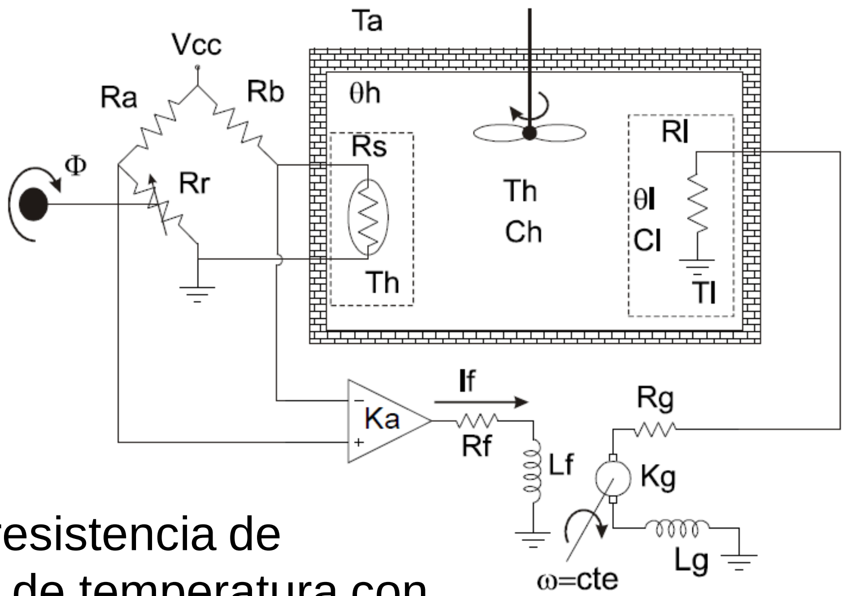
TEORÍA DE CONTROL

Ejercicio Control de Temperatura

Control de Temperatura

Descripción del sistema

La resistencia Rl disipa la potencia en el interior del recinto, gobernada por un generador de corriente continua cuya tensión de salida es $E_g = K_g I_f$. La señal de control es generada por un amplificador de ganancia K_A, cuya tensión de entrada se produce del desbalance de un circuito puente.



Este incluye en una de sus ramas una resistencia de platino (PT100) que actúa como sensor de temperatura con una ley tipo: $R_s = R_0(1 + \alpha T)$ con $R_0 = 100\Omega$, $\alpha = 3.9\ 10^{-3}$, T (temperatura sensada en ℃).

La constante de tiempo del sensor se considera despreciable. La resistencia variable R_r sirve para ajustar la temperatura deseada en el interior del recinto. El valor de R_r varía linealmente con el ángulo de movimiento del cursor ϕ de modo que $R_r = \phi K_r$.

Control de Temperatura

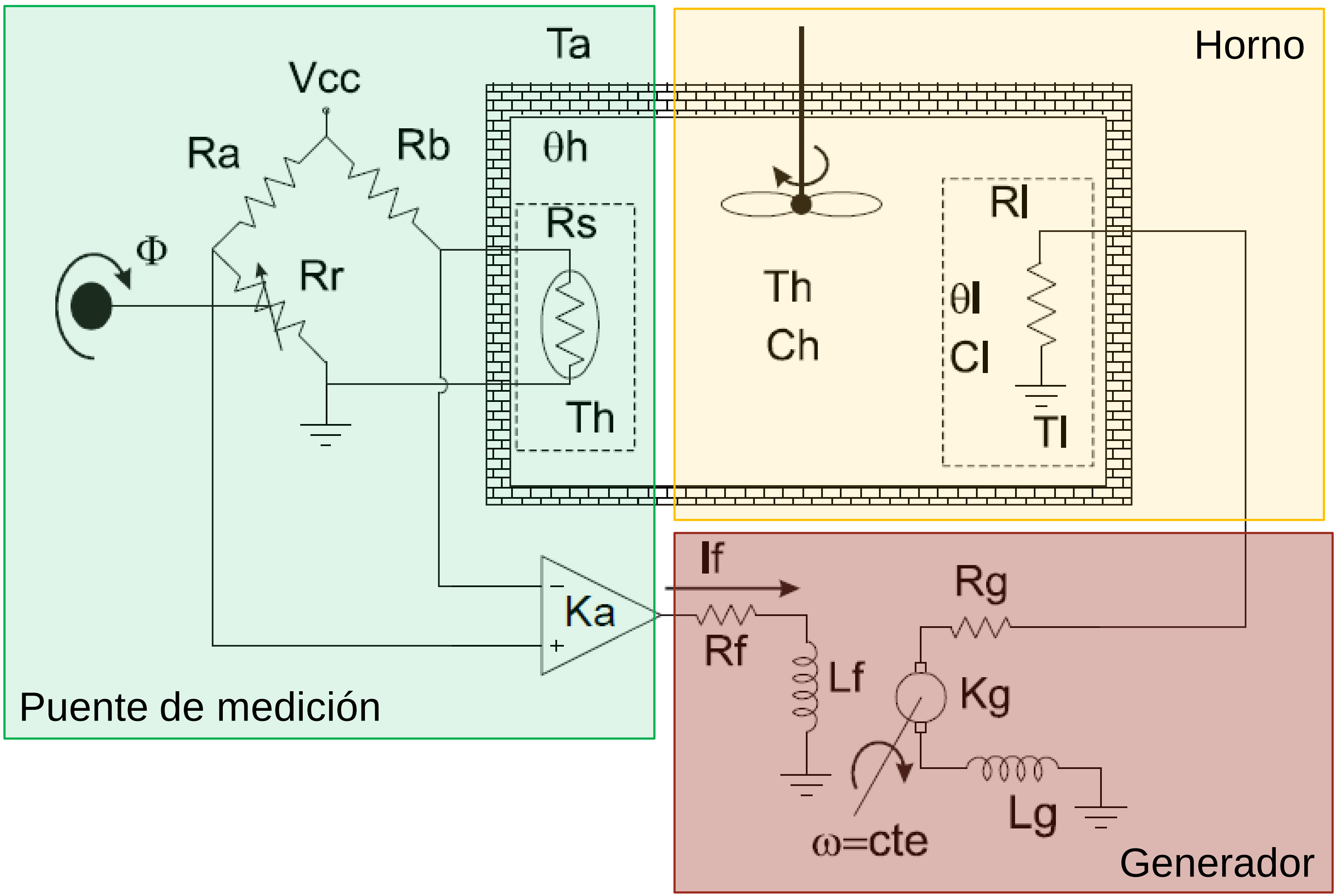
a) Halle un modelo de estado del sistema con entrada ϕ y T_a, y salida T_h.
b) Determine para el mismo las condiciones de funcionamiento en régimen permanente cuando $T_h = T_a$.
c) Halle un modelo de estado lineal en las proximidades del punto de equilibrio del inciso anterior. ¿Considera que el punto de equilibrio fue elegido convenientemente para la correcta utilización del horno?

Datos:

$K_A = 20$; $R_a = R_b = 150\Omega$; $K_r = 50\Omega\ /rad$; $R_l = 5\Omega$; $V_{cc} = 15V$.
$C_l = 10\,J/°C$; $C_h = 0.5\,J/°C$; $\theta_l = 0.5\,°C/W$; $\theta_h = 2\,°C/W$; $R_f = 50\Omega$.
$L_f = 200mH$; $R_g = 1\Omega$; $L_g = 0H$; $T_a = 20°C$; $K_g = 10V/A$.

Control de Temperatura

Revisión del funcionamiento por etapas



Control de Temperatura

Pasos a seguir:

1) Identificar variables de estado, entrada y salida del sistema.

2) Determinar las distintas secciones que componen el sistema separándolas por su naturaleza (mecánica, eléctrica, hidráulica) y determinar sus interfaces.

3) Analizar las secciones por separado y hallar las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento:

Ecuaciones diferenciales.

Funciones transferencia.

Diagrama en bloques.

Circuitos equivalentes.

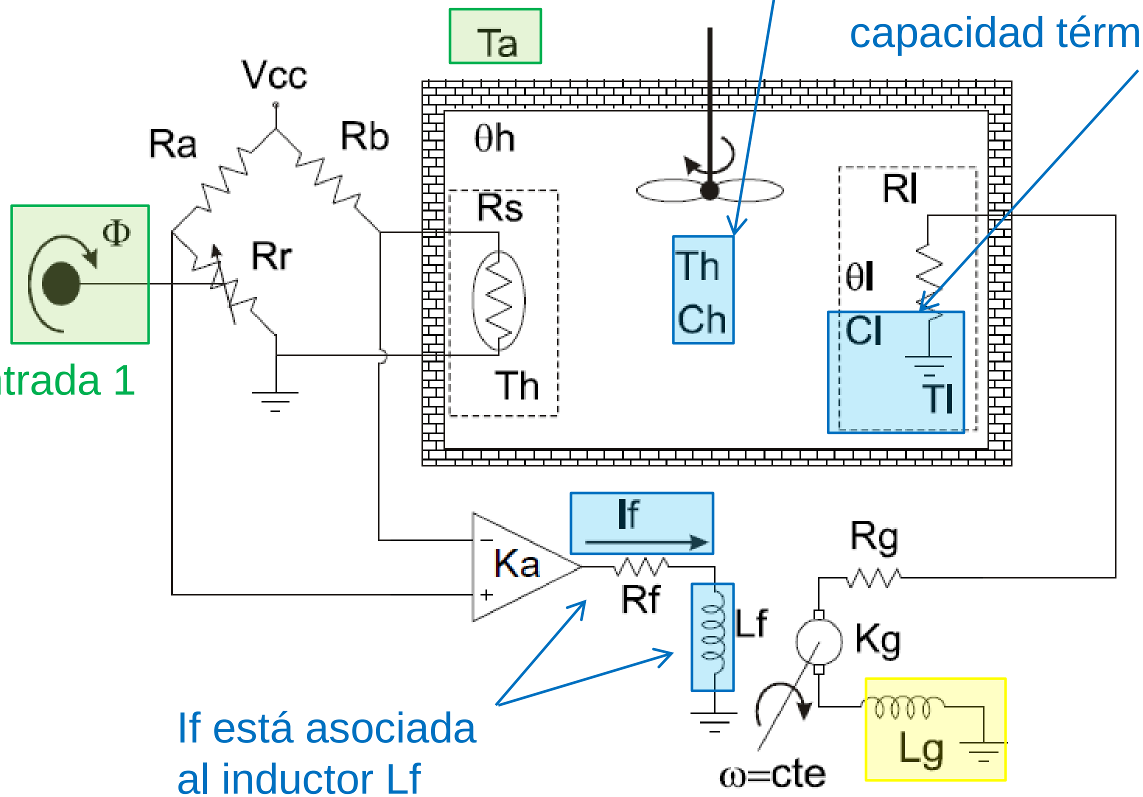
Control de Temperatura

Variables de estado
Entradas y salidas

Th está asociada a la capacidad térmica Ch

Tl está asociada a la capacidad térmica Ch

Entrada 2



Entrada 1

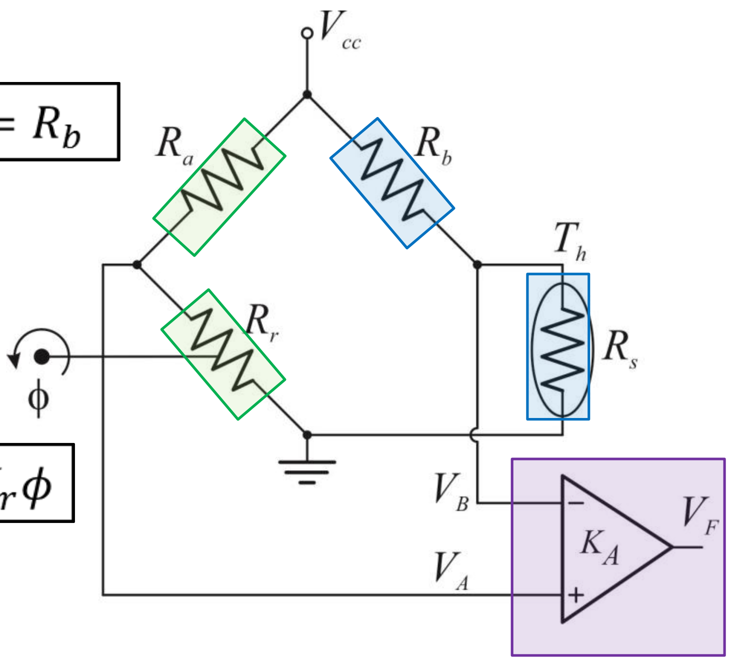
If está asociada al inductor Lf

¿Influye en algo que Lg sea o no cero?

Control de Temperatura

Puente de medición

$$R_a = R_b$$



$$R_r = K_r\phi$$

$$V_A = \frac{R_r}{R_a + R_r} V_{cc} = \frac{K_r\phi}{R_a + K_r\phi} V_{cc}$$

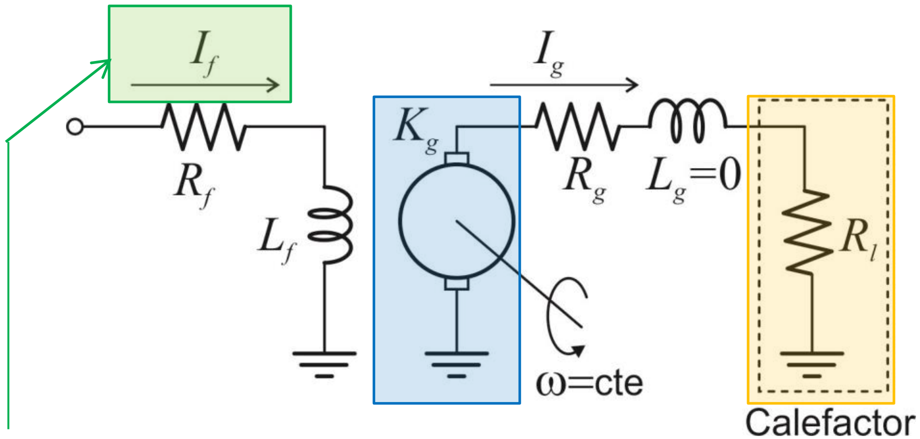
$$V_B = \frac{R_s}{R_b + R_s} V_{cc} = \frac{R_0(1 + \alpha T_h)}{R_a + R_0(1 + \alpha T_h)} V_{cc}$$

$$V_F = K_A(V_A - V_B)$$

$$V_F = V_{CC} K_A \left[\frac{K_r\phi}{R_a + K_r\phi} - \frac{R_0(1 + \alpha T_h)}{R_a + R_0(1 + \alpha T_h)} \right]$$

Control de Temperatura

Generador



Potencia disipada en el calefactor

$$P = I_g{}^2 R_l = \frac{K_g{}^2 R_l}{\left(R_g + R_l\right)^2} I_f{}^2$$

Fuente de entrada
del sistema térmico

Corriente de campo

$$V_F = R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt}$$

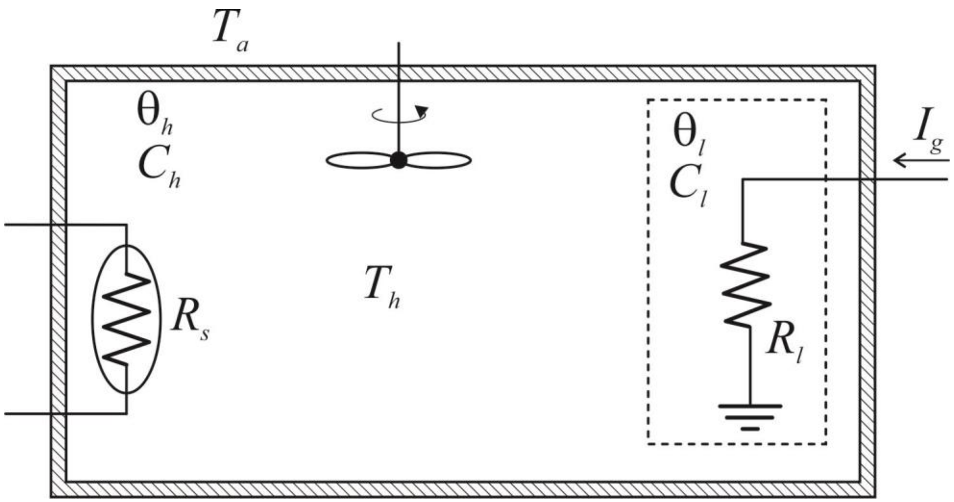
Tensión generada

$$V_g = K_g I_f = I_g (R_g + R_l)$$

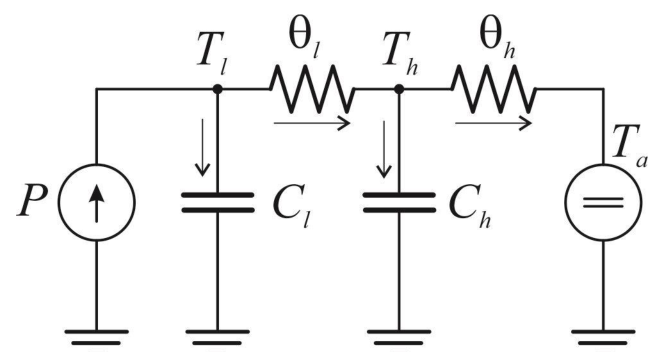
¿Quién cree que aporta la potencia del generador
para disiparla en la resistencia calefactora?

Control de Temperatura

Horno



Circuito eléctrico equivalente



$$P = C_l \dot{T}_l + \frac{T_l - T_h}{\theta_l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{T}_l = -\frac{1}{C_l \theta_l} T_l + \frac{1}{C_l \theta_l} T_h + \frac{{K_g}^2 R_l}{C_l \left(R_g + R_l\right)^2} {I_f}^2}$$

$$\frac{T_l - T_h}{\theta_l} = C_h \dot{T}_h + \frac{T_h - T_a}{\theta_h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{T}_h = \frac{1}{C_h \theta_l} T_l - \frac{1}{C_h} \left(\frac{1}{\theta_l} + \frac{1}{\theta_h}\right) T_h + \frac{1}{C_h \theta_h} T_a}$$

Control de Temperatura

Ecuaciones diferenciales del sistema

$$
\begin{cases}
\dot{I}_f = -\dfrac{R_f}{L_f} I_f - \dfrac{K_A V_{cc}}{L_f}\left(\dfrac{R_0(1+\alpha T_h)}{R_a + R_0(1+\alpha T_h)}\right) + \dfrac{K_A V_{cc}}{L_f}\left(\dfrac{K_r \phi}{R_a + K_r \phi}\right) \\[2ex]
\dot{T}_l = \dfrac{{K_g}^2 R_l}{C_l\left(R_g + R_l\right)^2} {I_f}^2 - \dfrac{1}{C_l \theta_l} T_l + \dfrac{1}{C_l \theta_l} T_h \\[2ex]
\dot{T}_h = \dfrac{1}{C_h \theta_l} T_l - \dfrac{1}{C_h}\left(\dfrac{1}{\theta_l} + \dfrac{1}{\theta_h}\right) T_h + \dfrac{1}{C_h \theta_h} T_a
\end{cases}
$$

Ecuación no-lineal

Ecuación no-lineal

Ecuación lineal

El sistema es claramente no-lineal. Se desea plantear un modelo linealizado del sistema.

Control de Temperatura

Linealización

$\dot{x}\,(t) = f(x,u)$ Punto de equilibrio $f(x_0,u_0) = 0$

Desarrollando en serie de Taylor

$$f(x,u) = \underbrace{f(x_0,u_0)}_{0} + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} (u - u_0) + \cdots$$

Definiendo $x^* = (x - x_0)$ y $u^* = (u - u_0)$

$$\dot{x}^* = \underbrace{\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}}_{CTE} x^* + \underbrace{\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}}_{CTE} u^*$$

Donde:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \qquad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}$$

¿Cómo encuentro el punto de equilibrio?

Control de Temperatura

Punto de equilibrio

Condición de régimen permanente, es decir las derivadas de las variables de estado deben ser cero.

$$
\begin{cases}
0 = -\dfrac{R_f}{L_f} I_f - \dfrac{K_A V_{cc}}{L_f}\left(\dfrac{R_0(1+\alpha T_h)}{R_a + R_0(1+\alpha T_h)}\right) + \dfrac{K_A V_{cc}}{L_f}\left(\dfrac{K_r \phi}{R_a + K_r \phi}\right) \\[2ex]
0 = \dfrac{{K_g}^2 R_l}{C_l\left(R_g + R_l\right)^2} {I_f}^2 - \dfrac{1}{C_l \theta_l} T_l + \dfrac{1}{C_l \theta_l} T_h \\[2ex]
0 = \dfrac{1}{C_h \theta_l} T_l - \dfrac{1}{C_h}\left(\dfrac{1}{\theta_l} + \dfrac{1}{\theta_h}\right) T_h + \dfrac{1}{C_h \theta_h} T_a
\end{cases}
$$

Sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas. Se deben definir la condición sobre dos variables/entradas de modo de encontrar una solución.

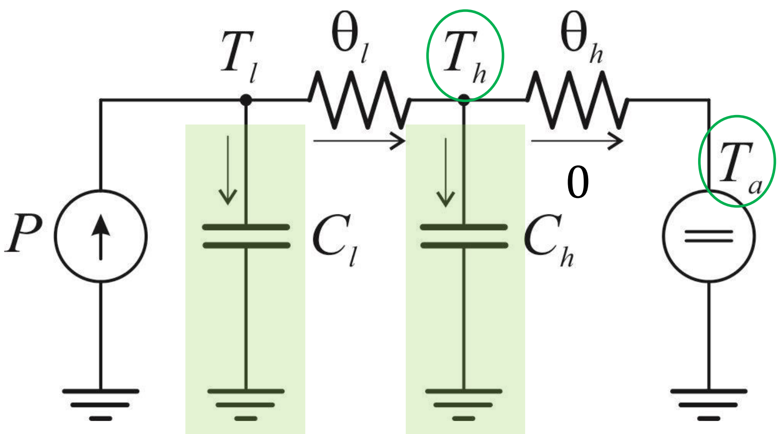
El problema original plantea como condición que $T_h = T_a$.

¿El sistema debe resolverse numéricamente?

Analicemos otra opción!

Control de Temperatura

Analicemos el circuito térmico equivalente en régimen permanente



$i_{Cl} = 0$ $i_{Ch} = 0$

Si $T_h = T_a$ se tiene que $P = 0$

Este no resulta un punto de operación útil de analizar ya que el sistema calefactor no se encuentra operando.

Luego, se plantea como condición que $T_{a0} = 20°\text{C}$ y $T_{h0} = 40°\text{C}$.

$$P_0 = \frac{T_{h0} - T_{a0}}{\theta_h} = 10W$$

$$\boxed{I_{f0} = \frac{(R_g + R_l)}{K_g}\sqrt{\frac{P_0}{R_l}} = 0.848A}$$

$$V_{F0} = I_{f0}R_f = 42.4V$$

$$\boxed{T_{l0} = T_{h0} + P_0\theta_l = 45°\text{C}}$$

$$\boxed{\phi_0 = \frac{R_a\left(\frac{V_{F0}}{V_{cc}K_A} + \frac{R_0(1+\alpha T_{h0})}{R_a + R_0(1+\alpha T_{h0})}\right)}{K_r\left[1 - \left(\frac{V_{F0}}{V_{cc}K_A} + \frac{R_0(1+\alpha T_{h0})}{R_a + R_0(1+\alpha T_{h0})}\right)\right]} \approx 4.08rad}$$

Control de Temperatura

Modelo de estado lineal

$$I_f{}^* = I_f - 0.848A \qquad T_a{}^* = T_a - 20°\mathrm{C}$$

$$T_l{}^* = T_l - 45°\mathrm{C} \qquad \emptyset^* = \emptyset - 4.08rad$$

$$T_h{}^* = T_h - 40°\mathrm{C}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_f{}^* = -\dfrac{R_f}{L_f} I_f{}^* - \dfrac{K_A V_{cc}}{L_f}\left(\dfrac{R_0 \alpha R_a}{[R_a + R_0(1 + \alpha T_{h0})]^2}\right) T_h{}^* + \dfrac{K_A V_{cc}}{L_f}\left(\dfrac{K_r R_a}{[R_a + K_r \phi_0]^2}\right)\phi^* \\[2ex] \dot{T}_l{}^* = \dfrac{2K_g{}^2 R_l I_{f0}}{C_l\left(R_g + R_l\right)^2} I_f{}^* - \dfrac{1}{C_l \theta_l} T_l{}^* + \dfrac{1}{C_l \theta_l} T_h{}^* \\[2ex] \dot{T}_h{}^* = \dfrac{1}{C_h \theta_l} T_l{}^* - \dfrac{1}{C_h}\left(\dfrac{1}{\theta_l} + \dfrac{1}{\theta_h}\right) T_h{}^* + \dfrac{1}{C_h \theta_h} T_a{}^* \end{cases}$$

Control de Temperatura

Modelo de estado lineal

$$A=\begin{bmatrix} -\dfrac{R_f}{L_f} & 0 & -\dfrac{K_A V_{cc}}{L_f}\left(\dfrac{R_0 \alpha R_a}{[R_a+R_0(1+\alpha T_{h0})]^2}\right) \\ \dfrac{2{K_g}^2 R_l I_{f0}}{C_l\left(R_g+R_l\right)^2} & -\dfrac{1}{C_l\theta_l} & \dfrac{1}{C_l\theta_l} \\ 0 & \dfrac{1}{C_h\theta_l} & -\dfrac{1}{C_h}\left(\dfrac{1}{\theta_l}+\dfrac{1}{\theta_h}\right) \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{K_A V_{cc}}{L_f}\left(\dfrac{K_r R_a}{[R_a+K_r\phi_0]^2}\right) \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{C_h\theta_h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

¿Qué pasa con las matrices si cambia el punto de equilibrio?

Numéricamente

$$A=\begin{bmatrix} -250 & 0 & -1.244 \\ 2.355 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 89.77 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores

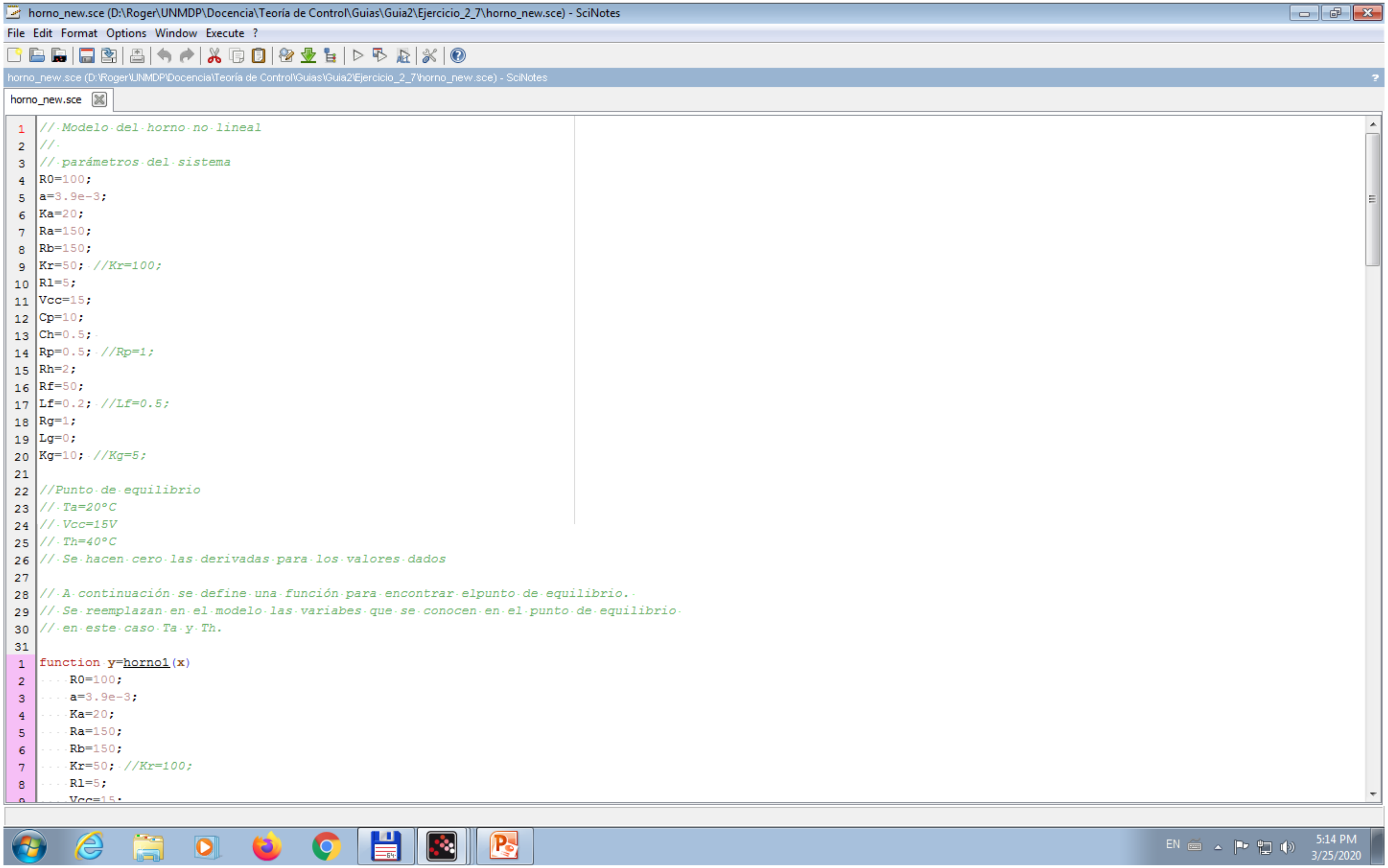
$\lambda_1 = -250$

$\lambda_2 = -5.15$

$\lambda_3 = -0.047$

Control de Temperatura

Simulaciones en Scilab (SciNotes)



Control de Temperatura

Simulaciones en Scilab (Xcos)