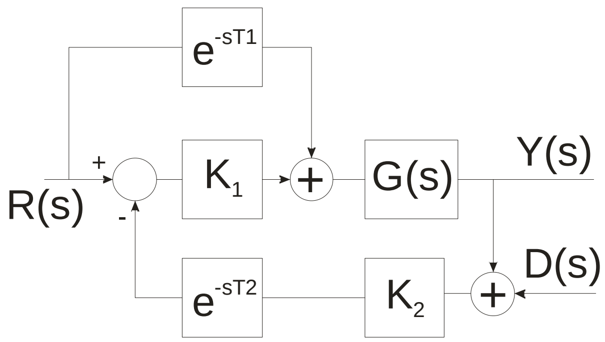
RESOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL CURSADA 2013

1) (2.0) Dado el sistema realimentado de la figura.



G(s) = (s + 1) / s²

r(t) : entrada de referencia .

d(t) : entrada de perturbación.

y(t) : salida.

K1, K2, T1 y T2 : Constantes. reales y positivas.

a) Halle la matriz de transferencias del sistema.
b) Empleando "diagramas de Bode", explique cómo analizar la estabilidad del sistema indicado.
c) Para K2 = 0.1 . Halle sendos valores para los restantes parámetros, (K1,T1 y T2), de modo que, a la frecuencia w = 1 [r/s] , el margen de fase sea nulo.

RESOLUCIÓN:

a) Par hallar la matriz de transferencia se debe aplicar el principio de superposición para sistemas lineales, en el cual la respuesta total del sistema es la suma de las respuestas individuales para cada una de las entradas, por lo tanto:

$Y(s)=G_1(s)R(s)+G_2(s)*D(s)$, en donde $G_1(s)=Y(s)/R(s)\big|_{D(s)=0}$ y $G_2(s)=Y(s)/D(s)\big|_{R(s)=0}$

Para este caso con D(s)=0:

$$Y(s)\big|_{D=0}=\left[R(s)e^{-sT_1}+K_1\left(R(s)-K_2e^{-sT_2}Y(s)\right)\right]G(s)$$

$$Y(s)\left(1+K_1K_2G(s)e^{-sT_2}\right)=\left[e^{-sT_1}+K_1\right]G(s)R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\left[e^{-sT_1}+K_1\right]G(s)}{1+K_1K_2G(s)e^{-sT_2}}=G_1(s)$$

Ahora con R(s)=0

$$Y(s)\big|_{R=0}=\left(D(s)+Y(s)\right)\left[-K_1K_2e^{-sT_2}G(s)\right]$$

$$Y(s)\left(1+K_1K_2G(s)e^{-sT_2}\right)=-K_1K_2G(s)e^{-sT_2}R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)}=\frac{-K_1K_2G(s)e^{-sT_2}}{1+K_1K_2G(s)e^{-sT_2}}=G_2(s)$$

Finalmente la salida es: $Y(s)=\underbrace{\left[\begin{matrix}\dfrac{\left(K_1+e^{-sT_1}\right)G(s)}{1+K_1K_2G(s)e^{-sT_2}} & \dfrac{-K_1K_2G(s)e^{-sT_2}}{1+K_1K_2G(s)e^{-sT_2}}\end{matrix}\right]}_{G(s)}\left[\begin{matrix}R(s)\\D(s)\end{matrix}\right]$

b) El análisis de estabilidad empleando "diagramas de Bode" se debe resolver utilizando la transferencia de lazo abierto del sistema. En tal sentido, las señales que ingresan al lazo de control no intervienen en el análisis de estabilidad.

En este caso la transferencia de lazo abierto es: $GH(s)=K_1K_2G(s)e^{-sT_2}$. Queda excluida de esta transferencia el signo del sumador sobre R(s), por lo tanto se va a analizar la condición que GH(s)=-1. Otra forma de ver esta situación es tomar la condición en la que el denominador de las transferencias es igual a cero.

Inicialmente se dibujan las curvas de módulo y fase de la transferencia sin tener en cuenta el retardo T2. En estas condiciones (y suponiendo los polos y ceros de G(s) en el semiplano izquierdo, como es el caso) se verifica el valor del margen de fase. Esta medición se realiza tomando como referencia la frecuencia de cruce por 0dB de la curva de amplitud (ω_c) y teniendo a esa frecuencia como referencia, el valor de la fase debe ser superior a -180º. La diferencia entre el valor de la fase y -180º es el margen de fase que debe ser positivo para que el sistema resulte estable.

$$MF= 180º+Fase(\omega_c).$$

La parte exponencial (retardo) agrega fase negativa al sistema en forma lineal, sin alterar el módulo,

$$Fase_{Retardo}= \omega T_2(radianes)$$

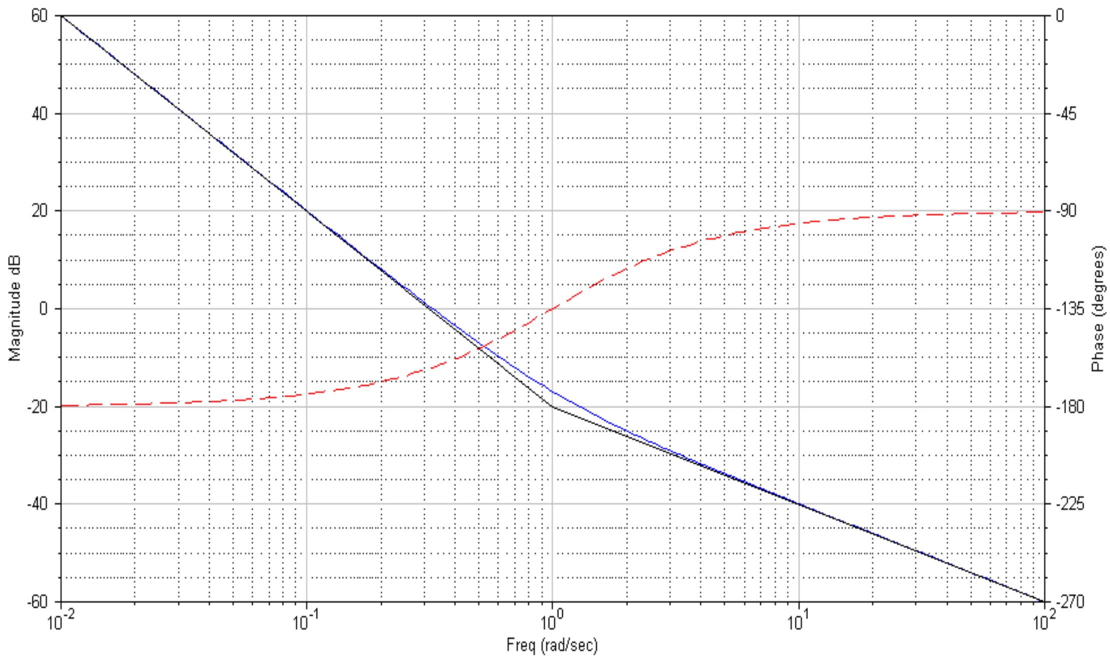
Esta fase agregada al gráfico realizado puede generar inestabilidad en el sistema en la medida que supere el Margen de Fase obtenido sin retardo. Por lo tanto, la condición de estabilidad será:

$$T_2\,(max) = MF\ \pi/(\omega_c\ 180)$$

Si el valor del retardo excede este máximo el sistema resulta inestable. Caso contrario el margen de fase resultará positivo con un valor:

$$MF= 180º+Fase(\omega_c)- \omega T_2\, 180/\pi > 0$$

c)   Para K2=0.1, la curva de módulo y fase con retardo nulo es la siguiente:

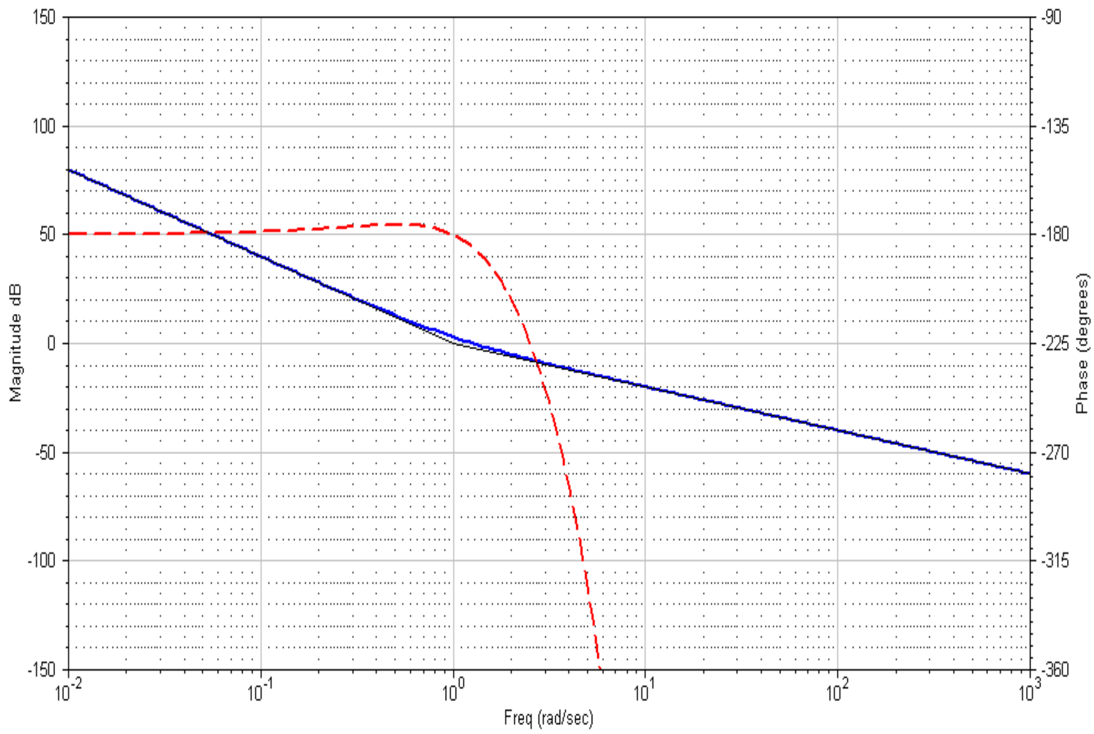


Se pide para el sistema tener un margen de fase nulo en ω=1 rad/seg. La curva de módulo debe cortar 0 dB a esa frecuencia al mismo tiempo que la fase cruza los -180º. Para que se cumpla esta condición , el módulo debe aumentar aproximadamente 20 dB y la fase debe atrasar 45º a la frecuencia planteada.

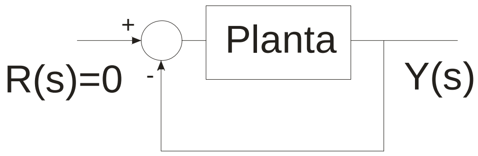
El valor de módulo se puede ajustar con K1 y la fase se puede ajustar con T2, el valor de T1 no tiene importancia ya que no forma parte de la transferencia analizada.

En consecuencia, K1 = 20 dB =10 y a partir de la fase 45º = 1 r/s . T2 . 180º / π el valor de T2 es 0,785 seg.

En la curva siguiente se ve el efecto de aplicar estos valores.

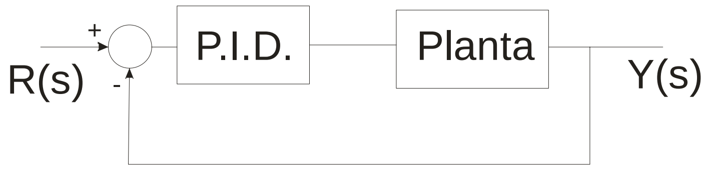


2) (2.0) Una determinada planta SISO, de la que NO se dispone de un modelo matemático, produce una salida prácticamente senoidal, de frecuencia Fo [Hz], al implementarse una realimentación unitaria en la misma con entrada de referencia nula.



Para que la salida reproduzca señales de entrada de tipo escalonada se propone agregar un controlador PID.

El controlador propuesto realiza un procesamiento digital de señales, tomando muestras y desarrollando el control u(k), con retención de orden cero, cada Ts [s]. Esto significa operar a una frecuencia de muestreo mucho mayor que la más alta frecuencia presente en los espectros de las señales a muestrear.



a) Explique, paso a paso, cómo sintonizar este controlador.
b) Indique cómo hallar el algoritmo de control discreto recursivo, u(k), para el controlador PID con la disposición indicada, expresando el mismo claramente . Utilice aproximación trapezoidal para la integral. Considere evitar la saturación del algoritmo de control.

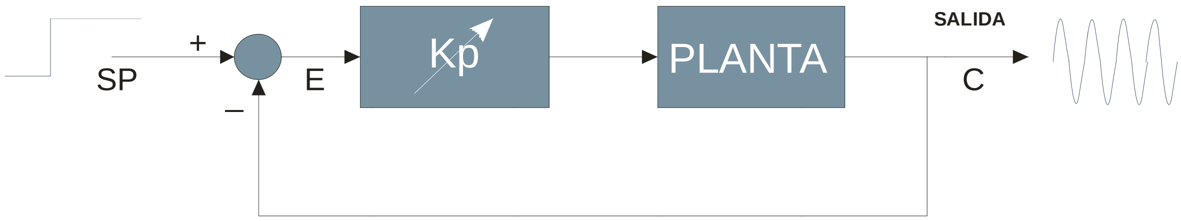
Resolución:

a) El ejercicio trata sobre el diseño de un controlador PID discreto. Como la frecuencia de muestreo es alta comparada con el ancho de banda del sistema, se pueden considerar las constantes del controlador extraídas de un análisis continuo.

La ecuación del controlador PID para un sistema continuo tiene la siguiente forma:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Un método para hallar las constantes del PID es el propuesto por Ziegler y Nichols a lazo cerrado en el cual mediante un controlador P se varía la ganancia de este hasta que el sistema resulte oscilatorio sostenido. En esta condición se mide el periodo de oscilación de la salida TCR y la ganancia para la cual ocurre esta oscilación Kcr.
En el caso de este sistema el sistema oscila con Kcr=1, y el periodo resulta Tcr=1/Fo [seg]



Con estos valores se encuentran las constantes del controlador mediante la siguiente relación:

TIPO DE CONTROLADOR	Kp	Ti	Td
P	$0,5Kcr$		
PI	$0,45Kcr$	$\frac{Tcr}{1,2}$	
PID	$0,6Kcr$	$\frac{Tcr}{2}$	$\frac{Tcr}{8}$

Estos valores aseguran estabilidad a lazo cerrado pero pueden ser variados criteriosamente para lograr una respuesta más apropiada para el sistema.
b) La discretización del algoritmo se realiza aplicando la aproximación discreta para la derivada del error y para la integral por trapecios con un periodo de muestreo Ts.

Para la derivada se aplica $D = \frac{e(k) - e(k-1)}{T_s}$

Para la integral se aplica $I = \sum_{i=0}^{k} T_s \frac{[e(i) + e(i-1)]}{2}$

Entonces la expresión del controlador PID resulta :

$$u(k) = K_p \left[e(k) + \frac{T_s}{T_i} \sum_{i=0}^{k} \frac{[e(i) + e(i-1)]}{2} + \frac{T_d}{T_s}[e(k) - e(k-1)] \right]$$

Esta expresión puede provocar la saturación del valor de u(k) debido a la sumatoria por lo tanto se aplica la forma de velocidad donde se calcula u(k)-u(k-1)

$$u(k) - u(k-1) = K_p \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T_s}{T_i}\left[\frac{e(k) + e(k-1)}{2}\right] + \frac{T_d}{T_s}\big(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)\big) \right]$$

$$u(k) = u(k-1) + K_p \left[1 + \frac{T_s}{2T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right] e(k) - K_p \left[1 - \frac{T_s}{2T_i} + 2\frac{T_d}{T_s} \right] e(k-1) + K_p \frac{T_d}{T_s} e(k-2)$$

Este algoritmo no presenta problemas de saturación.

---

3) (1.0) Explique, ¿de qué forma se midió el margen de fase y el margen de ganancia en la práctica de laboratorio 1?.

En el circuito electrónico se abre el lazo en un punto en donde no se produzca un efecto de carga debido a la variación de impedancias del lazo. Esto se puede obtener a la salida de los amplificadores operacionales ya que en este punto la impedancia interna es cero. Como se abre el lazo en un punto donde no hay inversión de fase se considera que la señal de salida debe estar en fase y con amplitud mayor a 1 para generar inestabilidad, por lo tanto la fase crítica es 0º.

Luego se conectan las entradas del circuito a cero de tensión y se coloca un generador de tensión senoidal a la entrada del circuito de lazo abierto con una amplitud que no sature la salida.

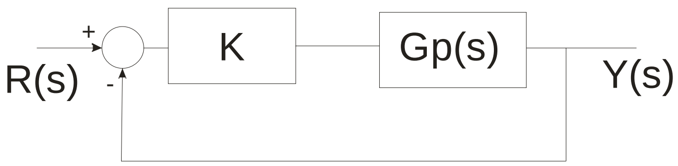
Se miden las señales de entrada y salida del circuito. Se realiza un barrido en frecuencia de la señal senoidal del generador de modo de encontrar un punto en que las amplitudes de la señal a la entrada y a la salida sean iguales. En esa condición la ganancia del sistema es 1 es decir 0 dB. Entonces se calcula la diferencia de fase entre las señales midiendo el tiempo entre señales y afectándolo por la frecuencia. Esto da como resultado el Margen de Fase.

$$T_m \cdot frecuencia \cdot 360^0 = MFase$$

Para medir el margen de Ganancia, se ajusta la frecuencia para que ambas señales se encuentren en fase, se miden las amplitudes de las señales y se calcula la ganancia. La inversa de este valor es el margen de Ganancia.

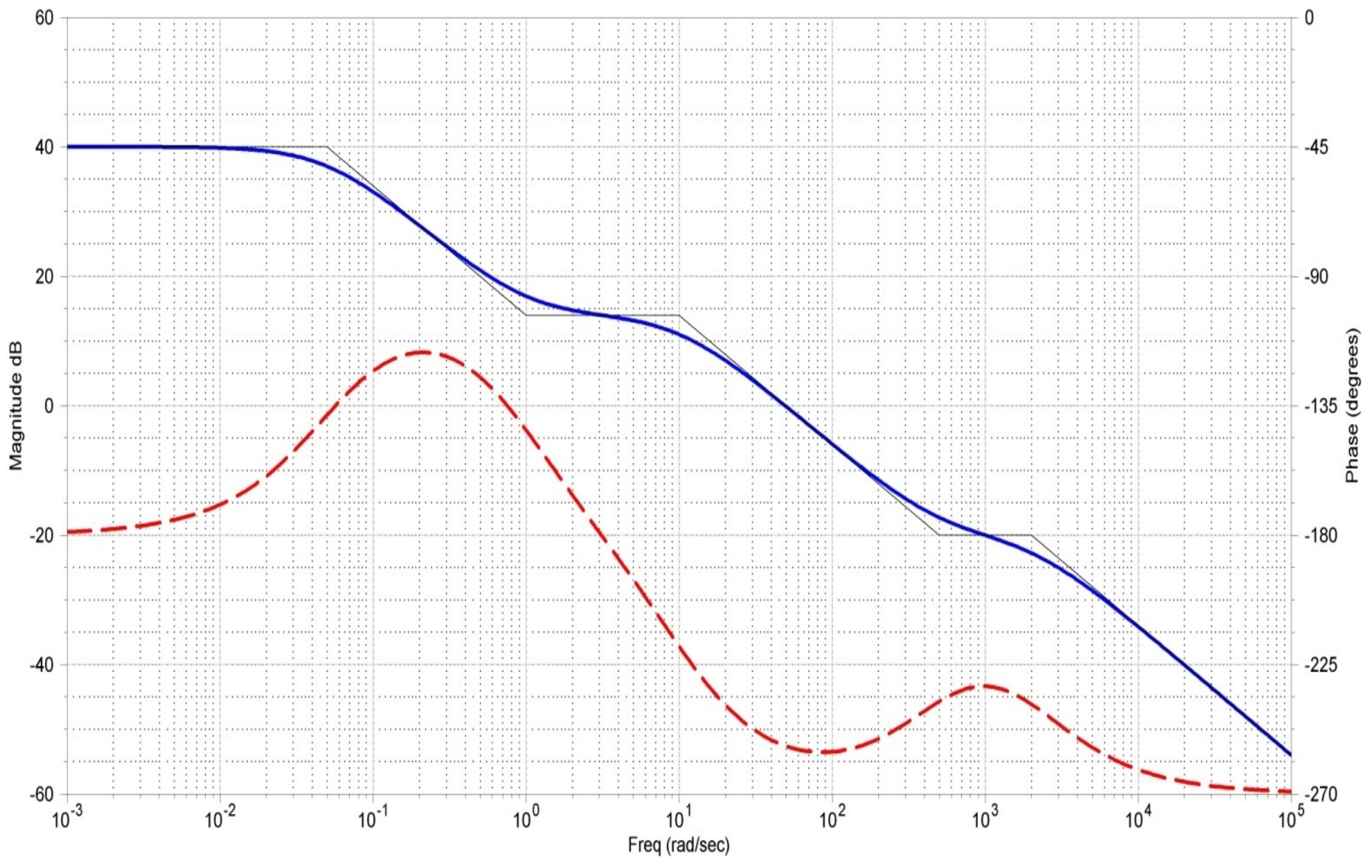
---

4) El diagrama de la figura representa un sistema de control de lazo cerrado.



La respuesta de amplitud y fase de G(s) se muestra en la figura 2.

a) Hallar la función de transferencia G(s)
b) Determinar los valores de la ganancia K que hacen estable al sistema a lazo cerrado.
c) Bosqueje en forma cualitativa el diagrama de Nyquist correspondiente y señale la zonas en las que deben encontrarse los puntos (+/- 1 + j 0) para que el sistema resulte estable.
d) Determine, si existe, el valor del margen de fase correspondiente a K=0.1.

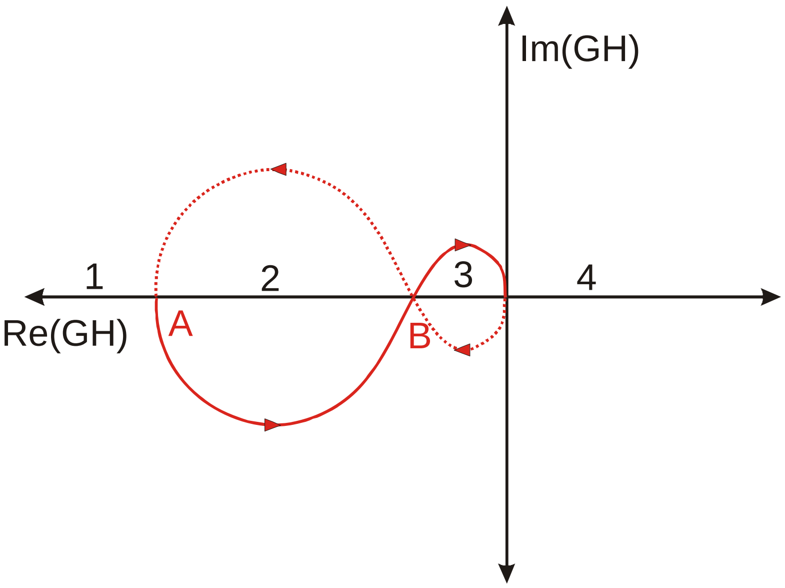


---

a) La ganancia del sistema es de 100 veces (40db).La fase inicial es -180º por lo tanto la ganancia es negativa. La primera singularidad es un polo en 0.1 r/s y como la fase aumenta en las cercanías de esta frecuencia el mismo está en el semiplano derecho. Luego en 1 r/s hay un cero con fase disminuyendo por lo tanto esta singularidad también está en el semiplano derecho. El resto de las singularidades responden en amplitud y fase como ubicadas en el semiplano izquierdo y son:
Polo en 10 r/s, cero en 500 r/s y polo en 2000 r/s.

Entonces la función de transferencia es: $G(s)=\dfrac{-100(1-s)(1+s/500)}{(1-s/0.05)(1+s/10)(1+s/2000)}$

b) Se debe determinar las zonas donde el sistema es estable y para ello resuelvo el diagrama de nyquist (punto c), para luego del diagrama de bode determinar los valores de ganancia para que el sistema sea estable.

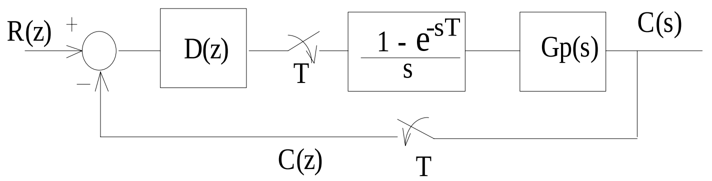


c) Como la transferencia a lazo abierto tiene un polo en el semilplano derecho P=1 por lo tanto para que el sistema sea estable a lazo cerrado N debe ser (-1).
En la zona 1, N=0 por lo tanto es inestable.
En la zona 2, N=-1 entonces el sistema es estable .
En la zona 3, N=1 el sistema es inestable.
En la zona 4 (K<0), N=0 el sistema es inestable.
Finalmente el sistema será estable si el punto A tiene una ganancia mayor a 1 y el punto B una ganancia menor que 1.

Del gráfico de Bode el punto A corresponde a la zona izquierda del mismo en el que la ganancia es de 40 db, por lo tanto el límite de K para este punto es K>0.01. Por su parte el punto B está ubicado en 3 r/s en el que la ganancia es de aproximadamente 14 db es decir que el valor de la ganancia para este punto debe ser K<0.2 (1/5.0).Finalmente 0.01< K < 0.2 .
d) Para K=0.1 el sistema es estable y la frecuencia de corte por 0dB se encuentra en w=0,6 r/s . A esa frecuencia la fase vale aproximadamente -130º y por lo tanto el Mf=50º.

---

5) Considere el sistema de lazo cerrado mostrado en la figura:



El mismo posee una transferencia discreta de la planta :

$$Gp(z)=Z\left\{\frac{1-e^{sT}}{s}G_p(s)\right\}=\frac{1{,}862\,z-1{,}518}{z^3-3{,}718\,z^2+2{,}718z}$$

Se desea encontrar un controlador digital D(z) tal que la salida c(k) siga sin error en régimen permanente una entrada en forma de rampa de pendiente unitaria. Además, se desea que se alcance el mencionado régimen permanente en un número finito de muestras y, que a partir de de ese instante no existan oscilaciones en la respuesta de c(t).

Halle el controlador cuya expresión sea mínima.

Para cumplir con las especificaciones se debe diseñar un compensador de Tiempo Finito.

Resuelvo la ecuación de transferencia para determinar los ceros y polos. $Gp(z) = \dfrac{1{,}862(z-0{,}8153)}{z(z-1)(z-2{,}718)}$

La relación entre polos y ceros es 2 y además uno de los polos esta fuera del círculo unitario. El sistema debe tener error nulo a la rampa.

Por lo tanto las ecuaciones de diseño quedan:

$$T(z) = \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3}$$
$$1 - T(z) = \left(1 - z^{-1}\right)^2 \left(1 - 2.718 z^{-1}\right)$$

los coeficientes α_0 y α_1 son cero debido al retardo.

Este sistema no tiene solución ya que en (1-T(z)) no puedo hacer cero el término en z^{-1}.

Reescribo las ecuaciones agregando un término.

$$T(z) = \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3} + \alpha_4 z^{-4}$$
$$1 - T(z) = \left(1 - z^{-1}\right)^2 \left(1 - 2.718 z^{-1}\right)\left(1 + \beta z^{-1}\right)$$

Ahora desarrollando las ecuaciones queda:

$$T(z) = \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3} + \alpha_4 z^{-4}$$
$$T(z) = \left(4{,}718 - \beta\right) z^{-1} + \left(4{,}718\beta - 6{,}436\right) z^{-2} + \left(2{,}718 - 6{,}436\beta\right) z^{-3} + \left(2{,}718\beta\right) z^{-4}$$

Resolviendo por igualación de coeficientes

$$\beta = 4{,}718$$
$$\alpha_2 = 15{,}823524$$
$$\alpha_3 = -27{,}647048$$
$$\alpha_4 = 12{,}823524$$

La transferencia a lazo cerrado debe ser : $T(z) = \dfrac{15{,}82 z^2 - 27{,}65 z + 12{,}82}{z^4}$

El compensador queda:

$$D(z) = \frac{1}{Gp(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \left(\frac{z(z-1)(z-2{,}718)}{1{,}862(z-0{,}8153)}\right)\left(\frac{15{,}82 z^2 - 27{,}65 z + 12{,}82}{z^4 - 15{,}82 z^2 + 27{,}65 z - 12{,}82}\right)$$

$$D(z) = \left(\frac{z(z-1)(z-2{,}718)}{1{,}862(z-0{,}8153)}\right)\left(\frac{15{,}82\left[(z-0{,}8736)^2 + 0{,}2173^2\right]}{(z-1)(z-1)(z-2{,}718)(z+4{,}718)}\right)$$

$$D(z) = \left(\frac{8{,}498 z\left[(z-0{,}8736)^2 + 0{,}2173^2\right]}{(z-0{,}8153)(z-1)(z+4{,}718)}\right)$$

El controlador resulta inestable, pero no es crítico ya que la planta también lo es.