EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

(TERMIN DODATKOWY)

POZIOM PODSTAWOWY

4 CZERWCA 2019

CZAS PRACY: 170 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Rozwiązaniem równania $\frac{(x^2-2x-3)\cdot(x^2-9)}{x-1} = 0$ nie jest liczba

A) -3 B) -1 C) 1 D) 3

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Rozłóżmy najpierw trójmian w pierwszym nawisie

$$\begin{aligned} & x^2-2x-3=0 \\ & \Delta = 4+12=16 \\ & x=\frac{2-4}{2}=-1 \quad \text{lub} \quad x=\frac{2+4}{2}=3. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{(x^2-2x-3)\cdot(x^2-9)}{x-1} = \frac{(x+1)(x-3)\cdot(x-3)(x+3)}{x-1}$$

i rozwiązaniami danego równania są liczby $\{-3,-1,3\}$.

Sposób II

Jeżeli popatrzymy na dane równanie i podane odpowiedzi, to widać, że rozwiązaniem na pewno nie jest $x=1$, bo dla takiej wartości x zeruje się wyrażenie w mianowniku.

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba $\frac{\log_3 27}{\log_3 \sqrt{27}}$ jest równa

A) $-\frac{1}{2}$ B) 2 C) -2 D) $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{\log_3 27}{\log_3 \sqrt{27}} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 3 (1 PKT)

Jedną z liczb spełniających nierówność $(x-6)\cdot(x-2)^2\cdot(x+4)\cdot(x+10) > 0$ jest

A) -5 B) 0 C) 3 D) 5

ROZWIĄZANIE

Dla wszystkich podanych odpowiedzi $(x-2)^2 > 0$, więc tak naprawdę interesuje nas nierówność

$$(x-6)\cdot(x+4)\cdot(x+10) > 0.$$

Łatwo teraz sprawdzić, że spośród podanych liczb tylko $x = -5$ ją spełnia.

Odpowiedź: A

ZADANIE 4 (1 PKT)

Liczba dodatnia a jest zapisana w postaci ułamka zwykłego. Jeżeli licznik tego ułamka zmniejszymy o 50%, a jego mianownik zwiększymy o 50%, to otrzymamy liczbę b taką, że

A) $b = \frac{1}{4}a$ B) $b = \frac{1}{3}a$ C) $b = \frac{1}{2}a$ D) $b = \frac{2}{3}a$

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że jeżeli $a = \frac{p}{q}$, to

$$b = \frac{50\% \cdot p}{150\% \cdot q} = \frac{1}{3}\cdot\frac{p}{q} = \frac{1}{3}a.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 5 (1 PKT)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = (a+1)x + 11$, gdzie a to pewna liczba rzeczywista, ma miejsce zerowe równe $x = \frac{3}{4}$. Stąd wynika, że

A) $a = -\frac{41}{3}$ B) $a = \frac{41}{3}$ C) $a = -\frac{47}{3}$ D) $a = \frac{47}{3}$

ROZWIĄZANIE

Rozwiązujemy równanie

$$\begin{aligned} & 0 = f\left(\frac{3}{4}\right) = (a+1)\cdot\frac{3}{4} + 11 \\ & \frac{3}{4}(a+1) = -11 \quad / \cdot \frac{4}{3} \\ & a+1 = -\frac{44}{3} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{44}{3} - 1 = -\frac{47}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 6 (1 PKT)

Funkcja f jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = (m\sqrt{5}-1)x+3$. Ta funkcja jest rosnąca dla każdej liczby m spełniającej warunek

A) $m > \frac{1}{\sqrt{5}}$ B) $m > 1-\sqrt{5}$ C) $m < \sqrt{5}-1$ D) $m < \frac{1}{\sqrt{5}}$

ROZWIĄZANIE

Przypomnijmy, że funkcja liniowa $y = ax+b$ jest rosnąca jeżeli $a > 0$. Rozwiązujemy nierówność

$$m\sqrt{5}-1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{5}m > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad m > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Zatem funkcja f jest rosnąca jeżeli $m > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Układ równań $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+my=1 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla

A) $m=-1$ B) $m=1$ C) $m=\frac{1}{2}$ D) $m=-\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Odejmujemy od pierwszego równania drugie pomnożone przez 2 (żeby skrócić x) i mamy

$$\begin{aligned} & 2x-2x-y-2my = 2-2 \\ & -y(1+2m) = 0. \end{aligned}$$

Widać teraz, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m=-\frac{1}{2}$.

Sposób II

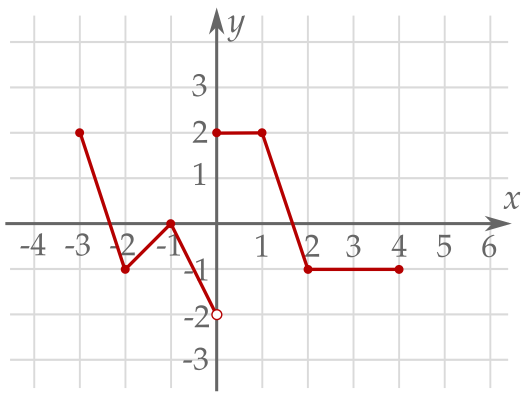
Jeżeli układ ma mieć nieskończenie wiele rozwiązań, to jego równania muszą opisywać tą samą prostą. Ponieważ $2x = 2 \cdot x$, to musimy też mieć

$$-1 = 2 \cdot m \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: D

ZADANIE 8 (1 PKT)

Rysunek przedstawia wykres funkcji f zbudowany z 6 odcinków, przy czym punkty $B = (2, -1)$ i $C = (4, -1)$ należą do wykresu funkcji.



Równanie $f(x) = -1$ ma

A) dokładnie jedno rozwiązanie.
B) dokładnie dwa rozwiązania.
C) dokładnie trzy rozwiązania.
D) nieskończenie wiele rozwiązań.

ROZWIĄZANIE

Z wykresu widać, że na całym przedziale $\langle 2, 4\rangle$ funkcja f przyjmuje wartość -1. W takim razie dane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: D

ZADANIE 9 (1 PKT)

Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla liczb naturalnych $n \geqslant 1$, o wyrazach dodatnich. Jeśli $a_2 + a_9 = a_4 + a_k$, to k jest równe

A) 8
B) 7
C) 6
D) 5

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
&a_2 + a_9 = a_4 + a_k \\
&a_1 + r + a_1 + 8r = a_1 + 3r + a_1 + (k-1)r \\
&6r = (k-1)r \quad \Rightarrow \quad k - 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad k = 7.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: B

Zadanie 10 (1 pkt)

W ciągu (a_n) określonym dla każdej liczby $n \geqslant 1$ jest spełniony warunek $a_{n+3} = -2 \cdot 3^{n+1}$. Wtedy

A) $a_5 = -54$ B) $a_5 = -27$ C) $a_5 = 27$ D) $a_5 = 54$

Rozwiązanie

Aby obliczyć a_5 podstawiamy w danej równości $n = 2$.

$$a_5 = -2 \cdot 3^{2+1} = -2 \cdot 27 = -54.$$

Odpowiedź: A

Zadanie 11 (1 pkt)

Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(3x-2)^2 - (2x-3)(2x+3)$ jest po uproszczeniu równe

A) $5x^2 - 12x - 5$ B) $5x^2 - 13$ C) $5x^2 - 12x + 13$ D) $5x^2 + 5$

Rozwiązanie

Korzystamy z następujących wzorów skróconego mnożenia

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}(3x-2)^2 - (2x-3)(2x+3) &= 9x^2 - 12x + 4 - (4x^2 - 9) = \\ &= 9x^2 - 12x + 4 - 4x^2 + 9 = 5x^2 - 12x + 13.\end{aligned}$$

Odpowiedź: C

Zadanie 12 (1 pkt)

Kąt $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ oraz wiadomo, że $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{3}{8}$. Wartość wyrażenia $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 2$ jest równa

A) $\frac{15}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{27}{8}$ D) $\frac{21}{8}$

ROZWIĄZANIE

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

oraz wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 2 &= \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + 2 = \\ &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \frac{3}{4} + 2 = 1 + \frac{11}{4} = \frac{15}{4}.\end{aligned}$$

Odpowiedź: A

ZADANIE 13 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $2\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ + \cos^2 18^\circ$ jest równa

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

ROZWIĄZANIE

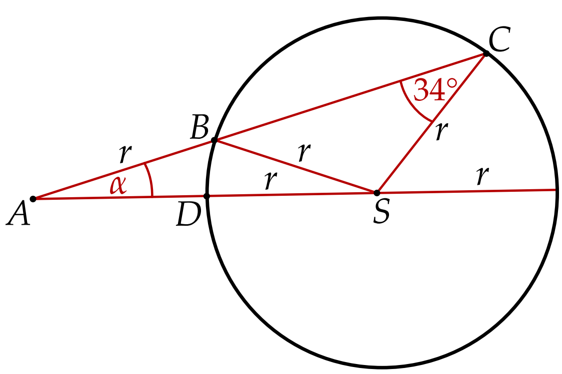
Ponieważ $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, na mocy jedynki trygonometrycznej mamy

$$\begin{aligned}2\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ + \cos^2 18^\circ &= 2\sin^2 18^\circ + \sin^2(90^\circ - 18^\circ) + \cos^2 18^\circ = \\ &= 2(\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ) = 2.\end{aligned}$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 14 (1 PKT)

Punkty B, C i D leżą na okręgu o środku S i promieniu r. Punkt A jest punktem wspólnym prostych BC i SD, a odcinki AB i SC są równej długości. Miara kąta BCS jest równa 34° (zobacz rysunek). Wtedy



A) $\alpha = 12^\circ$ B) $\alpha = 17^\circ$ C) $\alpha = 22^\circ$ D) $\alpha = 34^\circ$

Rozwiązanie

Trójkąty BSC i ABS są równoramienne, więc

$$\measuredangle SBC = \measuredangle SCB = 34^\circ$$
$$\measuredangle ABS = 180^\circ - \measuredangle SBC = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$$
$$\alpha = \measuredangle SAB = \measuredangle ASB = \frac{180^\circ - \measuredangle ABS}{2} = \frac{180^\circ - 146^\circ}{2} = 17^\circ.$$

Odpowiedź: B

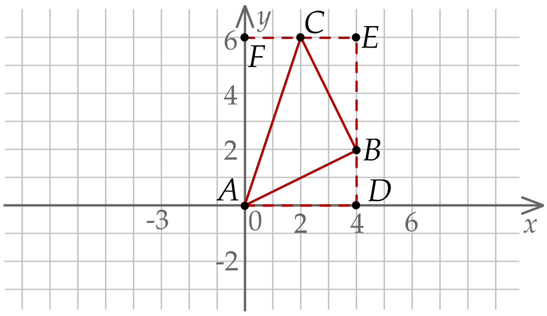
Zadanie 15 (1 pkt)

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (4,2)$, $C = (2,6)$ jest równe

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20

Rozwiązanie

Szkicujemy opisaną sytuację.



Sposób I

Nawet ze szkicowego rysunku powinno być widać, że trójkąt ABC ma szanse być prostokątnym. Aby się upewnić, że tak jest, liczymy długości jego boków.

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$
$$AC = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$
$$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}.$$

Zatem faktycznie $AB^2 + BC^2 = AC^2$, czyli trójkąt ABC jest prostokątny i jego pole wynosi

$$P = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} = 10.$$

Sposób II

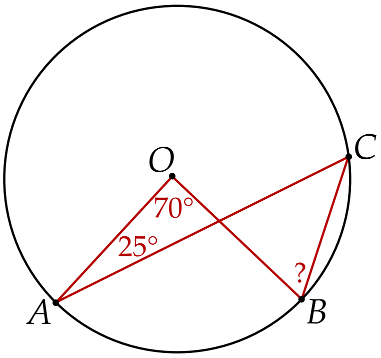
Pole trójkąta ABC możemy obliczyć jako różnice pól prostokąta $ADEF$ i trzech trójkątów prostokątnych: ADB, BEC i CFA. Mamy zatem

$$P_{ABC} = 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 24 - 4 - 4 - 6 = 10.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 16 (1 PKT)

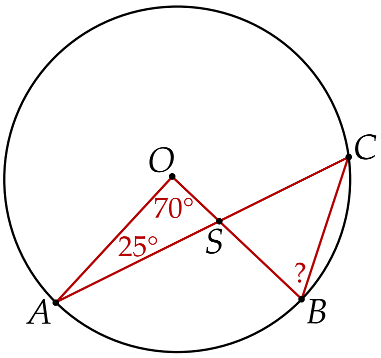
Na okręgu o środku w punkcie O wybrano trzy punkty A, B, C tak, że $|\measuredangle AOB| = 70^\circ$, $|\measuredangle OAC| = 25^\circ$. Cięciwa AC przecina promień OB (zobacz rysunek). Wtedy miara $\measuredangle OBC$ jest równa



A) $\alpha = 25^\circ$ B) $\alpha = 60^\circ$ C) $\alpha = 70^\circ$ D) $\alpha = 85^\circ$

ROZWIĄZANIE

Niech S będzie punktem wspólnym odcinków AC i BO.



Korzystając z twierdzenia o kątach wpisanym i środkowym, mamy

$$\measuredangle ACB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ.$$

Ponadto

$$\measuredangle BSC = \measuredangle ASO = 180^\circ - 25^\circ - 70^\circ = 85^\circ.$$

Zatem

$$\alpha = \measuredangle SBC = 180^\circ - \measuredangle BSC - \measuredangle SCB = 180^\circ - 85^\circ - 35^\circ = 60^\circ.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 17 (1 PKT)

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie dany jest odcinek AB o końcach w punktach $A = (7,4)$, $B = (11,12)$. Punkt S leży wewnątrz odcinka AB oraz $|AS| = 3 \cdot |BS|$. Wówczas

A) $S = (8,6)$ B) $S = (9,8)$ C) $S = (10,10)$ D) $S = (13,16)$

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Szkicujemy opisaną sytuację.

Jeżeli $C = \left(\frac{7+11}{2}, \frac{4+12}{2}\right) = (9,8)$ jest środkiem odcinka AB, to S jest środkiem odcinka CB. Zatem

$$S = \frac{C+B}{2} = \left(\frac{9+11}{2}, \frac{8+12}{2}\right) = (10,10).$$

Sposób II

Tym razem użyjemy rachunku wektorowego. Jeżeli $S = (x,y)$, to

$$\overrightarrow{AS} = 3\overrightarrow{SB}$$
$$[x-7, y-4] = 3[11-x, 12-y] = [33-3x, 36-3y].$$

Mamy stąd

$$\begin{cases} x-7 = 33-3x & \Rightarrow & 4x = 40 & \Rightarrow & x = 10 \\ y-4 = 36-3y & \Rightarrow & 4y = 40 & \Rightarrow & y = 10. \end{cases}$$

Zatem $S = (10,10)$.

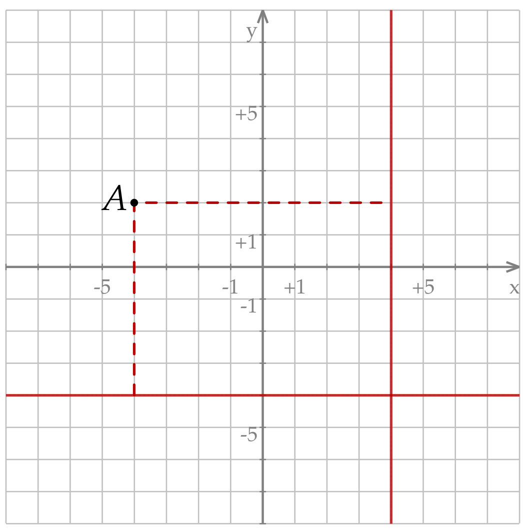
Odpowiedź: **C**

ZADANIE 18 (1 PKT)

Suma odległości punktu $A = (-4,2)$ od prostych o równaniach $x = 4$ i $y = -4$ jest równa
A) 14 B) 12 C) 10 D) 8

ROZWIĄZANIE

Prosta $x = 4$ jest pionową prostą przecinającą oś Ox w punkcie $(4,0)$, a prosta $y = -4$ jest poziomą prostą przecinającą oś Oy w punkcie $(0,-4)$.



Jeżeli to naszkicujemy, to widać, że suma odległości punktu $A=(-4,2)$ od tych prostych jest równa

$$8+6=14.$$

Odpowiedź: A

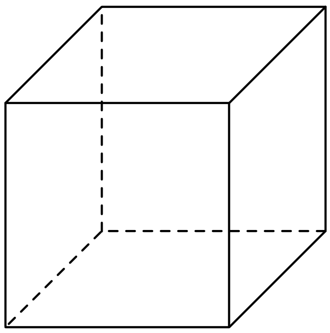
Zadanie 19 (1 pkt)

Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 96 cm. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

A) 48 cm^2 B) 64 cm^2 C) 384 cm^2 D) 512 cm^2

Rozwiązanie

Ponieważ sześcian ma 12 krawędzi, więc krawędź sześcianu ma długość $\frac{96}{12}=8$.



Zatem pole powierzchni ściany jest równe

$$8^2=64,$$

a pole powierzchni całego sześcianu wynosi

$$P=6\cdot 64=384.$$

Odpowiedź: C

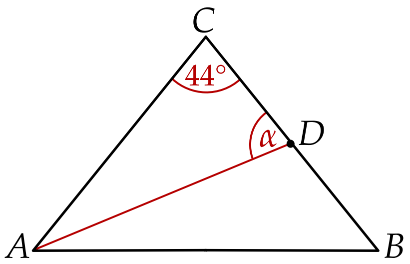
Zadanie 20 (1 pkt)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Kąt między ramionami tego trójkąta ma miarę 44°. Dwusieczna kąta poprowadzona z wierzchołka A przecina bok BC tego trójkąta w punkcie D. Kąt ADC ma miarę

A) 78° B) 34° C) 68° D) 102°

ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku



Trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym, więc kąt CAB jest równy kątowi ABC. Zatem

$$\measuredangle CAB = \frac{180^\circ - \measuredangle ACB}{2} = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ.$$

Odcinek AD jest dwusieczną kąta CAB, więc

$$\measuredangle CAD = \frac{\measuredangle CAB}{2} = \frac{68^\circ}{2} = 34^\circ.$$

Teraz już łatwo obliczyć szukany kąt

$$\alpha = 180^\circ - \measuredangle ACD - \measuredangle CAD = 180^\circ - 44^\circ - 34^\circ = 102^\circ.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 21 (1 PKT)

Liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6 jest

A) 60 B) 45 C) 30 D) 15

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Liczby dwucyfrowe podzielne przez 6 to

$$12 = 6 \cdot 2,\ 18 = 6 \cdot 3,\ 24 = 6 \cdot 4, \ldots,\ 96 = 6 \cdot 16.$$

Jest ich więc $16 - 1 = 15$.

Sposób II

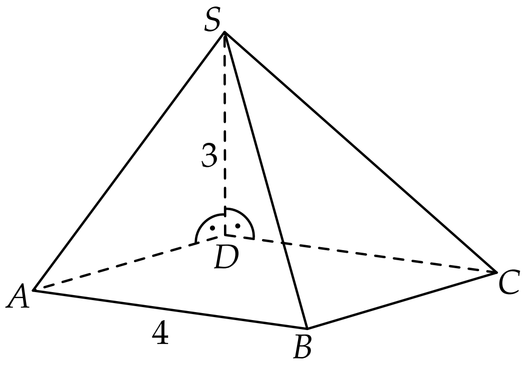
Dwucyfrowe liczby podzielne przez 6 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r = 6$, w którym $a_1 = 12$ i $a_n = 96$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} 96 &= a_n = a_1 + (n-1)r \\ 96 &= 12 + (n-1) \cdot 6 \\ 84 &= (n-1) \cdot 6 \\ 14 &= (n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 15. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **D**

Zadanie 22 (1 pkt)

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 4. Krawędź boczna DS jest prostopadła do podstawy i ma długość 3 (zobacz rysunek).



Pole ściany BCS tego ostrosłupa jest równe

A) 20 B) 10 C) 16 D) 12

Rozwiązanie

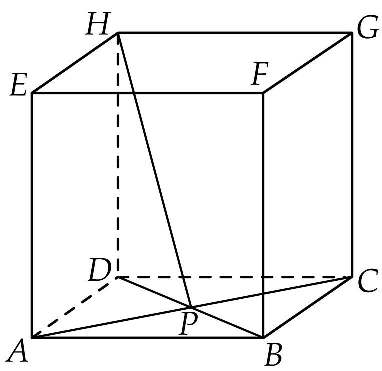
Zauważmy, że krawędź BC jest prostopadła zarówno do krawędzi DC jak i do krawędzi SD. To oznacza, że jest ona prostopadła do całej płaszczyzny SDC. Jest też więc prostopadła do krawędzi SC. W takim razie trójkąt BCS jest prostokątny i jego pole jest równe

$$P_{BCS} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot SC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot \sqrt{3^2+4^2} = 2\cdot 5 = 10.$$

Odpowiedź: B

Zadanie 23 (1 pkt)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Przekątne AC i BD ściany $ABCD$ sześcianu przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).



Tangens kąta, jaki odcinek PH tworzy z płaszczyzną $ABCD$, jest równy

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczymy długość krawędzi sześcianu przez a, to

$$\operatorname{tg} \measuredangle HPD = \frac{HD}{DP} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Odpowiedź: **D**

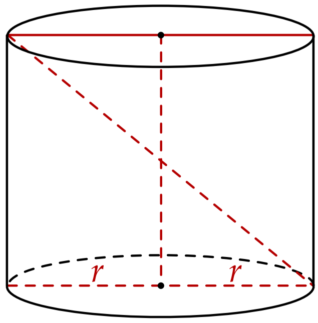
ZADANIE 24 (1 PKT)

Przekrojem osiowym walca jest kwadrat o przekątnej długości 12 . Objętość tego walca jest zatem równa

A) $36\pi\sqrt{2}$ B) $108\pi\sqrt{2}$ C) 54π D) 108π

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy przez r promień podstawy walca.



Z podanej długości przekątnej przekroju osiowego mamy

$$2r\sqrt{2} = 12 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Objętość walca jest więc równa

$$V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^3 = 108\pi\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 25 (1 PKT)

Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{20, 21, 22, \ldots, 39, 40\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4 jest równe

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{6}{19}$ D) $\frac{3}{10}$

ROZWIĄZANIE

W danym zbiorze jest 6 liczb podzielnych przez 4:

$$20, 24, 28, 32, 36, 40.$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{6}{40-19} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Odpowiedź: **B**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $x(7x+2) > 7x+2$.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przekształcamy daną nierówność

$$\begin{aligned}
&x(7x+2) > 7x+2\\
&x(7x+2) - (7x+2) > 0\\
&(x-1)(7x+2) > 0\\
&7(x-1)\left(x+\frac{2}{7}\right) > 0\\
&x \in \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right) \cup (1, +\infty).
\end{aligned}$$

Sposób II

Przekształcamy daną nierówność

$$\begin{aligned}
&x(7x+2) > 7x+2\\
&7x^2 + 2x - 7x - 2 > 0\\
&7x^2 - 5x - 2 > 0\\
&\Delta = 25 + 56 = 81 = 9^2\\
&x_1 = \frac{5-9}{14} = -\frac{2}{7}, \quad x_2 = \frac{5+9}{14} = 1\\
&x \in \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right) \cup (1, +\infty).
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right) \cup (1, +\infty)$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, które spełniają warunek: $\frac{3x^2-8x-3}{x-3} = x-3$.

ROZWIĄZANIE

Oczywiście, ze względu na mianownik musimy założyć, że $x \neq 3$. Przy tym założeniu przekształcamy równanie

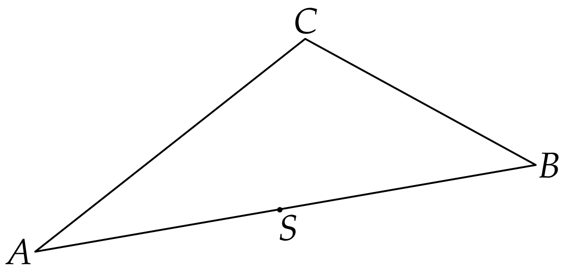
$$\begin{aligned}
&\frac{3x^2-8x-3}{x-3} = x-3 \quad / \cdot (x-3) \\
&3x^2-8x-3 = (x-3)^2 \\
&3x^2-8x-3 = x^2-6x+9 \\
&2x^2-2x-12 = 0 \quad / : 2 \\
&x^2-x-6 = 0 \\
&\Delta = 1+24 = 25 \\
&x_1 = \frac{1-5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.
\end{aligned}$$

Ze względu na dziedzinę, tylko pierwsza z tych liczb jest rozwiązaniem równania.

Odpowiedź: $x = -2$

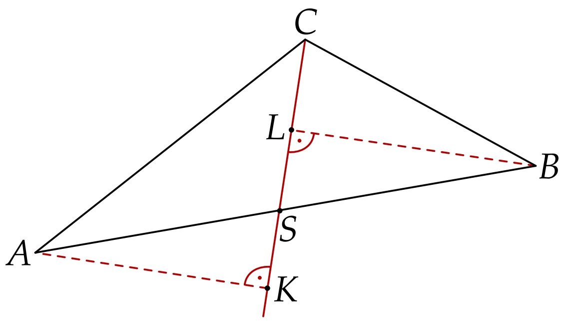
ZADANIE 28 (2 PKT)

Dany jest trójkąt ABC. Punkt S jest środkiem boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek). Wykaż, że odległości punktów A i B od prostej CS są równe.



ROZWIĄZANIE

Dorysujmy prostą SC oraz rzuty punktów A i B na tę prostą.



Wystarczy teraz zauważyć, że trójkąty prostokątne AKS i BLS mają równe kąty przy wierzchołku S oraz przeciwprostokątne równej długości: $AS = BS$. To oznacza, że są one przystające i $AK = BL$.

ZADANIE 29 (2 PKT)

Wykaż, że dla każdej liczby $a > 0$ i dla każdej liczby $b > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}.$$

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy nierówność korzystając z podanego założenia o dodatniości liczb a i b.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b} \qquad / \cdot ab(a+b)\\
&b(a+b) + a(a+b) \geqslant 4ab\\
&ab + b^2 + a^2 + ab - 4ab \geqslant 0\\
&a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0\\
&(a-b)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a przekształcaliśmy przy pomocy równoważności, więc wyjściowa nierówność też musi być spełniona.

ZADANIE 30 (2 PKT)

W ciągu geometrycznym przez S_n oznaczamy sumę n początkowych wyrazów tego ciągu, dla liczb naturalnych $n \geqslant 1$. Wiadomo, że dla pewnego ciągu geometrycznego: $S_1 = 2$ i $S_2 = 12$. Wyznacz iloraz i piąty wyraz tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że

$$\begin{aligned}
2 &= S_1 = a_1\\
12 &= S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q = 2 + 2q \quad \Rightarrow \quad q = 5.
\end{aligned}$$

Stąd

$$a_5 = a_1 q^4 = 2 \cdot 5^4 = 1250.$$

Odpowiedź: $q = 5$, $a_5 = 1250$

ZADANIE 31 (2 PKT)

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy sumę oczek równą 16.

Rozwiązanie

Jeżeli o zdarzeniach elementarnych myślimy jak o ciągach wyników długości 3, to mamy

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3.$$

Łatwo też wypisać wszystkie zdarzenia sprzyjające.

$$(6,6,4),(6,4,6),(4,6,6)$$
$$(6,5,5),(5,6,5),(5,5,6).$$

Łatwo uzasadnić, że innych zdarzeń sprzyjających nie ma: co najmniej na jednej z kostek musi być 6, bo w przeciwnym razie suma oczek nie przekroczyłaby $5+5+5=15$. W takim razie suma oczek na dwóch pozostałych kostkach musi być równa 10 i są na tylko dwie możliwości: $6+4$ lub $5+5$.

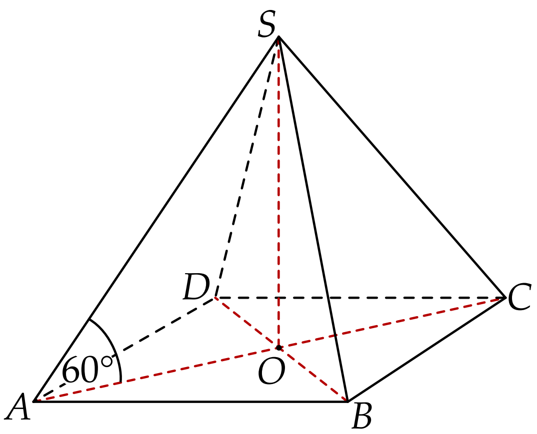
Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$P = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{36}$

Zadanie 32 (5 pkt)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt o polu równym 432, a stosunek długości boków tego prostokąta jest równy 3:4. Przekątne podstawy $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Odcinek SO jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Kąt SAO ma miarę 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozwiązanie

Jeżeli oznaczymy $AB = 3x$ i $BC = 4x$, to z podanego pola podstawy mamy

$$432 = 3x \cdot 4x = 12x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

Wysokość ostrosłupa obliczymy z trójkąta prostokątnego AOS, ale zanim to zrobimy obliczmy długość odcinka AO.

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 + 16x^2} = \frac{x}{2} \cdot 5 = 15.$$

Obliczamy teraz z trójkąta AOS wysokość ostrosłupa.

$$\frac{SO}{AO} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad SO = \sqrt{3} \cdot 15 = 15\sqrt{3}.$$

Pozostało obliczyć objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 432 \cdot 15\sqrt{3} = 2160\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: $2160\sqrt{3}$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Liczby rzeczywiste x i z spełniają warunek $2x + z = 1$. Wyznacz takie wartości x i z, dla których wyrażenie $x^2 + z^2 + 7xz$ przyjmuje największą wartość. Podaj tę największą wartość.

ROZWIĄZANIE

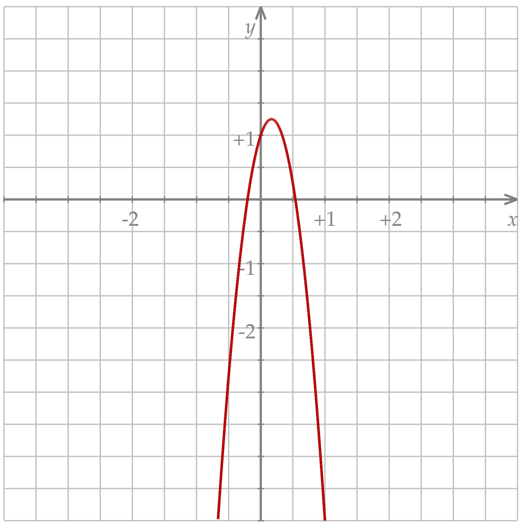
Wiemy, że $z = 1 - 2x$, więc interesuje nas wartość wyrażenia

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + z^2 + 7xz = x^2 + (1-2x)^2 + 7x(1-2x) = \\ &= x^2 + 1 - 4x + 4x^2 + 7x - 14x^2 = -9x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

Wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie

$$(x_w, y_w) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-3}{-18}, \frac{-(9+36)}{-36}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{4}\right).$$

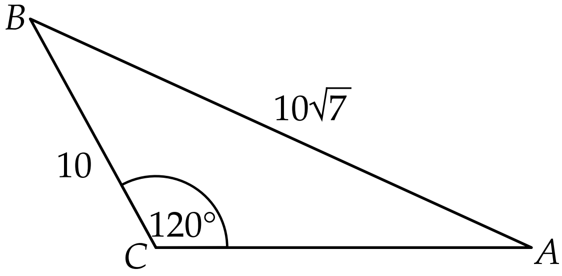
W takim razie największa możliwa wartość danego wyrażenia to $\frac{5}{4}$ i otrzymamy ją dla $x = \frac{1}{6}$ i $z = 1 - 2x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.



Odpowiedź: $x = \frac{1}{6}$, $z = \frac{2}{3}$, $f_{max} = \frac{5}{4}$

ZADANIE 34 (4 PKT)

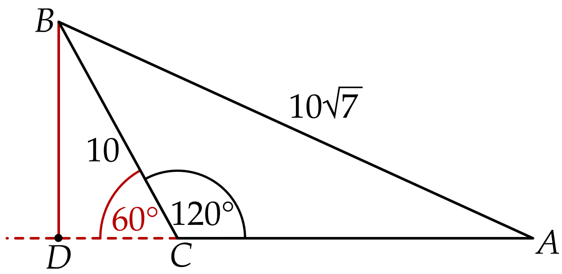
Dany jest trójkąt rozwartokątny ABC, w którym $\measuredangle ACB$ ma miarę 120°. Ponadto wiadomo, że $|BC| = 10$ i $|AB| = 10\sqrt{7}$ (zobacz rysunek). Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC.



ROZWIĄZANIE

Sposób I

Dorysujmy wysokość BD opuszczoną z wierzchołka B.



Trójkąt DCB jest połówką trójkąta równobocznego o boku $BC = 10$, więc $DC = \frac{1}{2}BC = 5$ i

$$BD = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ABD mamy

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{700 - 75} = \sqrt{625} = 25.$$

Stąd

$$AC = AD - DC = 25 - 5 = 20.$$

Sposób II

Jeżeli oznaczymy $x = AC$, to na mocy twierdzenia cosinusów mamy

$$\begin{aligned}
&AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ \\
&700 = x^2 + 100 - 20x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = x^2 + 10x + 100 \\
&0 = x^2 + 10x - 600 \\
&\Delta = 100 + 2400 = 2500 = 50^2 \\
&x = \frac{-10-50}{2} < 0 \quad \text{lub} \quad x = \frac{-10+50}{2} = 20.
\end{aligned}$$

Zatem $AC = 20$.

Odpowiedź: $AC = 20$