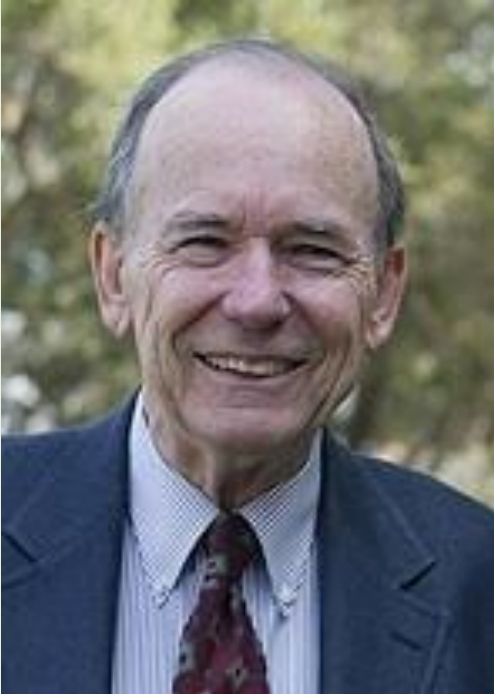


TEORÍA DE CONTROL

Estimador asintótico de estados
Caso SISO

Observadores o Estimadores de Estado



Profesor David G. Luenberger

El concepto de observadores puede atribuirse a David G. Luenberger, que lo desarrolló como resultado de su tesis doctoral (Stanford University, 1963). Su trabajo incluía los aspectos básicos de observadores, incluyendo observadores de orden reducido y transformaciones canónicas. Actualmente, David Luenberger es profesor en el departamento de sistemas económicos, de ingeniería e investigación operacional de la Universidadde Stanford.

Luenberger, David G. (1964), “*Observing the State of a Linear System*,” *IEEE Transactions on Military Electronics* (April 1964) 74–80.

Observing the State of a Linear System

DAVID G. LUENBERGER, STUDENT MEMBER, IEEE

Summary—In much of modern control theory designs are based on the assumption that the state vector of the system to be controlled is available for measurement. In many practical situations only a few output quantities are available. Application of theories which assume that the state vector is known is severely limited in these cases. In this paper it is shown that the state vector of a linear system can be reconstructed from observations of the system inputs and outputs.

It is shown that the observer, which reconstructs the state vector, is itself a linear system whose complexity decreases as the number of output quantities available increases. The observer may be incorporated in the control of a system which does not have its state vector available for measurement. The observer supplies the state vector, but at the expense of adding poles to the over-all system.

I. INTRODUCTION

IN THE PAST few years there has been an increasing percentage of control system literature written from the "state variable" point of view [1]–[8]. In the case of a continuous, time-invariant linear system the state variable representation of the system is of the form:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bx(t),$$

where

$y(t)$ is an $(n \times 1)$ state vector

$x(t)$ is an $(m \times 1)$ input vector

A is an $(n \times n)$ transition matrix

B is an $(n \times m)$ distribution matrix.

techniques have been developed to find the function F for special classes of control problems. These techniques include dynamic programming [8]–[10], Pontryagin's maximum principle [11], and methods based on Lyapunov's theory [2], [12].

In most control situations, however, the state vector is not available for direct measurement. This means that it is not possible to evaluate the function $F[y(t), t]$. In these cases either the method must be abandoned or a reasonable substitute for the state vector must be found.

In this paper it is shown how the available system inputs and outputs may be used to construct an estimate of the system state vector. The device which reconstructs the state vector is called an observer. The observer itself as a time-invariant linear system driven by the inputs and outputs of the system it observes.

Kalman [3], [13], [14] has done some work on this problem, primarily for sampled-data systems. He has treated both the nonrandom problem and the problem of estimating the state when measurements of the outputs are corrupted by noise. In this paper only the non-statistical problem is discussed but for that case a fairly complete theory is developed.

It is shown that the time constants of an observer can be chosen arbitrarily and that the number of dynamic elements required by the observer decreases as more



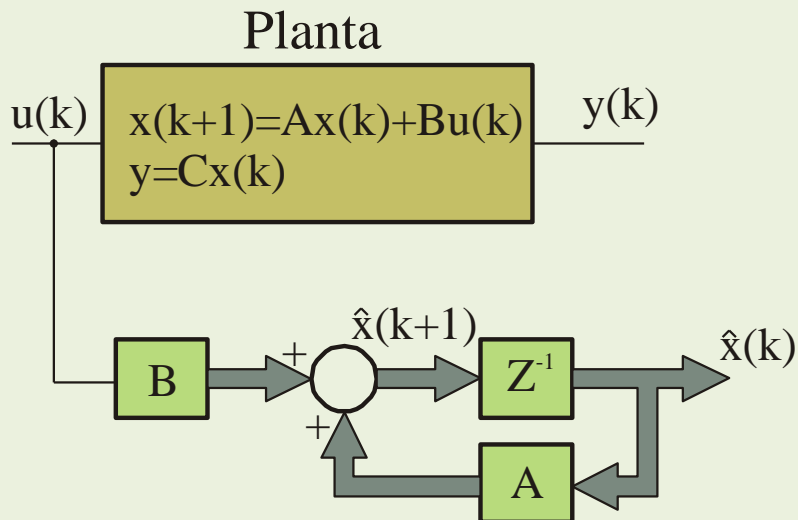
Estimadores de estado

Estimador de Estado

Dado un modelo de estado discreto observable: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
 $y(k) = Cx(k)$

A pesar de conocer A, B y C, se suponen inaccesibles a algunas de las variables de estado.

Se propone “estimar” las variables a partir de una copia del modelo:



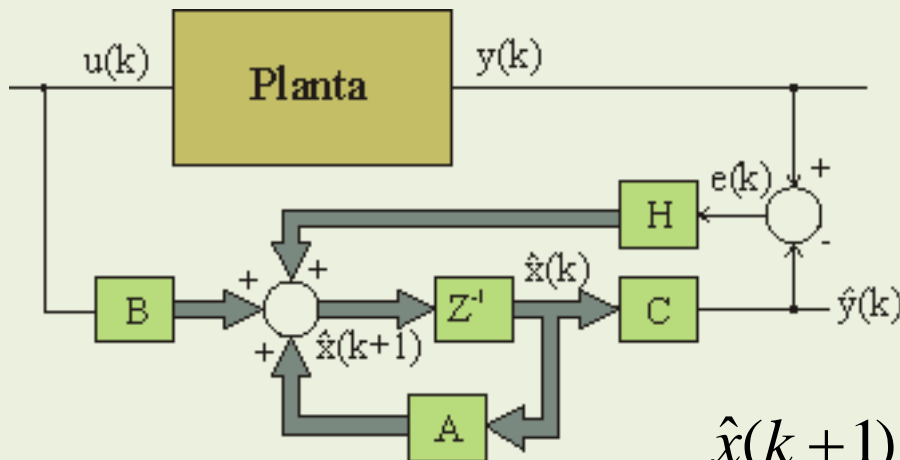
Si las condiciones iniciales de la copia son las mismas que las del modelo, el comportamiento de la variable real y la estima es idéntico. Si esto no se cumple, la estima tendrá un error.



Estimadores de estado

Estimador de Estado

Para corregir el problema anterior se propone una realimentación del error entre la salida del sistema y la salida estimada con la idea de que si este error tiende a cero las variables de estado tienen el mismo valor.



$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - C\hat{x}(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + He(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + H(y(k) - C\hat{x}(k))$$

$$\hat{x}(k+1) = (A - HC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Hy(k)$$

Estimador de estados



Estimador de Estado

Ahora se debe determinar si en realidad el modelo planteado estima las variables del sistema. Para ello se analiza el modelo del error entre las variables de la planta y las variables estimadas.

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = (A - HC) \cdot \hat{x}(k) + B \cdot u(k) + H \cdot y(k)$$

Se define el error entre las variables del sistema y las estimadas como

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

Calculando la diferencia entre los modelos queda:

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$$

$$\tilde{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - \left[(A - HC) \hat{x}(k) + Bu(k) + H \begin{matrix} y(k) \\ Cx(k) \end{matrix} \right]$$

$$\tilde{x}(k+1) = (A - HC) \tilde{x}(k)$$



Estimador de Estado

Analizando el modelo del error:

$$\tilde{x}(k+1) = (A - HC)\tilde{x}(k)$$

Puede verse que el modelo del error entre las variables reales y estimadas es un sistema homogéneo y su respuesta dependerá exclusivamente de los autovalores de la matriz $(A - HC)$, por lo tanto si estos autovalores son estables, el error tiende a cero asintóticamente, caso contrario el error diverge.

Por este motivo se denomina a este estimador, “Estimador asintótico de estados”.

El error entre las variables se hace cero a la velocidad de los autovalores de $(A - HC)$, siempre que H sea una matriz no nula.

Se deben asegurar los autovalores de $(A - HC)$ con módulo menor que la unidad, como A y C son conocidas se debe encontrar una matriz H que asigne los autovalores del error a posiciones estables.



Estimador de Estado

CASO SISO:

Se plantea la hipótesis que si el modelo de la planta es observable, entonces se puede encontrar una matriz H que ubique los autovalores de $(A-HC)$ a posiciones arbitrarias.

Si la planta es observable puedo llevar al modelo a la forma canónica observable (MCO) mediante la transformación lineal:

$$P = V^{-1}\bar{V}$$

Considerando el polinomio característico del modelo de la planta:

$$\text{Det}[zI - A] = z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_3 z^2 + a_2 z + a_1$$



Forma canónica observable

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \bar{B} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}(k)$$

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\bar{u}(k)$$

$$y(k) = \bar{C}\bar{x}(k)$$

donde $\bar{A} = P^{-1}AP$ $\bar{B} = P^{-1}B$ $\bar{C} = CP$



Forma canónica observable

Se plantea un estimador para el modelo canónico , por lo tanto se calcula la matriz $(\bar{A} - \bar{H} \bar{C})$

$$(\bar{A} - \bar{H} \bar{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_3 \\ \dots \\ \dots \\ \bar{h}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{A} - \bar{H} \bar{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 - \bar{h}_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 - \bar{h}_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_3 - \bar{h}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n - \bar{h}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_n \end{bmatrix}$$

α_i : coeficientes de la ecuación característica del estimador



Forma canónica observable

La matriz resultante tiene la forma del MCO, donde ahora los coeficientes de la ecuación característica son:

$$\alpha_i = a_1 + \bar{h}_i$$

Con lo cual, los componentes del vector realimentación se pueden calcular como:

$$\bar{h}_i = (\alpha_i - a_i)$$

Esto significa que si se conocen los coeficientes de la ecuación característica del estimador, se pueden hallar los elementos del vector H.

Suponiendo conocidos los autovalores deseados para el estimador :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

Se halla el polinomio característico deseado para el estimador de la siguiente forma:

$$(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n) = z^n + \alpha_n z^{n-1} + \dots + \alpha_2 z + \alpha_1$$



Forma canónica observable

Finalmente:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \alpha_2 - a_2 \\ \dots \\ \alpha_n - a_n \end{bmatrix}$$

Este vector reasigna los autovalores del MCO.

Transformando el modelo canónico a la forma de la planta original

$$(\bar{A} - \bar{H} \bar{C}) = (P^{-1}AP - \bar{H} CP) = P^{-1} \begin{pmatrix} A - P\bar{H}C \\ H \end{pmatrix} P$$

Puede verse que la matriz que reasigna los autovalores para el modelo original es:

$$H = P\bar{H}$$

Si el modelo de la planta es observable se pueden asignar arbitrariamente los autovalores de $(A-HC)$



Conclusiones

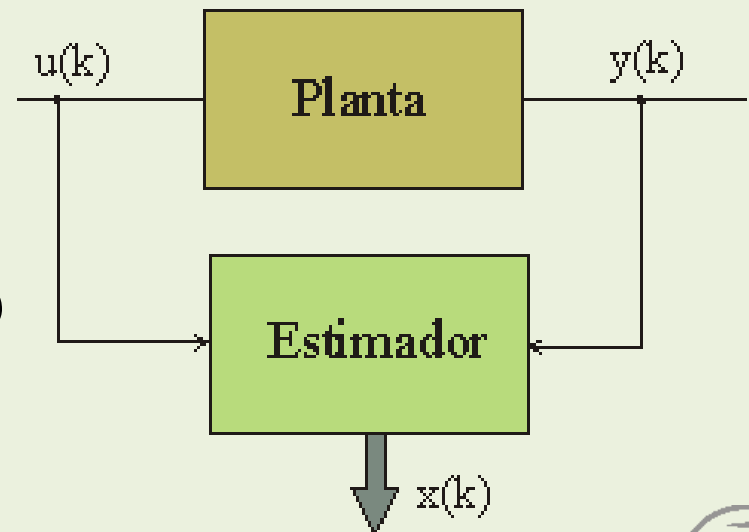
- Si el modelo es observable se puede calcular H del MCO en función de los coeficientes de la ecuación característica deseada para el estimador y los del sistema a estimar.

- Se halla la matriz de transformación al modelo canónico como: $P = V^{-1}\bar{V}$

- Se lleva el vector de realimentación del modelo canónico, al modelo original como: $H = P\bar{H}$

- Finalmente, el modelo del estimador resulta:

$$\hat{x}(k+1) = (A - HC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Hy(k)$$



Estimadores de estado

Estimación con ruido

Considere una planta en la que la señal utilizada para el estimador se encuentra perturbada.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + n(k)$$

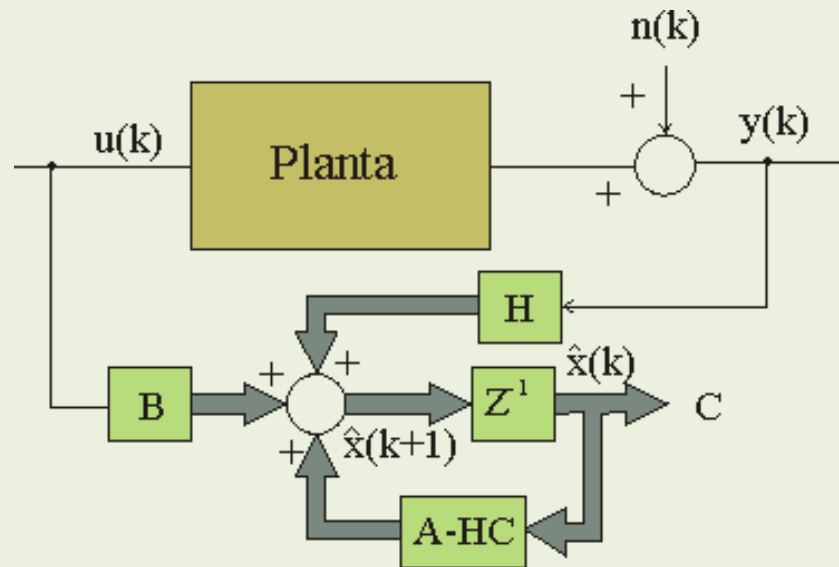
Aplicado esta señal al estimador:

$$\hat{x}(k+1) = (A - HC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Hy(k)$$

El modelo del error entre las variables de estado originales y estimadas resulta de la forma:

$$\tilde{x}(k+1) = x(k) - \hat{x}(k) = (A - HC)\tilde{x}(k) + Hn(k)$$

Ahora, el error se va a ver propulsado por la señal $n(k)$, cuanto mayor sea el valor de los elementos de la matriz H , mayor será el error y por lo tanto peor será la estima de las variables del sistema.



Consideraciones acerca de la convergencia del estimador

La velocidad con la cual el valor de la variable estimada se aproxima al valor de la variable real, depende de la ubicación de los autovalores de la matriz $(A-HC)$. Cuanto menor sea el módulo de los autovalores, más rápido se extingue el error.

Es decir que el estimador cuyos autovalores se encuentren todos ubicados en cero es el que mayor velocidad de respuesta va a tener y se podría decir en términos de sistemas discretos que el ancho de banda es infinito. Sin embargo, esta situación se contrapone con el hecho de que los valores de los elementos de H crecen considerablemente y por lo tanto es menos inmune a las perturbaciones en la medición de la salida.

Existe una relación de compromiso entre la velocidad de convergencia del error y la inmunidad a las perturbaciones

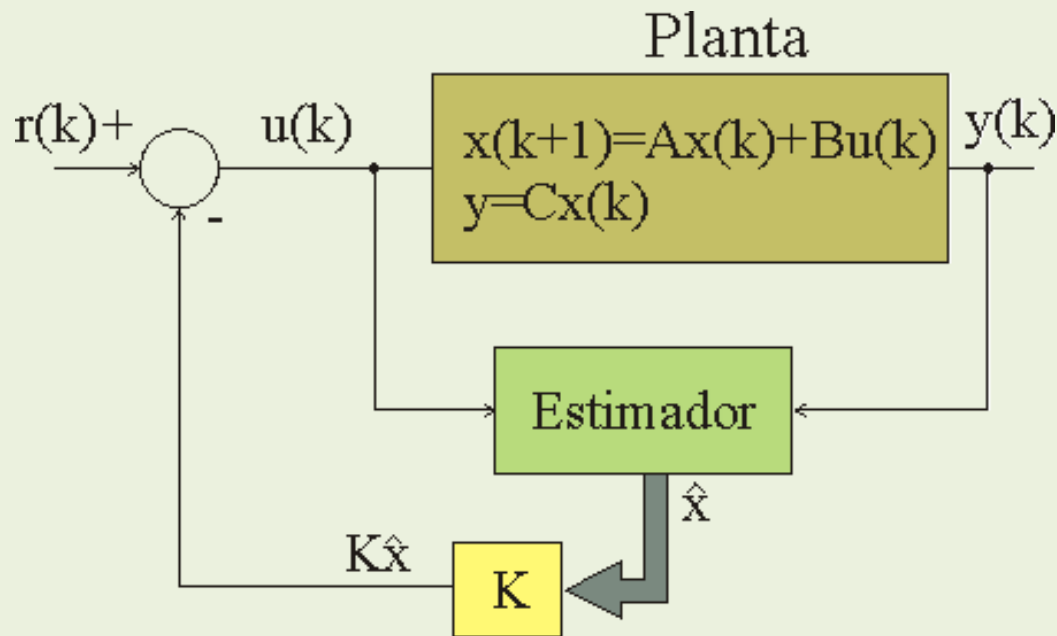


Estimadores de estado

Propiedad de separación

Se considera un sistema realimentado a partir de las variables estimadas, cuya ley de control es:

$$u(k) = r(k) - k x(k)$$



Se van a analizar las características principales del sistema resultante, compuesto por las variables de estado de la planta más las variables de estado del estimador.



Propiedad de separación

Se plantean las ecuaciones de estado de la planta y del estimador, y la ley de control

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ \hat{x}(k+1) &= (A - HC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Hy(k) \\ u(k) &= r(k) - Kx(k)\end{aligned}$$

Se reemplaza la ley de control en las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Br(k) - BK\hat{x}(k) \\ \hat{x}(k+1) &= (A - HC)\hat{x}(k) + Br(k) - BK\hat{x}(k) + Hy(k) \\ \hat{x}(k+1) &= (A - HC - BK)\hat{x}(k) + Br(k) + Hy(k)\end{aligned}$$

Finalmente, se genera un modelo de estado compuesto, con las variables de estado reales y las estimadas, que representa la situación planteada:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - HC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r(k)$$



Propiedad de separación

El comportamiento del sistema compuesto está determinado por los autovalores de la matriz de la planta, para que resulte mas sencillo el análisis se aplica una transformación lineal en donde se reemplazan las variables estimadas por el error, esta transformación no modifica los autovalores:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k) - \hat{x}(k) \end{bmatrix}$$

El modelo transformado tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-HC \end{bmatrix}}_{A^*} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

Para hallar los autovalores del sistema compuesto debo hacer:

$$\det(zI - A^*) = 0$$



Propiedad de separación

Calculando el determinante de la matriz de la planta del sistema compuesto transformado, la expresión resulta:

$$\det(zI - A^*) = \det \begin{bmatrix} sI - (A - BK) & BK \\ 0 & sI - (A - HC) \end{bmatrix} = 0$$

Al ser todas las sub-matrices de A^* matrices cuadradas, el determinante se puede calcular con su desarrollo por menores y adjuntos

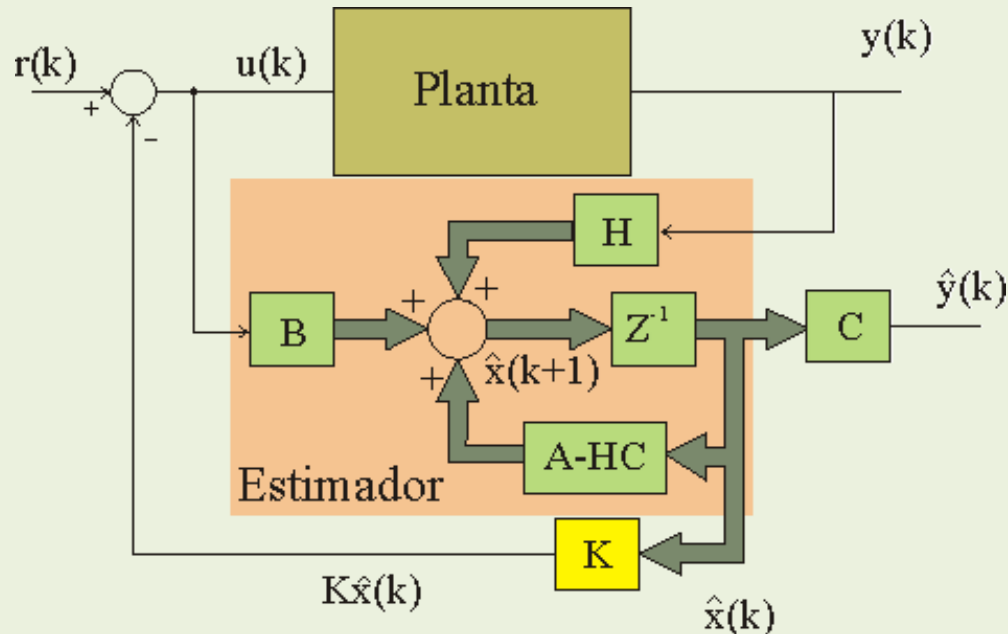
$$\det(zI - A^*) = \det(zI - (A - BK)) \cdot \det(zI - (A - HC)) = 0$$

De aquí se puede ver que los autovalores del modelo compuesto resultan ser los de la planta realimentada más los del estimador. Sin embargo se necesita determinar si los autovalores del estimador intervienen en la respuesta de las variables de la planta del sistema realimentado.



Estimadores de estado

Propiedad de separación

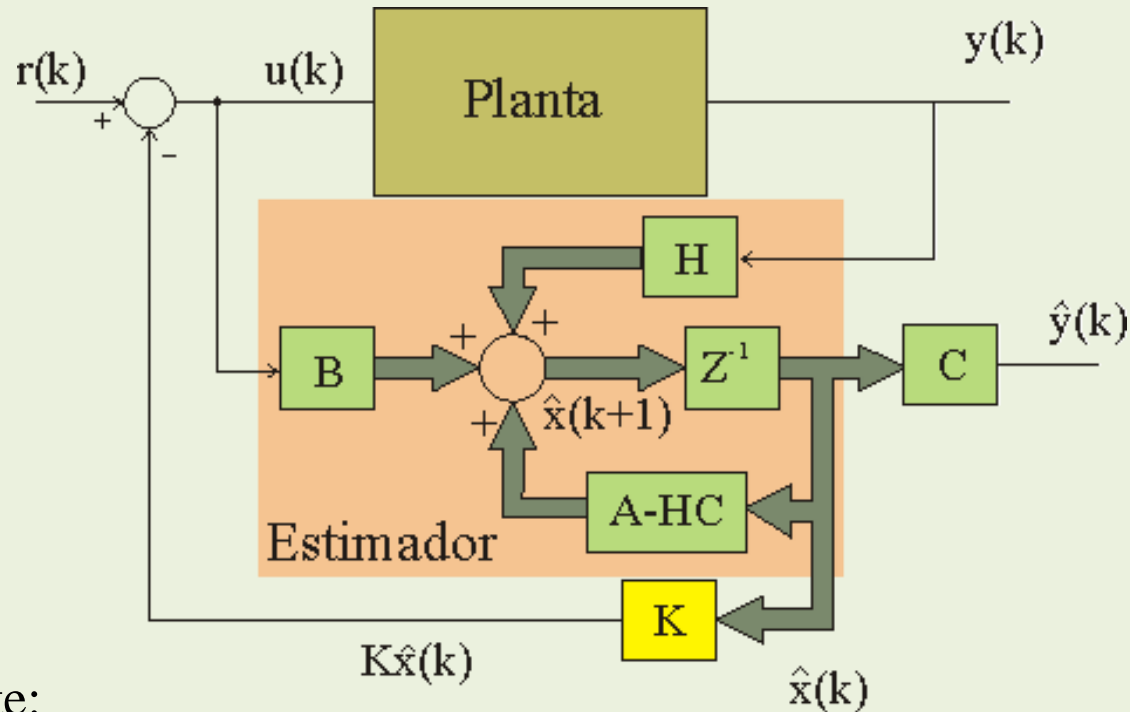


- La transferencia $Y(z)/R(z)$ contiene solamente los autovalores controlables y observables del modelo.
- Desde la estima de $y(k)$ todas las variables son observables, sin embargo desde $y(k)$ las variables del estimador no son observables, ya que resulta una entrada del estimador.
- \Rightarrow En $Y(z)/R(z)$ aparecen solo los autovalores de $A-BK$, como si en vez de realimentar la estima de $x(k)$ se realimentara $x(k)$.



Estimadores de estado

Propiedad de separación



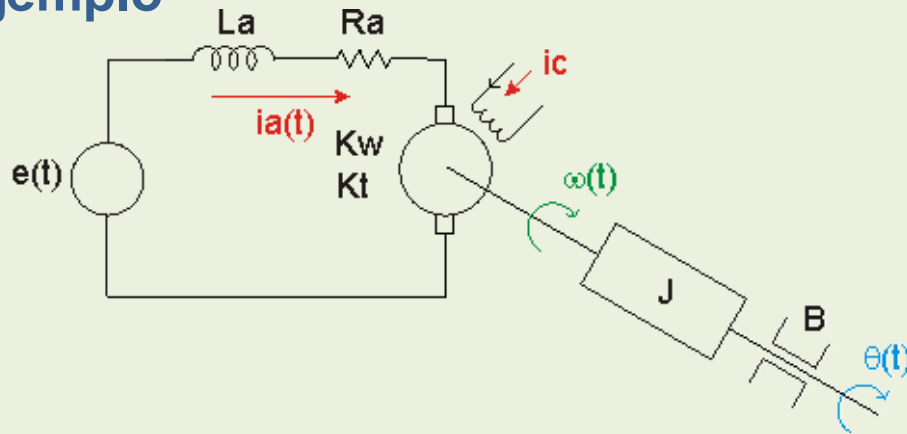
Finalmente:

- El vector de realimentación K se calcula como si se realimentara $x(k)$ en vez de su estima.
- El cálculo del estimador no depende del valor de K .



Estimadores de estado

Ejemplo

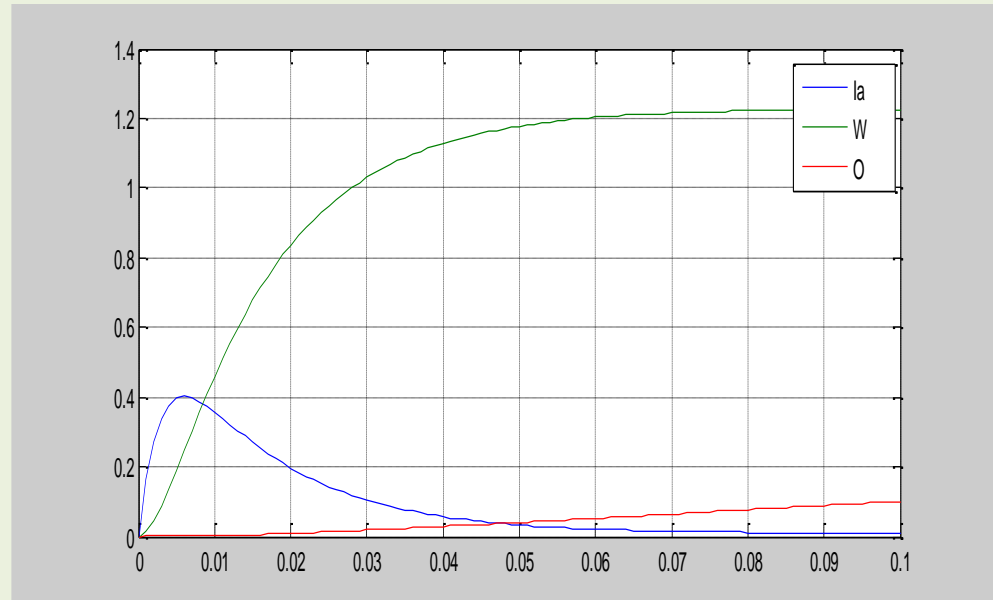


$R_a = 2 \, \Omega$
 $L_a = 5 \, \text{mHy}$
 $J = 0.005 \, \text{Nms}^2$
 $B = 0.005 \, \text{Nms}$
 $K_t = 0.7 \, \text{Nm/A}$
 $K_w = 0.8 \, \text{Vs}$

Modelo de estado continuo

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_w}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$



Ejemplo

Modelo de estado discreto

$$\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 0.6617 & -0.1313 & 0 \\ 0.1149 & 0.9892 & 0 \\ 6.14 \cdot 10^{-5} & 0.0009961 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} 0.1642 \\ 0.01228 \\ 4.229 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} E(k)$$
$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k)$$

Modelo Canónico Observable

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6697 \\ 1 & 0 & -2.321 \\ 0 & 1 & 2.651 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 3.461 \cdot 10^{-6} \\ 1.533 \cdot 10^{-5} \\ 4.229 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} E(k)$$
$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}(k)$$



Estimadores de estado

Ejemplo

Cálculo de la matriz de transformación

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.0001 & 0.0001 & 1 \\ 0.0002 & 0.0020 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2.6509 \\ 1 & 2.6509 & 4.7067 \end{bmatrix} \quad P = V^{-1}\bar{V} = \begin{bmatrix} 10544 & 7062 & 4599 \\ -650 & 569 & 1374 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se considera ubicar los autovalores en $z=0$ por lo tanto :

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0.6697 \\ -2.321 \\ 2.651 \end{bmatrix} \quad H = P\bar{H} \begin{bmatrix} 2862.6 \\ 1887.4 \\ 2.7 \end{bmatrix}$$

El modelo del estimador resulta:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6617 & -0.1313 & -2862.6 \\ 0.1149 & 0.9892 & -1887.4 \\ 6.14 \cdot 10^{-5} & 0.0009961 & -1.651 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.1642 \\ 0.01228 \\ 4.229 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 2862.6 \\ 1887.4 \\ 2.7 \end{bmatrix} y(k)$$



Ejemplo

SIMULACIÓN

En la simulación se va a mostrar :

- La evolución del estimador para distinta asignación de autovalores .
- Como influye la elección de los autovalores del estimador en el transitorio del error entre las variables reales y estimadas.
- Para mediciones de las salidas con ruido, como afecta la elección de los autovalores del estimador en el ruido presente en la estima de las variables del modelo.



TEORÍA DE CONTROL

Estimador asintótico de estados
Caso SISO no Observable

Sistemas no observables

Dado el modelo de estado

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

La matriz observabilidad del modelo $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ tiene rango = $j < n$

Por lo tanto el modelo resulta **INOBSERVABLE**

- ¿Puedo diseñar un estimador que estime todas las variables del sistema?
- Si es posible, ¿puedo asignar arbitrariamente sus autovalores?



Sistemas no observables

Para el estimador: $\hat{x}(k+1) = [A - HC] \hat{x}(k) + B u(k) + H y(k)$

La convergencia del error depende de los autovalores de $(A - HC)$.

Por lo tanto cualquier valor de $H \neq 0$ que satisfaga la situación anterior estima las variables del sistema.

Si el rango de la matriz observabilidad es $Rg[V] = j$, entonces la matriz V tiene j filas L.I.

$$V = \left[\begin{array}{c} C \\ \dots \\ CA^{j-1} \\ \hline CA^j \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} j \text{ filas L.I.} \\ (n-j) \text{ filas L.D} \end{array} \right.$$



Sistemas no observables

Si la matriz V es de rango n puedo reasignar todos los autovalores del sistema. Como V es de rango j , se aplica una transformación lineal que separe las variables observables de la no observables.

$$x(k) = T^{-1} \bar{x}(k)$$

La transformación que realiza esta operación se contruye de la siguiente forma:

$$T = \left[\begin{array}{c} C \\ \dots \\ CA^{j-1} \\ \hline t_1 \\ \dots \\ t_{n-j} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} j \text{ filas L.I.} \\ (n-j) \text{ L.I.} \end{array} \right.$$



Sistemas no observables

Las matrices de la planta transformada se calculan como:

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB \quad \bar{C} = CT^{-1}$$

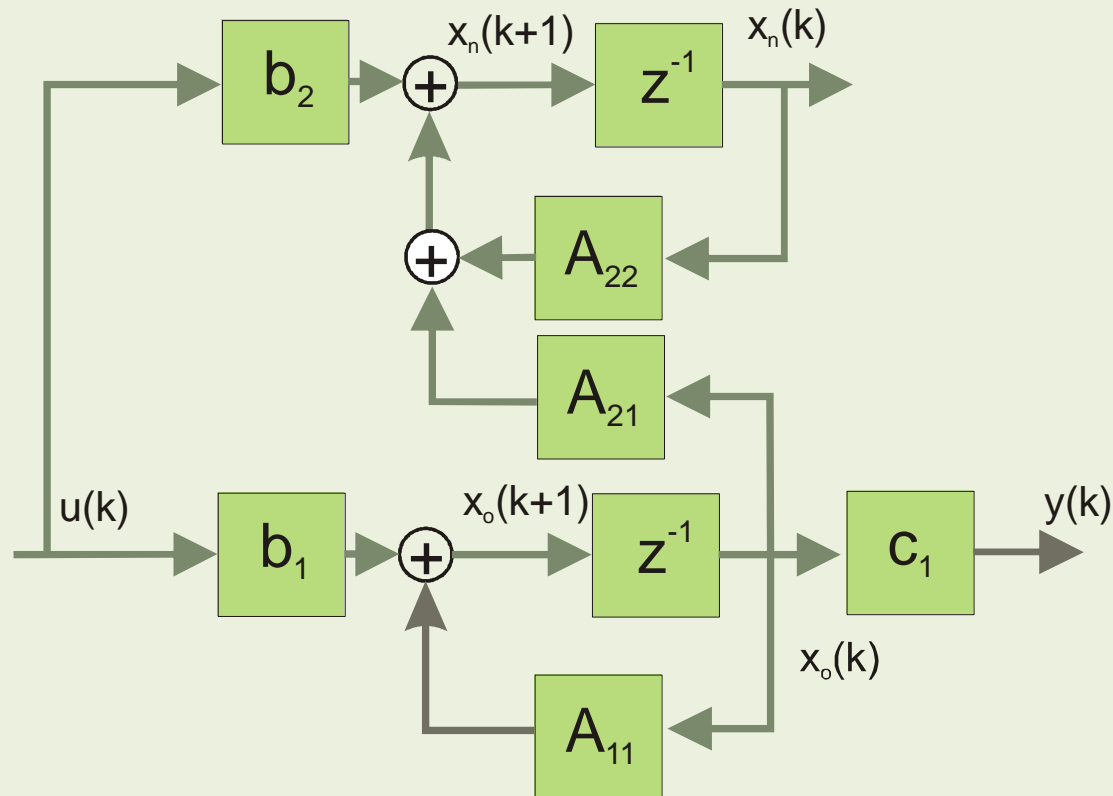
El modelo transformado, queda de la siguiente forma:

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_o \\ x_n \end{bmatrix} (k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\substack{j & n-j}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_o \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{j \\ n-j}} (k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix}}_{\substack{j \\ n-j}} u(k) \quad \left. \begin{matrix} \} \\ \} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} j \\ n-j \end{matrix}$$
$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \bar{x}(k)$$



Sistemas no observables

La representación del modelo transformado puede verse en el siguiente diagrama:



Las variables x_n resultan inobservables ya que no aparecen en la salida ni tampoco en la ecuación de las j primeras variables.

Sistemas no observables

En la matriz A_{11} se encuentran los autovalores reasignables, es decir los observables; y en la matriz A_{22} los autovalores no reasignables, es decir los no observables.

Si los autovalores de la matriz A_{22} resultan estables se dice que el modelo de estados **NO OBSERVABLE** es **DETECTABLE**

Por lo tanto, se pueden reasignar solamente los autovalores de A_{11} y si los autovalores de esta matriz fuesen inestables siempre se puede diseñar un estimador para todas las variables del sistema si el mismo es detectable.



Sistemas no observables

Procedimiento:

- Hallar la matriz observabilidad V y verificar el rango.
- Si el $\text{Rg}[V] < n$, hallar la matriz T de transformación.
- Aplicar la transformación lineal $x(k) = T^{-1} \bar{x}(k)$
- Hallar los autovalores de A_{22} para determinar si es detectable.
- Utilizar el par $[A_{11}, c_1]$ para hallar el vector H_o que reasigna los autovalores a posiciones deseadas para el sub_modelo observable.
- Completar el vector H de longitud j a n elementos agregando ceros

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H_o & 0 \dots 0 \\ & n-j \end{bmatrix}^T$$

- Transformar el vector al modelo original $H = T^{-1} \bar{H}$



Estimadores de estado

Sistemas no observables

Ejemplo:

La figura muestra un sistema de nivel de líquidos en el cual se desea controlar el nivel h_3 , mediante realimentación de variables de estado, comandando el actuador que regula el caudal Q_1 .

Los datos del sistema son:

$$A_1 = 12 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 45 \text{ m}^2$$

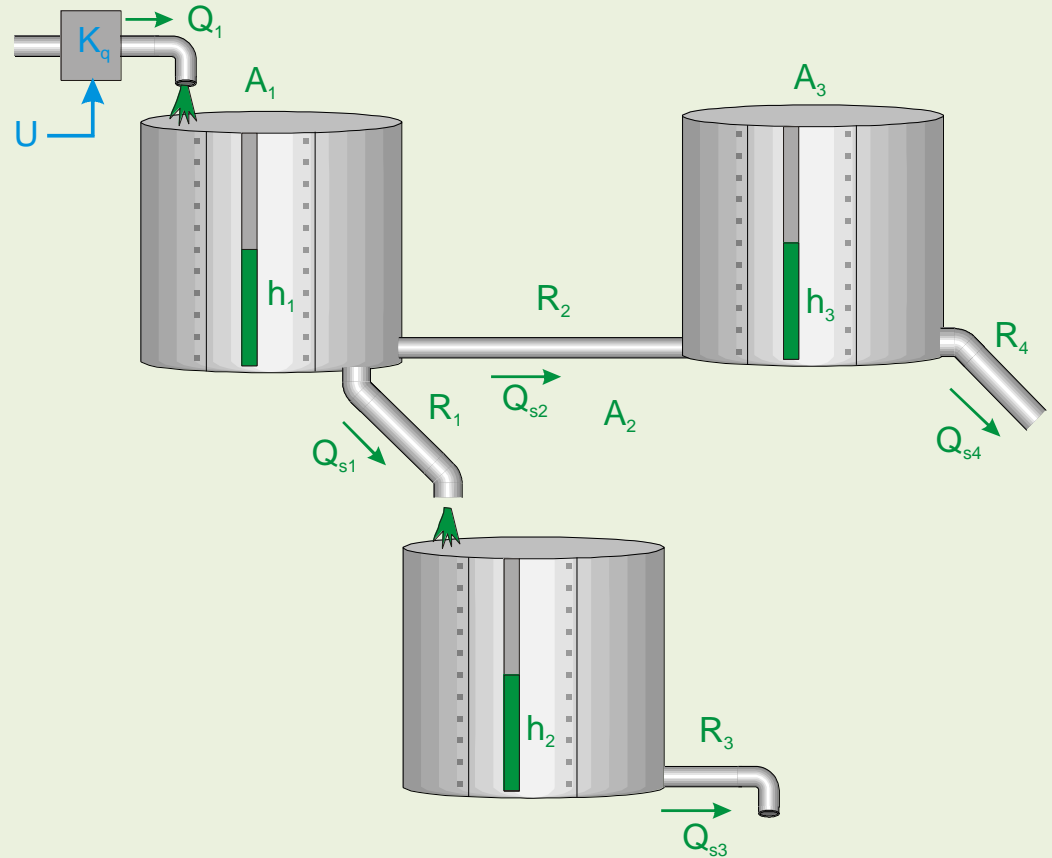
$$A_3 = 15 \text{ m}^2$$

$$R_1 = 120 \text{ seg /m}^2$$

$$R_2 = 360 \text{ seg /m}^2$$

$$R_3 = 72 \text{ seg /m}^2$$

$$R_4 = 300 \text{ seg /m}^2$$



Como solamente se cuenta con un sensor de nivel en el tanque a controlar, se pretende utilizar un estimador para generar las variables faltantes. Analice la factibilidad del diseño del estimador.

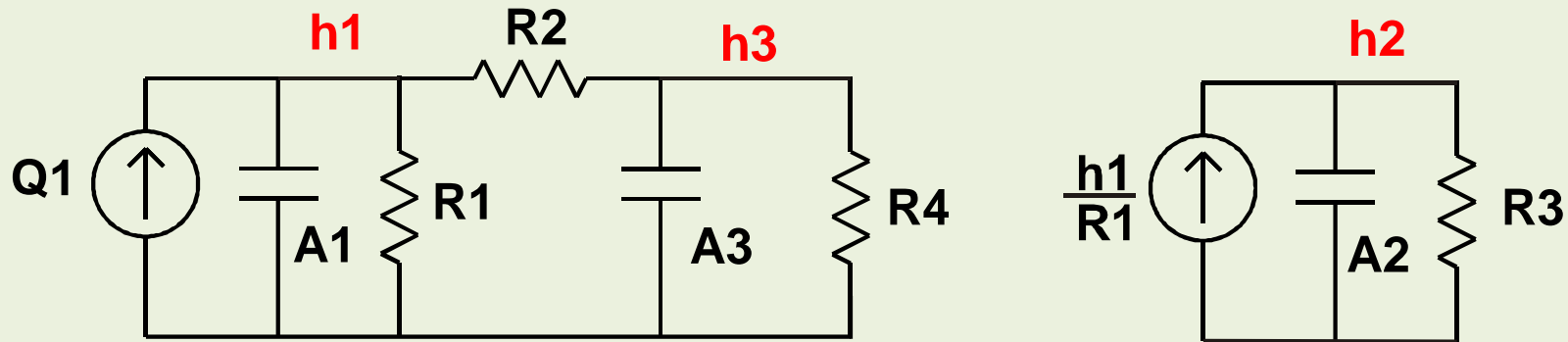


Estimadores de estado

Sistemas no observables

Ejemplo:

El modelo eléctrico equivalente es el siguiente:



Planteando nodos se llega al modelo de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] & 0 & \frac{1}{A_1 R_2} \\ \frac{1}{A_2 R_1} & -\frac{1}{A_2 R_3} & 0 \\ \frac{1}{A_3 R_2} & 0 & -\frac{1}{A_3} \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_q}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U \quad ; \quad h_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$



Estimadores de estado

Sistemas no observables

Ejemplo:

El modelo de estado discreto es:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 0.9908 & 0 & 0.002299 \\ 0.00184 & 0.9969 & 2.132 \times 10^{-6} \\ 0.00184 & 0 & 0.9959 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} 0.008295 \\ 7.684 \times 10^{-6} \\ 7.682 \times 10^{-6} \end{bmatrix} U(k) \quad ; \quad h_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} (k)$$

La matriz observabilidad resulta:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.0018 & 0 & 0.9959 \\ 0.0037 & 0 & 0.9919 \end{bmatrix} \quad Rg[V] = 2$$

Se arma la matriz de transformación para separar las variables observables:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.0018 & 0 & 0.9959 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Rg[T] = 3$$



Estimadores de estado

Sistemas no observables

Ejemplo:

El modelo de estado transformado queda:

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.9868 & 1.987 & 0 \\ -0.9964 & 1 & 0.9969 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 7.682 \times 10^{-6} \\ 2.291 \times 10^{-6} \\ 7.684 \times 10^{-6} \end{bmatrix} U(k) \quad ; \quad h_3 = [1 \quad 0 \quad 0] \bar{x}(k)$$

Las matrices del sub-modelo observable son:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9868 & 1.987 \end{bmatrix} \quad C_1 = [1 \quad 0]$$

Considerando un estimador con una constante de tiempo de 500 seg. Los autovalores resultan:

$$z_1 = 0.9802 \quad z_2 = 0.9802$$

El vector para el estimador del sub-modelo observable es:

$$H_o = \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0.0263 \end{bmatrix}$$



Sistemas no observables

Ejemplo:

El vector del estimador para el modelo transformado:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0.0263 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector para el estimador del modelo original es:

$$H = \begin{bmatrix} 0.0632 \\ 0 \\ 0.0263 \end{bmatrix}$$

Finalmente el modelo del estimador queda:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9908 & 0 & -0.06093 \\ 0.00184 & 0.9969 & 2.132 \times 10^{-6} \\ 0.00184 & 0 & 0.9696 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.008295 \\ 7.684 \times 10^{-6} \\ 7.682 \times 10^{-6} \end{bmatrix} U(k) + \begin{bmatrix} 0.06323 \\ 0 \\ 0.02632 \end{bmatrix} h_3(k)$$



Ejemplo

SIMULACIÓN

En la simulación se va a mostrar :

- La evolución del estimador para distinta asignación de autovalores .
- Como queda evidenciada la imposibilidad de asignar todos los autovalores del estimador , en el transitorio del error entre variables reales y estimadas.
- Para mediciones de las salidas con ruido, como afecta la elección de los autovalores del estimador, en el ruido presente en la estima de las variables del modelo.

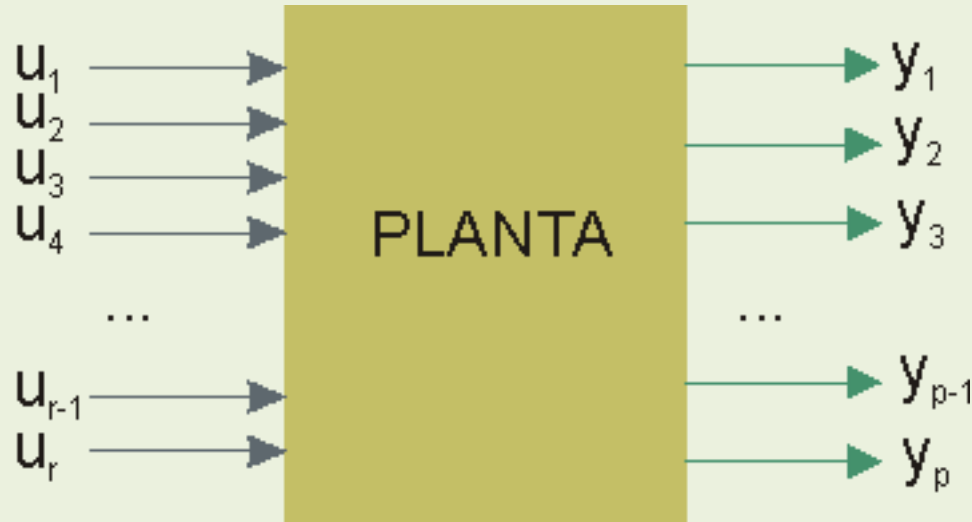


TEORÍA DE CONTROL

Estimador asintótico de estados
Caso MIMO Observable

Sistemas MIMO observables

Considere un sistema representado mediante variables de estado en el cual existen múltiples salidas.



Es decir que:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k)$$

En donde la dimensiones de C son $[q \times n]$.

Se considera que desde las q salidas el sistema es observable



Sistemas MIMO observables

Es posible que, si bien el modelo posee varias salidas, el sistema resulte observable desde una sola de ellas.

Se considera la matriz C

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_i \\ \dots \\ c_q \end{bmatrix}$$

Cada una de las filas de esta matriz corresponde al vector para cada una de las salidas del modelo MIMO



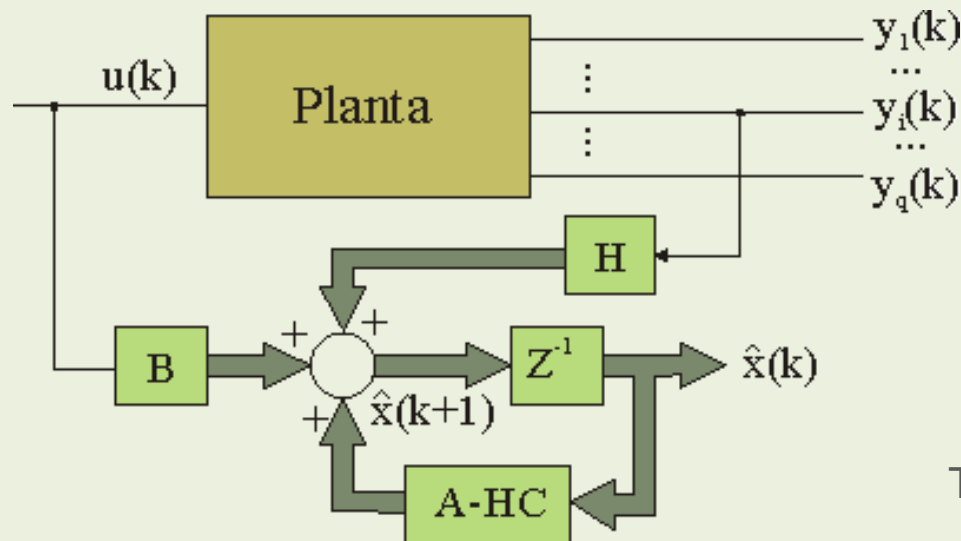
Estimadores de estado

Sistemas MIMO observables

Si el sistema resulta observable desde una salida en particular :

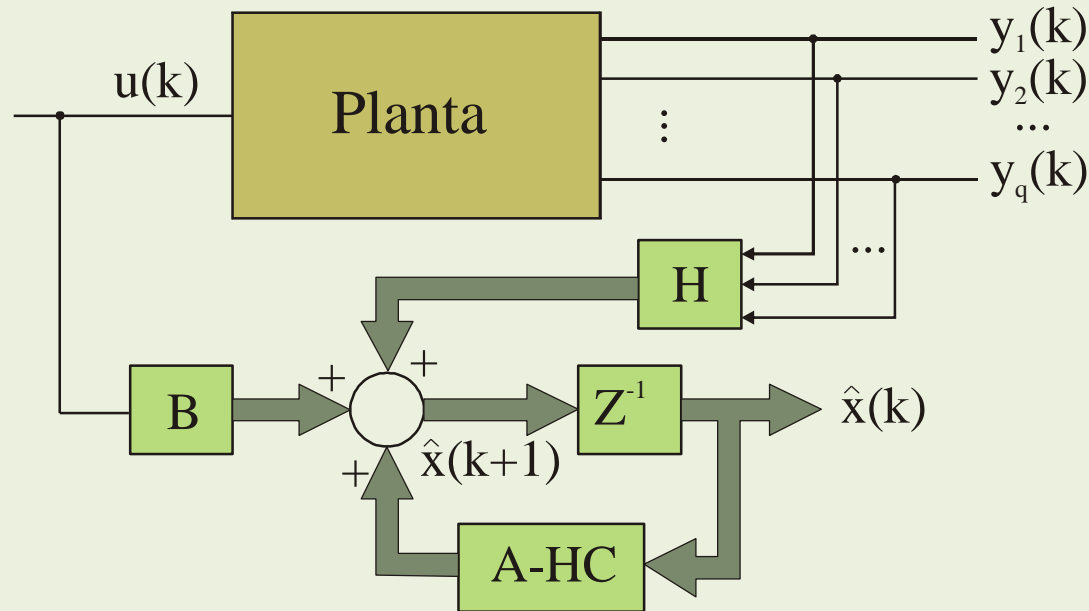
$$V_i = \begin{bmatrix} c_i \\ c_i A \\ \dots \\ c_i A^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{y se cumple que } \text{Rg}(V_i) = n$$

Se puede diseñar un estimador utilizando esta salida y asignando la totalidad de los autovalores del estimador:



Sistemas MIMO observables

En el caso de plantear un estimador de estados sobre todas las salidas la matriz H resulta de $[n \times q]$.



En tanto, debido a que el objetivo es asignar los n autovalores de la matriz $A-HC$. La cantidad de elementos de H excede esa condición por lo que, para una dada ubicación de los autovalores existen infinitas matrices H que permiten esa ubicación.



Sistemas MIMO observables

Se plantea un método que permita hallar una de las matrices H que permitan reasignar los autovalores de $A-HC$.

Se propone una única salida que resulta se combinación lineal de las salidas existentes denominada *salida ficticia*.

$$y^*(k) = f_1 \cdot y_1(k) + f_2 \cdot y_2(k) + \dots + f_q \cdot y_q(k) = F \cdot y(k)$$

Con $F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_q \end{bmatrix}$, en donde los valores de f_i son elegidos arbitrariamente.

El modelo de estado con la nueva salida resulta:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y^*(k) = F C x(k) = C^* x(k)$$

En este caso, C^* resulta ser un vector fila



Sistemas MIMO observables

Ahora, se plantea diseñar un estimador de estado a partir de la salida $y^*(k)$. Para ello se requiere que la observabilidad de la planta original se mantenga es decir que :

$$V^* = \begin{bmatrix} C^* \\ C^* \cdot A \\ \dots \\ C^* \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{y el rango de } V^* \text{ es } Rg(V^*) = n$$

Los elementos del vector F deber mantener la observabilidad del modelo.

Al tener el modelo resultante, una sola salida se plantea un estimador SISO totalmente controlable por ejemplo, a partir del Modelo Canónico Observable



Sistemas MIMO observables

Una vez establecidos los autovalores para el estimador $(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n)$ se halla el vector H^* para el estimador a partir de la salida ficticia.

El modelo del estimador resultante es:

$$\hat{x}(k+1) = (A - H^* C^*) \hat{x}(k) + B u(k) + H^* y^*(k)$$

Reemplazando y^* y C^* por su equivalente del modelo original

$$\hat{x}(k+1) = \begin{pmatrix} A - H^* F & C \\ & C^* \end{pmatrix} \hat{x}(k) + B u(k) + H^* \underbrace{F y(k)}_{y^*}$$

La matriz que multiplica a $y(k)$ es una de las que reasignan los autovalores del estimador a las posiciones deseadas. Es decir que:

$$H = H^* \cdot F$$



Sistemas MIMO observables

El modelo del estimador para el sistema de múltiples salidas es:

$$\hat{x}(k+1) = (A - HC) \hat{x}(k) + B u(k) + H y(k)$$

La matriz de realimentación H , tiene en cuenta a todas las salidas.

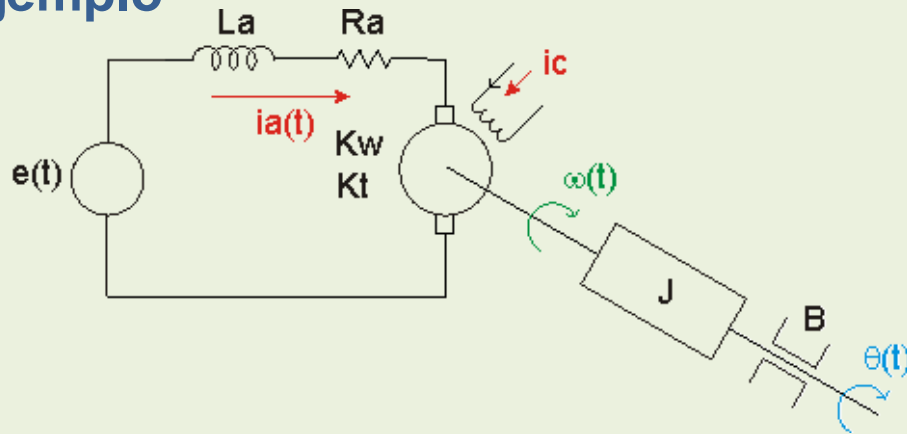
Características particulares

- Las columnas de la matriz H son combinación lineal entre si.
- Se pueden utilizar salidas cuyo contenido de ruido sea bajo y el error cometido en la estima puede verse reducido comparado con el que se obtendría desde una sola salida con ruido



Estimadores de estado

Ejemplo

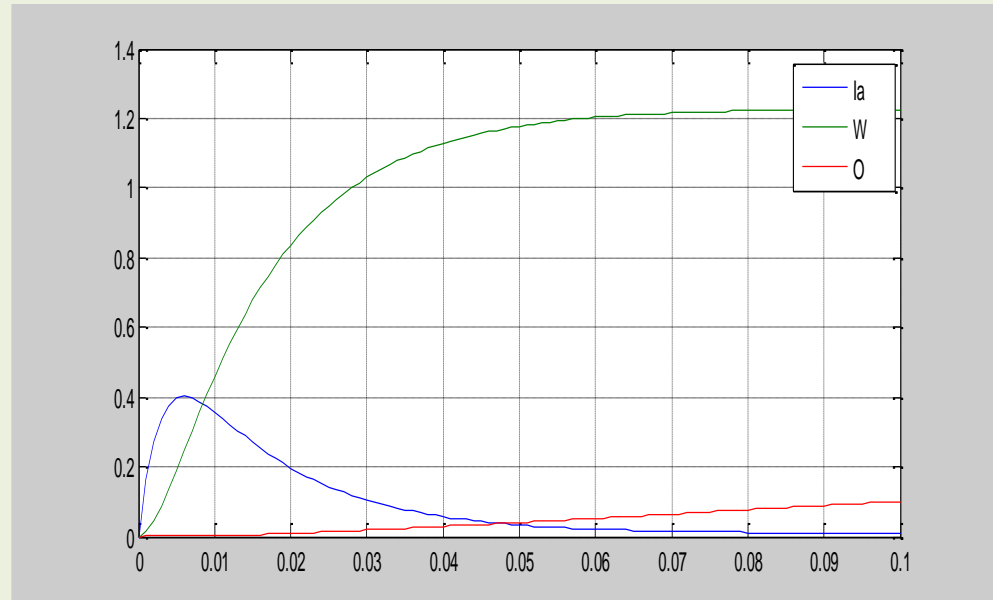


$R_a = 2 \, \Omega$
 $L_a = 5 \, \text{mHy}$
 $J = 0.005 \, \text{Nms}^2$
 $B = 0.005 \, \text{Nms}$
 $K_t = 0.7 \, \text{Nm/A}$
 $K_w = 0.8 \, \text{Vs}$

Modelo de estado continuo

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_w}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$



Ejemplo

Modelo de estado discreto

$$\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 0.6617 & -0.1313 & 0 \\ 0.1149 & 0.9892 & 0 \\ 6.14 \cdot 10^{-5} & 0.0009961 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} 0.1642 \\ 0.01228 \\ 4.229 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} E(k)$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k)$$

Matriz Observabilidad:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.0001 & 0.0010 & 1.0000 \\ 0.1149 & 0.9892 & 0 \\ 0.0002 & 0.0020 & 1.0000 \\ 0.1897 & 0.9634 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de esta matriz es: $Rg(V)=3$



Ejemplo

El vector para generar la salida ficticia es: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

El vector C^* para salida ficticia es: $C^* = FC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora la matriz observabilidad del nuevo modelo es:

$$V^* = \begin{bmatrix} C^* \\ C^* A \\ C^* A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.1150 & 0.9902 & 1 \\ 0.1899 & 0.9654 & 1 \end{bmatrix}$$

El rango de la Matriz Observabilidad es 3, por lo tanto la elección del vector F es correcto.

El modelo Canónico Observable del sistema ficticio es:

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6697 \\ 1 & 0 & -2.3206 \\ 0 & 1 & 2.6509 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \bar{B} u(k) \quad ; \quad y^*(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}(k)$$



Estimadores de estado

Ejemplo

La Matriz de transformación queda : $P = V^{-1}V_{co} = \begin{bmatrix} -4.6420 & 4.0614 & 9.8135 \\ -54.3222 & -54.2678 & -53.2140 \\ 54.3222 & 54.2678 & 54.2140 \end{bmatrix}$

Se considera ubicar los autovalores en $z=0$ por lo tanto :

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0.6697 \\ -2.321 \\ 2.651 \end{bmatrix} \quad H^* = P\bar{H} = \begin{bmatrix} 13.4814 \\ -51.5107 \\ 54.1616 \end{bmatrix}$$

La matriz H para el sistema MIMO resulta: $H = H^*F = \begin{bmatrix} 13.4814 & 13.4814 \\ -51.5107 & -51.5107 \\ 54.1616 & 54.1616 \end{bmatrix}$

Finalmente el estimador tiene la siguiente expresión:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6617 & -13.61 & -13.48 \\ 0.1149 & 52.5 & 51.51 \\ 6.14 \times 10^{-5} & -54.16 & -53.16 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.1642 \\ 0.01228 \\ 4.229 \times 10^{-6} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 13.4814 & 13.4814 \\ -51.5107 & -51.5107 \\ 54.1616 & 54.1616 \end{bmatrix} y(k)$$



Ejemplo

SIMULACIÓN

En la simulación se va a mostrar :

- La evolución del estimador para distinta asignación de autovalores y distintos valores de las componentes del vector F .
- Como influye la elección de las componentes del vector F en el transitorio del error , para la misma ubicación de autovalores.
- Para mediciones de las salidas con ruido, como afecta la elección de los elementos del vector F en el ruido presente en la estima de las variables del modelo.



Estimador de orden reducido

Los estimadores utilizados hasta aquí, permiten obtener la totalidad de las variables de estado a partir de la salida del modelo. En aquellos sistemas donde se miden distintas señales, es posible estimar aquellas variables que no se pueden calcular de las señales medidas.

Dado el siguiente modelo de estado:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k)$$

En donde la dimensiones de C son $[q \times n]$. Las q salidas son **linealmente independientes**, por lo tanto q variables pueden ser calculadas directamente de las salidas medidas.

El sistema puede ser representado separando las variables calculables de las estimadas.

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ x_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix}$$



Estimadores de estado

Estimador de orden reducido

Se aplica transformación lineal para pasar del modelo anterior a un modelo con variables a estimar y salidas. Luego resulta:

$$v(k) = \begin{bmatrix} x_a(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

El modelo transformado queda:

$$v(k+1) = A_T v(k) + B_T u(k) \quad y(k) = C_T v(k)$$

con: $A_T = T A T^{-1}$, $B_T = T B$ y $C_T = C T^{-1} = [0 \ I]$.

Ahora, las ecuaciones del modelo transformado:

$$x_a(k+1) = A_{T11} x_a(k) + A_{T12} y(k) + B_{T1} u(k)$$

$$y(k+1) = A_{T21} x_a(k) + A_{T22} y(k) + B_{T2} u(k)$$



Estimador de orden reducido

La expresión para el estimador es:

$$\hat{x}_a(k+1) = A_{T11}\hat{x}_a(k) + A_{T12}y(k) + B_{T1}u(k) + He_T(k)$$

En la ultima expresión, el error $e_T(k)$ no se puede calcular como en el estimador de orden completo ya que $y(k)$ estimada no puede ser determinada solo a partir de las variables $x_a(k)$ y además porque $y(k)$ no contiene información respecto a la estima de $x_a(k)$. Por lo tanto, se redefine $e_T(k)$ como:

$$e_T(k) = y(k+1) - A_{T21}\hat{x}_a(k) - A_{T22}y(k) - B_{T2}u(k)$$

Operando se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{x}_a(k+1) &= A_{T11}\hat{x}_a(k) + A_{T12}y(k) + B_{T1}u(k) + \dots \\ &\dots + H[y(k+1) - A_{T21}\hat{x}_a(k) - A_{T22}y(k) - B_{T2}u(k)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_a(k+1) - Hy(k+1) &= (A_{T11} - HA_{T21})\hat{x}_a(k) + \dots \\ &\dots + (A_{T12} - HA_{T22})y(k) + (B_{T1} - HB_{T2})u(k)\end{aligned}$$



Estimador de orden reducido

$$\begin{aligned}\hat{x}_a(k+1) - Hy(k+1) = & (A_{T11} - HA_{T21})\hat{x}_a(k) + \dots \\ & \dots + (A_{T12} - HA_{T22})y(k) + (B_{T1} - HB_{T2})u(k)\end{aligned}$$

En esta ultima expresión, el término $y(k+1)$ no es conocido en el instante k , por lo tanto para solucionar este inconveniente se plantea el siguiente cambio de las variables a estimar:

$$\hat{w}(k) = \hat{x}_a(k) - Hy(k)$$

Entonces queda

$$\begin{aligned}\hat{w}(k+1) = & (A_{T11} - HA_{T21})\hat{x}_a(k) - (A_{T11} - HA_{T21})Hy(k) + \dots \\ & \dots + (A_{T11} - HA_{T21})Hy(k) + (A_{T12} - HA_{T22})y(k) + (B_{T1} - HB_{T2})u(k)\end{aligned}$$
$$\hat{w}(k+1) = \underbrace{(A_{T11} - HA_{T21})}_{A_e} \hat{w}(k) + \underbrace{(A_{T12} - HA_{T22} + A_{T11}H - HA_{T21}H)}_{H_e} y(k) + \dots$$
$$\dots + \underbrace{(B_{T1} - HB_{T2})}_{B_e} u(k)$$



Estimador de orden reducido

El estimador de orden reducido finalmente resulta:

$$\hat{w}(k+1) = A_e \hat{w}(k) + H_e y(k) + B_e u(k)$$

Las variables estimadas no se corresponden con las variables que se requerían estimar. Para hallar estas variables se calcula:

$$\hat{x}_a(k) = \hat{w}(k) + Hy(k)$$

En forma matricial el vector de estado queda:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_a(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & H \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

Finalmente la estima de las variables del modelo original se calculan como:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_a(k) \\ \hat{x}_b(k) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_a(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$



Estimadores de estado

Estimador de orden reducido

Calculo del error de las variables estimadas

Se define el error en la estima de las variables como: $\tilde{x}_a(k) = \hat{x}_a(k) - x_a(k)$

Teniendo en cuenta que:

$$x_a(k+1) = A_{T11}x_a(k) + A_{T12}y(k) + B_{T1}u(k)$$

$$\hat{x}_a(k+1) = A_{T11}\hat{x}_a(k) + A_{T12}y(k) + B_{T1}u(k) + He_T(k)$$

Se obtiene:

$$\tilde{x}_a(k+1) = A_{T11}\tilde{x}_a(k) + He_T(k)$$

$$e_T(k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1)$$

$$e_T(k) = A_{T21}x_a(k) + A_{T22}y(k) + B_{T2}u(k) - A_{T21}\hat{x}_a(k) - A_{T22}y(k) - B_{T2}u(k)$$

Finalmente:

$$\tilde{x}_a(k+1) = (A_{T11} - HA_{T21})\tilde{x}_a(k)$$

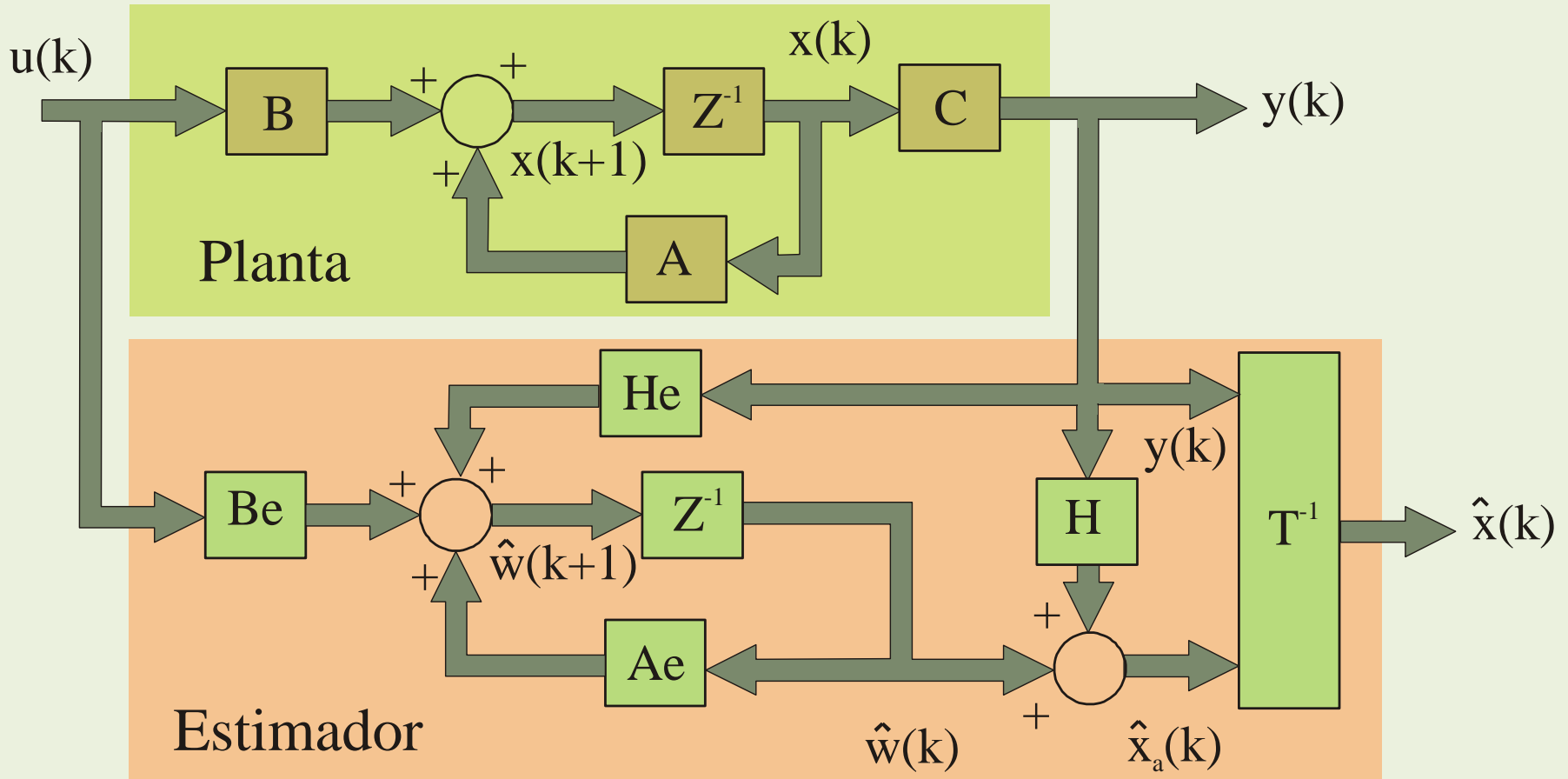
Luego, el cálculo de la matriz H se realiza a partir de la asignación de los autovalores de la matriz Ae.



Estimadores de estado

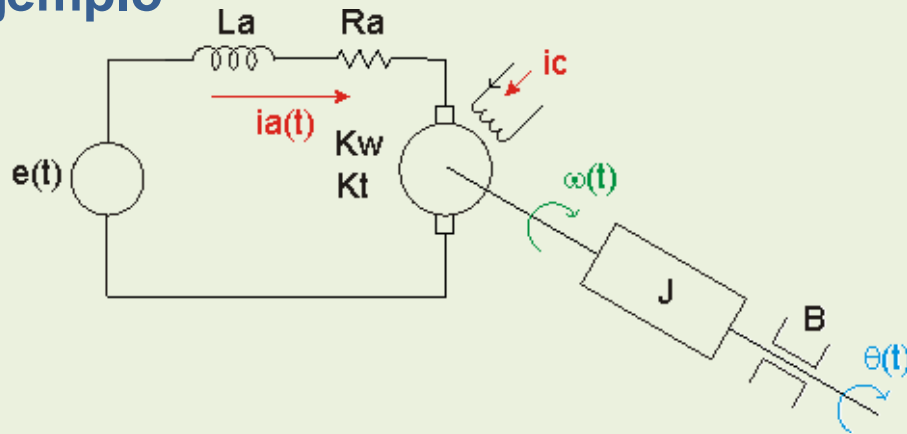
Estimador de orden reducido

Diagrama en bloques



Estimadores de estado

Ejemplo

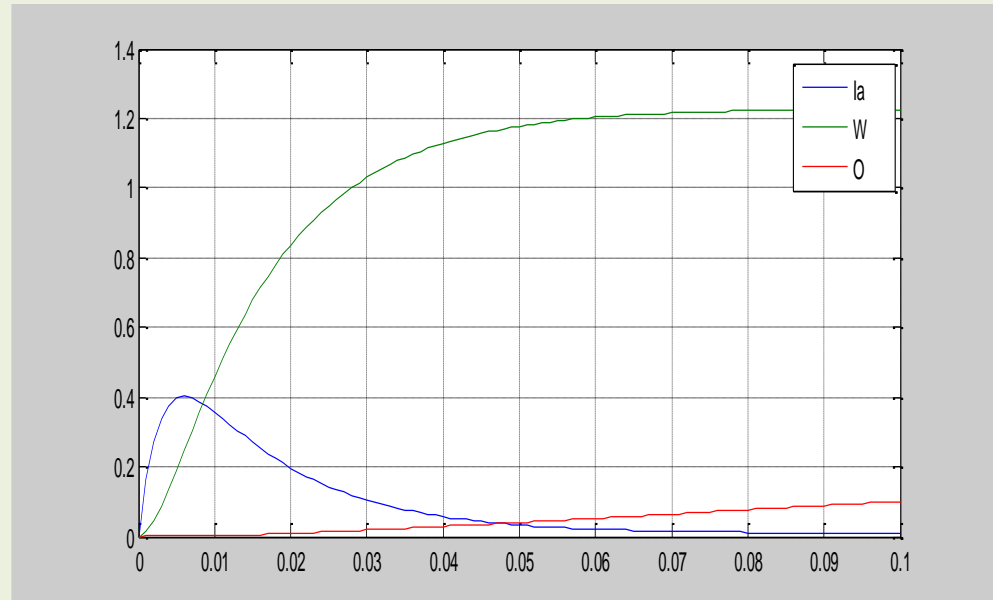


$R_a = 2 \, \Omega$
 $L_a = 5 \, \text{mHy}$
 $J = 0.005 \, \text{Nms}^2$
 $B = 0.005 \, \text{Nms}$
 $K_t = 0.7 \, \text{Nm/A}$
 $K_w = 0.8 \, \text{Vs}$

Modelo de estado continuo

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_w}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$



Ejemplo

Modelo de estado discreto

$$\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 0.6617 & -0.1313 & 0 \\ 0.1149 & 0.9892 & 0 \\ 6.14 \cdot 10^{-5} & 0.0009961 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} 0.1642 \\ 0.01228 \\ 4.229 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} E(k)$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (k)$$

Matriz Observabilidad:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.0001 & 0.0010 & 1.0000 \\ 0.1149 & 0.9892 & 0 \\ 0.0002 & 0.0020 & 1.0000 \\ 0.1897 & 0.9634 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de esta matriz es: $Rg(V)=3$



Ejemplo

En base a las variables medidas (salidas), se determina que la variable a estimar es $I_a(k)$. La matriz de transformación que lleva al modelo con variables a estimar y salidas es la siguiente:

$$v(k) = \begin{bmatrix} x_a(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = T x(k) \quad ; \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El modelo transformado queda de la siguiente forma:

$$v(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6617 & 0 & -0.1313 \\ 6.14 \times 10^{-5} & 1 & 9.961 \times 10^{-4} \\ 0.1149 & 0 & 0.9892 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 1.642 \\ 4.229 \times 10^{-5} \\ 0.1228 \end{bmatrix} u(k) \quad ; \quad y^*(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & I \end{bmatrix} \bar{x}(k)$$

Las sub-matrices para el cálculo del estimador son:

$$A_{T11} = [0.6617] \quad A_{T12} = [0 \quad -0.1313] \quad A_{T21} = \begin{bmatrix} 6.14 \times 10^{-5} \\ 0.1149 \end{bmatrix} \quad A_{T22} = \begin{bmatrix} 1 & 9.961 \times 10^{-4} \\ 0 & 0.9892 \end{bmatrix}$$
$$B_{T1} = [1.642] \quad B_{T2} = \begin{bmatrix} 4.229 \times 10^{-5} \\ 0.1228 \end{bmatrix}$$



Ejemplo

La matriz de la planta del estimador es:

$$A_e = A_{T11} - H A_{T21} = [0.6617] - [h_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} 6.14 \times 10^{-5} \\ 0.1149 \end{bmatrix} = 0.6617 - 6.14 \times 10^{-5} h_1 - 0.1149 h_2$$

Para una dada ubicación del autovalor de A_e , existen infinitas soluciones para H . Para matrices H de dimensiones más grandes se puede encontrar una solución de forma similar a la utilizada en los sistemas MIMO. En este caso, debido a su sencillez, se adopta el valor de una de las incógnitas y se calcula la otra.

Suponiendo el autovalor en cero y adoptando el valor de $h_1=1$ queda:

$$A_e = 0.6617 - 6.14 \times 10^{-5} - 0.1149 h_2 = 0 \quad ; \quad h_2 = \frac{0.6617 - 6.14 \times 10^{-5}}{0.1149} = 5.7587$$

Entonces la matriz H queda: $H = [1 \quad 5.7587]$



Ejemplo

Encontrada la matriz H , las matrices del estimador se calculan de siguiente forma:

$$A_e = A_{T11} - H A_{T21} = [0]$$

$$B_e = B_{T1} - H B_{T2} = [0.9351]$$

$$H_e = A_{T12} - H A_{T22} + A_{T11} H - H A_{T21} H = [-1.00 \quad -5.8287]$$

En consecuencia la ecuación del estimador resulta:

$$\hat{w}(k+1) = [0.9351]u(k) + [-1.00 \quad -5.8287] \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}$$

Finalmente la variable estimada se calcula como:

$$\hat{I}_a(k) = \hat{w}(k) + [1 \quad 5.7587] \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}$$

En este caso, como las salidas son directamente las variables de estado, no es necesario transformar las variables estimadas con la matriz T .



Ejemplo

SIMULACIÓN

En la simulación se va a mostrar :

- La evolución del estimador para distinta asignación de autovalores y distintos valores de las componentes de la matriz H .
- El comportamiento de la variable estimada $w(k)$.
- Como influye la elección de las componentes de la matriz H en el transitorio del error , para la misma ubicación de autovalores.
- Para mediciones de las salidas con ruido, como afecta la elección de los elementos de la matriz H en el ruido presente en la estima de las variables del modelo.



TEORÍA DE CONTROL

Filtro de Kalman

Introducción

Modelo de Estado.

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k)$$

$$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k)$$

Ley de Control.

$$u(k) = A_0 [r(k) - K x(k)]$$

Modelo de Estado Realimentado.

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot A_0 [r(k) - K x(k)]$$

$$x(k+1) = A \cdot x(k) - B \cdot A_0 \cdot K \cdot x(k) + B \cdot A_0 \cdot r(k)$$

$$x(k+1) = (A - B \cdot A_0 \cdot K) \cdot x(k) + B \cdot A_0 \cdot r(k)$$

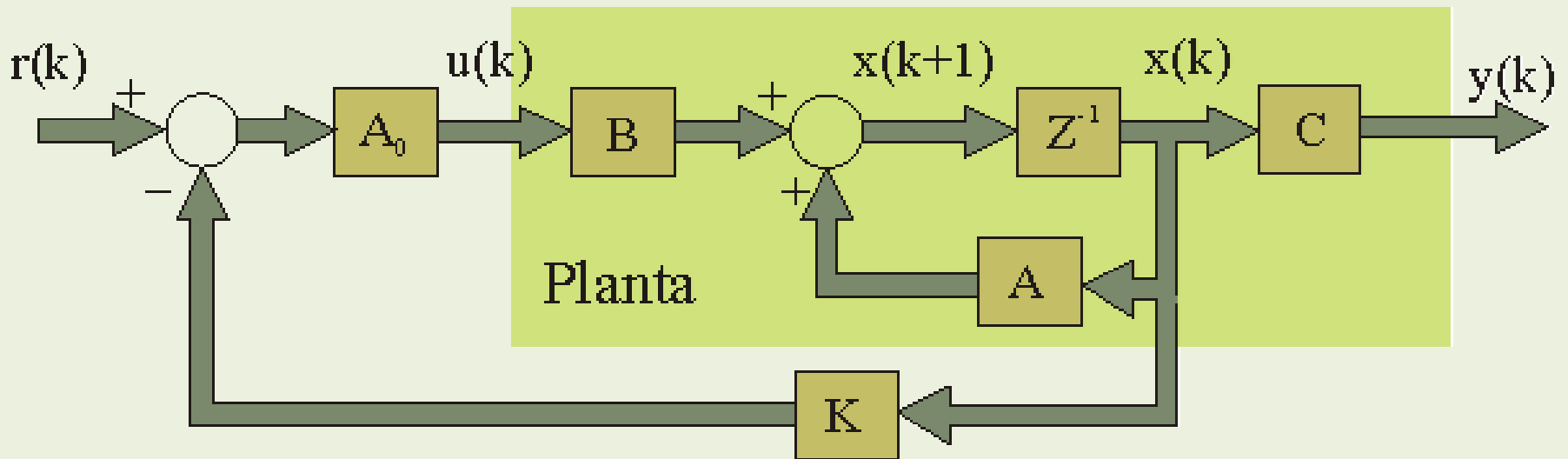


Filtro de Kalman

Introducción

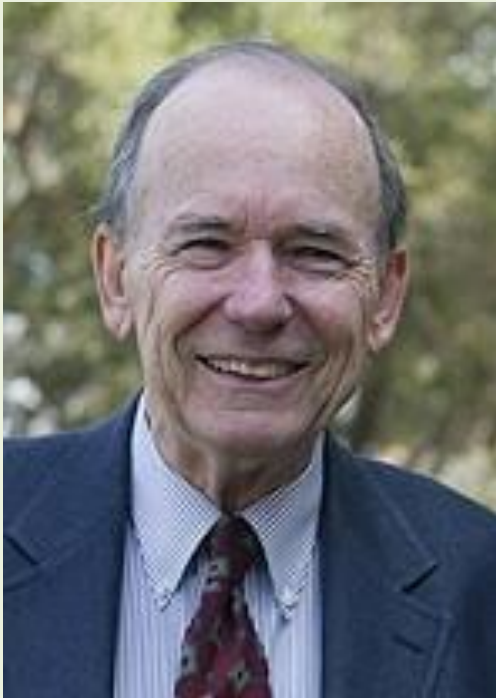
Modelo de Estado Realimentado.

$$x(k+1) = (A - B \cdot A_0 \cdot K) \cdot x(k) + B \cdot A_0 \cdot r(k)$$



Introducción

Observadores de Estado.



Profesor David G. Luenberger

1963

Observing the State of a Linear System

DAVID G. LUENBERGER, STUDENT MEMBER, IEEE

Summary—In much of modern control theory designs are based on the assumption that the state vector of the system to be controlled is available for measurement. In many practical situations only a few output quantities are available. Application of theories which assume that the state vector is known is severely limited in these cases. In this paper it is shown that the state vector of a linear system can be reconstructed from observations of the system inputs and outputs.

It is shown that the observer, which reconstructs the state vector, is itself a linear system whose complexity decreases as the number of output quantities available increases. The observer may be incorporated in the control of a system which does not have its state vector available for measurement. The observer supplies the state vector, but at the expense of adding poles to the over-all system.

I. INTRODUCTION

IN THE PAST few years there has been an increasing percentage of control system literature written from the "state variable" point of view [1]–[8]. In the case of a continuous, time-invariant linear system the state variable representation of the system is of the form:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bx(t),$$

where

$y(t)$ is an $(n \times 1)$ state vector

$x(t)$ is an $(m \times 1)$ input vector

A is an $(n \times n)$ transition matrix

B is an $(n \times m)$ distribution matrix.

techniques have been developed to find the function F for special classes of control problems. These techniques include dynamic programming [8]–[10], Pontryagin's maximum principle [11], and methods based on Lyapunov's theory [2], [12].

In most control situations, however, the state vector is not available for direct measurement. This means that it is not possible to evaluate the function $F[y(t), t]$. In these cases either the method must be abandoned or a reasonable substitute for the state vector must be found.

In this paper it is shown how the available system inputs and outputs may be used to construct an estimate of the system state vector. The device which reconstructs the state vector is called an observer. The observer itself as a time-invariant linear system driven by the inputs and outputs of the system it observes.

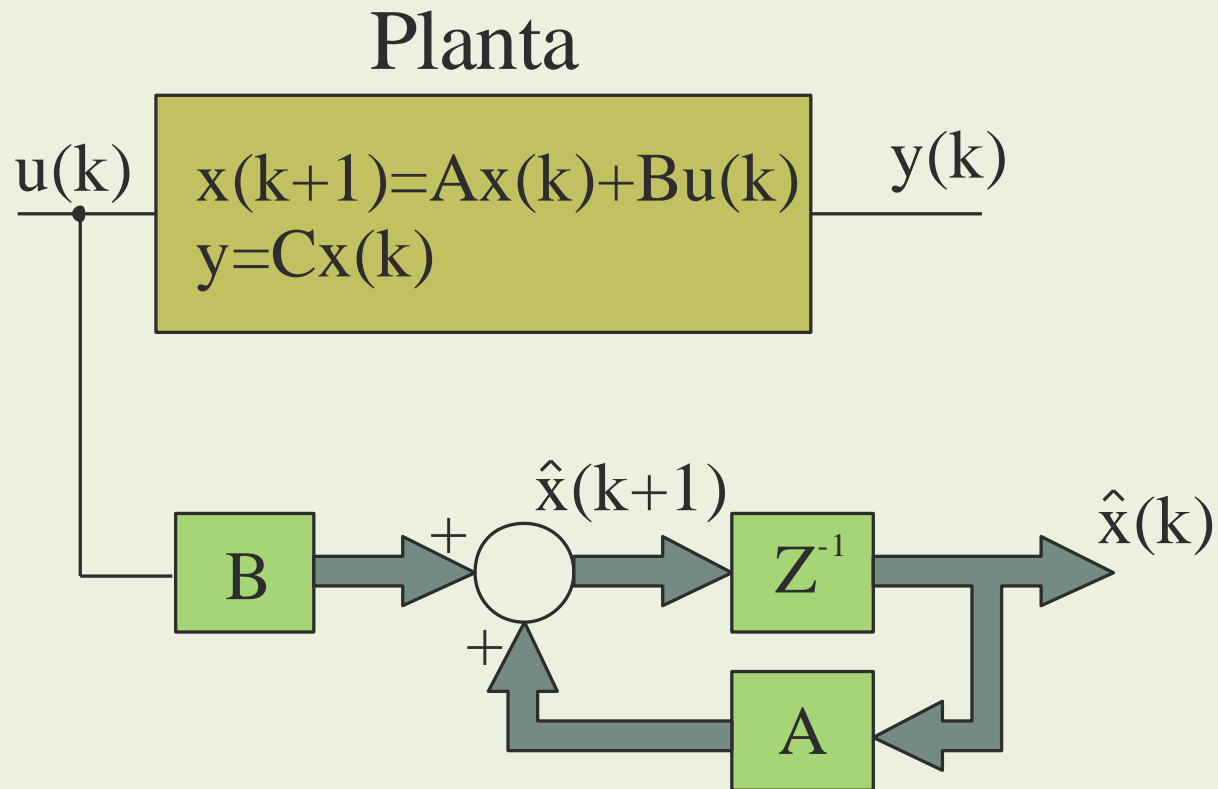
Kalman [3], [13], [14] has done some work on this problem, primarily for sampled-data systems. He has treated both the nonrandom problem and the problem of estimating the state when measurements of the outputs are corrupted by noise. In this paper only the non-statistical problem is discussed but for that case a fairly complete theory is developed.

It is shown that the time constants of an observer can be chosen arbitrarily and that the number of dynamic elements required by the observer decreases as more



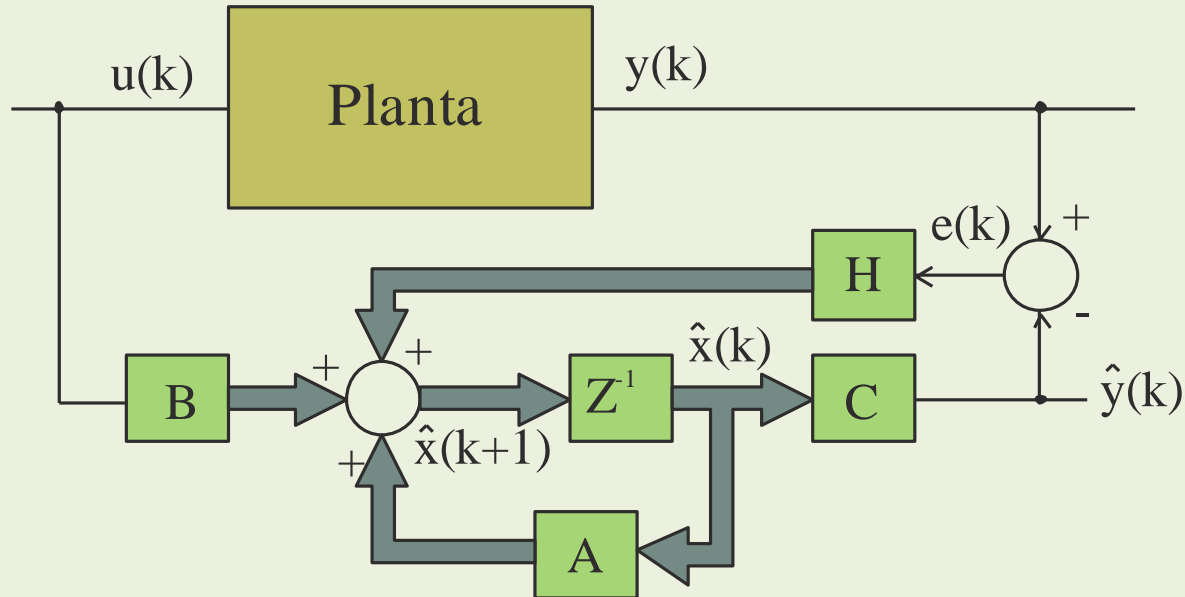
Introducción

Observadores de Estado.



Introducción

Observadores de Estado.



$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + He(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + H(y(k) - C\hat{x}(k))$$

$$\hat{x}(k+1) = (A - HC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Hy(k)$$



Introducción

Observadores de Estado.

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = (A - HC) \cdot \hat{x}(k) + B \cdot u(k) + H \cdot y(k)$$

Cálculo del error

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$$

$$e(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - \left[(A - HC) \hat{x}(k) + B u(k) + H \overset{y(k)}{Cx(k)} \right]$$

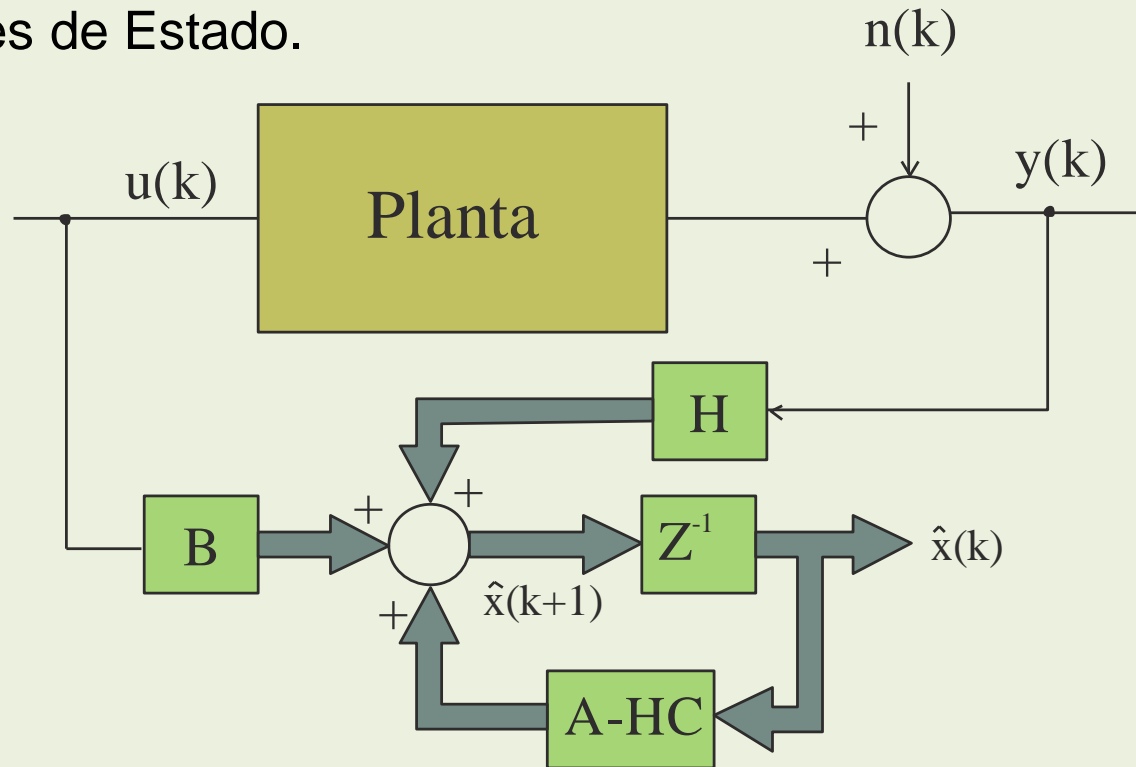
$$e(k+1) = (A - HC) e(k)$$



Filtro de Kalman

Introducción

Observadores de Estado.



$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = (A - HC) e(k) + H n(k)$$



Rudolf Kalman

Rudolf Kalman nació en Budapest en 1930. Luego de emigrar a los Estados Unidos, en 1948, obtuvo su licenciatura en 1953 y su maestría en 1954, en Ingeniería Eléctrica en el Massachusetts Institute of Technology. Kalman completó su doctorado en 1957 en la Universidad de Columbia en Nueva York. Kalman trabajó como matemático investigador en el Instituto de Investigación y Estudios Avanzados, en Baltimore, Maryland desde 1958 hasta 1964. Fue profesor en la Universidad de Stanford desde 1964 hasta 1971, y luego un profesor de Investigación de Posgrado, y el Director del Centro de Matemáticas y Teoría de Sistema, en la Universidad de Florida desde 1971 hasta 1992.



A partir de 1973, también ocupó la cátedra de Matemáticas en Teoría de Sistemas del Instituto Federal Suizo de Tecnología en Zurich, Suiza.

Kalman es un miembro de la Academia Nacional de Ciencias de EE.UU., la Academia Nacional de Ingeniería y la Academia Americana de las Artes y las Ciencias.

En 1958 cuando viajaba en tren de Princeton a Baltimore el tren se detuvo durante una hora a las 11 pm en las afueras de Baltimore, entonces se le ocurrió aplicar el concepto de variables de estado al filtro de Wiener.



R. E. KALMAN

Research Institute for Advanced Study,²
Baltimore, Md.

A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems¹

The classical filtering and prediction problem is re-examined using the Bode-Shannon representation of random processes and the "state transition" method of analysis of dynamic systems. New results are:

(1) The formulation and methods of solution of the problem apply without modification to stationary and nonstationary statistics and to growing-memory and infinite-memory filters.

(2) A nonlinear difference (or differential) equation is derived for the covariance matrix of the optimal estimation error. From the solution of this equation the coefficients of the difference (or differential) equation of the optimal linear filter are obtained without further calculations.

(3) The filtering problem is shown to be the dual of the noise-free regulator problem.

The new method developed here is applied to two well-known problems, confirming and extending earlier results.

The discussion is largely self-contained and proceeds from first principles; basic concepts of the theory of random processes are reviewed in the Appendix.

Introduction

AN IMPORTANT class of theoretical and practical problems in communication and control is of a statistical nature. Such problems are: (i) Prediction of random signals; (ii) separation of random signals from random noise; (iii) detection of signals of known form (pulses, sinusoids) in the presence of random noise.

In his pioneering work, Wiener [1]³ showed that problems (i) and (ii) lead to the so-called Wiener-Hopf integral equation; he also gave a method (spectral factorization) for the solution of this integral equation in the practically important special case of stationary statistics and rational spectra.

Many extensions and generalizations followed Wiener's basic

Present methods for solving the Wiener problem are subject to a number of limitations which seriously curtail their practical usefulness:

(1) The optimal filter is specified by its impulse response. It is not a simple task to synthesize the filter from such data.

(2) Numerical determination of the optimal impulse response is often quite involved and poorly suited to machine computation. The situation gets rapidly worse with increasing complexity of the problem.

(3) Important generalizations (e.g., growing-memory filters, nonstationary prediction) require new derivations, frequently of considerable difficulty to the nonspecialist.

(4) The mathematics of the derivations are not transparent. Fundamental assumptions and their consequences tend to be



Filtro de Kalman

En los **Estimadores Determinísticos**, la matriz de ganancia H se calculaba situando los autovalores del estimador en un lugar determinado, que no cambiaba con el tiempo. Es decir, la matriz de ganancia **H del estimador es constante**.

En esta presentación, se presenta la forma de calcular la matriz K de un estimador óptimo para un sistema con ruido y que en general es variable con el tiempo, por lo que toma la forma $K(k)$.

Partiendo de la ecuación de estado y de salida de un sistema no estacionario, con ruido de la forma:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + v(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + w(k)\end{aligned}$$

donde las matrices **$A(k)$, $B(k)$ y $C(k)$** son **determinísticas** y en general serán variables en los sistemas lineales variantes con el tiempo, y **$v(k)$ y $w(k)$** son los **procesos estocásticos** de los ruidos del sistema y de medida respectivamente, que se consideran ruidos blancos de media cero e independientes.



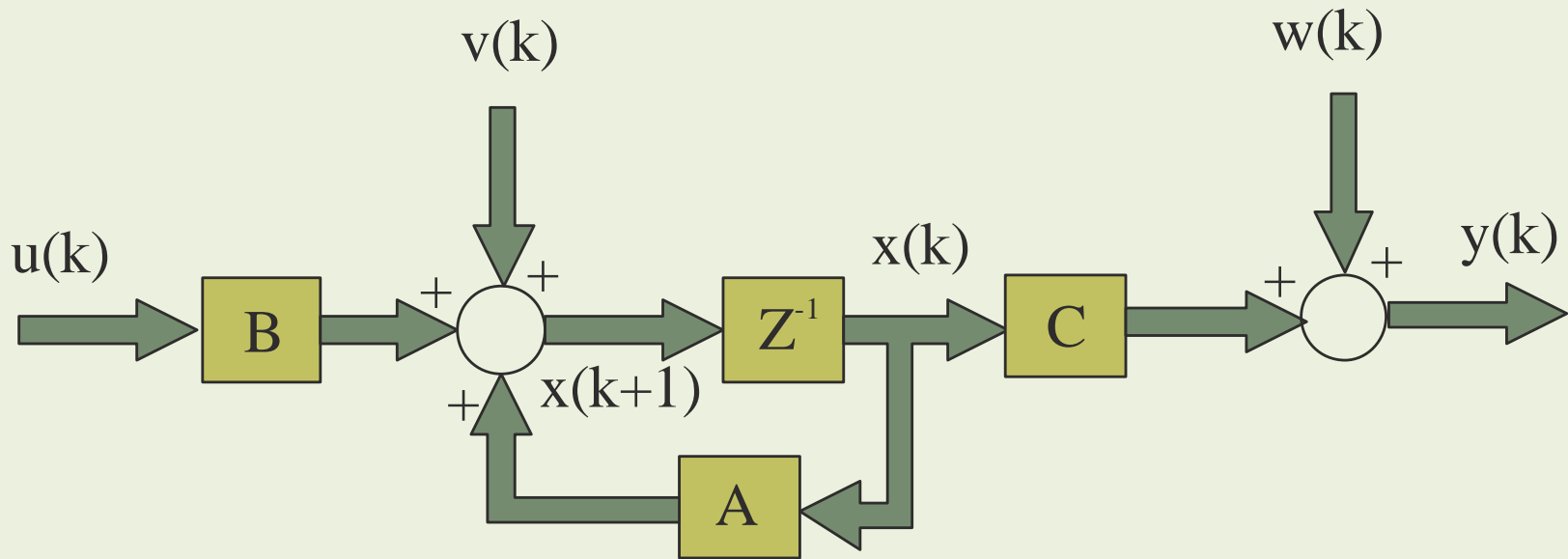
Filtro de Kalman

Modelo de Estado:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + v(k)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + w(k)$$

Diagrama en bloques:



Consideraciones

Esperanza Matemática.

$$E\{x\} = \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

Covarianza.

$$\sigma(x, y) = E\left\{ \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix}^T \right\}$$

Propiedades:

$$E\{A x + B y\} = A E\{x\} + B E\{y\}$$

$$\sigma(A x, B y) = A \sigma(x, y) B^T = A E\left\{ \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix}^T \right\} B^T$$



Consideraciones

Se consideran a $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}(k)$ ruidos blancos de media cero e independientes y que por lo tanto cumplen:

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = E\{\mathbf{w}(k)\} = 0$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{v}^T(k)\} = 0$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(k)\} = \mathbf{Q}(k)$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(j)\} = 0 \quad \forall k \neq j$$

$$E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = \mathbf{R}(k)$$

$$E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(j)\} = 0 \quad \forall k \neq j$$

Las matrices de covarianza $\mathbf{Q}(k)$ y $\mathbf{R}(k)$ son diagonales y por tanto simétricas.



Filtro de Kalman

El problema consiste en estimar el valor óptimo del vector de estado $\mathbf{x}(k)$, basándose en las medidas ruidosas $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$,..., $\mathbf{y}(k)$ que serán conocidas, además de tener en cuenta que el vector de estado estará contaminado con el ruido del sistema.

Se define el error de la estima como:

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

El criterio para obtener el óptimo es minimizar el índice de comportamiento:

$$P(n) = E \left\{ e(n) e^T(n) \right\}$$

Es decir la matriz de covarianza del error $e(k)$ ha de ser mínima.



Filtro de Kalman

Se asume que del estado inicial $x(0)$ se conoce su esperanza matemática o valor medio:

$$E\{x(0)\} = \bar{x}(0)$$

que será un valor determinístico, y además también se conoce la matriz de covarianza del estado inicial (no del error):

$$E\left\{ \begin{bmatrix} x(0) - \bar{x}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) - \bar{x}(0) \end{bmatrix}^T \right\} = P_0$$

El estado inicial y el ruido cumplen:

$$E\left\{ \begin{bmatrix} x(0) - \bar{x}(0) \end{bmatrix} v^T(k) \right\} = E\left\{ \begin{bmatrix} x(0) - \bar{x}(0) \end{bmatrix} w^T(k) \right\} = 0$$

al ser independientes y ser la media de los ruidos blancos cero.



Filtro de Kalman (Predicción)

Calculamos una **predicción del estado** $x(k+1)$, lo notaremos como $\tilde{x}(k+1)$
El valor de la predicción es calculado a partir del valor más actualizado del estado (posteriormente veremos que es el estado corregido en la parte final del algoritmo).

$$\tilde{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k)$$

Predecimos el valor de la matriz de covarianza del error previo a la medida $\tilde{P}(k+1)$

El error estará definido por:

$$\tilde{e}(k+1) = x(k+1) - \tilde{x}(k+1)$$

$$\tilde{e}(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + v(k) - [A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k)]$$



Filtro de Kalman (Predicción)

Entonces será:

$$\tilde{P}(k+1) = E \left\{ \left[A(k) (x(k) - \hat{x}(k)) + v(k) \right] \left[A(k) (x(k) - \hat{x}(k)) + v(k) \right]^T \right\}$$

Operando:

$$\tilde{P}(k+1) = E \left\{ \left[A(k) (x(k) - \hat{x}(k)) \right] \left[A(k) (x(k) - \hat{x}(k)) \right]^T \right\} + E \left\{ v(k) v^T(k) \right\}$$

$$E \left\{ v(k) v^T(k) \right\} = Q(k)$$

Queda por tanto:

$$\tilde{P}(k+1) = A P(k) A^T + Q(k)$$



Filtro de Kalman (Corrección)

El valor del estado se va a calcular a través del **estado anterior** y de una **corrección** que es función del error.

Esto es:

$$\hat{x}(k+1) = \tilde{x}(k+1) + \underbrace{K(k+1)[y(k+1) - C \tilde{x}(k+1)]}_{\text{Corrección}}$$

$y(k+1)$ es el último valor observado.

$\tilde{x}(k+1)$ es el valor más actualizado disponible del estado (calculado en la fase de predicción).

Se busca el valor de $K(k+1)$ para conseguir un valor óptimo de $\hat{x}(k+1)$ tal que la matriz de covarianza del error sea mínima.

Volviendo a definir el error a partir de la variable estimada:

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$$



Filtro de Kalman (Corrección)

Substituyendo:

$$e(k+1) = x(k+1) - \tilde{x}(k+1) - K [y(k+1) - C \tilde{x}(k+1)]$$

La medición $y(k+1)$ tiene el valor:

$$y(k+1) = C x(k+1) + w(k+1)$$

Por tanto:

$$e(k+1) = x(k+1) - \tilde{x}(k+1) - KC x(k+1) - K w(k+1) + KC \tilde{x}(k+1)$$

Agrupando:

$$e(k+1) = [I - KC] (x(k+1) - \tilde{x}(k+1)) - K w(k+1)$$



Filtro de Kalman (Corrección)

La Covarianza de este error queda:

$$P(k+1) = E \left\{ \left([I - KC] (x(k+1) - \tilde{x}(k+1)) - K w(k+1) \right) \dots \right. \\ \left. \dots \left([I - KC] (x(k+1) - \tilde{x}(k+1)) - K w(k+1) \right)^T \right\}$$

$$P(k+1) = E \left\{ \left[[I - KC] (x(k+1) - \tilde{x}(k+1)) \right] \left[[I - KC] (x(k+1) - \tilde{x}(k+1)) \right]^T \right\} - \\ - E \left\{ \begin{bmatrix} K & w(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & w(k+1) \end{bmatrix}^T \right\}$$

$$\text{Siendo } E \left\{ \begin{bmatrix} w(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k+1) \end{bmatrix}^T \right\} = R(k+1)$$

$$P(k+1) = [I - KC] E \left\{ \begin{bmatrix} x(k+1) - \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1) - \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \right\} [I - KC]^T - \\ - K R(k+1) K^T$$



Filtro de Kalman (Corrección)

Anteriormente ya se calculó que:

$$\tilde{P}(k+1) = E \left\{ \begin{bmatrix} x(k+1) - \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1) - \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \right\}$$

Entonces queda:

$$P(k+1) = [I - KC] \tilde{P}(k+1) [I - KC]^T - K R(k+1) K^T$$

Distribuyendo y derivando respecto de K para encontrar el mínimo, se llega a :

$$K(k+1) = \tilde{P}(k+1) C^T \left[C \tilde{P}(k+1) C^T + R(k+1) \right]^{-1}$$

Se puede comprobar que es el mínimo a través del Hessiano.



Filtro de Kalman (Corrección)

Substituyendo el valor optimo queda :

$$P(k+1) = [I - KC] \tilde{P}(k+1)$$

Valores Iniciales

Para iniciar el algoritmo es necesario conocer las siguientes condiciones de contorno:

- Un valor inicial del estado: $x(0)$.
- El valor de la matriz de covarianza del error $P(0)$. Podemos asumir que $P(0) = Q$.
- Y los valores de las matrices de covarianza asociadas al sistema y a la medida: Q y R .



Algoritmo Recursivo

$k \rightarrow (k + 1)$

Etapa de Predicción

1-Predicción de Estado

$$\tilde{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k)$$

2-Predicción de la Matriz Covarianza

$$\tilde{P}(k+1) = A P(k)A^T + Q(k)$$

Etapa de Corrección

1-Cálculo del Vector de Ganancias

$$K(k+1) = \tilde{P}(k+1)C^T \left[C\tilde{P}(k+1)C^T + R(k+1) \right]^{-1}$$

2-Actualización del estado

$$\hat{x}(k+1) = \tilde{x}(k+1) + K(k+1)[y(k+1) - C \tilde{x}(k+1)]$$

3- Actualización de la Matriz Covarianza

$$P(k+1) = [I - KC] \tilde{P}(k+1)$$

$k = 0$

Valores iniciales

$$\hat{\mathbf{x}}(k) \quad P(k)$$

$(k+1) \rightarrow (k+1)$



Filtro de Kalman (Aplicaciones)

3666

JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES

VOLUME 58

State Estimation Using a Reduced-Order Kalman Filter

BRIAN F. FARRELL

Department of Earth and Planetary Sciences, Harvard University, Cambridge, Massachusetts

PETROS J. IOANNOU

Department of Physics, National and Capodistrian University of Athens, Athens, Greece

(Manuscript received 5 September 2000, in final form 22 February 2001)

ABSTRACT

Minimizing forecast error requires accurately specifying the initial state from which the forecast is made by optimally using available observing resources to obtain the most accurate possible analysis. The Kalman filter accomplishes this for a wide class of linear systems, and experience shows that the extended Kalman filter also performs well in nonlinear systems. Unfortunately, the Kalman filter and the extended Kalman filter require computation of the time-dependent error covariance matrix, which presents a daunting computational burden. However, the dynamically relevant dimension of the forecast error system is generally far smaller than the full state dimension of the forecast model, which suggests the use of reduced-order error models to obtain near-optimal state estimators. A method is described and illustrated for implementing a Kalman filter on a reduced-order approximation of the forecast error system. This reduced-order system is obtained by balanced truncation of the Hankel operator representation of the full error system and is used to construct a reduced-order Kalman filter for the purpose of state identification in a time-dependent quasigeostrophic storm track model. The accuracy of the state identification by the reduced-order Kalman filter is assessed by comparison to the true state, to the state estimate obtained by the full Kalman filter, and to the state estimate obtained by direct insertion.

1. Introduction

An important component of forecast error is error in the analysis of the initial state from which the forecast is made. Analysis error can be reduced by taking more observations, by taking more accurate observations, by taking observations at locations chosen to better con-

equations of a nonlinear system provides a first-order approximation to the optimal data assimilation method, which is valid in the limit of sufficiently small errors. This nonlinear extension of the KF is referred to as the extended Kalman filter (EKF; Ghil et al. 1981; Miller et al. 1994; Ide and Ghil 1997; Ghil 1997).

Unfortunately, the Kalman filter and the extended



Filtro de Kalman (Aplicaciones)

Aplicaciones de filtro de Kalman en economía *

por JAIME TERCEIRO LOMBA

Departamento de Econometría. Universidad Autónoma. Madrid.

1. INTRODUCCION

El filtro de Kalman (FK) es una de las contribuciones más significativas hechas a la teoría de control estocástico durante los últimos años. Sus aplicaciones en ingeniería, especialmente en el campo aeroespacial, han sido numerosas.

El FK calcula la estimación óptima de las variables de estado de un sistema lineal estocástico, cuando no todas las variables del mismo son directamente observables, y además, estas observaciones están contaminadas por ruido. En el Apéndice I damos, brevemente, su formulación discreta.

Las posibles aplicaciones del FK en economía son numerosas. De hecho, ya ha sido



Filtro de Kalman (Aplicaciones)

XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de septiembre de 2005

OBSERVADORES DE ESTADOS DE UN PROCESO DE FERMENTACIÓN ALCOHÓLICA EN CONTINUO MEDIANTE FILTROS DE KALMAN EXTENDIDOS

O. Lucía. Quintero. M

*Instituto de Automática INAUT, Universidad Nacional de San Juan Argentina
olquinte@inaut.unsj.edu.ar.*

Fernando di Sciascio

*Instituto de Automática INAUT, Universidad Nacional de San Juan Argentina
fernando@inaut.unsj.edu.ar.*

Resumen— La fermentación alcohólica en continuo con la *Zymomonas Mobilis* presenta altos rendimientos de etanol, pero con comportamientos altamente oscilatorios en las variables del proceso. Desde el punto de vista del control esto representa una gran dificultad, sumado a las propias de la medición de algunos de los estados del sistema, con el fin de ser utilizados

la concentración de microorganismos en el bioproceso, la implementación de instrumentos de medida es considerablemente costosa, ya que las técnicas y los principios físicos empleados por estos sensores incluye el uso de dispositivos de última tecnología lo que incrementa los costos de producción. Si bien muchas industrias cuentan con los recursos económicos necesarios para ello, en



Filtro de Kalman (Aplicaciones)

*II Conferencia de Ingeniería de Organización
Vigo, 5-6 Septiembre 2002*

Aplicación del Filtro de Kalman al Análisis y Predicción de Entornos Productivos Empresariales.

Isabel Fernández Quesada¹

¹ Lda. en C.C.E.E., E.T.S.I.I.G, Universidad de Oviedo, bel@etsiig.uniovi.es

Director tesis David de la Fuente

RESUMEN

El filtro de Kalman, ha sido desde su aparición en 1960, una herramienta matemática recursiva ampliamente utilizada en el campo de la ingeniería, sobre todo, en temas relacionados con el control. Si bien en los últimos años pueden encontrarse aplicaciones en el ámbito económico, reducida podría calificarse aún su implantación. La intención de la tesis cuyo avance se expone en este trabajo, es su aplicación dentro de entornos productivos y más concretamente, su utilización como herramienta predictiva.



Filtro de Kalman (Aplicaciones)

Journal of Geodesy (1999) 73: 193–203

Journal of
Geodesy

© Springer-Verlag 1999

Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS

A. H. Mohamed, K. P. Schwarz

Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, 2500 University Drive NW, Calgary, Alberta, Canada T2N 1N4

Received: 14 September 1998 / Accepted: 21 December 1998

Abstract. After reviewing the two main approaches of adaptive Kalman filtering, namely, innovation-based adaptive estimation (IAE) and multiple-model-based adaptive estimation (MMAE), the detailed development of an innovation-based adaptive Kalman filter for an integrated inertial navigation system/global positioning system (INS/GPS) is given. The developed adaptive

The fixed integration formulation has shown success in fulfilling the accuracy requirements of many kinematic applications. There were, however, always applications where the accuracy requirements could not be fulfilled or could not be fulfilled at all times. Examples are precise engineering and cadastral applications requiring an root mean square (rms) of 5–10 cm in position and 10 arc-



Filtro de Kalman (Aplicaciones)

Applications of the Kalman Filter Algorithm to Robot Localisation and World Modelling

Leonie Freeston

Supervisor: Professor Rick Middleton



Electrical Engineering Final Year Project 2002
University of Newcastle, NSW, Australia

Background

The University of Newcastle has entered a robot soccer playing team in the Sony Legged League of the RoboCup 2002 competition. This website outlines the localisation and world modelling strategy for this team, including the use of Kalman Filters for this task. Robot localisation is the process whereby a robot determines its own position in the world in which it functions. World modelling is the process used by a robot to determine the position of other objects in its world. The Kalman Filter has been implemented for a robot to locate its own position and the ball position. Communication between the robots has enabled cooperative world modelling to be used to determine team strategy.



RoboCup Soccer

RoboCup



LIFE



Obama Awards National Medals Of Science And Techonology And Innovation

WASHINGTON - OCTOBER 07: Rudolf Kalman of Swiss Federal Institute of Technology in Zurich smiles after he was presented with a 2008 National Medal of Science by U.S. President Barack Obama during an East Room ceremony October 7, 2009 at the White House in Washington, DC. Obama presented medals to recipients of the 2008 National Medal of Science and the National Medal of Technology and Innovation.

In this photo: Rudolf Kalman

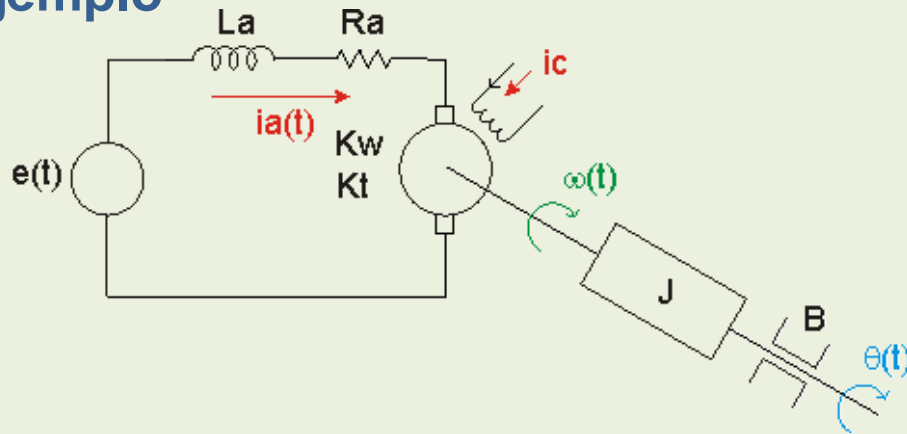
Photo: Alex Wong/Getty Images

Oct 07, 2009



Filtro de Kalman

Ejemplo



$R_a = 2 \, \Omega$
 $L_a = 5 \, \text{mHy}$
 $J = 0.005 \, \text{Nms}^2$
 $B = 0.005 \, \text{Nms}$
 $K_t = 0.7 \, \text{Nm/A}$
 $K_w = 0.8 \, \text{Vs}$

Modelo de estado continuo

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_w}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

