RESOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL CURSADA 2016

1) Una planta estable, SISO, lineal e invariante en el tiempo, es controlada por un controlador PID dispuesto como indica la siguiente Figura 1.

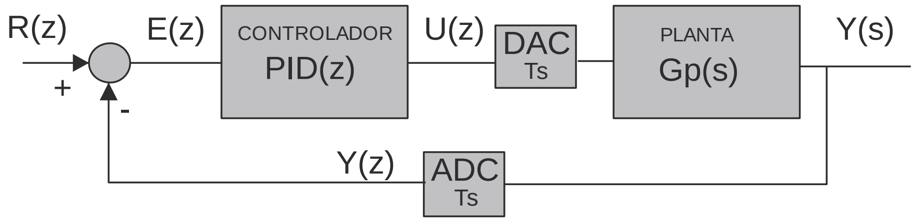


Figura 1

El controlador propuesto realiza un procesamiento digital de señales, tomando muestras y desarrollando el control ***u(k)***, con retención de orden cero, cada ***Ts*** [s]. Esto significa operar a una frecuencia de muestreo mucho mayor que la más alta frecuencia presente en los espectros de las señales a muestrear.

La planta es modelada, con suficiente aproximación, como: $Gm(z) = \dfrac{K(1+z\cdot T_0)}{(1+z\cdot T_1)(1+z\cdot T_2)}$

Explique cómo sintonizar este controlador e indique cómo hallar el algoritmo de control discreto recursivo, ***u(k)***, para el controlador PID con la disposición indicada, expresando el mismo claramente. Utilice aproximación trapezoidal para la integral.

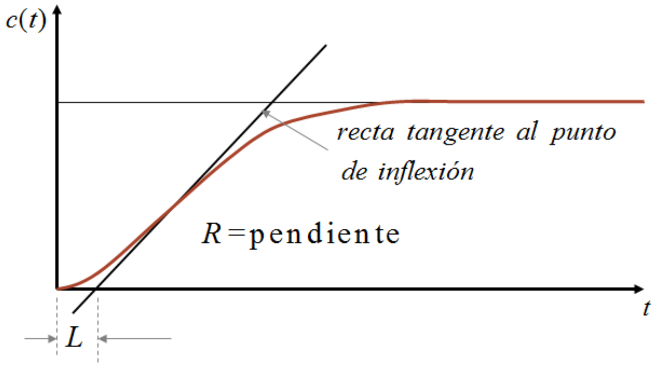
Resolución:

a) El ejercicio trata sobre el diseño de un controlador PID discreto. Como la frecuencia de muestreo es alta comparada con el ancho de banda del sistema, se pueden considerar las constantes del controlador extraídas de un análisis continuo.

La ecuación del controlador PID para un sistema continuo tiene la siguiente forma:

$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

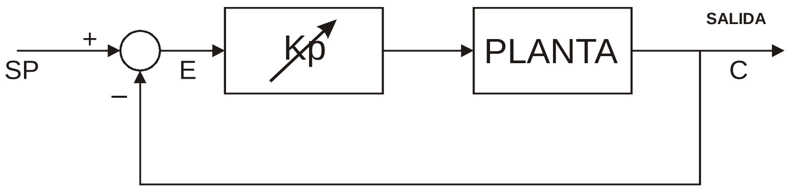
Un método para hallar las constantes del PID es el propuesto por Ziegler y Nichols a lazo abierto en el cual se ensaya el sistema con una entrada en escalón y se evalúa la respuesta transitoria. El método es válido para sistemas sobre-amortiguados y se determina la recta tangente en el punto de máxima pendiente. En base a la pendiente de la recta (R) y al valor de cruce de la recta tangente con el valor de inicio del transitorio (L), se determinan las constantes del PID.

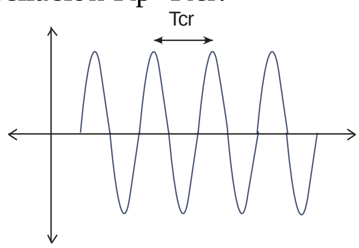


Las constantes del controlador pueden ser:

CONTROLADOR	Kp	Ti	Td
P	1/RL		
PI	0,9/RL	3L	
PID	1,2/RL	2L	0,5L

Otro ensayo, para sistemas sub-amortiguados, es a lazo cerrado en el cual mediante un controlador P se varía la ganancia de esté hasta que el sistema resulte oscilatorio sostenido. En esta condición se mide el periodo de oscilación de la salida Tcr y la ganancia para la cual ocurre esta oscilación Kp=Kcr.





Con estos valores se encuentran las constantes del controlador mediante la siguiente relación:

CONTROLADOR	Kp	Ti	Td
P	0,5 Kcr		
PI	0,45 Kcr	Tcr/1,2	
PID	0,6 Kcr	Tcr/2	Tcr/8

Estos valores aseguran estabilidad a lazo cerrado pero pueden ser variados criteriosamente para lograr una respuesta más apropiada para el sistema.

La discretización del algoritmo se realiza aplicando la aproximación discreta para la derivada del error y para la integral por trapecios con un periodo de muestreo Ts.

Para la derivada se aplica $D = \dfrac{e(k) - e(k-1)}{T_s}$

Para la integral se aplica $I = \sum_{i=0}^{k} T_s \dfrac{\left[e(i) + e(i-1)\right]}{2}$

Entonces la expresión del controlador PID resulta :

$$u(k) = K_p \left[e(k) + \frac{T_s}{T_i} \sum_{i=0}^{k} \frac{\left[e(i) + e(i-1)\right]}{2} + \frac{T_d}{T_s} \left[e(k) - e(k-1)\right] \right]$$

Esta expresión puede provocar la saturación del valor de u(k) debido a la sumatoria por lo tanto se aplica la forma de velocidad donde se calcula u(k)-u(k-1)

$$u(k) - u(k-1) = K_p \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T_s}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{T_s} \left(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2) \right) \right]$$

$$u(k) = u(k-1) + \left[K_p + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right] e(k) - \left[K_p + 2\frac{T_d}{T_s} \right] e(k-1) + \frac{T_d}{T_s} e(k-2)$$

Este algoritmo no presenta problemas de saturación.

---

2) Se pretende analizar la estabilidad relativa del circuito electrónico con amplificadores operacionales de la Figura 2. En tal sentido se requiere conocer el margen de ganancia y el margen de fase.
Si bien, para conocer estos parámetros, se puede realizar un estudio analítico a partir del modelo matemático del circuito, se prefiere medirlos en forma experimental.
Explique, con claridad y en forma concisa, cómo medir los parámetros requeridos. Enumere el instrumental y material utilizado para la medición solicitada.

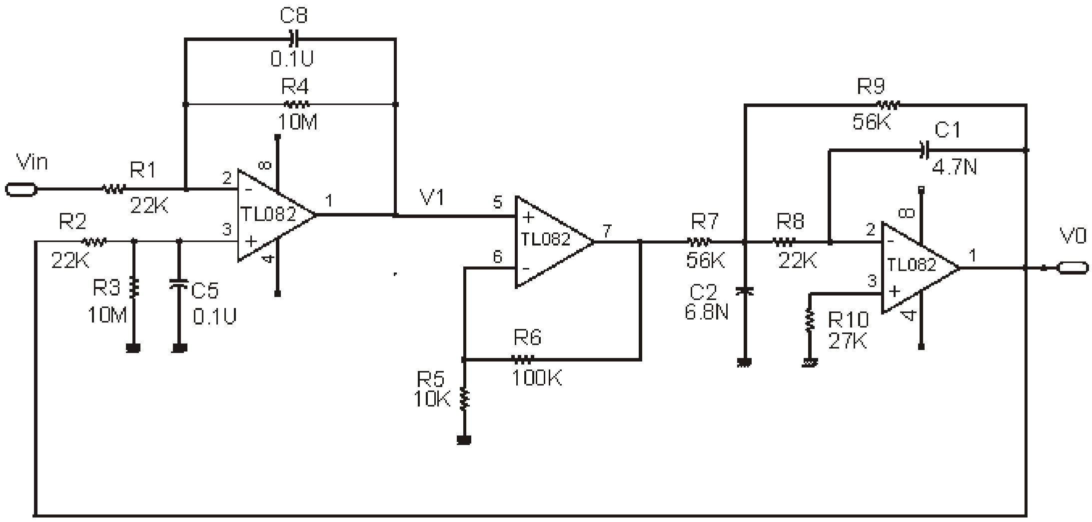


Figura 2

Resolución:

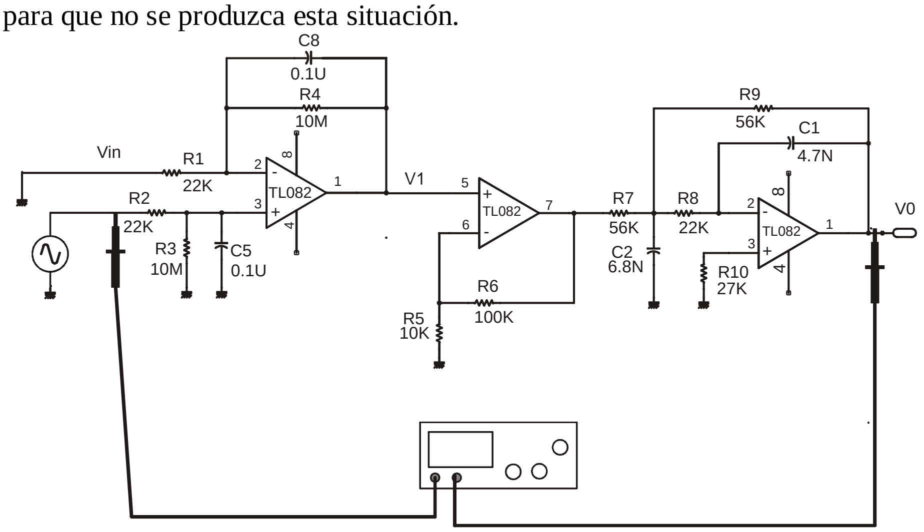
Tanto el margen de fase como el margen de ganancia son magnitudes que se miden con el sistema a lazo abierto, por lo tanto es indispensable abrir el lazo de realimentación para realizar la medición.

Los puntos en donde el lazo de realimentación puede ser abierto no debe modificar las características de cada bloque del circuito, por eso es conveniente interrumpir el lazo en puntos de baja impedancia como son la salida de los amplificadores operacionales. Se plantea entre las distintas opciones abrir el lazo en Vo.

Para poder medir la respuesta en frecuencia del lazo abierto es indispensable conectar la entrada a cero volt para que no se produzcan errores en la medición.

Para realizar la medición pedida se requiere contar con un generador de señal senoidal de frecuencia variable para excitar el circuito y un osciloscopio de dos canales para poder medir la relación de amplitudes y la diferencia de fase entre la señal entregada por el generador y la resultante de medir la salida del lazo abierto.

Como la medición que se pretende realizar es válida para sistemas lineales es necesario asegurar que en ningún momento el circuito entre en saturación en alguna de sus etapas. Por este motivo se debe ajustar la amplitud de la señal del generador para que no se produzca esta situación.

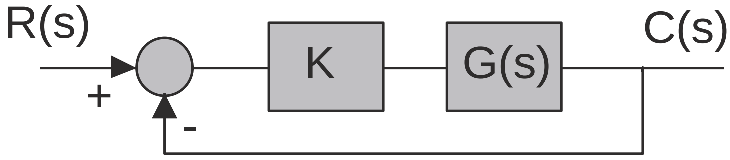


La condición de Margen de Fase se da cuando la ganancia de lazo abierto es de 0 dB (es decir ganancia unitaria) y en esa condición se compara la fase de lazo abierto con la fase crítica para el lazo de control , -180º si el lazo tiene una inversión de fase adicional en el lazo (comparador que resta la realimentación) o 0º si no hay inversión de la señal realimentada como en este caso. La medición se realiza llevando el generador senoidal a una frecuencia tal que las amplitudes de entrada y de salida sean iguales, y además se mide la diferencia de fase existente entre las dos señales respecto de la condición en que ambas se encuentren en fase. Esta diferencia de fase es el Margen de Fase del circuito.

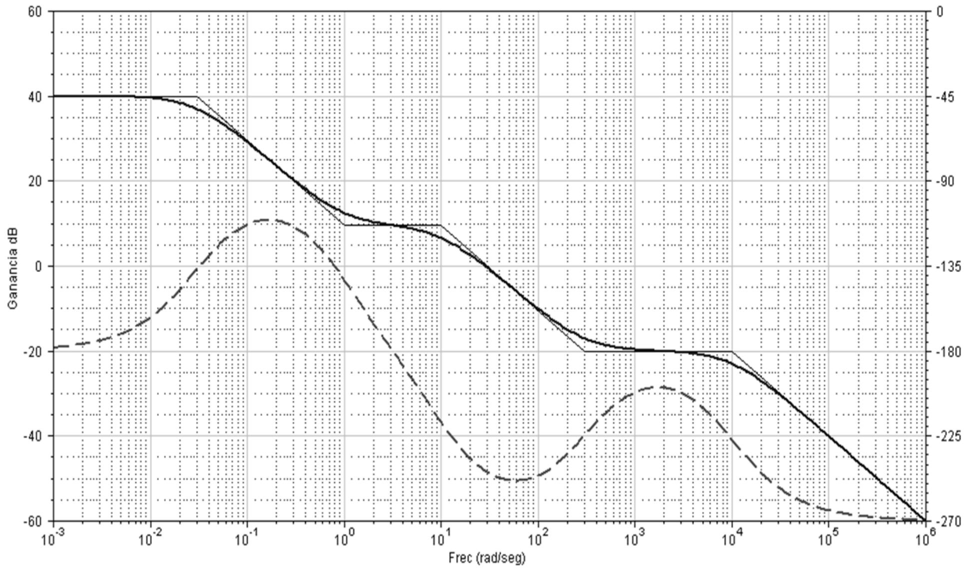
El Margen de Ganancia se da, en este caso, a una frecuencia en donde las señales de entrada y salida se encuentran en fase. Se varia la frecuencia del generador para lograr esta condición se mide la relación (cociente) de amplitudes entre la salida y la entrada. Esta relación expresada en dB es el Margen de Ganancia.

PRÁCTICA:

3) El diagrama de la figura representa un sistema de control de lazo cerrado.
La respuesta de amplitud y fase de G(s) se muestra en la Figura 3.



a) Hallar la función de transferencia G(s).
b) Determinar, mediante el diagrama de Bode, los valores de la ganancia K que hacen estable al sistema a lazo cerrado.
c) Bosqueje en forma cualitativa el diagrama de Nyquist correspondiente y señale la zonas en las que deben encontrarse los puntos (+/- 1) para que el sistema resulte estable.
d) Determine, si existe, el valor del margen de fase correspondiente a K=1.



Resolución:

a) Se va a determinar la transferencia G(s):
La ganancia tiene un valor constante en baja frecuencia de 100 veces (40 db) pero como la fase en baja frecuencia es -180º el signo de la misma es negativo.
Luego, se determinan las singularidades que aparecen en el diagrama de Bode analizando los quiebres producidos en la curva de amplitud. (los aumentos de pendientes de caída determinan polos y las disminuciones ceros).

- Polos en 0.03 r/s. , 10 r/s. y 10000 r/s.
- Ceros en 1 r/s. y 300 r/s.

La ubicación de estas singularidades se determina por la variación de fase producida en cada caso (polos en el semiplano izquierdo disminuyen la fase 90º y ceros en el mismo semiplano aumentan la fase en el mismo valor, si se encuentran en el semiplano derecho las variaciones de fase se invierten)

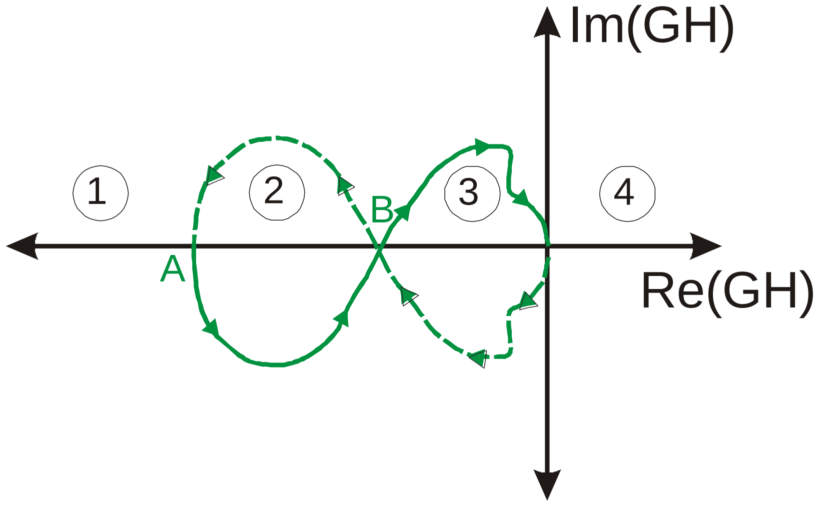
Polo en 0.03 r/s	$\Rightarrow$ aumenta la fase	$\Rightarrow$ semiplano derecho
Cero en 1 r/s	$\Rightarrow$ disminuye la fase	$\Rightarrow$ semiplano derecho
Polo en 10 r/s	$\Rightarrow$ disminuye la fase	$\Rightarrow$ semiplano izquierdo
Cero en 300 r/s	$\Rightarrow$ aumenta la fase	$\Rightarrow$ semiplano izquierdo
Polo en 10000 r/s	$\Rightarrow$ disminuye la fase	$\Rightarrow$ semiplano izquierdo

La transferencia resultante es: $$G(s)=\frac{-100(1-s)\left(1+\frac{s}{300}\right)}{\left(1-\frac{s}{0.03}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{10000}\right)}=\frac{-1000(s-1)(s+300)}{(s-0.03)(s+10)(s+10000)}$$

Para poder extraer los valores de ganancia K para asegurar la estabilidad, primero se deben determinar las zonas estables y para eso es conveniente analizarlo mediante el diagrama de Nyquist.

c) Diagrama de Nyquist. A continuación se dibuja en forma cualitativa el diagrama de Nyquist. El punto A corresponde a frecuencia cero y el punto B al cruce por -180º de fase.

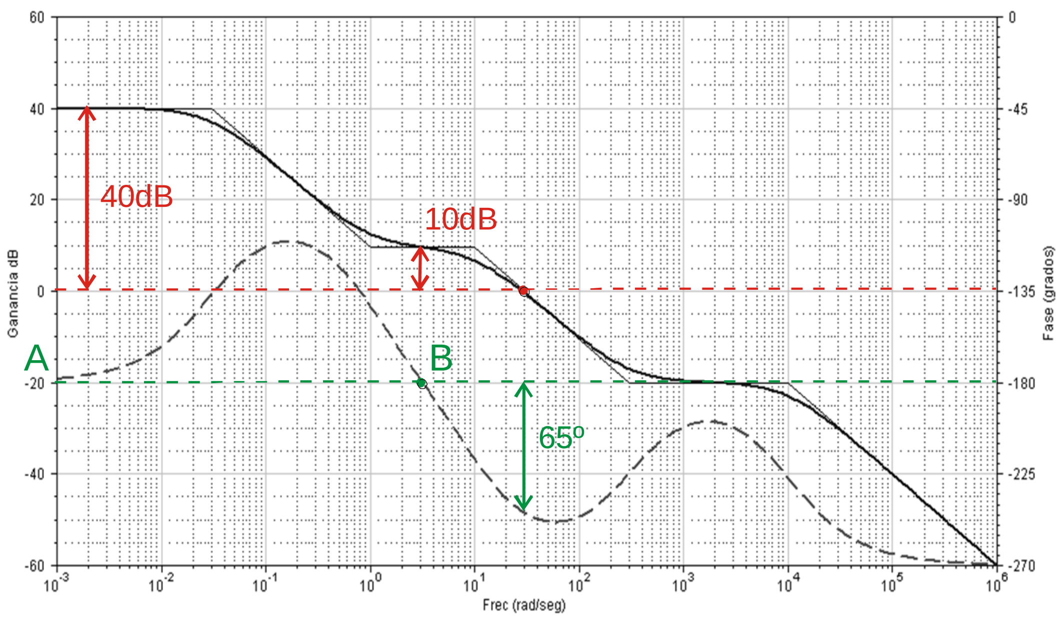
Como puede verse la transferencia GH tiene un polo en el semiplano derecho y por lo tanto en el análisis se considera P=1.



En base al gráfico se determinan 3 zonas en donde se puede encontrar el punto (-1) y corresponden a ganancias K positivas y una zona para valores de K negativos.

- La zona 1 corresponde a valores positivos de K pequeños de modo que la ganancia a frecuencia cero sea menor que 1. En este caso el valor de giros alrededor del punto (-1) es N=0 y como el sistema tiene un polo en el semiplano derecho resulta Z=N+P=1 y por lo tanto el sistema a lazo cerrado resulta **inestable.**
- La zona 2 se produce un giro en sentido anti-horario, es decir negativo. En este caso el valor de giros alrededor del punto (-1) es N= -1 y como el sistema tiene un polo en el semiplano derecho resulta Z=N+P=0 y por lo tanto el sistema a lazo cerrado resulta **estable.**
- La zona 3 se produce un giro en sentido horario, es decir positivo. En este caso el valor de giros alrededor del punto (-1) es N= 1 y como el sistema tiene un polo en el semiplano derecho resulta Z=N+P=2 y por lo tanto el sistema a lazo cerrado resulta **inestable**.
- Para la zona 4, se analiza la cantidad de giros alrededor del punto (+1), como puede verse no existen giros y por lo tanto N=0 y como el sistema tiene un polo en el semiplano derecho resulta Z=N+P=1 y por lo tanto el sistema a lazo cerrado resulta **inestable.**

b) En consecuencia, en base a los resultados obtenidos del diagrama de Nyquist, el sistema resultará estable si la curva de ganancia cruza 0 dB entre los puntos A y B. Si la curva de ganancia se encuentra totalmente debajo de 0 dB el sistema resulta inestable.

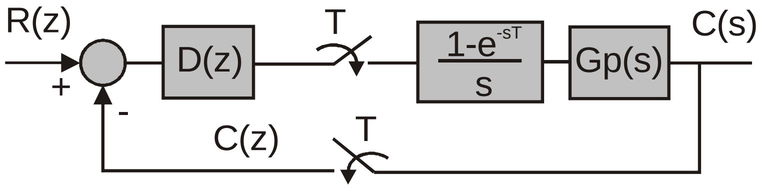


El valor mínimo de ganancia para mantener al sistema estable, se da para el punto A y tiene un valor de -40dB y el valor máximo se da en el punto B (3 r/s.) y es de -10dB. En consecuencia el sistema resultará estable para el siguiente rango de valores de K: $0.01 \le K \le 0.316$.

e) Para K=1 el sistema es inestable y el margen de fase es: $M\Phi \cong -65º$

---

4) En la figura se muestra un sistema de control discreto con periodo de muestreo T=0,005 seg. La transferencia discreta de la planta se muestra junto a la figura.

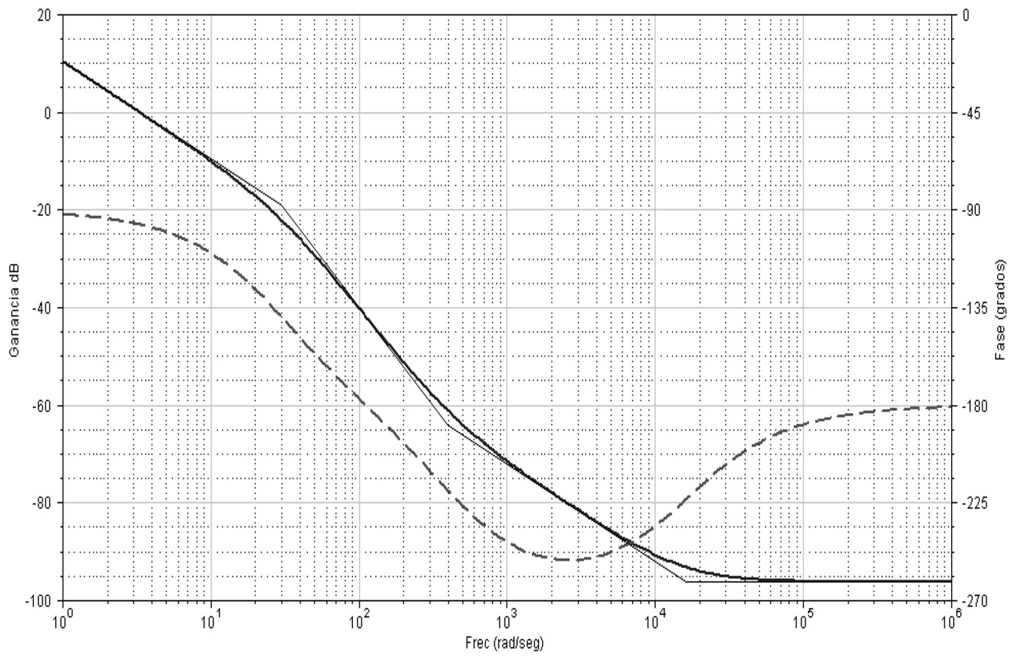


$$Gp(z) = \frac{1.19\times10^{-3}(z+0,9512)}{(z-1)(z-0,8607)}$$

La transferencia resultante de aplicar la transformación bilineal $w = 400\dfrac{(z-1)}{(z+1)}$ es la siguiente:

$$Gp(w) = \frac{-1,559\times10^{-5}(w+1,601\times10^{4})(w-400)}{w(w+29,94)}$$

El diagrama de Bode correspondiente se muestra en la Figura 4.
Se desea diseñar un controlador D(z) tal que el sistema tenga una constante de velocidad $Kv \ge 10$, un ancho de banda de 100 rad/seg. y un margen de fase de 45º.
Halle el error en régimen permanente para una entrada en rampa del sistema compensado.



Resolución:

En primer término se va a determinar la ganancia mínima que debe tener el controlador para cumplir con la condición de Kv.

$$Kv = \lim_{w\to0} w\cdot Gp(w) = \lim_{w\to0}\frac{-1,559\times10^{-5}(w+1,601\times10^{4})(w-400)}{(w+29,94)} = 3.334$$

Para cumplir que $Kv \ge 10$, el controlador debe amplificar al menos 3.33 veces. Con esta ganancia la curva de amplitud cruzaría 0 db en w=10 r/s.

La especificación de ancho de banda determina que la curva deberá cruzar por 0 dB en w=100 r/s. y a esa frecuencia el margen de fase debe ser de 45º.
En 100 r/s la fase es prácticamente -180º por lo tanto en ese punto la misma debe subir 45º eso se logra mediante una red de adelanto.
Para la red de adelanto se considera : $\Phi_{MAX} = 45^{o}$ y $\omega_0 = 100$ r/s. Por lo tanto para la red resulta:

$$\text{sen}\,\Phi_{MAX} = \frac{a-1}{a+1} \quad \Rightarrow \quad a = 5.82 \text{ y como } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a}\cdot T} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} = 241.4 \text{ r/s}$$

Por lo tanto la red de adelanto será: $G_{c1}(w) = \dfrac{5.82(w+41.5)}{(w+241.4)}$

En w=100 r/s la ganancia de Gp(w) es aproximadamente -40 dB, la red de adelanto agrega (10 log(a)) 7.65 dB. Por lo tanto la ganancia resulta -32.35 dB.
Debo agregar 32.35 dB para que la curva de ganancia crice por 0 dB en 100 r/s. K=41.44.

El compensador resultante es: $G_C(w) = \dfrac{241.22(w+41.5)}{(w+241.4)}$

Para el sistema compensado:

$$Kv = \lim_{w\to 0} w\cdot\left[Gp(w)\cdot Gc(w)\right] = \lim_{w\to 0}\frac{-3{,}76\times 10^{-3}(w+1{,}601\times 10^{4})(w-400)(w+41.5)}{(w+29{,}94)(w+241.4)} = 138.16$$

El error es: $\dfrac{1}{Kv} = \dfrac{1}{138.16} = 7{,}23\times 10^{-3}\,\dfrac{1}{seg}$

La transferencia discreta del compensador será:

$$D(z) = G_C(w)\Big|_{w=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{241{,}22\left(\dfrac{400(z-1)}{(z+1)}+41{,}5\right)}{\left(\dfrac{400(z-1)}{(z+1)}+241{,}4\right)} = \frac{166(z-0{,}8122)}{(z-0{,}2473)}$$

El diagrama de bode del sistema compensado queda: