugie, mamy

$$20r = -60 \quad \Rightarrow \quad r = -3.$$

Zauważmy teraz, że suma wszystkich 40 wyrazów jest równa $1340 + 1400 = 2740$, co daje nam równanie

$$\begin{aligned}
&2740 = S_{40} = \frac{2a_1 + 39r}{2} \cdot 40 = (2a_1 + 39 \cdot (-3)) \cdot 20 \quad / : 20 \\
&137 = 2a_1 - 117 \quad \Rightarrow \quad 2a_1 = 254 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 127.
\end{aligned}$$

Zatem

$$a_{40} = a_1 + 39r = 127 + 39 \cdot (-3) = 10.$$

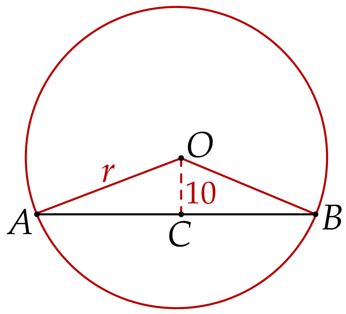
Odpowiedź: $a_{40} = 10$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Środek okręgu leży w odległości 10 cm od cięciwy tego okręgu. Długość tej cięciwy jest o 22 cm większa od promienia tego okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

ROZWIĄZANIE

Niech C będzie środkiem danej cięciwy AB, a O niech będzie środkiem okręgu.



Piszemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ACO.

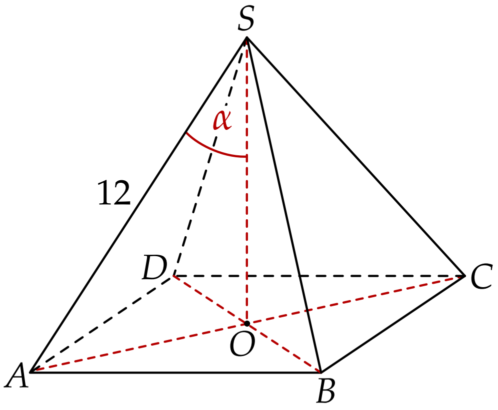
$$\begin{aligned}
&AO^2 = AC^2 + CO^2 \\
&r^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + 100 = \left(\frac{r+22}{2}\right)^2 + 100 \quad / \cdot 4 \\
&4r^2 = r^2 + 44r + 484 + 400 \\
&3r^2 - 44r - 884 = 0 \\
&\Delta = 44^2 + 4 \cdot 3 \cdot 884 = 12544 = 112^2 \\
&r = \frac{44 - 112}{6} < 0 \quad \text{lub} \quad r = \frac{44 + 112}{6} = 26.
\end{aligned}$$

Ujemne rozwiązanie oczywiście odrzucamy i mamy $r = 26$ cm.

Odpowiedź: **26 cm**

ZADANIE 34 (5 PKT)

Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest równa 12 (zobacz rysunek). Krawędź boczna tworzy z wysokością tego ostrosłupa kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez H wysokość ostrosłupa. Wtedy z podanego tangensa kąta α mamy

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{AO}{SO} = \frac{AO}{H} \quad \Rightarrow \quad AO = \frac{2}{\sqrt{5}}H.$$

Piszemy teraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym AOS.

$$\begin{aligned} AS^2 &= AO^2 + SO^2 \\ 144 &= \frac{4}{5}H^2 + H^2 = \frac{9}{5}H^2 \quad / \cdot \frac{5}{9} \\ H^2 &= 144 \cdot \frac{5}{9} = 16 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad H = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Jeżeli ponadto oznaczymy $AB = BC = a$, to

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = AO = \frac{2}{\sqrt{5}}H = 8 \quad / \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ a = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (8\sqrt{2})^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}.$$

Odpowiedź: $V = \frac{512\sqrt{5}}{3}$