RESOLUCIÓN TERCER PARCIAL
CURSADA 2019

1) Un sistema es comandado desde una computadora, a través de un sistema de retención de orden cero, operando a 1/T conversiones por segundo. Este sistema es descrito, con suficiente aproximación, mediante el siguiente modelo SISO, de orden "*n*" y totalmente observable.

$$x(k+1)=A_d\cdot x(k)+b_d\cdot u(k) \quad ; \quad y(k)=c_d\cdot x(k)$$

La transferencia correspondiente es:

$$Gp(z)=c_d\left(zI-A_d\right)^{-1}b_d \;=\; \frac{a_0}{\left(z-z_1\right)^{j}} \;,\quad \text{con} \quad 1<j<n \;,\quad a_o\text{ :constante real}$$

a) Describa, con claridad, consistencia y precisión, cómo determinar los autovalores reasignables por realimentación del estado.
b) Suponga que hay un único autovalor que no figura en *Gp(z)*, y es $z_2 = 0.5$
Describa, con claridad, consistencia y precisión, cómo determinar las ganancias de realimentación del estado para reasignar los autovalores controlables.
Explicite los modelos o matrices a los que haga referencia.

Solución:

Analizando la función transferencia, puede verse que no aparecen en ella todos los autovatores del modelo ("n"). Como en toda transferencia los polos de la misma corresponden a los autovalores controlables y observables del modelo, en este caso como el modelo es totalmente observable la disminución del orden se debe a que el sistema no es totalmente controlable. En consecuencia el modelo posee solamente "j" variables de estado controlables y además los autovalores para estas variables son todos iguales de valor z_1.
Por lo tanto, se va a analizar un modelo de estado no totalmente controlable, cuya matriz de controlabilidad es de orden "j".

a) Como se dijo en la función de transferencia aparecen como polos, los autovalores controlables del modelo que son los reasignables por realimentación. En consecuencia, los autovalores reasignables son los "j" de valor z_1.
b) En este caso, se va a analizar un sistema en donde $n=j+1$.
Como el autovalor no controlable se encuentra dentro del círculo unitario, en el plano Z, el sistema es establilizable y por lo tanto es factible la realimentación de estados.
Para poder reasignar los autovalores controlables se necesita separar las variables controlables de la que no lo son. Para ello inicialmente se calcula la matriz de controlabilidad del modelo, en este caso es:

$$U=\begin{bmatrix} b_d & A_d b_d & A_d^2 b_d & \dots & A_d^{n-1} b_d \end{bmatrix}$$

El rango de esta matriz es $j=n-1$, por lo tanto existen n-1 columnas L.I.

Para separar las variables controlables se utiliza una transformación lineal $x = Q\cdot\bar{x}$ en donde la matriz Q se arma de la siguiente forma: se utilizan las columnas L.I. de la matriz U y se agrega, en este caso, una columna que resulte linealmente independiente a las anteriores de modo que el rango de Q sea igual a "*n*".

$$U=\begin{bmatrix} b_d & A_d b_d & \dots & A_d^{n-2} b_d & q_1 \end{bmatrix}$$

Para el modelo transformado resulta: $\bar{A}=Q^{-1}A_dQ$, $\bar{b}=Q^{-1}b_d$ y $\bar{c}=c_dQ$. Este modelo tiene la particularidad que las $j=n-1$ variables de estado son controlables y la última variable no lo es. La forma que toma el modelo es la siguiente:

$$\bar{x}(k+1)=\begin{bmatrix}x_c\\x_n\end{bmatrix}(k+1)=\overbrace{\underset{j\qquad\quad 1}{\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{bmatrix}}}^{\bar{A}}\begin{bmatrix}x_c\\x_n\end{bmatrix}(k)+\overset{\bar{b}}{\begin{bmatrix}b_1\\0\end{bmatrix}}\;u(k)\quad\begin{array}{l}\}\,j\\ \}\,1\end{array}$$

En la matriz A_{22} se encuentra el autovalor no controlable, en este caso z_2=0.5. En este caso como este autovalor no controlable es estable, el sistema se dice que es ESTABILIZABLE.

La matriz A_{11} contiene los autovalores reasignables (j autovalores en z_1). Para poder reasignar estos autovalores se plantea el sub-modelo controlable

$$x_c(k+1) = A_{11}\ x_c(k) + b_1\ u(k)$$

y, a partir de él, se diseña el vector de realimentación para las variables controlables.
Para encontrar el vector de realimentación del sub-modelo controlable se transforma el mismo a la forma canónica controlable utilizando las matrices de controlabilidad del modelo original y el transformado.
Las matrices A y B del modelo canónico de pueden encontrar a partir del polinomio característico del sub modelo controlable, en este caso:

$$\det\left[zI - A_{11}\right] = \left(z - z_1\right)^j = z^j + a_j z^{j-1} + \ldots + a_2 z + a_1$$

$$A_{11Canonico} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_j \end{bmatrix} \quad ; \quad b_{1Canónico} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se calcula la matriz de controlabilidad del modelo canónico y con la matriz de controlabilidad del sub-modelo controlable se halla la matriz de transformación $Q_{cc}^{-1} = U_{cc}.U^{-1}$.
El vector realimentación del modelo canónico se calcula como diferencia entre los coeficientes del polinomio característico deseado y los del sub modelo controlable.

$$k^T{}_{Canonico} = \left[\left(\alpha_1 - a_1\right) \quad \left(\alpha_2 - a_2\right) \quad \cdots \quad \left(\alpha_j - a_j\right)\right]$$

Este vector se transforma al sub-modelo controlable como $k_1^T = k^T{}_{Canonico} Q_{cc}^{-1}$. A este vector se le agrega un cero al final correspondiente a la variable no controlable $\bar{k}^T = \left[k_1^T \quad 0\right]$ y finalmente el vector que reasigna los autovalores controlables del modelo dado se calcula como $k^T = \bar{k}^T Q^{-1}$.

---

2) En la figura 1 se muestra el diagrama de bloques correspondiente a un sistema discreto que opera con un periodo de muestreo $T_s = 1ms$.

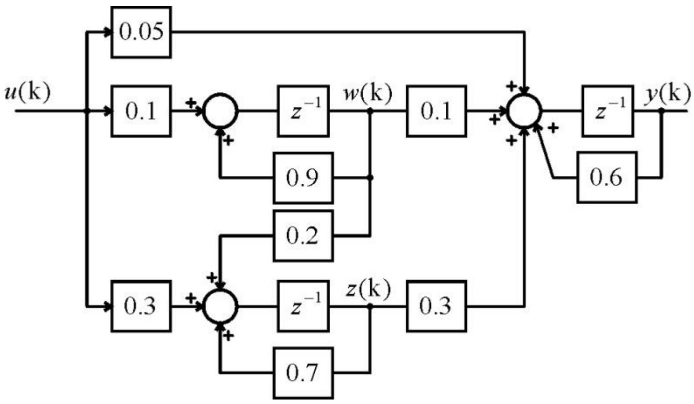


Figura 1: Diagrama de bloques del sistema

a) A partir del diagrama de bloques determine las matrices del modelo de estado discreto. Considere como salida del sistema a y(k).
b) Calcule la controlabilidad del sistema.
c) Calcule la función transferencia del sistema.
d) Realice una realimentación de estados de modo de obtener, para una entrada en escalón, una respuesta con un sobrepico del 10% y un tiempo de establecimiento al 5% de 50 ms. Además el modelo realimentado debe resultar ***No Observable***.
e) A partir de las ganancias de realimentación obtenidas en el punto d) determine para una entrada de referencia del tipo escalón unitario el valor de la salida en régimen permanente.
f) Se desea que el sistema realimentado presente una ganancia unitaria entre la señal de entrada y salida. Ajuste la ganancia del sistema de modo de cumplir con esta especificación.

Solución

Punto 1)
A partir del diagrama de bloques se observa que el sistema es de tercer orden. Luego, si se considera $\omega(\mathrm{k}) = x_1(k)$, $\mathrm{z}(\mathrm{k}) = x_2(k)$ e $\mathrm{y}(\mathrm{k}) = x_3(k)$, las matrices del modelo de estado resultan:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.05 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Punto 2)
La matriz controlabilidad del sistema resulta:
$$U = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.09 & 0.081 \\ 0.3 & 0.23 & 0.179 \\ 0.05 & 0.13 & 0.156 \end{bmatrix}$$
El rango de la matriz U es 3; por lo tanto, el sistema es controlable.

Punto 3)
Empleando las matrices del modelo, la función transferencia del sistema se puede calcular como:
$$T(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{0.05(z+1.225)(z-0.8247)}{(z-0.6)(z-0.7)(z-0.9)}$$
Se puede observar que la función de transferencia presenta dos ceros, uno que se ubica dentro del circulo unitario y otro que se ubica por fuera del mismo.

Punto 4)

Teniendo en cuenta que el sistema es controlable, se plantea la transformación del sistema original al modelo canónico controlable. Luego:
$$x = Q_{cc}\bar{x}$$
Donde x es el vector de estado del modelo original, $\bar{x}$ es el vector de estado del modelo canónico controlable y Q_{cc} es la matriz de transformación, la cual se puede determinar como:
$$Q_{cc} = UU_{cc}^{-1}$$
donde U_{cc} es la controlabilidad del modelo canónico. El modelo canónico controlable se puede plantear a partir del conocimiento de los coeficientes de la ecuación característica del sistema.

$$\det(zI - A) = (z-0.6)(z-0.7)(z-0.9) = z^3 - 2.2z^2 + 1.59z - 0.378$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} \overline{x_1}(k+1) \\ \overline{x_2}(k+1) \\ \overline{x_3}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.378 & -1.59 & 2.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1}(k) \\ \overline{x_2}(k) \\ \overline{x_3}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

La matriz controlabilidad del modelo canónico controlable resulta:

$$U_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2.2 \\ 1 & 2.2 & 3.25 \end{bmatrix}$$

y su inversa

$$U_{cc}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.59 & -2.2 & 1 \\ -2.2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación al modelo canónico es:

$$Q_{cc} = \begin{bmatrix} 0.042 & -0.13 & 0.1 \\ 0.15 & -0.43 & 0.3 \\ -0.05 & 0.02 & 0.05 \end{bmatrix}$$

y su inversa

$$Q_{cc}^{-1} = \begin{bmatrix} 335.36 & -103.65 & -48.78 \\ 276.21 & -87.19 & -29.26 \\ 228.23 & -69.81 & -17.56 \end{bmatrix}$$

En virtud de que el sistema es totalmente controlable, se pueden reasignar los tres autovalres del sistema. Las especificaciones del problema plantean obtener un sistema con un sobrepico del 10% y un tiempo de establecimiento al 5% de 50 ms. Este tipo de respuesta se corresponde con un sistema de segundo orden. Como el sistema es de tercer orden, se propone ubicar uno de los autovalores en la posición del cero interior al círculo unitario con el objetivo de cancelarlo sin comprometer la estabilidad, resultando el modelo realimentado no observable debido a la cancelación. Teniendo en cuenta estas consideraciones, los polos del sistema continuos resultan:

$$\delta = \frac{-\ln(SP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(SP/100)^2}} = 0.5912$$
$$\omega_n = \frac{3}{\delta \cdot T_{est}} = 101.49[r/s]$$
$$s_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -60 \pm j81.86$$

En el plano discreto los polos resultan:

$$z_{1,2} = 0.9386 \pm j0.077$$
$$z_3 = 0.8247.$$

La ecuación característica deseada resulta:

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) = z^3 - 2.7019z^2 + 2.4351z - 0.73144$$

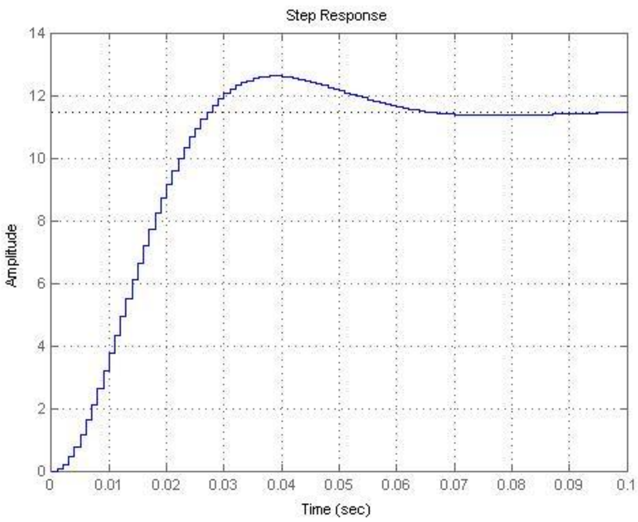
Luego, el vector de realimentación del modelo canónico es:

$$\bar{K}^T = [(-0.73144 + 0.378) \quad (2.4351 - 1.59) \quad (-2.7019 + 2.2)]$$
$$\bar{K}^T = [-0.35344 \quad 0.8451 \quad -0.5019]$$

Aplicando la matriz de transformación se obtienen las ganancias de realimentación del modelo original.

$$K^T = \bar{K}^T Q_{cc}^{-1} = [0.3363 \quad -2 \quad 1.3217]$$

Respuesta del sistema realimentado



Punto 5)

Para obtener el valor en régimen permanente se aplica la siguiente expresión:

$$G_0 = C[I - (A - BK^T)]^{-1}B = 11.4686$$

Se puede observar que el valor obtenido coincide con el mostrado en la respuesta al escalón.

Punto 6)

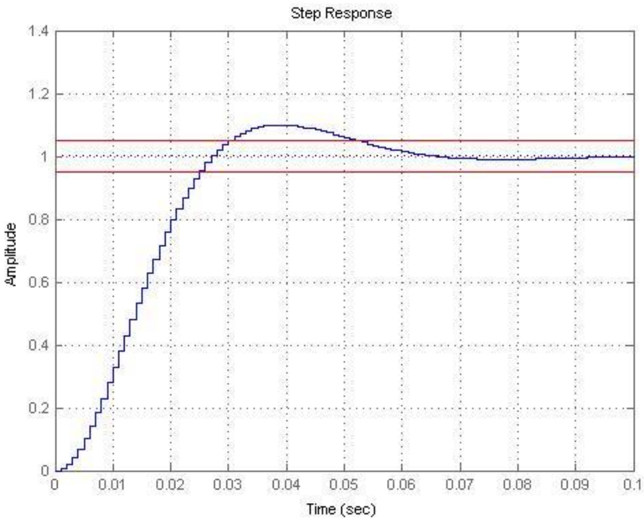
Para obtener una ganancia unitaria entre la entrada y la salida se debe multiplicar por A_0 en la cadena de avance y dividir por el mismo valor a las ganancias de realimentación.

$$A_0 = \frac{1}{G_0} = 0.0872$$

Luego, las ganancias de realimentación resultan:

$K_0^T = [3.85 \quad -23 \quad 15.15]$

<u>Respuesta del sistema realimentado con ajuste de ganancia</u>



En la figura se muestra la respuesta del sistema junto con las bandas de +/- 5%. Se observa que el tiempo de establecimiento es próximo a los 50ms y que el sobrepico es del orden del 10%.

---

3) Dado el siguiente modelo de estado discreto:

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u[k]$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

Diseñe un estimador de orden reducido para la variable de estado que no se encuentra disponible a la salida, ubicando el autovalor del estimador en z=0.5, si es posible. Suponiendo que la salida y1 es ruidosa, diseñe el estimador de tal forma que minimice el ruido en la variable estimada.

<u>Solución:</u>

Para que el autovalor del estimador de orden reducido pueda reubicarse, el sistema debe ser observable desde las dos salidas:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el rango de V es 3, el sistema es observable.

Para poder diseñar el estimador de orden reducido, debo primero transformar el sistema original de tal forma que queden separadas la variable a estimar de la forma:

$$v[k] = \begin{bmatrix} x_3[k] \\ y_1[k] \\ y_2[k] \end{bmatrix}$$

Para eso planteo la matriz de transformación

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su inversa

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices, puedo obtener las matrices At, Bt y Ct del modelo transformado:

$$A_T = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_T = TB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_T = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices, el modelo de estado transformado resulta:

$$v[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} v[k] + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v[k]$$

De este modelo transformado, extraemos las siguientes submatrices:

$$A_{T11} = 0; A_{T12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}; A_{T21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; A_{T22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{T1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B_{T2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como se pidió que el autovalor del estimador de orden reducido sea ubicado en z = 0.5

$$A_e = A_{T11} - HA_{T21} = 0.5$$

Entonces

$$A_e = 0 - H \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.5$$

Para cumplir con las dimensiones de las matrices utilizadas, H debe ser de una matriz 1x2, por lo que

$$A_e = 0 - \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.5$$

Como debo asignar un autovalor y hay dos variables incógnitas, hay un grado de libertad para el cálculo de h1 y h2. Como tengo ruido en la salida y1, elijo h1 = 0 para evitar que el ruido afecte la estima de x3. Por lo tanto

$$A_e = 0 - \begin{bmatrix} 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.5$$

$$A_e = 0 - h_2 = 0.5; h_2 = -0.5$$

Entonces

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las matrices del estimador resultan

$$A_e = 0.5$$

$$B_e = B_{T1} - HB_{T2} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$H_e = A_{T12} - HA_{T22} + A_{T11}H - HA_{T21}H = \begin{bmatrix} -1 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las ecuaciones del estimador son

$$\hat{w}[k+1] = 0.5\hat{w}[k] + \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} -1 & 0.25 \end{bmatrix} y[k]$$

$$\hat{x}_3[k] = \hat{w}[k] + \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \end{bmatrix} y[k]$$