RESOLUCIÓN TERCER PARCIAL RECURSADA 2018

1) La planta a controlar corresponde a un proceso de destilación molecular centrífuga.

Se trata de un sistema SIMO, el cual es controlado desde una computadora. El control se aplica a través de un conversor D/A con período de conversión de valor T [s] con salida constante en cada período de conversión. El error de cuantificación se considera despreciable.

La planta ha sido modelada, con suficiente exactitud, mediante la siguiente matriz de transferencias:

$$G_P(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z-a)} \\ \dfrac{1}{(z-b)} \end{bmatrix} \quad (2\text{x}1) \qquad \text{siendo } a \text{ y } b \text{ reales y distintas entre sí.}$$

a) Explique, con claridad, concisión y justificación, el diseño de un modelo de estado M que provea la misma transferencia que la planta descripta. Explicite, claramente, el modelo de estado obtenido.
b) Suponga que se realimenta el modelo M, aludido en a), tal que es $u(k) = r(k) - K^T x(k)$. [*x(k)*= variables modelo M, *r(k)* = entrada de referencia]. Explique, con claridad, concisión y justificación, cómo calcular las ganancias K^T para ubicar los autovalores a posiciones arbitrarias.
c) Halle el valor de K^T para ubicar todos los autovalores en $z=a$.
d) Halle la matriz de transferencias del sistema realimentado según c).

---

a) El sistema representado mediante la matriz de transferencias tiene una sola entrada y dos salidas. A partir de las transferencias parciales se puede establecer que el sistema es de segundo orden con autovalores $z=a$ y $z=b$.
En las transferencias parciales no están explicitados los dos autovalores, esta condición se puede producir por que el sistema en cuestión no es totalmente controlable o no es totalmente observable. Como en ambas transferencias el autovalor que se simplifica no es el mismo, se asume que el sistema es controlable pero en cada salida en particular hay un autovalor que no es observable y no es el mismo para cada una de ella.
En consecuencia, completando las transferencias se puede llegar a un modelo canónico controlable.

$$G_P(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(z-b)}{(z-a)(z-b)} \\ \dfrac{(z-a)}{(z-a)(z-b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(z-b)}{z^2-(a+b)z+ab} \\ \dfrac{(z-a)}{z^2-(a+b)z+ab} \end{bmatrix}$$

Las dos transferencias parciales ahora tienen el mismo denominador y por lo tanto se plantea para el modelo la forma canónica en función de los coeficientes del denominador.
En la última fila de la matriz de la planta se ubican los coeficientes del polinomio denominador cambiados de signo.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ab & (a+b) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Las salidas del modelo se corresponderán con los coeficientes del numerador de cada transferencia.

$$y(k) = \begin{bmatrix} -b & 1 \\ -a & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

El modelo tiene como resultado la matriz de transferencia dada.

b) El modelo es totalmente controlable y tiene la forma canónica controlable. Se va a diseñar la realimentación de estados partiendo del modelo canónico.
La forma general del modelo canónico para este caso es:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_1 & -a_2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

Aplicando la ley de control : $u(k)=r(k)-K^T x(k)=r(k)-\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}x(k)$, el modelo realimentado queda:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_1 & -a_2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left[r(k)-\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}x(k)\right]$$

$$x(k+1)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_1 & -a_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right\}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(k)$$

$$x(k+1)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_1 & -a_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ k_1 & k_1\end{bmatrix}\right\}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(k)$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ (-a_1-k_1) & (-a_2-k_2)\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(k)$$

El modelo conserva la forma canónica controlable, y en la última fila se ubican los coeficientes del polinomio característico deseado. Suponiendo que se desean para el sistema realimentados autovalores λ_1 y λ_2, el polinomio deseado se calcula como: $(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)=z^2+\alpha_1 z+\alpha_2$.
Por lo tanto queda que las ganancias de realimentación se pueden calcular como: $k_1=\alpha_1-a_1$ y $k_2=\alpha_2-a_2$.
Entonces $K^T=\left[(\alpha_1-a_1)\ \ (\alpha_2-a_2)\right]$.

c) Para ubicar ambos autovalores en *a* el poninomio deseado es: $(z-a_1)^2=z^2-2az+a^2$.
Entonces $K^T=\left[(a^2-ab)\ \ \ (b-a)\right]$

d) El modelo realimentado queda:

$$x(k+1)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -ab & (a+b)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ (a^2-ab) & (b-a)\end{bmatrix}\right\}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(k)$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a^2 & 2a\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(k)$$

La matriz $(zI-A)$ es:

$$(zI-A)=\begin{bmatrix}z & -1\\ a^2 & z-2a\end{bmatrix}$$

$$\det(zI-A)=z^2-2az+a^2$$

$$(zI-A)^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}z-2a & 1\\ -a^2 & z\end{bmatrix}}{z^2-2az+a^2}$$

$$(zI-A)^{-1}B=\frac{\begin{bmatrix} z-2a & 1 \\ -a^2 & z \end{bmatrix}}{z^2-2az+a^2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z-a)^2} \\ \dfrac{z}{(z-a)^2} \end{bmatrix}$$

$$G_T(z)=C(zI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} -b & 1 \\ -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z-a)^2} \\ \dfrac{z}{(z-a)^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{(z-b)}{(z-a)^2} \\ \dfrac{(z-a)}{(z-a)^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{(z-b)}{(z-a)^2} \\ \dfrac{1}{(z-a)} \end{bmatrix}$$

---

2) La planta de un sistema de control discreto está caracterizada por el siguiente modelo de estado:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.89 & 1 \\ -0.891 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.095 \\ -0.0931 \end{bmatrix} u(k) \quad ; \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Se desea realimentar las variables del modelo anterior, de manera que el modelo a lazo cerrado resulte **<u>inobservable</u>**.

a) Encontrar la familia de **<u>todos</u>** los vectores de realimentación que produce el resultado pedido. Dibuje en un plano de coordenadas la zona donde se encuentran estos valores.
b) Halle la función de transferencia resultante a lazo cerrado para un valor de los calculados en el inciso anterior. . ¿Qué particularidad debería tener esta función de transferencia tratándose de un sistema inobservable?.

RESOLUCIÓN:

Para calcular el modelo realimentado defino la ley de control: $u(k) = r(k) - \overbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}}^{K} x(k)$

Por lo tanto el modelo realimentado tendrá la siguiente forma: $x(k+1) = \begin{bmatrix} A - BK \end{bmatrix} x(k) + \mathrm{B}\, r(k)$

Reemplazando valores queda

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.89-0.095k_1 & 1-0.095k_2 \\ -0.891+0.0931k_1 & 0.0931k_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.095 \\ -0.0931 \end{bmatrix} r(k) \quad ; \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

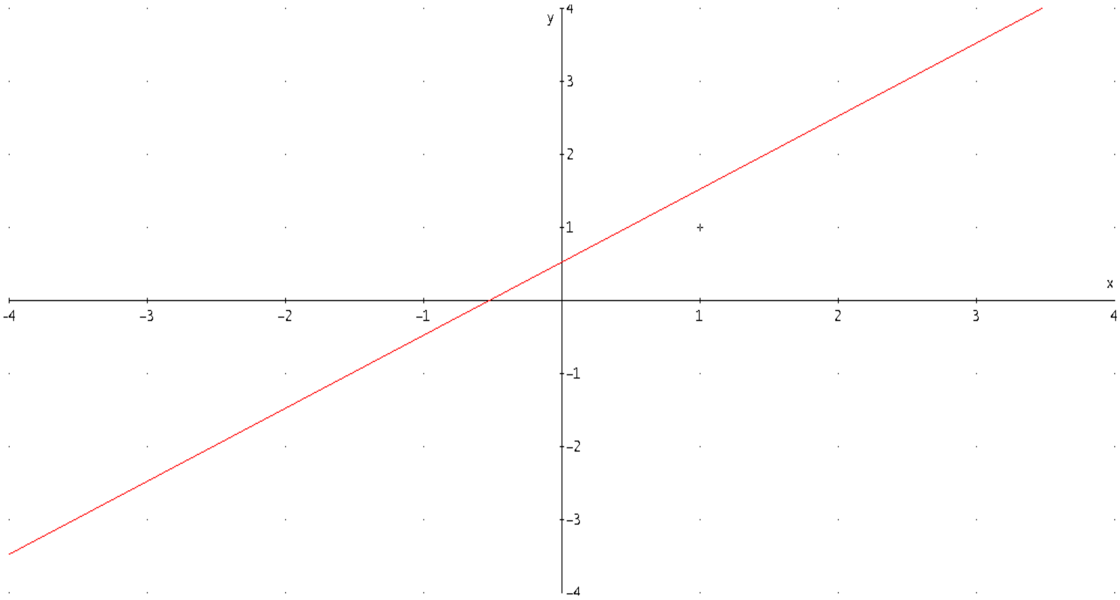
La matriz observabilidad se calcula de la forma: $V = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \ldots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$

En este caso la matriz observabilidad es: $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.999-0.0019\cdot k_1 & 1-0.0019\cdot k_2 \end{bmatrix}$

Para que sea inobservable el determinante de V debe ser igual a cero.

Por lo tanto: $det(V) = 0.0019k_1 - 0.0019k_2 + 0.001 = 0$

Se cumple para: $k_2 = k_1 + 0.5263157894$



Analizo la condición para k1=0 por lo tanto K=[0   0.5263]

El modelo resultante queda: $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.89 & 0.95 \\ -0.891 & 0.049 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.095 \\ -0.0931 \end{bmatrix} r(k) \quad ; \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$

$$G(s) = C\left[zI - A\right]^{-1} B$$

La función de transferencia se calcula como:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1.89 & -0.95 \\ 0.891 & z-0.049 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.095 \\ -0.0931 \end{bmatrix} \qquad G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} z-0.049 & 0.95 \\ -0.891 & z-1.89 \end{bmatrix}}{z^2 - 1,939z + 0,9391} \begin{bmatrix} 0.095 \\ -0.0931 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} z-0,94 & z-0,94 \end{bmatrix}}{z^2 - 1,939z + 0,9391} \begin{bmatrix} 0.095 \\ -0.0931 \end{bmatrix} \qquad G(s) = \frac{0.0019(z-0.94)}{(z-0.94)(z-0.999)} = \frac{0.0019}{z-0.999}$$

Como el sistema resulta inobservable, en la función de transferencia existe una cancelación de un cero con un polo.

---

3) El siguiente modelo de estado representa la planta de cierto proceso a controlar.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -0.55 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.41 \end{bmatrix} u(k)$$

La salida del modelo tiene la siguiente expresión:

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u(k)$$

a) Desarrolle la expresión del estimador de las variables del sistema que resulta de la salida dada.

b) Halle el valor del vector de realimentación del estimador planteado, para obtener el mínimo tiempo de establecimiento.
Encuentre las matrices y escriba la ecuación del estimador diseñado.

c) Grafique el comportamiento del error $(\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k))$, entre las variables reales y estimadas, para un error inicial $\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$

---

a) Para el diseño de un estimador se utiliza una copia del modelo del sistema al cual se le agrega un término proporcional al error:

$$\hat{x}(k+1) = A\,\hat{x}(k) + \mathrm{B}\,u(k) + H\;e(k)$$

Suponiendo la señal de error la diferencia entre la salida real y la salida estimada.

$$\hat{x}(k+1) = A\,\hat{x}(k) + \mathrm{B}\,u(k) + H\left[y(k) - \hat{y}(k)\right]$$

$$\hat{x}(k+1) = A\,\hat{x}(k) + \mathrm{B}\,u(k) + H\left[y(k) - C\,\hat{x}(k) - D\,u(k)\right]$$

Agrupando queda:

$$\hat{x}(k+1) = \left[A - HC\right]\,\hat{x}(k) \;+\; \left[B - HD\right]\,u(k) + H\;y(k)$$

Se observa que el vector de entrada del estimador se encuentra afectado por H.

b) Para el sistema planteado se verifica la observabilidad.

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

El determinante es distinto de cero, por lo tanto el modelo resulta observable.

Para plantear el modelo canónico se calcula el polinomio característico:

$$\det\left(zI - A\right) = \det\begin{bmatrix} z-1.5 & -1 \\ 0.55 & z \end{bmatrix} = z^2 - 1.5z + 0.55$$

Las matrices del modelo canónico observables resultan: $A_{co} = \begin{bmatrix} 0 & -0.55 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}$ y $C_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz observabilidad del modelo canónico es: $V_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}$

La matriz de transformación al modelo canónico resulta: $T = V^{-1}V_{co} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Para obtener el mínimo tiempo de establecimiento los autovalores del estimados se deber ubicar en z=0.

El vector H del estimador para el modelo canónico observable es : $H_{co} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \alpha_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.55 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

El vector transformado a la forma original es: $H = T\;H_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.55 \\ -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.55 \end{bmatrix}$

Ahora, las matrices del estimador resultan:

$$A_e = \left[A - HC\right] = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -0.55 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.55 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_e = [B - HD] = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.41 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.55 \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} -1.95 \\ 0.96 \end{bmatrix}$$

El modelo del estimador queda:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} -1.95 \\ 0.96 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.55 \end{bmatrix} y(k)$$

c) El modelo del error para el estimador sin ruido es:

$$\tilde{x}(k+1) = [A - HC] \; \tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(k)$$

A partir del error inicial se puede iterar para encontrar los valores del error para muestras futuras.

$$\tilde{x}(1) = [A - HC] \; \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}(2) = [A - HC] \; \tilde{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}(3) = [A - HC] \; \tilde{x}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El error se extingue a partir de la segunda muestra.