TEORÍA DE CONTROL

SISTEMAS NO LINEALES

Ecuaciones en el espacio de estados. Considere un sistema representado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinaras con alinealidades continuas. Las *fi* son funciones continuamente diferenciables en todos sus argumentos.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r) \\
&\ldots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r)
\end{aligned}$$

$$F(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ . \\ . \\ f_n(x,u) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}\,(t) = F(x,u)$$

Suponiendo que para un vector de entrada constante $u0$ el vector x toma el valor constante xo. Entonces resulta

$$\dot{x}\,(t) = F(x_0, u_0) = 0$$

Esto resulta de la definición de punto de equilibrio para sistemas en régimen permanente para una entrada constante o nula.

SISTEMAS NO LINEALES

Si se considera un sistema con una sola variable de estado y una sola entrada, se plantea el caso de una sola ecuación

$$\dot{x}\ (t) = f(x,u)$$

En este caso f es una función escalar no lineal. Si se desarrolla la función en series de Taylor entorno al punto ($x0$, $u0$) resulta:

$$f(x,u) = f(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \cdot (u - u_0) +$$

$$+ \text{términos de orden superior}$$

Si se designan a x^* y u^* a las variaciones de x y u desde la condición de operación $x0$ y $u0$.

$$x^* = x - x_0 \qquad u^* = u - u_0$$

Si además, se utiliza el punto de operación en un punto de equilibrio $f(x_0,u_0) = 0$ y se desprecian los términos de orden superior.

$$\dot{x}^* = \underbrace{\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}}_{CTE} \cdot x^* + \underbrace{\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}}_{CTE} \cdot u^*$$

SISTEMAS NO LINEALES

Para un sistema vectorial las derivadas corresponderán a la n variables de estado y a las r entradas. Por lo tanto en este caso el operador “derivada” corresponde a la matriz Jacobiana .

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_n} \\ . & . & \ldots & . \\ \frac{\partial f_n(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x,u)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n(x,u)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_r} \\ . & . & \ldots & . \\ \frac{\partial f_n(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n(x,u)}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_n(x,u)}{\partial u_r} \end{bmatrix}$$

SISTEMAS NO LINEALES

Si se evalúa la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio (x0, u0) resulta una matriz de constantes , entonces:

$$A = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \qquad B = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}$$

En donde los elementos de las matrices son:

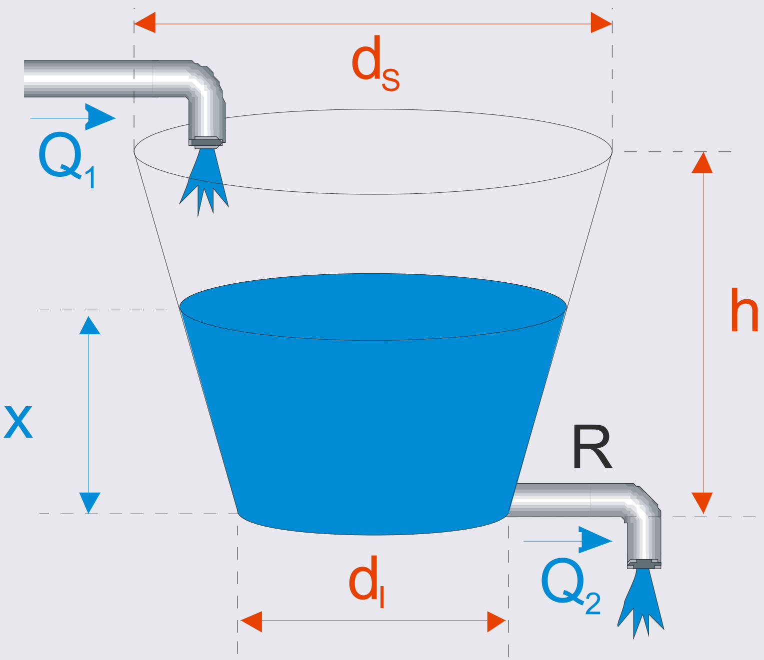
$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j}\bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \qquad b_{ik} = \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_k}\bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}$$

Finalmente el modelo linealizado en torno al punto (x0, u0) resulta:

$$\dot{x}^*(t) = A \cdot x^*(t) + B \cdot u^*(t)$$

EJEMPLO 1 :

Considérese un recipiente con forma de cono truncado, como se indica en la figura, con un drenaje en su base y al que ingresa un líquido con un caudal Q1(t).



Supóngase, además que el sistema está ya operando en régimen permanente con un caudal de entrada constante. En estas condiciones se denominan Q_{10} y Q_{20} a los caudales de entrada y salida respectivamente y x_0 la altura del liquido en el tanque. Obviamente es Q_{10}.= Q_{20} .

A fin de disminuir la complejidad en las expresiones que relacionan algunas variables considere que:

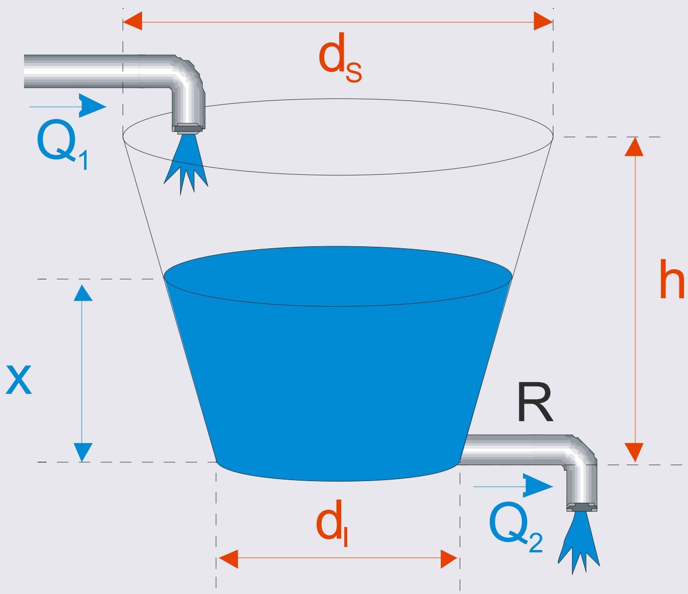
$$Q_2 = \frac{x}{R}$$

con R = constante.

EJEMPLO 1 :

Considerando que el caudal neto de líquido que ingresa o sale del tanque tiene que ser igual a la variación de su volumen en el mismo, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t)$$



El volumen V es función de la altura x, siendo x función de t. Para simplificar las expresiones se mantendrá implícita esta circunstancia. Relacionando ahora V con x se halla el modelo buscado:

$$V(x) = \int_0^x A(x)dx \quad \text{y} \quad A(x) = \frac{\pi}{4} d^2(x)$$

$$d(x) = a + bx \ \ \text{con} \quad a = d_I \ \ \text{y} \ \ b = \frac{d_S - d_I}{h}$$

siendo A(x) y d(x) el área de la sección transversal y el diámetro a la altura x, respectivamente.

EJEMPLO 1:

Luego, el área será: $$A(x) = \frac{\pi}{4}\left(a+bx\right)^2 = k\left(a+bx\right)^2$$

Por lo tanto, el volumen en función de x es:

$$V(x) = \int_0^x k\left(a+bx\right)^2 dx = \frac{k}{3b}\left(a+bx\right)^3$$

Entonces: $$\dot{V}(x) = k\left(a+bx\right)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = k\left(a+bx\right)^2 \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{R}x + Q_1$$

El modelo de estado queda:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{Rk\left(a+bx(t)\right)^2}x(t) + \frac{1}{k\left(a+bx(t)\right)^2}Q_1(t)$$

SISTEMAS NO LINEALES

EJEMPLO 1 : $$\dot{x}(t) = -\frac{1}{Rk\left(a+bx(t)\right)^2}x(t) + \frac{1}{k\left(a+bx(t)\right)^2}Q_1(t)$$

El modelo resulta no lineal. Para analizar el comportamiento ante pequeñas variaciones del caudal de entrada, se linealiza alrededor del punto de equilibrio x_0 .

$$\left.\frac{\partial f(x,Q_1)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\Q_1=Q_{10}}} = \left[\frac{a-bx_0-2bRQ_{10}}{kR\left(a+bx_0\right)^3}\right] \qquad \left.\frac{\partial f(x,Q_1)}{\partial Q_1}\right|_{\substack{x=x_0\\Q_1=Q_{10}}} = \left[\frac{1}{k\left(a+bx_0\right)^2}\right]$$

El modelo de estado linealizado queda:

$$\dot{x}^* = \left[\frac{a-bx_0-2bRQ_{10}}{kR\left(a+bx_0\right)^3}\right]x^* + \left[\frac{1}{k\left(a+bx_0\right)^2}\right]Q_1^*$$

con: $x^* = \left(x - x_0\right)$ y $Q_1^* = \left(Q_1 - Q_{10}\right)$

EJEMPLO 1 :

Suponiendo los siguientes datos para el sistema:

$$d_S = 1\ [\mathrm{m}].\quad d_I = 0.25\ [\mathrm{m}].\quad h = 2\ [\mathrm{m}].\quad R = 10^3\ \left[\mathrm{s}/\mathrm{m}^2\right]$$

El valor del punto de equilibrio para un caudal de entrada $Q_{10}= 10^{-3}\ m^3/s$ es $x_0=1$ m.

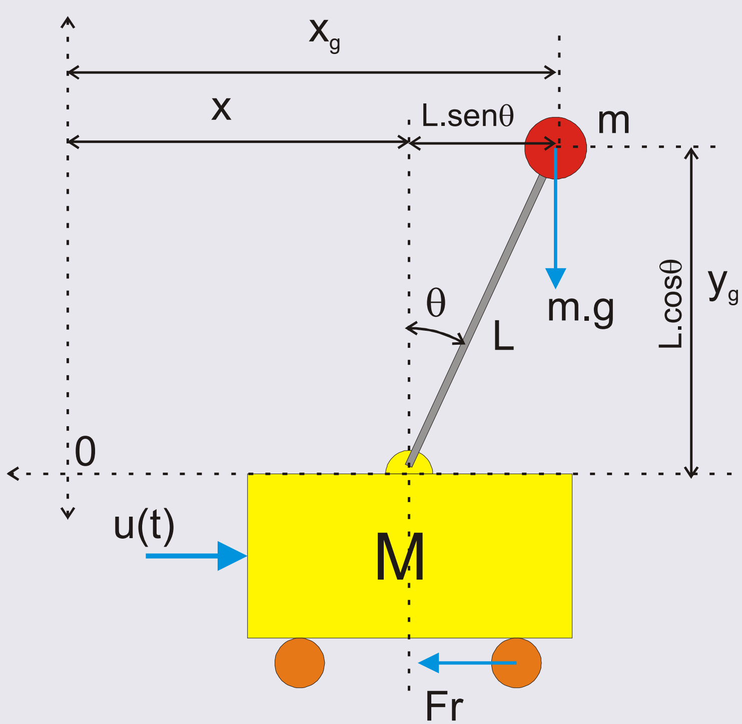
El modelo de estado linealizado en el entrorno del punto de equilibrio $[x_0,Q_{10}]$ es:

$$\dot{x}^* = -0.0033 \cdot x^* + 3.2595 \cdot Q_1^*$$

con: $x^* = (x-1)$ y $Q_1^* = \left(Q_1 - 10^{-3}\right)$

EJEMPLO 2:

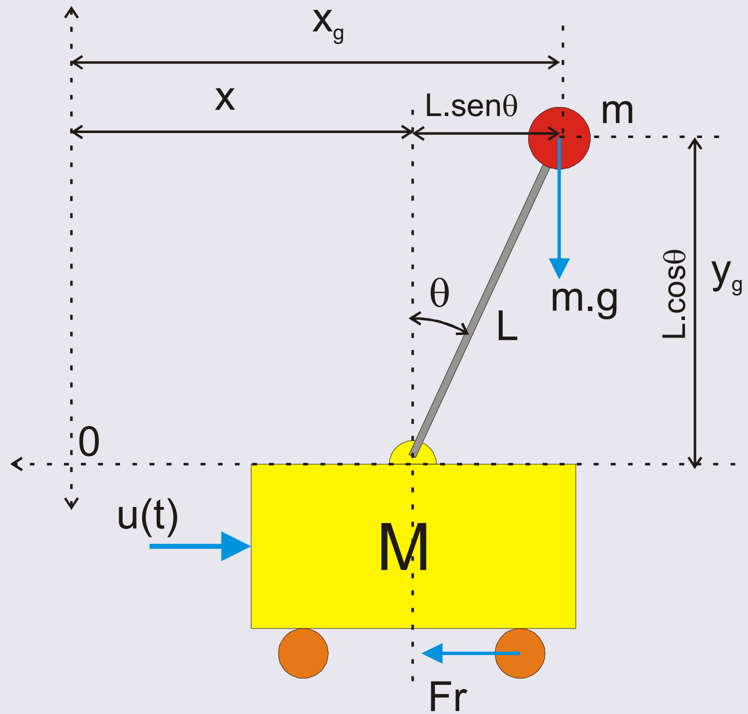
El péndulo invertido es conocido por ser uno de los problemas más importantes y clásicos de la teoría de control. Se trata de un control inestable y no lineal. A menudo, es utilizado como ejemplo académico, principalmente por ser un sistema de control accesible, y por otro lado, permite mostrar las principales diferencias de control de lazo abierto y de su estabilización a lazo cerrado.



Se supone que la varilla no tiene masa, que la masa del carro es M y la masa en el extremo superior del péndulo invertido es m . Hay una fuerza externa, u(t), sobre el carrito en la dirección x, y una fuerza de gravedad que actúa sobre la masa del péndulo en todo momento .

El sistema de coordenadas elegido se define en la figura, donde x (t) representa la posición del carro y θ(t) es el ángulo de inclinación que se mide respecto de la dirección vertical.

ECUACIONES BÁSICAS



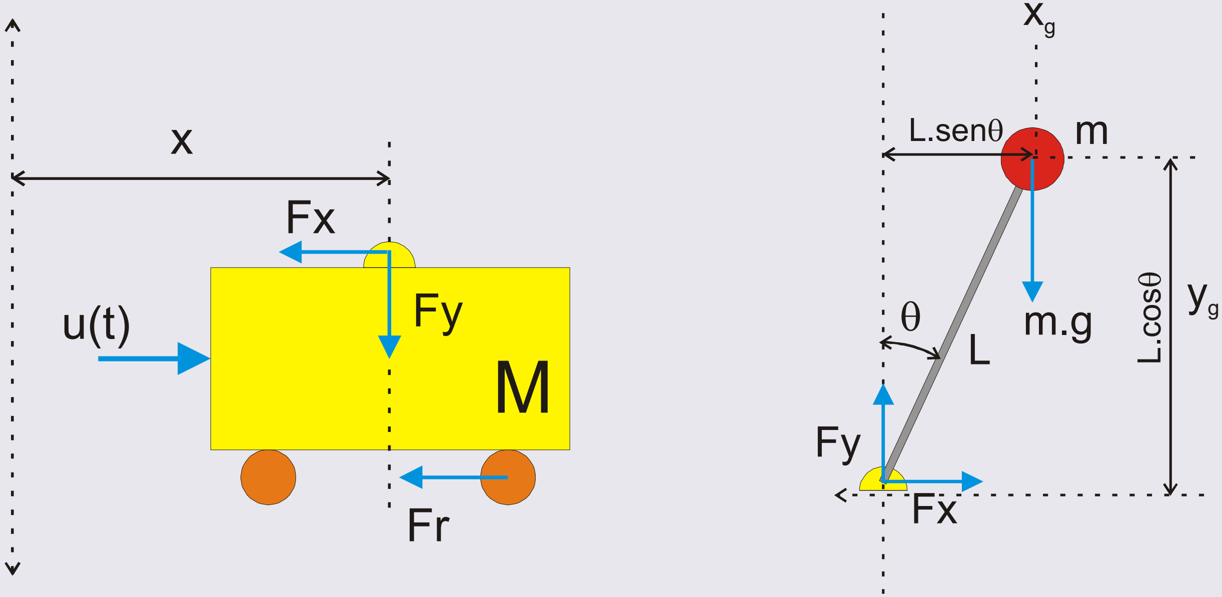
El centro de gravedad de la masa del péndulo viene dada por las coordenadas , (x_g, y_g) donde L es la longitud de la varilla del péndulo.

$$x_g = x + L \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad y_g = L \cdot \cos\theta$$

SISTEMAS NO LINEALES

ECUACIONES BÁSICAS

Considerando el diagrama de cuerpo aislado que se muestra a continuación:



Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento del carro:

$$\sum F = M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - F_x - F_r$$

$$F_r = B \frac{dx}{dt} \qquad \text{y} \qquad F_x = m \frac{d^2 x_g}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2}(x + L \ \text{sen}\,\theta)$$

ECUACIONES BÁSICAS

Reordenando la ecuación de fuerzas resulta:

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} x + m \cdot \frac{d^2}{dt^2}(x + L \cdot \operatorname{sen}\theta) = u - B \cdot \frac{dx}{dt}$$

Tomando nota de las siguientes definiciones,

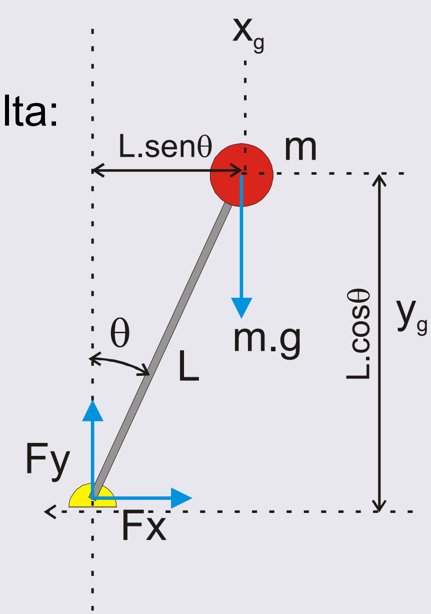
$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen}\theta = \dot{\theta} \cdot \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{sen}\theta = \ddot{\theta} \cdot \cos\theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta$$

Tenemos:

$$(M + m) \cdot \ddot{x} + m \cdot L \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta - m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \operatorname{sen}\theta + B \cdot \dot{x} = u \qquad (1)$$

ECUACIONES BÁSICAS

Para el movimiento vertical del péndulo la ecuación de Newton resulta:



$$F_y - m\ g = m\frac{d^2 y_g}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(L\ \cos\theta)$$

Considerando ahora las siguientes definiciones,

$$\frac{d}{dt}\cos\theta = -\dot{\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \frac{d^2}{dt^2}\cos\theta = -\ddot{\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta$$

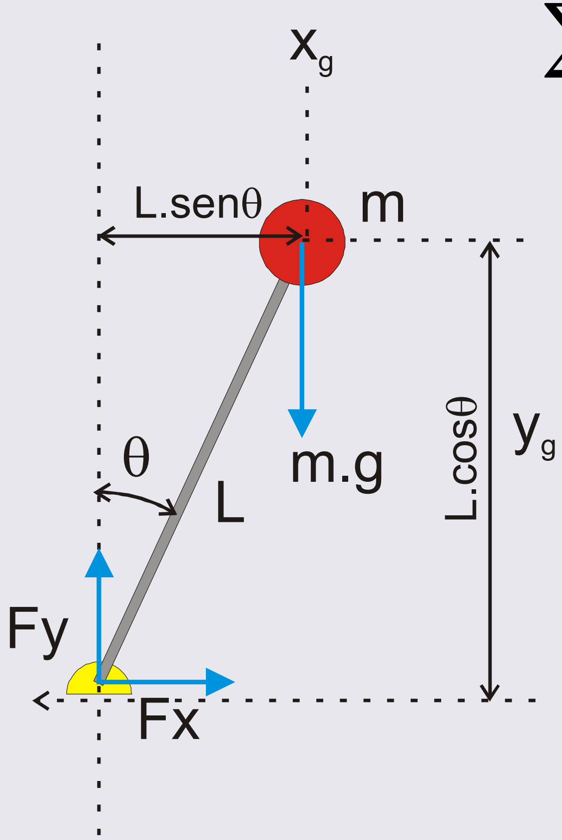
Tenemos:

$$F_y = m\ g - m\cdot L\cdot\dot{\theta}^2\cdot\cos\theta - m\cdot L\cdot\ddot{\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta$$

ECUACIONES BÁSICAS

De una manera similar, se realiza un equilibrio de momentos en el sistema , el momento es el producto de la componente perpendicular de la fuerza por la distancia hasta el punto de pivote (longitud de brazo de palanca ,L) . Considerando los momentos respecto del centro de gravedad de la masa m:

$$\sum M = J \frac{d^2\theta}{dt^2} = F_y \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta - F_x \cdot L \cdot \cos\theta$$



Sustituyendo las expresiones de Fx y Fy

$$F_x = m\left[\ddot{x} - L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \operatorname{sen}\theta + L \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta\right]$$

$$F_y = m\left[g - L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta - L \cdot \ddot{\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta\right]$$

SISTEMAS NO LINEALES

ECUACIONES BÁSICAS

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de momentos

$$m \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta\left[g - L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta - L \cdot \ddot{\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta\right] - \ldots$$

$$\ldots - m \cdot L \cdot \cos\theta\left[\ddot{x} - L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \operatorname{sen}\theta + L \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta\right] = J\ddot{\theta}$$

Simplificando se llega a:

$$(J + m \cdot L^2) \cdot \ddot{\theta} = m \cdot L \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta - m \cdot L \cdot \ddot{x} \cdot \cos\theta \qquad (2)$$

Por lo tanto la representación del modelo matemático para este sistema están dadas por las ecuaciones . (1) y (2) . Estas ecuaciones representan definitivamente un sistema no lineal que es relativamente complicado desde un punto de vista matemático. Sin embargo, dado que el objetivo de este sistema en particular es mantener el péndulo invertido en posición vertical alrededor de θ=0, se podría considerar la linealización en torno al punto de equilibrio en posición vertical.

MODELO DE ESTADO

Para linealizar el modelo no lineal del péndulo invertido tenemos que ponerlo en forma de modelo de estado estándar ,

$$\frac{d}{dt}x = f\left(x,u,t\right)$$

Para poner las ecuaciones (1) y (2) en esta forma, primero vamos a manipular las ecuaciones algebraicamente.
De la ecuación (2):

$$\ddot{x} = \frac{m \cdot L \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta - (J + m \cdot L^2) \cdot \ddot{\theta}}{m \cdot L \cdot \cos\theta}$$

Reemplazando en la ecuación (1):

$$u = \frac{\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}\left[m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2\theta - (J + m \cdot L^2) \cdot (M + m)\right] - \ldots \\ \ldots - m \cdot L \cdot \cos\theta\left[B \cdot \dot{x} - m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta\right] + m \cdot L \cdot g \cdot (M + m) \cdot \operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix}}{m \cdot L \cdot \cos\theta}$$

MODELO DE ESTADO

Despejando se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \frac{m \cdot L \cdot \cos\theta \left[B \cdot \dot{x} - m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + u \right] - g \cdot (M + m) \cdot \operatorname{sen}\theta}{m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2\theta - \left(J + m \cdot L^2 \right) \cdot (M + m)}$$

Reemplazando en la ecuación de $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{m^2 \cdot L^2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta - (J + m \cdot L^2)(m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \operatorname{sen}\theta - B \cdot \dot{x} + u)}{m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2\theta - (J + m \cdot L^2) \cdot (M + m)}$$

Definiendo como variables de estado $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$ y $x_4 = \dot{\theta}$

MODELO DE ESTADO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{m^2 \cdot L^2 \cdot g \cdot \operatorname{sen} x_3 \cdot \cos x_3 - (J + m \cdot L^2)(m \cdot L \cdot x_4^2 \cdot \operatorname{sen} x_3 - B \cdot x_2 + u)}{m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2 x_3 - (J + m \cdot L^2) \cdot (m + M)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{m \cdot L \cdot \cos x_3 \left[B \cdot x_2 - m \cdot L \cdot x_4^2 \operatorname{sen} x_3 + u \right] - g \cdot (m + M) \cdot \operatorname{sen} x_3}{m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2 x_3 - (J + m \cdot L^2) \cdot (m + M)} \end{cases}$$

Para linealizar el modelo se calcula el punto de equilibio que se considera con el carro en la posición x=0 , el péndulo en la posición vertical y en una condición estática.
La primer y tercer ecuación son ya lineales por lo tanto no requieren derivación, en tanto en las 2 restantes se debe derivar respecto de 3 variables y la entrada.

MODELO DE ESTADO

El resultado de la linealización en el punto de equilibrio es:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1^* = x_2^* \\
\dot{x}_2^* = -\dfrac{B(J + m \cdot L^2)}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} x_2^* - \dfrac{m^2 \cdot g \cdot L^2}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} x_3^* + \ldots \\
\qquad \ldots + \dfrac{J + m \cdot L^2}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} u^* \\
\dot{x}_3^* = x_4^* \\
\dot{x}_4^* = \dfrac{m \cdot L \cdot B}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} x_2^* + \dfrac{g \cdot (M+m)}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} x_3^* + \ldots \\
\qquad \ldots - \dfrac{m \cdot L}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} u^*
\end{cases}
$$

MODELO DE ESTADO

Considerando los siguientes valores M = 0.5 Kg; m = 0.2 Kg; B = 0.1 N.m/s; J = 0.006 N.m/s^2; g = 9.8 m/s^2 y L = 0.3 m el modelo queda:

$$\dot{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & -2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix} x^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ -4.545 \end{bmatrix} u^*(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^*(t)$$

La función de transferencia del ángulo de inclinación es:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-4.5455s}{(s-5.565)\ (s+5.604)\ (s+0.1428)}$$

Como puede verse el sistema es inestable