LUBELSKA PRÓBA PRZED MATURĄ Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

GRUPA II

5 MARCA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Rozwiązaniem nierówności $(x-1)^2 \geqslant x^2 - 1$ jest zbiór

A) $(-\infty, 1)$ B) $(-\infty, 1\rangle$ C) $(1, +\infty)$ D) $\langle 1, +\infty)$

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy daną nierówność korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy.

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 \geqslant x^2 - 1 \\ &x^2 - 2x + 1 \geqslant x^2 - 1 \\ &2 \geqslant 2x \quad \iff \quad 1 \geqslant x. \end{aligned}$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 2 (1 PKT)

Wyrażenie $3\log x + \log y - 2\log z$ jest równe

A) $\log \frac{3xy}{z^2}$ B) $\log \frac{xy^2}{z}$ C) $\log \frac{x^3y}{z^2}$ D) $\log \frac{3xy}{2z}$

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzorów

$$\begin{aligned} \log a + \log b &= \log(ab) \\ \log a - \log b &= \log \frac{a}{b} \\ n\log a &= \log a^n. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} 3\log x + \log y - 2\log z &= \log x^3 + \log y - \log z^2 = \\ &= \log(x^3y) - \log z^2 = \log \frac{x^3y}{z^2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 3 (1 PKT)

Liczba o 10% mniejsza od liczby, która jest o 20% większa od liczby 1200 jest równa

A) 1296 B) 1340 C) 1440 D) 1080

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$90\% \cdot 120\% \cdot 1200 = 0,9 \cdot 1,2 \cdot 1200 = 0,9 \cdot 1440 = 1296.$$

Odpowiedź: **A**

FORUM.ZADANIA.INFO

ZADANIE 4 (1 PKT)

Suma liczby odwrotnej do $\frac{3}{x+1}$ i przeciwnej do $\frac{1-2x}{15}$ jest równa

A) $\frac{7x-4}{15}$ B) $\frac{x+7}{15}$ C) $\frac{4x+7}{15}$ D) $\frac{7x+4}{15}$

ROZWIĄZANIE

Wykonujemy działania

$$\frac{1}{\frac{3}{x+1}} + \left(-\frac{1-2x}{15}\right) = \frac{x+1}{3} + \frac{2x-1}{15} = \frac{5x+5}{15} + \frac{2x-1}{15} = \frac{7x+4}{15}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 5 (1 PKT)

Punkt o współrzędnych $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ należy do wykresu funkcji logarytmicznej opisanej wzorem

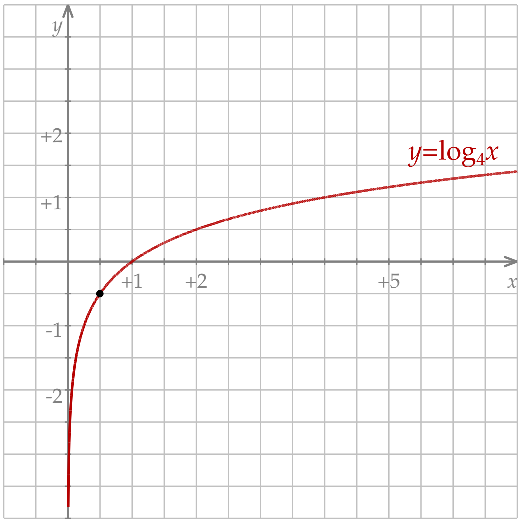
A) $f(x) = \log_2 x$ B) $f(x) = \log_4 x$ C) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ D) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$
$$\log_4 \frac{1}{2} = \log_4 4^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$
$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem podany punkt należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_4 x$.



Odpowiedź: B

ZADANIE 6 (1 PKT)

Jeżeli wiadomo, że punkt $P = (3,4)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2^x + m$, to
A) $m = -4$ B) $m = -2$ C) $m = 4$ D) $m = 2$

ROZWIĄZANIE

Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru funkcji

$$\begin{aligned} &4 = 2^3 + m \\ &4 - 8 = m \\ &m = -4. \end{aligned}$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 7 (1 PKT)

Rozwiązaniem równania $\frac{2x-4}{x+4} = 3$ $(x \neq -4)$ jest liczba
A) -16 B) -18 C) 16 D) 18

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} &\frac{2x-4}{x+4} = 3 \quad / \cdot (x+4) \\ &2x - 4 = 3x + 12 \\ &-16 = x. \end{aligned}$$

Odpowiedź: A

Zadanie 8 (1 pkt)

Jeżeli argument funkcji $f(x) = 4x - 1$ wzrośnie o 5, to wartość funkcji wzrośnie o
A) 18 B) 20 C) 19 D) 21

Rozwiązanie

Liczymy

$$f(x+5) - f(x) = 4(x+5) - 1 - (4x-1) = 4x + 20 - 1 - 4x + 1 = 20.$$

Odpowiedź: B

Zadanie 9 (1 pkt)

W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (x, 6)$, $B = (6, -4)$ oraz $M = (2, y)$. Jeżeli punkt M jest środkiem odcinka AB, to
A) $x = -2,\ y = 1$ B) $x = 2,\ y = -1$ C) $x = -2,\ y = 3$ D) $x = 2,\ y = 3$

Rozwiązanie

Ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy układ równań

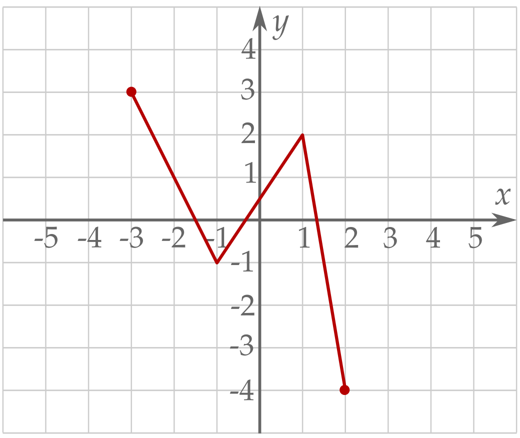
$$\begin{cases} 2 = \frac{x+6}{2} \\ y = \frac{6-4}{2}. \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy $x = 4 - 6 = -2$, a z drugiego $y = 1$.

Odpowiedź: A

Zadanie 10 (1 pkt)

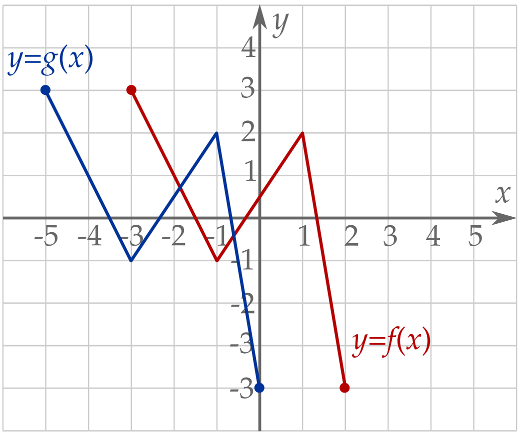
Jeśli na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$, to dziedziną funkcji $g(x) = f(x+2)$ jest zbiór



A) $\langle -2, 5\rangle$ B) $\langle -5, 0\rangle$ C) $\langle -1, 4\rangle$ D) $\langle -7, 1\rangle$

ROZWIĄZANIE

Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -3, 2\rangle$, a wykres funkcji g powstaje z wykresu funkcji f przez przesunięcie o 2 jednostki w lewo.



Zatem dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -5, 0\rangle$.

Odpowiedź: B

ZADANIE 11 (1 PKT)

Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{3x-7}$ jest liczba
A) -3 B) -2 C) 3 D) 2

ROZWIĄZANIE

Funkcja $\sqrt{x}$ jest określona tylko dla $x \geqslant 0$, zatem

$$3x - 7 \geqslant 0 \quad \iff \quad x \geqslant \frac{7}{3} \approx 2,3.$$

Zatem najmniejszą liczbą całkowitą należącą do dziedziny jest $x = 3$.

Odpowiedź: C

ZADANIE 12 (1 PKT)

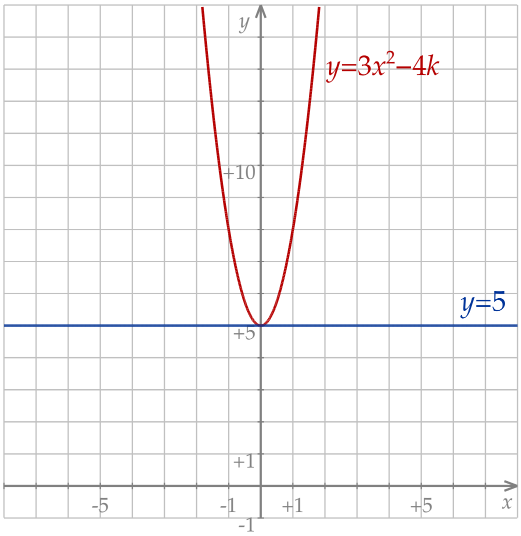
Jeśli wiadomo, że wierzchołek funkcji $f(x) = 3x^2 - 4k$ należy do prostej $y = 5$, to wartość liczbowa współczynnika k jest równa
A) $k = \frac{5}{4}$ B) $k = -\frac{4}{5}$ C) $k = \frac{4}{5}$ D) $k = -\frac{5}{4}$

ROZWIĄZANIE

Wierzchołek paraboli w postaci kanonicznej

$$y = a(x - x_w)^2 + y_w$$

ma współrzędne (x_w, y_w). Zatem w naszej sytuacji jest to punkt $(0, -4k)$.



Z drugiej strony wiemy, że punkt ten ma drugą współrzędną równą 5. W takim razie

$$-4k = 5 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{5}{4}.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 13 (1 PKT)

Liczbę $\frac{7}{11}$ przybliżono z dokładnością do 10^{-1}. Błąd względny tego przybliżenia jest równy

A) $\frac{4}{70}$ B) $\frac{3}{70}$ C) $\frac{5}{70}$ D) $\frac{6}{70}$

ROZWIĄZANIE

Ponieważ

$$0,636363\ldots,$$

to przybliżenie, o którym mowa w treści zadania to 0,6. Liczymy błąd bezwzględny

$$\left|\frac{7}{11} - 0,6\right| = \frac{7}{11} - \frac{3}{5} = \frac{35-33}{55} = \frac{2}{55}.$$

Obliczamy błąd względny

$$\frac{\frac{2}{55}}{\frac{7}{11}} = \frac{2}{55} \cdot \frac{11}{7} = \frac{2}{35} = \frac{4}{70}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 14 (1 PKT)

Jeśli w ciągu arytmetycznym $a_2 = 12$ i $a_6 = 28$, to

A) $a_1 + a_4 = 30$ B) $a_6 - a_2 = 18$ C) $a_2 + a_5 = 36$ D) $a_5 - a_3 = 10$

ROZWIĄZANIE

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego mamy

$$\begin{cases} 12 = a_2 = a_1 + r \\ 28 = a_6 = a_1 + 5r. \end{cases}$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze mamy

$$16 = 4r \quad \Rightarrow \quad r = 4.$$

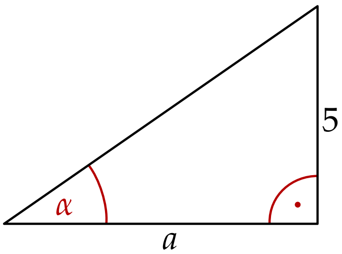
Zatem $a_1 = 12 - r = 8$ i

$$a_2 + a_5 = 12 + (28 - 4) = 12 + 24 = 36.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 15 (1 PKT)

Jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, to długość przyprostokątnej a danego trójkąta (patrz rysunek) jest równa



A) $5\sqrt{15}$ B) $4\sqrt{15}$ C) $6\sqrt{15}$ D) $7\sqrt{15}$

ROZWIĄZANIE

Z podanego sinusa obliczamy długość c przeciwprostokątnej

$$\frac{1}{4} = \sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{5}{c} \quad \Rightarrow \quad c = 20.$$

Stąd

$$a = \sqrt{c^2 - 5^2} = \sqrt{400 - 25} = 5\sqrt{16 - 1} = 5\sqrt{15}.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 16 (1 PKT)

Tangens kąta ostrego α jest równy 0,6. Wówczas

A) $\alpha = 40^\circ$ B) $\alpha < 40^\circ$ C) $\alpha > 40^\circ$ D) $\alpha = 30^\circ$

ROZWIĄZANIE

Sprawdzamy w tablicach, że $\alpha \approx 31^\circ$.

Odpowiedź: **B**

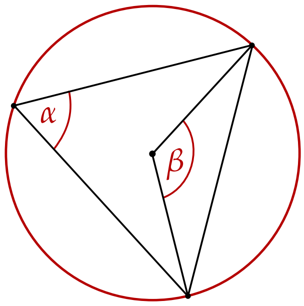
ZADANIE 17 (1 PKT)

Miara kąta wpisanego w okrąg jest o 50° mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Zatem miara kąta wpisanego jest równa

A) 50° B) 40° C) 60° D) 70°

ROZWIĄZANIE

Miara kąta środkowego jest zawsze dwa razy większa od miary kąta wpisanego opisanego na tym samym łuku, zatem przy oznaczeniach z obrazka mamy $\beta = 2\alpha$.



Ponadto wiemy, że

$$\alpha = \beta - 50^\circ = 2\alpha - 50^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 50^\circ.$$

Odpowiedź: **A**

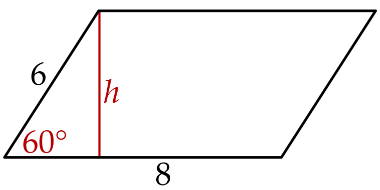
ZADANIE 18 (1 PKT)

Pole równoległoboku o kącie ostrym równym 60° i długości boków wychodzących z wierzchołka tego kąta równych 6 i 8 jest równe

A) $16\sqrt{3}$ B) $24\sqrt{2}$ C) 24 D) $24\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy równoległobok.



Materiał pobrany z serwisu www.zadania.info

Sposób I

Ze wzoru z sinusem na pole równoległoboku mamy

$$P = 6 \cdot 8 \sin 60^\circ = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}.$$

Sposób II

Obliczamy wysokość równoległoboku.

$$\frac{h}{6} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad h = 3\sqrt{3}.$$

Zatem

$$P = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Funkcja liniowa $f(x) = (2+3k)x + 3k - 2$ nie ma miejsc zerowych dla

A) $k = \frac{1}{2}$ B) $k = \frac{2}{3}$ C) $k = -\frac{1}{2}$ D) $k = -\frac{2}{3}$

ROZWIĄZANIE

Funkcja f jest funkcją liniową, więc nie będzie miała miejsc zerowych jeżeli będzie funkcją stałą która nie jest tożsamościowo równa 0. Zatem musimy rozwiązać równanie

$$\begin{aligned} 2 + 3k &= 0 \\ 3k &= -2 \quad \iff \quad k = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

W tej sytuacji mamy funkcję stałą $y = -4$.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Jeżeli suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określona jest wzorem $S_n = 4n^2 - n$, to wartość piątego wyrazu tego ciągu jest równa

A) 35 B) 33 C) 60 D) 95

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} a_5 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = S_5 - S_4 = \\ &= (4 \cdot 25 - 5) - (4 \cdot 16 - 4) = 95 - 60 = 35. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **A**

Materiał pobrany z serwisu www.zadania.info

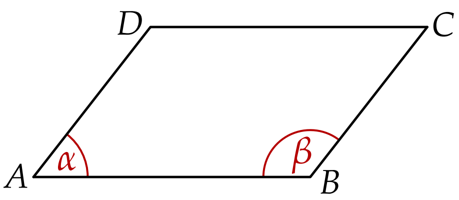
ZADANIE 21 (1 PKT)

Dwa sąsiednie kąty równoległoboku różnią się o 50°. Kąt ostry tego równoległoboku ma miarę

A) 45° B) 65° C) 55° D) 75°

ROZWIĄZANIE

Naszkicujmy sobie równoległobok.



Ponieważ suma dwóch sąsiednich kątów równoległoboku jest równa 180°, mamy układ równań

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \beta - \alpha = 50^\circ. \end{cases}$$

Odejmujemy od pierwszego równania drugie i mamy

$$2\alpha = 130^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 65^\circ.$$

Odpowiedź: **B**

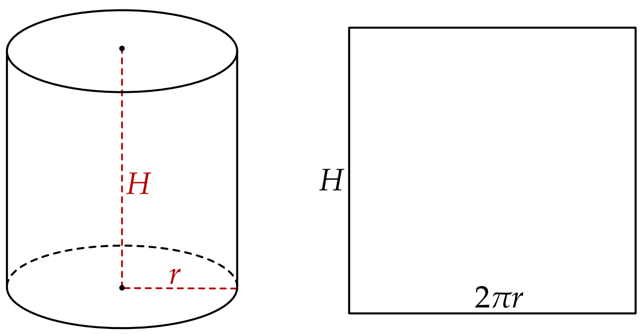
ZADANIE 22 (1 PKT)

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o polu $16\pi^2$. Objętość tego walca jest równa

A) $8\pi^3$ B) $16\pi^3$ C) $16\pi^2$ D) $8\pi^2$

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Widać, że po rozwinięciu powierzchni bocznej walca otrzymamy prostokąt o bokach długości H oraz $2\pi r$. W takim razie

$$\begin{aligned} 4\pi &= H \\ 4\pi &= 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = 2. \end{aligned}$$

Zatem objętość walca jest równa

$$V = \pi r^2 \cdot H = 4\pi \cdot 4\pi = 16\pi^2.$$

Odpowiedź: **C**

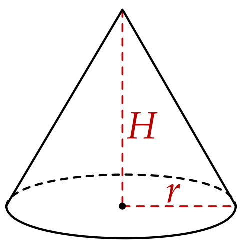
ZADANIE 23 (1 PKT)

Promień podstawy stożka o objętości 12π i wysokości 4 jest równy

A) 3 B) 1 C) 6 D) 9

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy stożek.



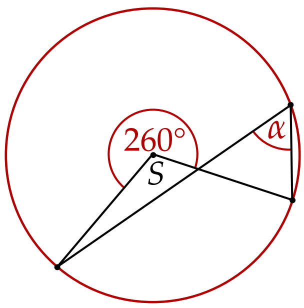
Jeżeli oznaczymy przez r promień podstawy stożka, to z podanej objętości mamy

$$\begin{aligned} 12\pi &= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{4}{3}\pi r^2 \quad / \cdot \frac{3}{4\pi} \\ 9 &= r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 3. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 24 (1 PKT)

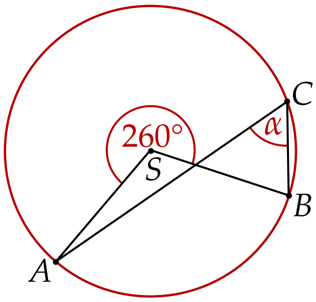
Miara kąta α (patrz rysunek obok) jest równa



A) 50° B) 45° C) 55° D) 60°

ROZWIĄZANIE

Zacznijmy od podpisania rysunku literkami.



Zauważmy, że kąt wypukły ASB ma miarę

$$\measuredangle AOB = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ.$$

Ponieważ kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, mamy

$$\alpha = \frac{1}{2}\measuredangle ASB = 50^\circ.$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 25 (1 PKT)

Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1,2,3,\ldots,20\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 jest równe

A) $\frac{8}{20}$ B) $\frac{6}{20}$ C) $\frac{7}{20}$ D) $\frac{5}{20}$

ROZWIĄZANIE

Losujemy jedną liczbę spośród 20, więc liczba zdarzeń elementarnych wynosi

$$|\Omega| = 20.$$

Wypiszmy wszystkie liczby podzielne przez 3 z tego zbioru

$$3,6,9,12,15,18.$$

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 wynosi

$$\frac{6}{20}.$$

Odpowiedź: B

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $-x(x-2) \leqslant -3$.

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy daną nierówność.

$$\begin{aligned}
& -x(x-2) \leqslant -3 \quad / \cdot (-1) \\
& x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \\
& \Delta = 4 + 12 = 16 \\
& x = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{lub} \quad x = \frac{2+4}{2} = 3 \\
& x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty).
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Uzasadnij, że nie istnieją dwie liczby rzeczywiste, których suma jest równa 4, a ich iloczyn jest równy 5.

ROZWIĄZANIE

Musimy wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania.

Sposób I

Podstawiamy $y = 4 - x$ z pierwszego równania do drugiego.

$$\begin{aligned}
& x(4-x) = 5 \\
& 4x - x^2 = 5 \quad / \cdot (-1) \\
& x^2 - 4x + 5 = 0 \\
& \Delta = 16 - 20 < 0.
\end{aligned}$$

Ponieważ Δ jest ujemna, równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Sposób II

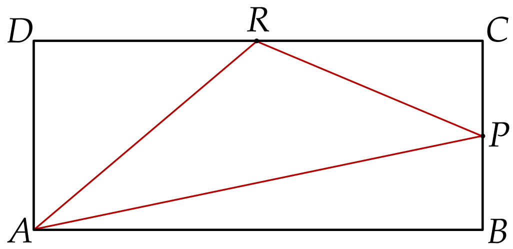
Na mocy wzorów Viète'a liczby x i y spełniające dany układ równań są pierwiastkami równania

$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$

To równanie nie ma jednak rozwiązań rzeczywistych (bo $\Delta < 0$), więc dany układ równań jest sprzeczny.

ZADANIE 28 (2 PKT)

W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD. Wykaż, że pole trójkąta APR jest równe sumie pól trójkątów ADR oraz PCR.



ROZWIĄZANIE

Oznaczmy $AB = CD = a$ i $AD = BC = b$. Mamy zatem

$$P_{ADR} = \frac{1}{2}AD \cdot DR = \frac{1}{4}ab$$
$$P_{PCR} = \frac{1}{2}PC \cdot CR = \frac{1}{8}ab$$
$$P_{ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot BP = \frac{1}{4}ab.$$

Stąd

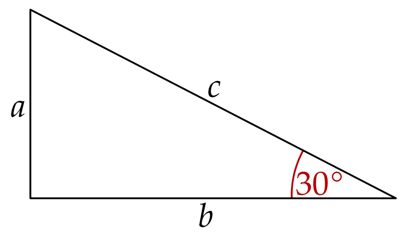
$$P_{APR} = P_{ABCD} - P_{ADR} - P_{PCR} - P_{ABP} = ab - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ab - \frac{1}{4}ab =$$
$$= \frac{3}{8}ab = P_{ADR} + P_{PCR}.$$

ZADANIE 29 (2 PKT)

Dany jest trójkąt prostokątny o polu $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ i kącie ostrym 30°. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Długości przyprostokątnych możemy wyznaczyć z następującego układu równań

$$\begin{cases} P = \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}ab \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy

$$a = \frac{5\sqrt{3}}{b}.$$

Podstawimy do drugiego równania

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{b}}{b} \quad / \cdot b^2 \\
&\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot b^2 = 5\sqrt{3} \quad / \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \\
&b^2 = 15 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{15} \quad \text{lub} \quad b = -\sqrt{15}.
\end{aligned}$$

Odrzucamy wynik ujemny i otrzymujemy

$$a = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

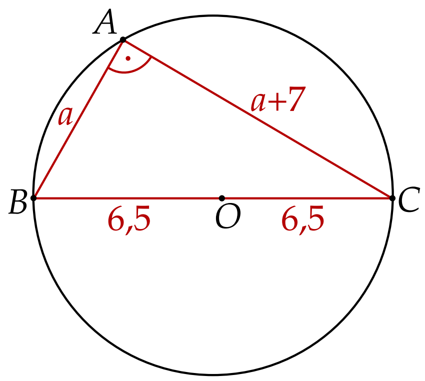
Odpowiedź: $\sqrt{15}$ **i** $\sqrt{5}$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Z punktu leżącego na okręgu o promieniu $6\frac{1}{2}$ poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy. Różnica ich długości jest równa 7. Oblicz długości tych cięciw.

ROZWIĄZANIE

Niech A będzie punktem z którego zostały poprowadzone cięciwy AB i AC.



Ponieważ cięciwy są prostopadłe, odcinek BC jest średnicą okręgu i $BC = 13$. Oznaczmy $AC = a$ i $BC = a + 7$. Piszemy teraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie ABC.

$$\begin{aligned}
&a^2 + (a+7)^2 = 13^2 \\
&a^2 + a^2 + 14a + 49 = 169 \quad / : 2 \\
&a^2 + 7a - 60 = 0 \\
&\Delta = 49 + 240 = 289 = 17^2 \\
&a = \frac{-7-17}{2} = -12 \quad \text{lub} \quad a = \frac{-7+17}{2} = 5.
\end{aligned}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy i mamy $AB = a = 5$. Stąd $AC = a + 7 = 12$.

Odpowiedź: **5 i 12**

ZADANIE 31 (2 PKT)

Dany jest trójmian kwadratowy f o współczynniku 4 przy najwyższej potędze x. Wierzchołek paraboli będącej wykresem tego trójmianu ma współrzędne $W = (4; -9)$. Wyznacz $f(10)$.

ROZWIĄZANIE

Z podanych informacji wynika, że wzór funkcji w postaci kanonicznej ma postać

$$4(x-4)^2 - 9.$$

Zatem

$$f(10) = 4 \cdot 6^2 - 9 = 144 - 9 = 135.$$

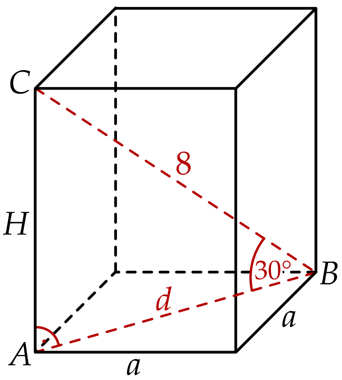
Odpowiedź: $f(10) = 135$

ZADANIE 32 (4 PKT)

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o długości 8 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku.



Ponieważ przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$, patrząc na trójkąt prostokątny ABC, mamy równanie

$$\frac{AB}{BC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}.$$

Podobnie obliczamy wysokość $AC = H$.

$$\frac{AC}{BC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\frac{H}{8} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad H = 4.$$

Objętość graniastosłupa jest więc równa

$$V = a^2 \cdot H = \left(2\sqrt{6}\right)^2 \cdot 4 = 96.$$

Odpowiedź: $V = 96$ **cm**^{3}

ZADANIE 33 (4 PKT)

Ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy liczbę x, a ze zbioru $\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$ liczbę y. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że $x + y < -2$.

ROZWIĄZANIE

Wszystkich zdarzeń sprzyjających jest

$$|\Omega| = 7 \cdot 7.$$

Jeżeli wylosujemy $x = 1$, to y może przyjąć jedną z wartości: $-7, -6, -5, -4$.
Jeżeli wylosujemy $x = 2$, to y może przyjąć jedną z wartości: $-7, -6, -5$.
Jeżeli wylosujemy $x = 3$, to y może przyjąć jedną z wartości: $-7, -6$.
Jeżeli wylosujemy $x = 4$, to musi być $y = -7$. Jest zatem

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

zdarzeń sprzyjających i prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{10}{7 \cdot 7} = \frac{10}{49}.$$

Odpowiedź: $\frac{10}{49}$

ZADANIE 34 (5 PKT)

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Ich suma jest równa 30. Jeśli pierwszą i trzecią liczbę pozostawimy bez zmian, a drugą pomniejszymy o dwa to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz wyrazy ciągu arytmetycznego.

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy szukane liczby przez $a-r, a, a+r$. Wtedy z podanej sumy mamy

$$a-r+a+a+r=30 \quad \Rightarrow \quad 3a=30 \quad \Rightarrow \quad a=10.$$

Zatem szukamy liczb postaci $10-r, 10$ i $10+r$.

Wiemy ponadto, że liczby $10-r, 8, 10+r$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, czyli

$$\begin{aligned}
&8^2=(10-r)(10+r)\\
&64=100-r^2\\
&r^2=36 \quad \Rightarrow \quad r=\pm 6.
\end{aligned}$$

Dla $r=-6$ mamy ciąg $(16,10,4)$, a dla $r=6$ ciąg $(4,10,16)$.

Odpowiedź: $(16,10,4),(4,10,16)$