TEORÍA DE CONTROL

Resolución Primer Parcial

14 de abril de 2023

1) Considere el siguiente modelo de estado SISO: $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) = c \cdot x(t) \end{cases}$

Al cual se le va a aplicar una transformación lineal: $\overline{x}(t) = P \cdot x(t)$ con $\overline{x}(t) =$ vector transformado.

a) Encuentre las matrices del modelo de estado para el sistema transformado.
b) Determine y demuestre como se puede encontrar la matriz de transformación P para llevar al modelo dado a la forma canónica observable.

En TODOS los casos JUSTIFIQUE sus enunciados. (Condición excluyente).

Solución:
La aplicación de la transformación lineal indicada al modelo de estado tiene como resultado:

$$\begin{cases} P^{-1} \cdot \dot{\overline{x}}(t) = A \cdot P^{-1} \cdot \overline{x}(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) = c \cdot P^{-1} \cdot \overline{x}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \underbrace{P \cdot A \cdot P^{-1}}_{\overline{A}} \cdot \overline{x}(t) + \underbrace{P \cdot b}_{\overline{b}} \cdot u(t) \\ y(t) = \underbrace{c \cdot P^{-1}}_{\overline{c}} \cdot \overline{x}(t) \end{cases}$$

La matriz observabilidad del modelo transformado resulta:

$$\overline{V} = \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \overline{CA} \\ \dots \\ \overline{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ C\underbrace{P^{-1}P}_{I}AP^{-1} \\ \dots \\ CP^{-1}\dots PAP^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P^{-1} = VP^{-1}$$

$$\overline{V} = VP^{-1} \qquad (1)$$

Para el modelo canónico observable se presupone, por definición, que el **modelo es observable** y que conozco el polinomio característico del modelo original, es decir :

$$\det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1$$

Las matrices del modelo transformado son:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \overline{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

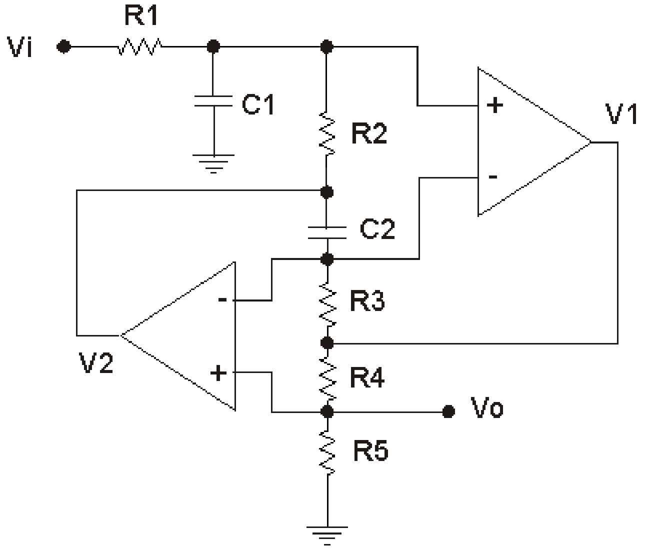
Y se puede calcular la matriz observabilidad transformada $\overline{V}$.

Al ser el modelo observable, la matriz observabilidad es no singular (existen las inversas) se puede despejar la matriz de transformación de la expresión (1)

$$\overline{V} = VP^{-1} \rightarrow \overline{V}P = V\underbrace{P^{-1}P}_{I} \rightarrow \underbrace{\overline{V}^{-1}\overline{V}}_{I} P = \overline{V}^{-1}V \rightarrow P = \overline{V}^{-1}V$$

PRÁCTICA

2) Se presenta el siguiente filtro activo de segundo orden.



a) Encuentre un modelo de estado con entrada Vi y salida Vo.
b) A partir del modelo hallado; determine el valor de las variables de estado, en régimen permanente, cuando se aplica en la entrada un escalón de tensión de 1 volt.
c) Halle la función de transferencia del filtro.

Suponga los siguientes valores para los parámetros:

R1=5 KΩ C1=1 μF
R2=10 KΩ C2=0.1 μF
R3=1 KΩ Considere los amplificadores
R4=1 KΩ operacionales con
R5=100 KΩ características ideales

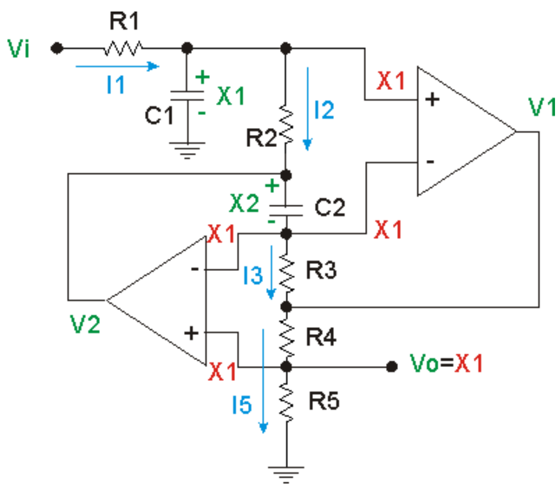
Solución

a) Se van a definir las corrientes y tensiones sobre el circuito electrónico.

Las corrientes se representan en azul y las tensiones en verde.

Debido a que el amplificador operacional se considera ideal las tensiones en las entradas inversora y no inversora deben ser iguales, por tal motivo aparecen una serie de tensiones impuestas por esta condición que se representan en color rojo.

Se plantean como variables de estado las tensiones de los capacitores.



La tensión de salida en este circuito es $V_0 = X_1$.

Entonces se cumple que:

$$I_5 = \frac{V_0}{R_5} = \frac{X_1}{R_5} \quad \text{y} \quad V_1 = I_5\left(R_4 + R_5\right) = \frac{X_1\left(R_4 + R_5\right)}{R_5}$$

La corriente I_3 se calcula como:

$$I_3 = \frac{X_1 - V_1}{R_3} = \frac{X_1\left[1 - \frac{(R_4+R_5)}{R_5}\right]}{R_3} = X_1\left[-\frac{R_4}{R_5 R_3}\right]$$

La corriente por el capacitor C_2 es:

$$I_{C2} = \dot{X}_2 C_2 = I_3 = -X_1 \frac{R_4}{R_5 R_3}$$

De la anterior ecuación se conoce una ecuación de estado:

$$\dot{X}_2 = -X_1 \frac{R_4}{C_2 R_5 R_3}$$

La corriente I_2 se puede calcular como:

$$I_2 = \frac{X_1 - V_2}{R_2} = \frac{X_1 - \left(X_1 + X_2\right)}{R_2} = -\frac{X_2}{R_2}$$

Para la entrada se cumple que:

$$I_1 = \frac{V_i - X_1}{R_1} = I_{C1} + I_2 = \dot{X}_1 C_1 - \frac{X_2}{R_2}$$

De la anterior ecuación se conoce una ecuación de estado:

$$\dot{X}_1 = -\frac{X_1}{C_1 R_1} + \frac{X_2}{C_1 R_2} + \frac{V_i}{C_1 R_1}$$

El modelo matricial queda:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{C_1R_1} & \dfrac{1}{C_1R_2}\\ -\dfrac{R_4}{C_2R_5R_3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1R_1}\\ 0\end{bmatrix}V_i \quad ; \quad y=V_0=X_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores:

R1=5 KΩ	C1=1 μF
R2=10 KΩ	C2=0.1 μF
R3=1 KΩ	
R4=1 KΩ	
R5=100 KΩ	

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-200 & 100\\ -100 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}200\\ 0\end{bmatrix}V_i \quad ; \quad y=V_0=X_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}$$

b) Para la condición de régimen permanente evalúo las derivadas de las variables iguales a cero.

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-200 & 100\\ -100 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}200\\ 0\end{bmatrix}1[\text{volt}] \quad \text{entonces: } \begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

c) La función de transferencia se calcula como $G(s)=C\left(sI-A\right)^{-1}B$

En este caso $\left(sI-A\right)=\begin{bmatrix}s+200 & -100\\ 100 & s\end{bmatrix}$

Por lo tanto, $\det\left(sI-A\right)=s^2+200s+10000=\left(s+100\right)^2$.

La matriz inversa es: $\left(sI-A\right)^{-1}=\dfrac{\text{Adj}\left(sI-A\right)}{\det\left(sI-A\right)}=\dfrac{\begin{bmatrix}s & 100\\ -100 & (s+200)\end{bmatrix}}{\left(s+100\right)^2}$

Entonces, $\left(sI-A\right)^{-1}B=\dfrac{\begin{bmatrix}s & 100\\ -100 & (s+200)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200\\ 0\end{bmatrix}}{\left(s+100\right)^2}=\dfrac{\begin{bmatrix}200s\\ -200\end{bmatrix}}{\left(s+100\right)^2}$

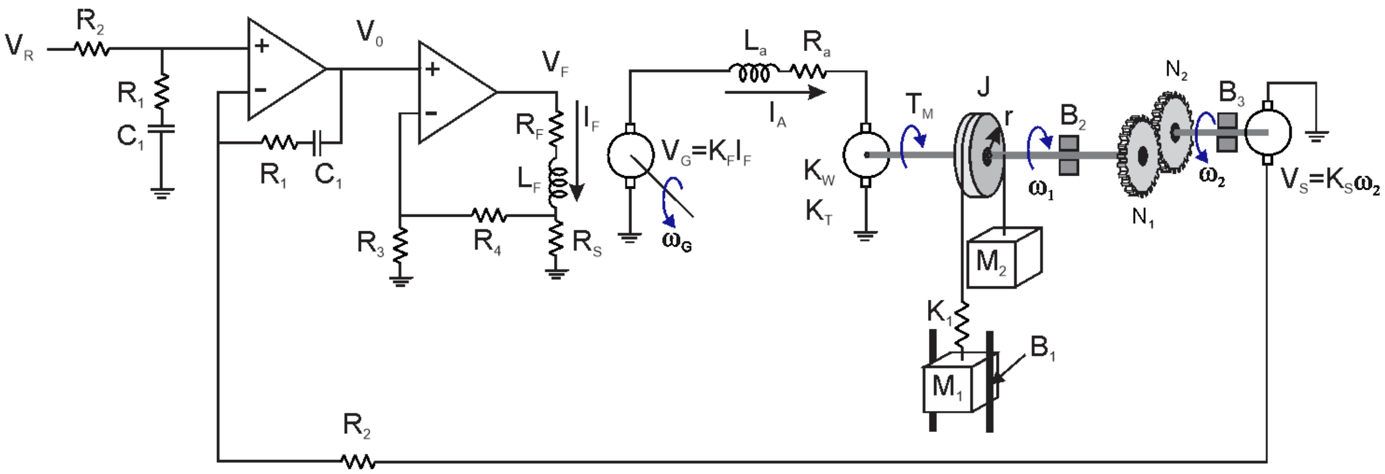
Finalmente, $G(s)=C\left(sI-A\right)^{-1}B=\dfrac{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200s\\ -200\end{bmatrix}}{\left(s+100\right)^2}=\dfrac{200s}{\left(s+100\right)^2}$

Como el sistema es pasa-banda es lógico que la condición de régimen permanente para X_1 sea igual a cero.

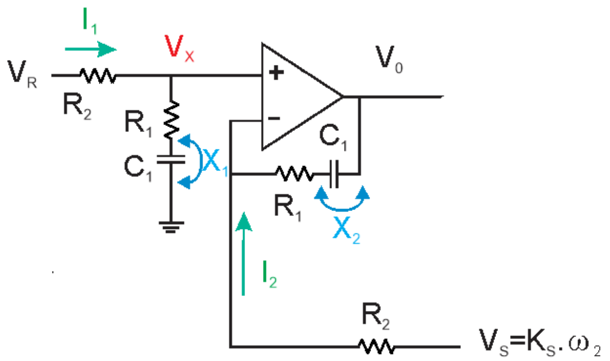
---

3) La figura muestra en forma esquemática y cualitativa, un sistema de control de velocidad del tipo Ward-Leonard. La potencia es suministrada por un motor a explosión, el cual hace girar a velocidad constante (ω_G), el eje de un generador de CC controlado por campo. La tensión generada es proporcional a la corriente de campo (I_F). Esta tensión es aplicada a un motor eléctrico que se encarga de mover la carga. La carga en este caso es un ascensor de masa M_1 que se mueve sobre un arreglo de guías con roce B_1, gracias a una polea con rueda acanalada de radio r y un cable de acero de elasticidad K_1, concentrada en el resorte que se muestra en la figura. Considere que el cable no se desliza sobre la ranura de la rueda. Una masa de valor M_2 sirve como contrapeso.

La velocidad de la carga es sensada mediante un taco-generador de ganancia K_S. Considere para el análisis, amplificadores operacionales con características ideales.



- Dibuje un diagrama en bloques del sistema,
- Encuentre un modelo de estado del sistema.



Circuito Electrónico

Se consideran como variables de estado las tensiones en los capacitores:

$$V_R = \dot{X}_1 C_1 (R_1 + R_2) + X_1$$

$$\dot{X}_1 = \frac{V_R - X_1}{C_1 (R_1 + R_2)}$$

$$V_X = \dot{X}_1 C_1 R_1 + X_1 = \frac{(V_R - X_1) C_1 R_1}{C_1 (R_1 + R_2)} + X_1 = \frac{V_R R_1}{(R_1 + R_2)} + \frac{X_1 R_2}{(R_1 + R_2)}$$

$$I_2 = \frac{V_S - V_X}{R_2} = \frac{V_S}{R_2} - \frac{V_R R_1}{R_2 (R_1 + R_2)} - \frac{X_1}{(R_1 + R_2)}$$

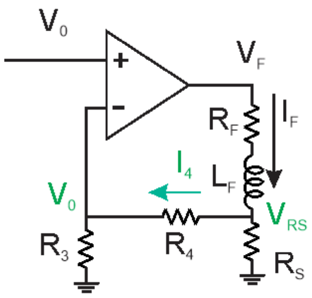
$$I_2 = \frac{V_S (R_1 + R_2) - X_1 R_2 - V_R R_1}{R_2 (R_1 + R_2)} = \dot{X}_2 C_1$$

$$\dot{X}_2 = \frac{V_S (R_1 + R_2) - X_1 R_2 - V_R R_1}{C_1 R_2 (R_1 + R_2)}$$

$$V_0 = -I_2 R_1 - X_2 + V_X = -\frac{V_S R_1}{R_2} + \frac{X_1 R_1}{(R_1 + R_2)} + \frac{V_R R_1^2}{R_2 (R_1 + R_2)} - X_2 + \frac{V_R R_1}{(R_1 + R_2)} + \frac{X_1 R_2}{(R_1 + R_2)}$$

$$V_0 = \frac{V_R R_1 - V_S R_1 + R_2 (X_1 - X_2)}{R_2}$$

Amplificador de Corriente



$$I_4 = \frac{V_0}{R_3}$$

$$V_{RS} = V_0 + \frac{V_0}{R_3}R_4 = \left(I_F - \frac{V_0}{R_3}\right)R_S$$

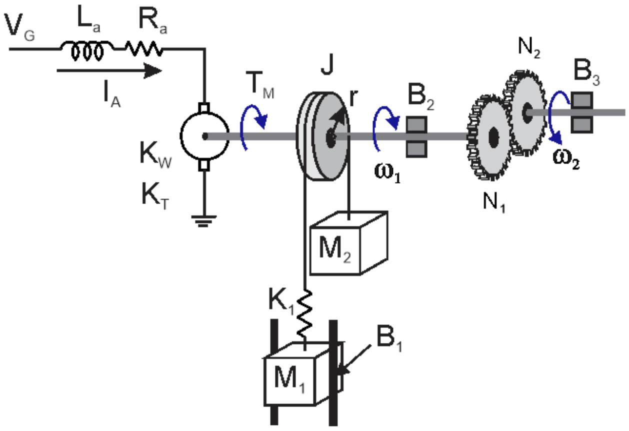
$$V_0\left(1 + \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_S}{R_3}\right) = I_F R_S \quad \rightarrow \quad I_F = V_0\left(\frac{R_3 + R_4 + R_S}{R_S R_3}\right)$$

El circuito se comporta como un generador de corriente constante a partir de la tensión V_0. Como la corriente está impuesta en el inductor L_F, no genera variable de estado.

<u>Generador de corriente continua</u>

$$V_G = K_G\left(\frac{R_3 + R_4 + R_S}{R_S R_3}\right)V_0$$

<u>Motor Eléctrico</u>



$$V_G = I_A R_a + \dot{I}_A L_a + K_W \omega_1$$

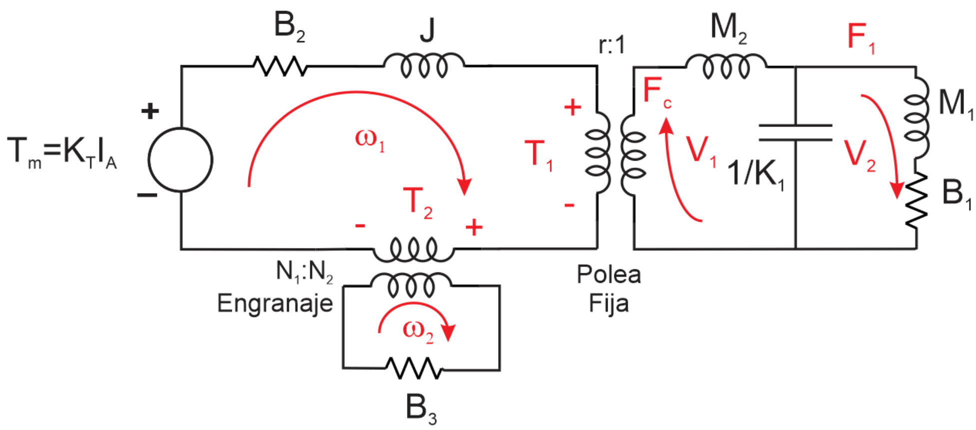
$$K_G\left(\frac{R_3 + R_4 + R_S}{R_S R_3}\right)\left(\frac{V_R R_1 - V_S R_1 + R_2(X_1 - X_2)}{R_2}\right) = I_A R_a + \dot{I}_A L_a + K_W \omega_1$$

$$K_G\left(\frac{R_3 + R_4 + R_S}{R_2 R_S R_3}\right) = K_X$$

$$\dot{I}_A = \frac{K_X R_1}{L_a}V_R - \frac{K_X R_1}{L_a}V_S + \frac{K_X R_2}{L_a}X_1 - \frac{K_X R_2}{L_a}X_2 - \frac{R_a}{L_a}I_A - \frac{K_W}{L_a}\omega_1$$

<u>Carga Mecánica</u>

Circuito eléctrico equivalente



$$K_T I_A = J\dot{\omega}_1 + B_2\omega_1 + T_1 + T_2 \qquad T_3 = \frac{N_1}{N_2}T_2 \qquad \omega_2 = \frac{N_2}{N_1}\omega_1 \qquad F_C = \frac{1}{r}T_1 \qquad V_1 = r\omega_1$$

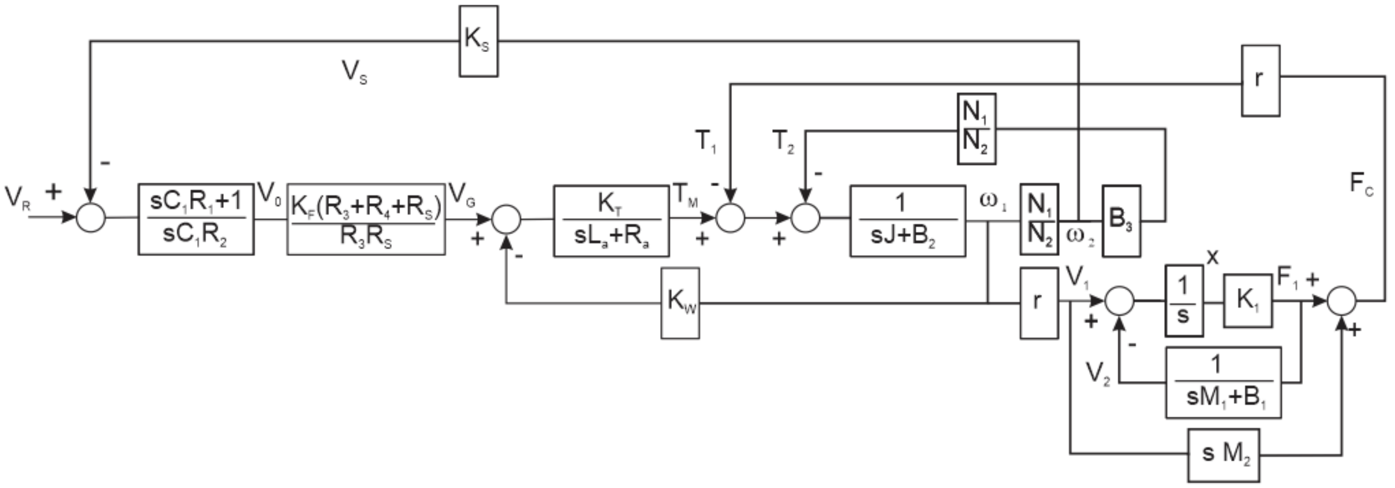
$$K_T I_A = J\dot{\omega}_1 + B_2\omega_1 + \dot{\omega}_1 M_2 r^2 + rK_1 x + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_3\omega_1 \qquad J_{eq} = J + M_2 r^2 \qquad B_{eq} = B_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_3$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{K_T}{J_{eq}} I_A - \frac{B_{eq}}{J_{eq}}\omega_1 - \frac{rK_1}{J_{eq}} x \qquad K_1 x = \dot{V}_2 M_1 + V_2 B_1$$

$$\dot{V}_2 = \frac{K_1}{M_1} x - \frac{B_1}{M_1} V_2$$

$$\dot{x} = \omega_1 r - V_2 \qquad V_S = K_S \frac{N_1}{N_2}\omega_1$$

Diagrama en Bloques



Modelo de Estado

$$\dot{X}_1 = \frac{V_R - X_1}{C_1\left(R_1 + R_2\right)}$$

$$\dot{X}_2 = \frac{K_S\left(\frac{N_1}{N_2}\right)(R_1+R_2)\omega_1 - X_1 R_2 - V_R R_1}{C_1 R_2 (R_1 + R_2)}$$

$$\dot{I}_A = \frac{K_X R_1}{L_a} V_R - \left(\frac{N_1 K_S K_X R_1}{N_2 L_a} + \frac{K_W}{L_a}\right)\omega_1 + \frac{K_X R_2}{L_a} X_1 - \frac{K_X R_2}{L_a} X_2 - \frac{R_a}{L_a} I_A$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{K_T}{J_{eq}} I_A - \frac{B_{eq}}{J_{eq}}\omega_1 - \frac{rK_1}{J_{eq}} x$$

$$\dot{V}_2 = \frac{K_1}{M_1} x - \frac{B_1}{M_1} V_2$$

$$\dot{x} = \omega_1 r - V_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{I}_A\\ \dot{\omega}_1\\ \dot{V}_2\\ \dot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1(R_1+R_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{C_1(R_1+R_2)} & 0 & 0 & \frac{K_S\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}{C_1R_2} & 0 & 0\\ \frac{K_XR_2}{L_a} & -\frac{K_XR_2}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & -\left(\frac{N_1K_SK_XR_1}{N_2L_a}+\frac{K_W}{L_a}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{K_T}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 & -\frac{rK_1}{J_{eq}}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_1}{M_1} & \frac{K_1}{M_1}\\ 0 & 0 & 0 & r & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ I_A\\ \omega_1\\ V_2\\ x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1(R_1+R_2)}\\ -\frac{R_1}{C_1R_2(R_1+R_2)}\\ \frac{K_XR_1}{L_a}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\cdot V_R$$

<u>Punto de equilibrio</u>

Modelo de estado $\dot{X}=0$

$$0=\frac{V_{R0}-X_{10}}{C_1(R_1+R_2)} \qquad V_{R0}=X_{10}$$

$$0=\frac{K_S\left(\frac{N_1}{N_2}\right)(R_1+R_2)\omega_{10}-X_{10}R_2-V_{R0}R_1}{C_1R_2(R_1+R_2)} \qquad \omega_{10}=V_{R0}\frac{1}{K_S\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}$$

$$0=\omega_1r-V_2 \qquad V_{20}=\omega_{10}r=\frac{r}{K_S\frac{N_1}{N_2}}V_{R0}$$

$$0=\frac{K_1}{M_1}x_0-\frac{B_1}{M_1}V_{20} \qquad x_0=\frac{B_1}{K_1}V_{20}=\frac{B_1r}{K_1K_S\frac{N_1}{N_2}}V_{R0}$$

$$0=\frac{K_T}{J_{eq}}I_{A0}-\frac{B_{eq}}{J_{eq}}\omega_{10}-\frac{rK_1}{J_{eq}}x_0 \qquad I_{A0}=\frac{B_{eq}}{K_T}\omega_{10}+\frac{rK_1}{K_T}x_0=\left(\frac{B_{eq}+B_1r^2}{K_TK_S\frac{N_1}{N_2}}\right)V_{R0}$$

$$0=\frac{K_XR_1}{L_a}V_{R0}-\left(\frac{N_1K_SK_XR_1}{N_2L_a}+\frac{K_W}{L_a}\right)\omega_{10}+\frac{K_XR_2}{L_a}X_{10}-\frac{K_XR_2}{L_a}X_{20}-\frac{R_a}{L_a}I_{A0}$$

$$\frac{K_XR_2}{L_a}X_{20}=\left(\frac{K_XR_1}{L_a}-\left(\frac{N_1K_SK_XR_1}{N_2L_a}+\frac{K_W}{L_a}\right)\frac{1}{K_S\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}+\frac{K_XR_2}{L_a}-\frac{R_a}{L_a}\left(\frac{B_{eq}+B_1r^2}{K_TK_S\frac{N_1}{N_2}}\right)\right)V_{R0}$$

$$X_{20}=\left(\frac{R_1}{R_2}-\left(\frac{N_1K_SR_1}{N_2R_2}+\frac{K_W}{K_XR_2}\right)\frac{1}{K_S\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}+1-\frac{R_a}{K_XR_2}\left(\frac{B_{eq}+B_1r^2}{K_TK_S\frac{N_1}{N_2}}\right)\right)V_{R0}$$

Del Diagrama en Bloques

A la entrada del controlador PI, V=0. Entonces, $V_{S0} = V_{R0} = K_S \omega_{20} = K_S \frac{N_2}{N_1}\omega_{10}$

$$\omega_{10} = \frac{V_{R0}}{K_S \frac{N_1}{N_2}}$$

La cupla aplicada al sistema mecánico es:

$$K_T I_{A0} = B_2\omega_{10} + T_1 + T_2 = B_2\omega_{10} + r^2 B_1\omega_{10} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_3\omega_{10} = \left[B_2 + r^2 B_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_3\right]\frac{V_{R0}}{K_S \frac{N_1}{N_2}}$$

$$I_{A0} = \frac{\left[B_2 + r^2 B_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_3\right]}{K_T K_S \frac{N_1}{N_2}} V_{R0}$$

$$\omega_{10} r = V_{10} = V_{20} = x_0 \frac{K_1}{B_1} \qquad V_{20} = \frac{r}{K_S \frac{N_1}{N_2}} V_{R0} \qquad x_0 = \frac{B_1 r}{K_1}\omega_{10} = \frac{B_1 r}{K_1 K_S \frac{N_1}{N_2}} V_{R0}$$

$$I_{A0} R_a + K_W \omega_{10} = V_{G0} = V_{00}\left(\frac{K_F (R_3 + R_4 + R_S)}{R_3 R_S}\right)$$

$$\frac{\left[B_2 + r^2 B_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_3\right]}{K_T K_S \frac{N_1}{N_2}} R_a V_{R0} + \frac{K_W}{K_S \frac{N_1}{N_2}} V_{R0} = V_{00}\left(\frac{K_F (R_3 + R_4 + R_S)}{R_3 R_S}\right)$$

$$V_{00} = \frac{1}{\left(\frac{K_F (R_3 + R_4 + R_S)}{R_3 R_S}\right)}\left(\frac{\left[B_2 + r^2 B_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_3\right]}{K_T K_S \frac{N_1}{N_2}} R_a + \frac{K_W}{K_S \frac{N_1}{N_2}}\right) V_{R0}$$

Del circuito se ve que $X_{10} = V_{RO}$, y $V_{00} = -X_{20} + X_{10}$, entonces $X_{20} = V_{00} + X_{10}$

$$X_{20} = \left[\frac{\left(\left[B_2 + r^2 B_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_3\right] + K_T K_W\right) + \left(\frac{K_F (R_3 + R_4 + R_S)}{R_3 R_S}\right) K_T K_S \frac{N_1}{N_2}}{\left(\frac{K_F (R_3 + R_4 + R_S)}{R_3 R_S}\right) K_T K_S \frac{N_1}{N_2}}\right] V_{R0}$$