Teoría de Control

Realimentación de Variables de Estado
Reasignación de Autovalores

Realimentación de Variables de Estado

Ley de Control

El estado de un sistema tiene incorporado toda la información necesaria para determinar la acción de control a ser tomada. Por definición de **Modelo de Estado** la evolución de la planta está determinada por el estado actual y la evolución futura de la entrada.

Un criterio razonable, determina que el control de la planta esté determinado por la referencia y el estado del sistema.

$$u(k) = f\left[r(k), x(k)\right]$$

Esta relación es llamada **Ley de Control.**

Dado que se están estudiando sistemas lineales, es también razonable plantear una Ley de Control lineal.

$$u(k) = A_0\left[r(k) - K\ x(k)\right]$$

Donde K es una matriz de constantes reales llamada **Matriz de Ganancias de Realimentación**, y A_0 es una matriz diagonal de constantes llamada **Matriz de Ganancias de Control**

Modelo de la Planta Realimentada

Se considerará, primeramente, el caso de sistemas de una sola entrada y salida (SISO)

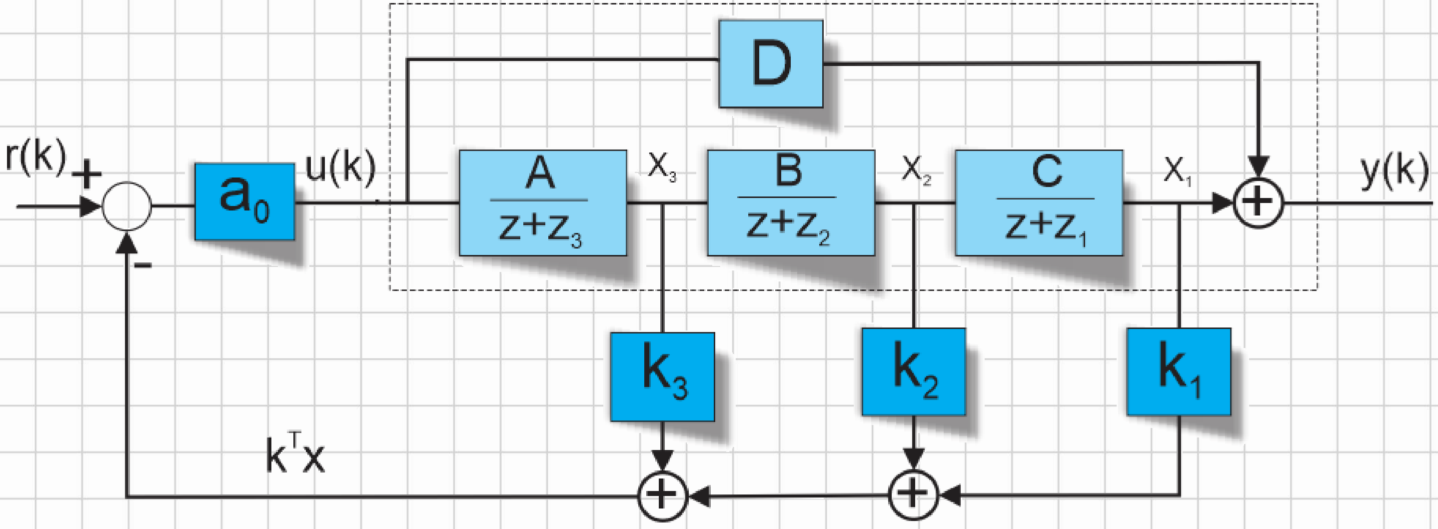
$$x(k+1) = A\,x(k) + b\,u(k)$$

$$y(k) = C\,x(k) + d\,u(k)$$

La realimentación de estados debe interpretarse como una combinación lineal de las variables, es decir $k_1 x_1(k) + k_2 x_2(k) + \ldots\ldots$.

Por lo tanto, la matriz de ganancias de realimentación es de la forma: $k^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_n \end{bmatrix}$

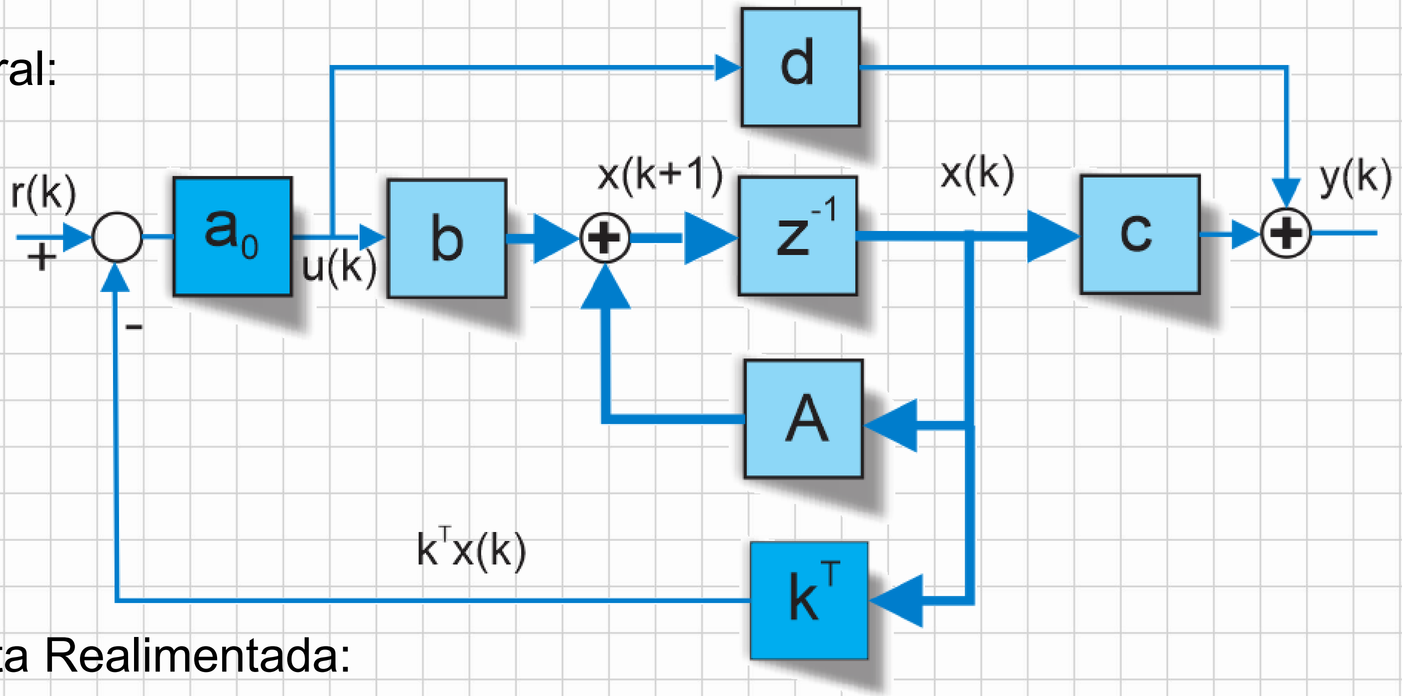
El diagrama muestra un ejemplo que evidencia lo antedicho:



Realimentación de Variables de Estado

Modelo de la Planta Realimentada

Para el caso general:



Modelo de la Planta Realimentada:

$$x(k+1) = A\,x(k) + b\,u(k) \quad , \quad u(k) = a_0\left(r(k) - k^T x(k)\right)$$

$$y(k) = C\,x(k) + d\,u(k)$$

$$x(k+1) = \left(A - b\,a_0 k^T\right)x(k) + b\,a_0\,r(k)$$

$$y(k) = \left(C - d\,a_0 k^T\right)x(k) + d\,a_0\,r(k)$$

Modelo de la Planta Realimentada

Los autovalores de la planta realimentada, son calculados a partir de : $\det\left(zI - \left[A - b\, a_0 k^T\right]\right) = 0$

Se puede demostrar que si la planta sin realimentar es **CONTROLABLE**, los autovalores de la planta realimentada se pueden reasignar a posiciones arbitrarias eligiendo convenientemente los valores de los elementos de k^T .

Reasignación de Autovalores

Caso SISO:
Para determinar las componentes del vector de realimentación y también para demostrar la anterior declaración conviene disponer del modelo **Canónico Controlable.**

Sea Q_{cc} la transformación al modelo canónico controlable. Esta transformación puede escribirse de las siguiente forma:

$$Q_{cc} = U.\bar{U}_{cc}^{-1} \quad \text{o} \quad Q_{cc}^{-1} = \bar{U}_{cc}.U^{-1}$$

Donde U es al matriz de controlabilidad del modelo original y U_{cc} la matriz controlabilidad del modelo canónico controlable.

Reasignación de Autovalores

Aplicando la transformación a la variable de estado: $x = Q_{cc}\bar{x} \quad y \quad \bar{x} = Q_{cc}^{-1}x$

Las matrices del modelo se transforman en: $\bar{A} = Q_{cc}^{-1}AQ_{cc} \quad \bar{b} = Q_{cc}^{-1}b \quad \bar{c} = cQ_{cc} \quad \bar{d} = d$

Entonces el modelo transformado queda de la forma:

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \bar{d}\, u(k)$$

Donde los a_i son los coeficientes del polinomio característico de la planta

$$\det(zI - A) = \det(zI - \bar{A}) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_2 z + a_1$$

Reasignación de Autovalores

Mediante una realimentación de variables de estado se tendrá:

$$u(k) = a_0\left(r(k) - k^T x(k)\right) = a_0\left(r(k) - k^T Q_{cc}\overline{x}(k)\right) = a_0\left(r(k) - \overline{k}^T\overline{x}(k)\right)$$

Por lo tanto las ganancias para realimentar las variables de la planta original están en:

$$k^T = \overline{k}^T Q_{cc}^{-1}$$

Considerando $a_0 = 1$ y $\overline{k}^T = \begin{bmatrix} \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \dots & \overline{k}_n \end{bmatrix}$ la matriz de la planta realimentada queda:

$$\overline{A} - \overline{bk}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \overline{k}_3 & \cdots & \overline{k}_n \end{bmatrix}$$

Reasignación de Autovalores

Desarrollando, tenemos la matriz de la planta del modelo canónico realimentado:

$$\overline{A}-\overline{b}\overline{k}^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\left(a_1+\overline{k}_1\right) & -\left(a_2+\overline{k}_2\right) & -\left(a_3+\overline{k}_3\right) & -\left(a_4+\overline{k}_4\right) & \cdots & -\left(a_{n-1}+\overline{k}_{n-1}\right) & -\left(a_n+\overline{k}_n\right) \end{bmatrix}$$

El modelo canónico controlable realimentado, tiene la misma forma canónica controlable pero ahora en la última fila, los elementos son de la forma $-\left(a_i+\overline{k}_i\right)$ y a su vez son los coeficientes de la ecuación característica de la planta realimentada cambiados de signo.

Suponiendo **autovalores deseados** para la planta realimentada : $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots\lambda_n$, el polinomio característico correspondiente resulta:

$$\left(z-\lambda_1\right)\left(z-\lambda_2\right)\cdots\left(z-\lambda_n\right)=z^n+\alpha_n z^{n-1}+\alpha_{n-1}z^{n-2}+\cdots+\alpha_2 z+\alpha_1$$

Asignando los coeficiente de este polinomio a la última fila de la matriz realimentada, se ve que:

$$-\alpha_1=-\left(a_1+\overline{k}_1\right);-\alpha_2=-\left(a_2+\overline{k}_2\right);\cdots;-\alpha_n=-\left(a_n+\overline{k}_n\right)$$

Reasignación de Autovalores

Por lo tanto el vector de realimentación se puede calcular como $\bar{k}_i = (\alpha_i - a_i)$ quedando:

$$\bar{k}^T = \left[(\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_2 - a_2) \quad \cdots \quad (\alpha_n - a_n)\right]$$

De esta forma hemos encontrado un vector de realimentación que asigna a posiciones arbitrarias los autovalores de la planta realimentada, para un sistema canónico controlable.

Ahora bien, la realimentación se ha realizado sobre las variables del sistema canónico, pero como se vio con anterioridad la señal $u(k)$ debe resultar la misma independientemente del conjunto de variables que se realimente:

$$u(k) = \left(r(k) - k^T x(k)\right) = \left(r(k) - k^T Q_{cc} \bar{x}(k)\right) = \left(r(k) - \bar{k}^T \bar{x}(k)\right)$$

Por lo tanto el vector de realimentación con las variables originales de la planta será:

$$k^T = \bar{k}^T Q_{cc}^{-1}$$

Finalmente, se ha demostrado que se pueden reasignar todos los autovalores de un sistema a posiciones arbitrarias, si el modelo de estado de la planta resulta controlable (ya que de otra forma no existiría el modelo canónico) y además se ha planteado un método para el cálculo del vector de realimentación.

Algoritmo para el cálculo del vector K

El problema puede ser planteado en los siguientes términos:

Dado el modelo de una planta controlable y un conjunto de autovalores arbitrarios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$.

Hallar el vector $k^T = \left[k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_n\right]$ tal que la matriz $A - b\, k^T$ tenga al conjunto $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ como sus autovalores.

Para ello se puede seguir los siguientes pasos:

Hallar el polinomio característico de la matriz A: $\det\left(zI - A\right) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_2 z + a_1$

Hallar el polinomio cuyas raíces sea el conjunto de autovalores dado.

$$\left(z-\lambda_1\right)\left(z-\lambda_2\right)\cdots\left(z-\lambda_n\right) = z^n + \alpha_n z^{n-1} + \alpha_{n-1} z^{n-2} + \cdots + \alpha_2 z + \alpha_1$$

Hallar el valor de $\bar{k}^T = \left[\left(\alpha_1 - a_1\right) \quad \left(\alpha_2 - a_2\right) \quad \cdots \quad \left(\alpha_n - a_n\right)\right]$

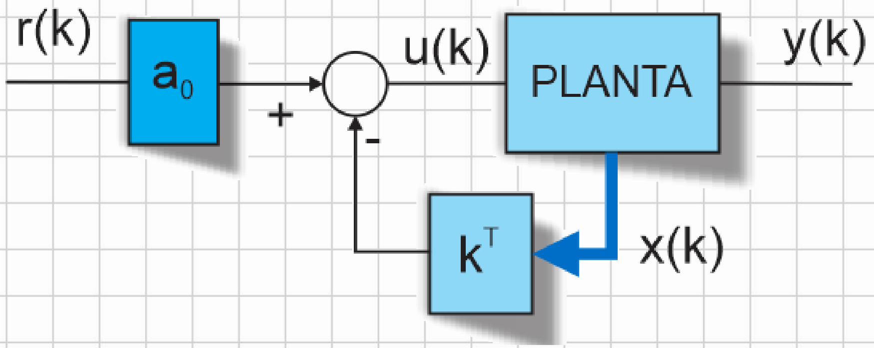
Hallar la matriz de transformación $Q_{cc}^{-1} = \bar{U}_{cc}.U^{-1}$

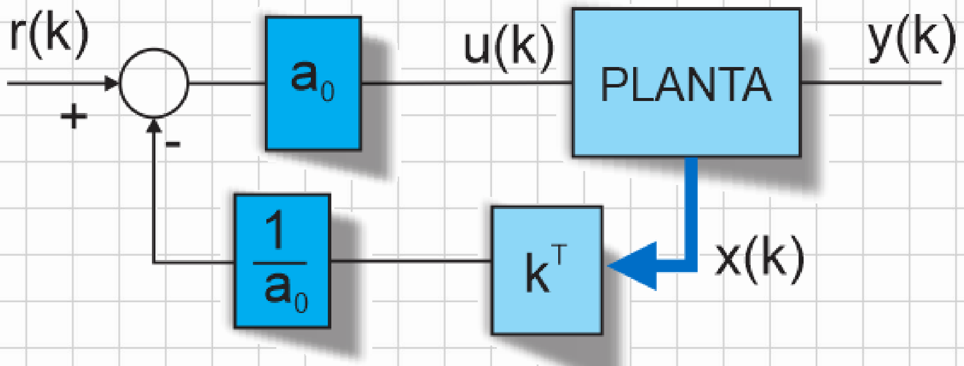
Hallar el vector de realimentación $k^T = \bar{k}^T Q_{cc}^{-1}$

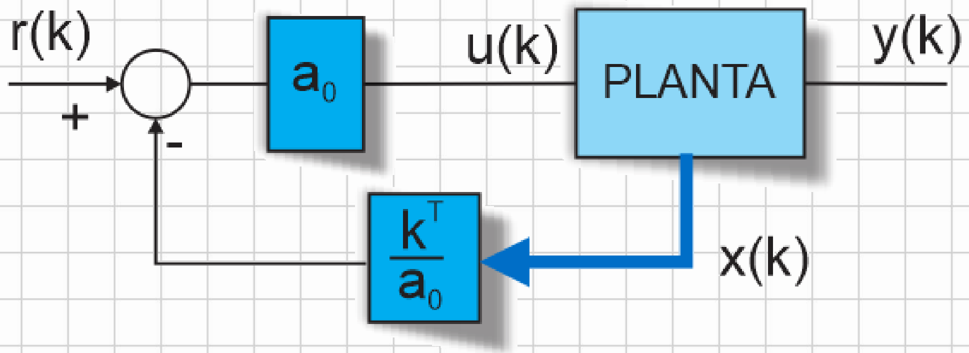
Realimentación de Variables de Estado

Determinación de la ganancia del controlador

La inclusión de la ganancia del controlador permite magnificar o atenuar la ganancia de la transferencia a lazo cerrado. Sin embargo resulta mas evidente la acción de esta ganancia observando la siguiente figura:







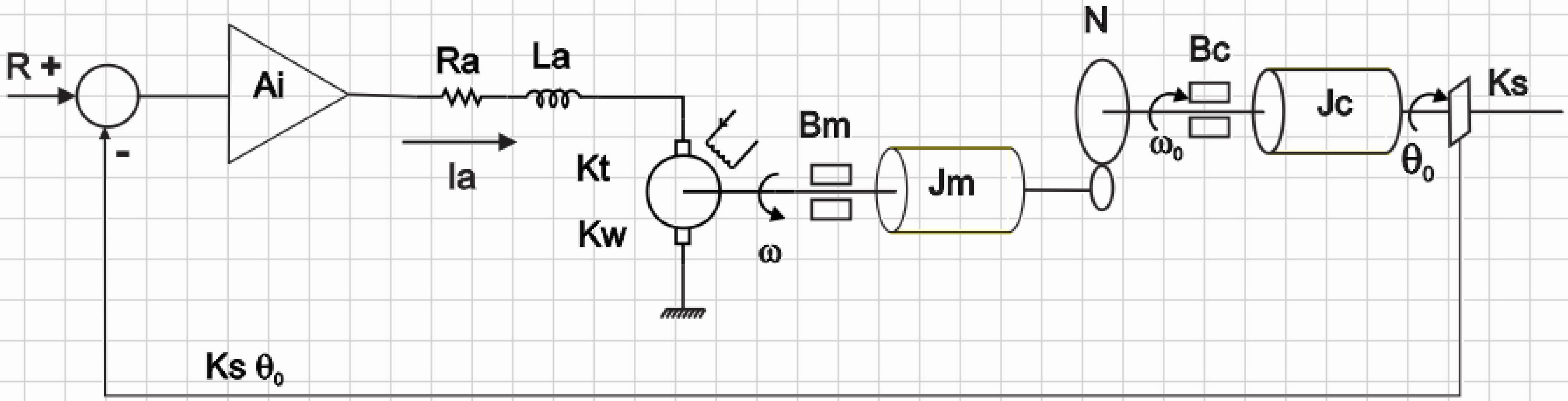
De $u(k) = a_0 r(k) - k^T x(k)$ resulta

$$u(k) = a_0 \left(r(k) - \frac{k^T}{a_0} x(k) \right)$$

Para modificar la ganancia y no modificar los autovalores el vector de realimentación k^T se debe dividir por a_0

Ejemplo

Suponga un sistema de control de posición como el que se indica en la figura:



Datos:
Ra =7.94 Ω
La = 1.54 mH
Kt = 39.3 m Nm/A
Kw = 4.12mV/rpm
Jm = 26.6 gr cm^2
Bm = 0 N.m.s/rad
Jc = 48.5 10^{-3} kg m^2
Bc = 660 10^{-3} N.m.s/rad
N = 1 / 200
Ai = 10
Ks = 0.159 V/rad

Se pide hallar un algoritmo de control por realimentación de estados, de modo que, el sistema controlado posea las siguientes características:

A lazo cerrado $y_{ss}/r_{ss}=1$ (ganancia en continua)

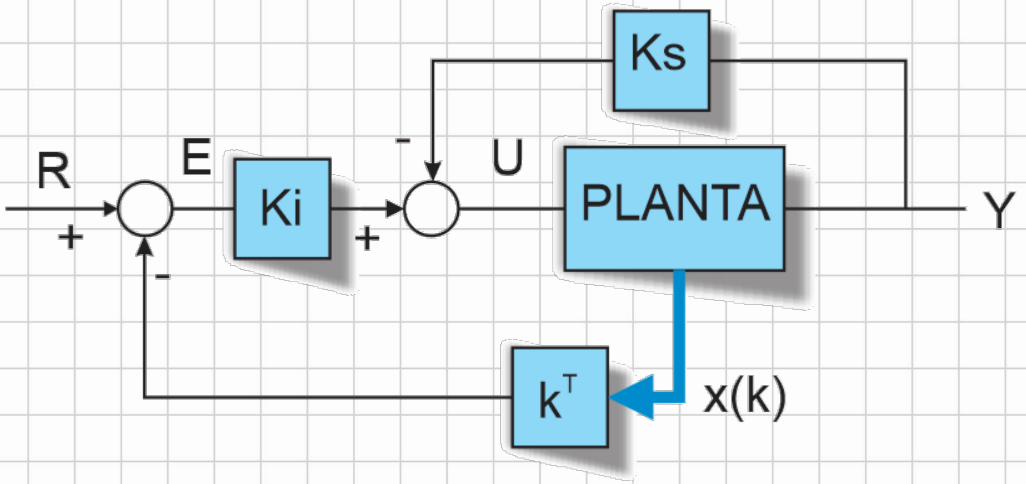
Error nulo al escalón (sin incluir integradores en el controlador)

Mantener la realimentación desde la salida con el sensor de ganancia Ks.

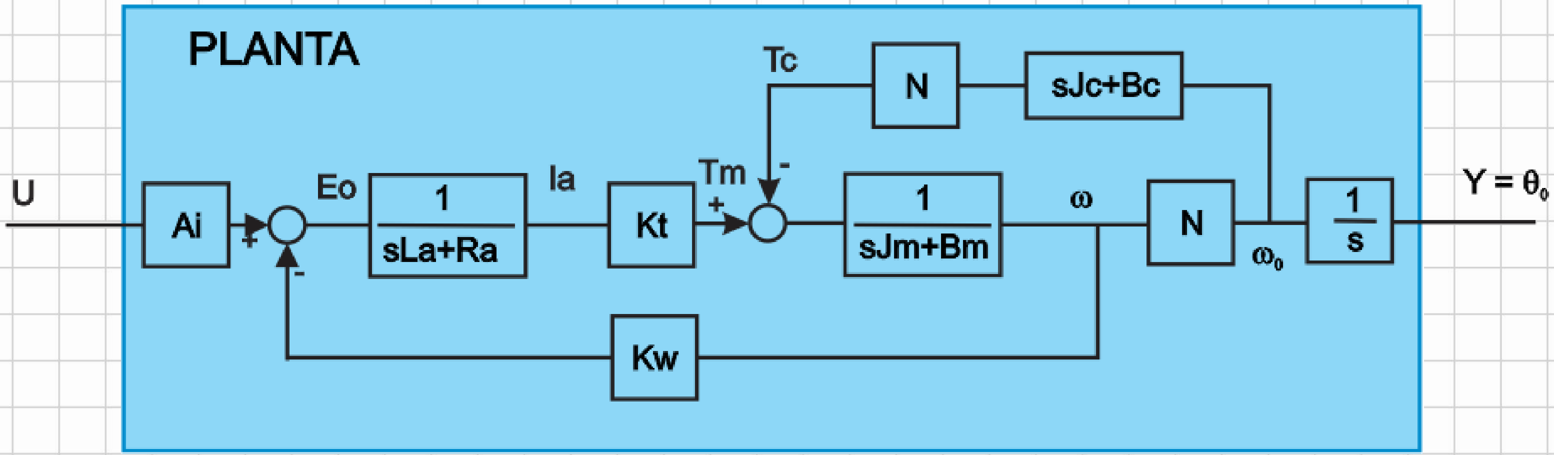
A lazo cerrado, la respuesta transitoria debe presentar un coeficiente de amortiguamiento de 0.6 y una frecuencia natural de 5 r/s.

Ejemplo

Se plantea un control por realimentación de estados con el esquema que se presenta en la figura, de modo de mantener la realimentación de la salida. Además al mantener el integrador de la posición el sistema posee error nulo al escalón.



El modelo de estado continuo de la planta,se puede extraer del siguiente diagrama en bloques:



Ejemplo

Modelo de estado continuo de la Planta:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_w}{L_a} \\ 0 & 0 & N \\ \frac{K_t}{J_{eq}} & 0 & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \theta_0 \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Ai}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$B_{eq} = N^2 B_c$$

$$J_{eq} = J_m + N^2 J_c$$

Reemplazando valores resulta:

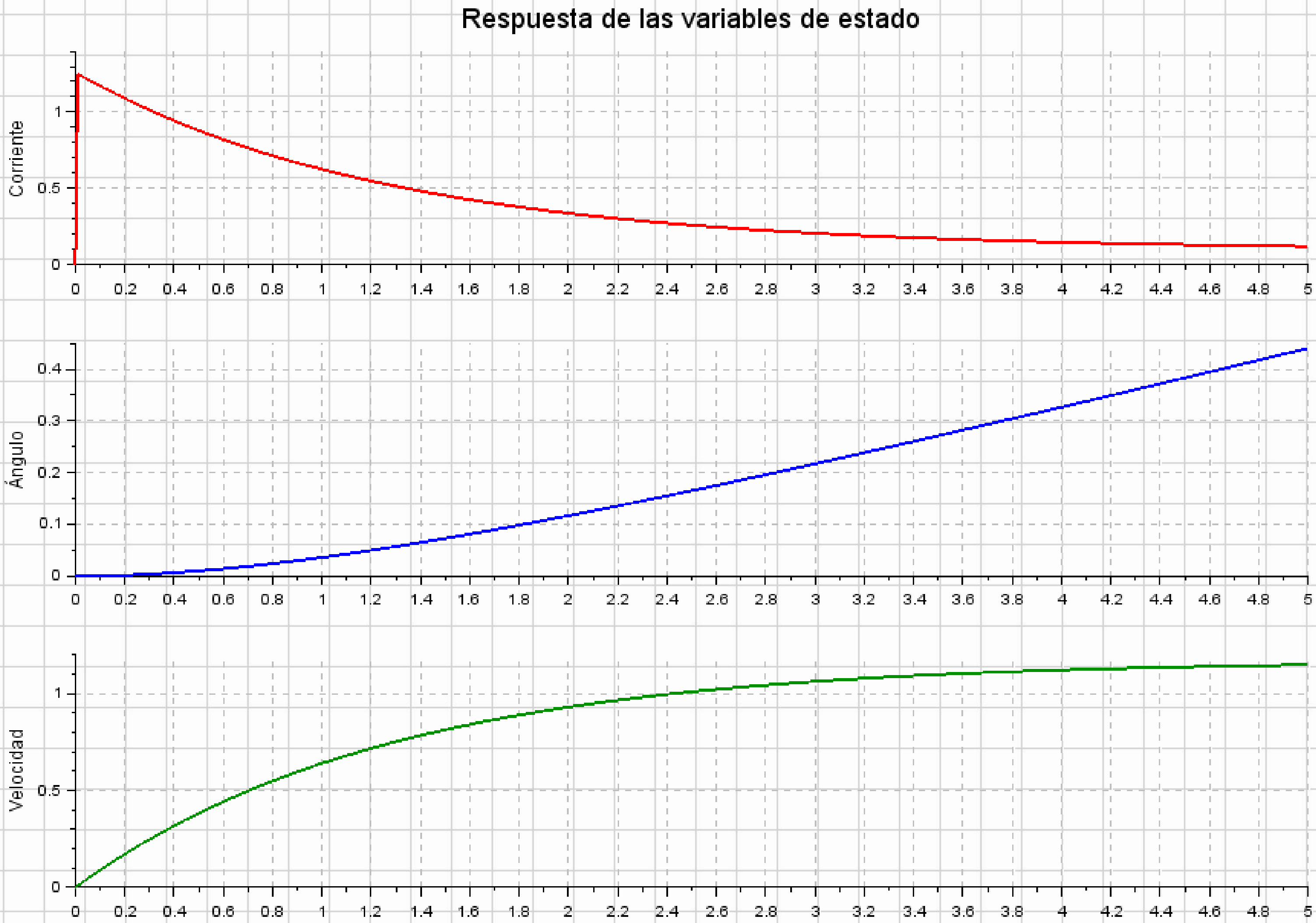
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5155.84 & 0 & -25.547 \\ 0 & 0 & 0.005 \\ 147.07 & 0 & -6.174\ 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \theta_0 \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6493.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

La respuesta de las variables de la planta, para una entrada en escalón unitario, puede verse en la figura:



Ejemplo

Dado que se debe realizar un controlador digital se discretiza el modelo de estado continuo con un período de muestreo Ts = 0.1 seg:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$
$$y(k) = C_d x(k)$$

$$A_d = e^{AT_s}; \quad B_d = \int_0^{T_s} e^{A\lambda} B \, d\lambda; \quad C_d = C$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} I_a(k+1) \\ \theta_0(k+1) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3066 \ 10^{-4} & 0 & -4.5797 \ 10^{-3} \\ 1.369 \ 10^{-5} & 1 & 4.8081 \ 10^{-4} \\ 0.026365 & 0 & 0.9241 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \theta_0(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1715 \\ 4.495 \ 10^{-3} \\ 17.779 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Los autovalores del modelo discreto resultan:

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 0.92398$$
$$\lambda_3 = 2.179 \ 10^{-224} = 0$$

El autovalor continuo posee una frecuencia muy superior a la de muestreo. Corresponde al polo eléctrico del motor.

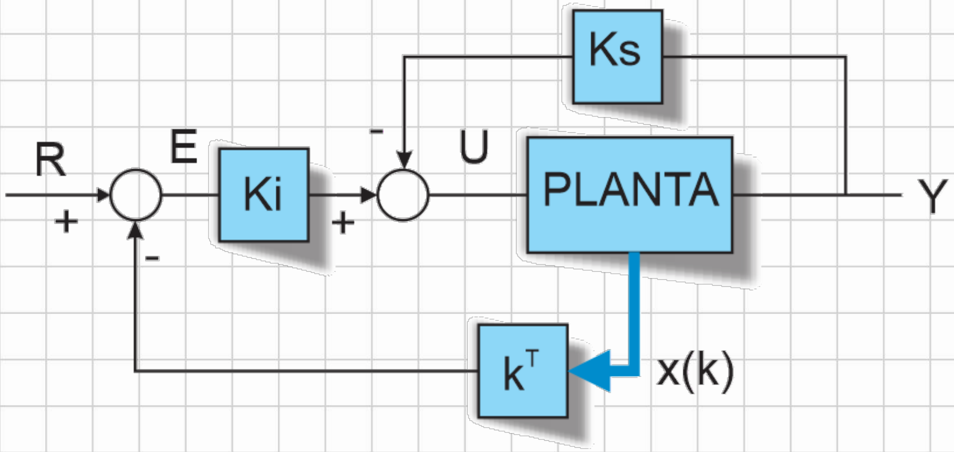
Ejemplo

La matriz controlabilidad resulta:

$$U = \begin{bmatrix} 1.1715 & -0.08158 & -0.07538 \\ 4.49452\ \ 10^{-3} & 0.01306 & 0.02097 \\ 17.779 & 16.4608 & 15.2095 \end{bmatrix} \qquad \det\left[U\right] = -0.1846651$$

El modelo discreto resulta controlable.

Para hallar las ganancias de realimentación se debe determinar la ley de control.



$$u(k) = -K_s y(k) + K_i\left(r(k) - k^T x(k)\right)$$

$$u(k) = K_i\left[r(k) - \left(\frac{K_s C}{K_i} + k^T\right)x(k)\right]$$

$$u(k) = K_i\left[r(k) - K_t^T x(k)\right]$$

Considerando inicialmente $K_i = 1$, el vector de realimentación K_t^T se puede resolver mediante el MCC.

Ejemplo

El polinomio característico del modelo resulta: $\det\left[zI - A_d\right] = z^3 - 1.92398z^2 + 0.92398z$

Entonces, el Modelo Canónico Controlable se puede escribir como:

$$\bar{x}(k+1) == \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.92398 & 1.92398 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

La matriz controlabilidad del MCC resulta:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.92398 \\ 1 & 1.92398 & 2.7777 \end{bmatrix}$$

Finalmente se calcula la matriz de transformación:

$$Q_{cc}^{-1} = \bar{U}.U^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8566571 & 112.28152 & -0.0848317 \\ -8.113915\ 10^{-4} & 112.28152 & -0.0283310 \\ 7.902883\ 10^{-4} & 112.28152 & 0.0278091 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Las especificaciones dadas requieren una ubicación de los autovalores dominantes en :

$$s_{1,2} = -\,\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -3 \pm\ 4\,j \qquad\qquad s_3 = -10\xi\omega_n = -30$$

Los autovalores discretos son:

$$z_{1,2} = \ 0.68234 \pm 0.288488j \qquad\qquad z_3 = 0.049787$$

El polinomio característico deseado resulta:

$$\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right) = \ z^3 - 1.414z^2 + 0.6168z - 0.02732$$

El Vector de realimentación del modelo canónico:

$$\bar{K}_t^T = \left[\left(\alpha_1 - a_1\right) \quad \left(\alpha_2 - a_2\right) \quad \left(\alpha_3 - a_3\right)\right]$$

$$\bar{K}_t^T = \left[-0.0273 \quad -0.3072 \quad 0.5095\right]$$

Ejemplo

El vector de realimentación para el modelo original queda :

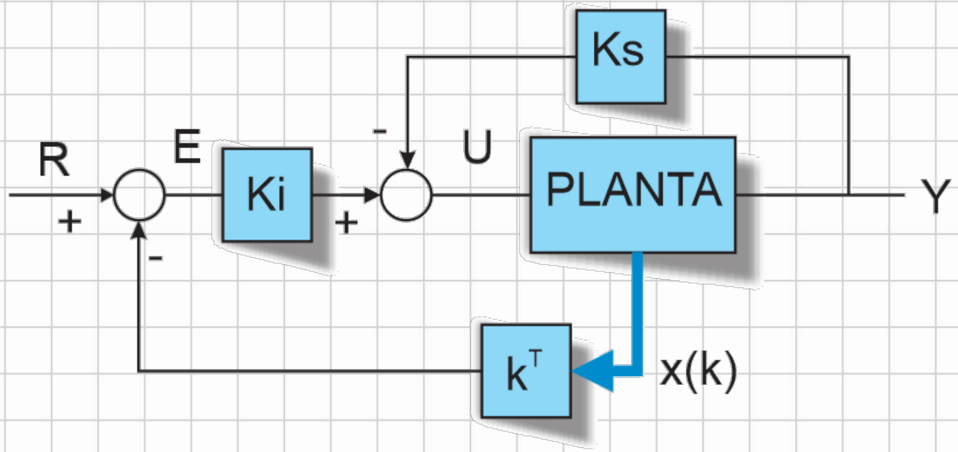
$$K_t^T = \bar{K}_t^T Q_{cc}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.022755 & 19.6455 & 0.02519 \end{bmatrix}$$

La Ganancia del sistema realimentado se calcula como:

$$A_0 = Y/R\Big|_{ss \Rightarrow z=1} = C_d \left[I - \left(A_d - B_d K_t^T \right) \right]^{-1} B_d = 0.050902$$

Como se requiere que el sistema tenga ganancia unitaria la ganancia Ki se calcula como: $K_i = \dfrac{1}{A_0} = 19.6455$

El vector de realimentación para la configuración planteada:



$$K_t^T = \left(\frac{K_s C}{K_i} + k^T \right)$$

$$k^T = K_t^T - \frac{K_s C}{K_i}$$

$$k^T = \begin{bmatrix} -0.0011528 & 0.987211 & 0.0012762 \end{bmatrix}$$

$$K_i = 19.6455 \qquad K_s = 0.159$$

Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

Si el modelo de la planta no realimentada es controlable, entonces existe un control u(k) que transfiere el estado desde x0 a x1, en un número de muestras determinado.
Luego si se elije :

$$r(k) = \frac{u(k)}{a_0} + k^T x(k)$$

Esta entrada, aplicada al modelo realimentado producirá sobre la planta el mismo control u(k) anterior y transferirá el estado de x0 a x1.

Por lo tanto, si el modelo original es controlable, entonces el modelo de estado realimentado, será controlable para cualquier vector k^T .

Como r(k) no controla directamente las variables de estado, sino a través de la señal u(k). Entonces si la planta sin realimentar resulta no controlable la planta realimentada, tampoco será controlable.

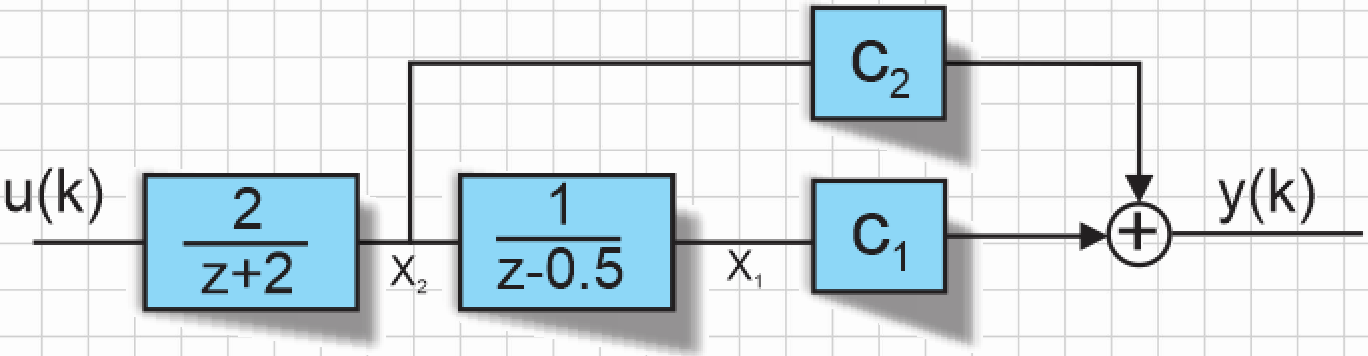
Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

Suponiendo una planta sin realimentar observable se pueden dar las siguientes situaciones :

Si la Planta corresponde a un sistema SISO y no posee ceros, entonces el modelo realimentado resultará observable.

Si la planta corresponde a un sistema SISO con ceros, la observabilidad puede verse modificada por la realimentación.

Supongamos un sistema representado en el siguiente diagrama:

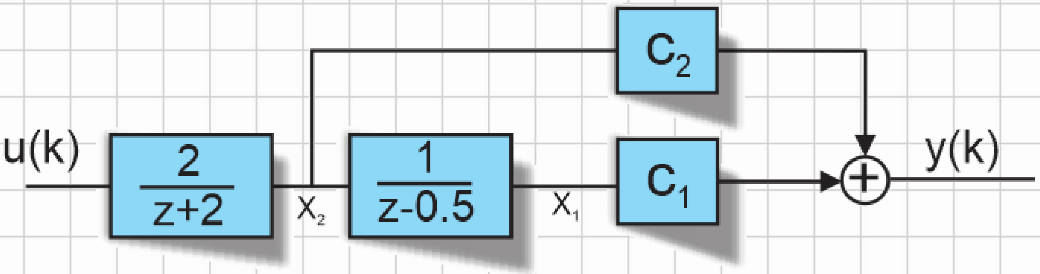


$$Y(z) = C_2 \frac{2}{(z+2)} U(z) + C_1 \frac{2}{(z+2)} \frac{1}{(z-0.5)} U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2C_2(z-0.5)+2C_1}{(z+2)(z-0.5)}$$

Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

El modelo de estado resulta:



$$\frac{X_2}{U}=\frac{2}{(z+2)}\Rightarrow z\cdot X_2+2X_2=2U$$

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{1}{(z-0.5)}\Rightarrow z\cdot X_1-0.5X_1=X_2$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}x(k)$$

El sistema es inestable debido a que tiene un polo en z=-2.

La matriz controlabilidad resulta: $U=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$; $\text{rango}[U]=2$ El sistema es controlable.

La matriz observabilidad es: $V=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ 0,5C_1 & C_1-2C_2\end{bmatrix}$; $\det[V]=C_1^2-2.5C_1C_2$

Si $C_1=0$ o $C_1/C_2=2.5$ el sistema resultará inobservable.

Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

a) $C_1 = 2.5 \quad C_2 = 1$

La transferencia resulta: $$\frac{Y(z)}{U(z)} = C\left[zI - A\right]^{-1} B = \frac{2}{\left(z-0.5\right)}$$

Siendo el modelo controlable, al haber una cancelación de un polo el modelo es inobservable.

Si se realimenta para obtener un par de autovalores en 0.5 y 0.8, el vector de realimentación resulta: $k^T = \left[0 \quad -1.4\right]$

La matriz de la planta realimentada es: $$A_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia del sistema realimentado es: $$\frac{Y(z)}{U(z)} == \frac{2\left(z-2\right)}{\left(z-0.5\right)\left(z-0.8\right)}$$

Entonces, partiendo de un sistema no observable, se ha obtenido por realimentación de estados un sistema observable

Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

b) $C_1 = 1.4 \quad C_2 = 1$

La transferencia resulta: $\frac{Y(z)}{U(z)} = C\left[zI - A\right]^{-1} B = \frac{2(z+0.9)}{(z-0.5)(z+2)}$

Como la transferencia es de segundo orden, el sistema es observable.

Si se realimenta para obtener autovalores en 0.5 y -0.9, el vector de realimentación resulta: $k^T = \begin{bmatrix} 0 & -0.55 \end{bmatrix}$

La matriz de la planta realimentada es: $A_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}$

La función de transferencia del sistema realimentado es: $\frac{Y(z)}{R(z)} == \frac{2}{(z-0.5)}$

Se pierde un polo, el sistema no es observable

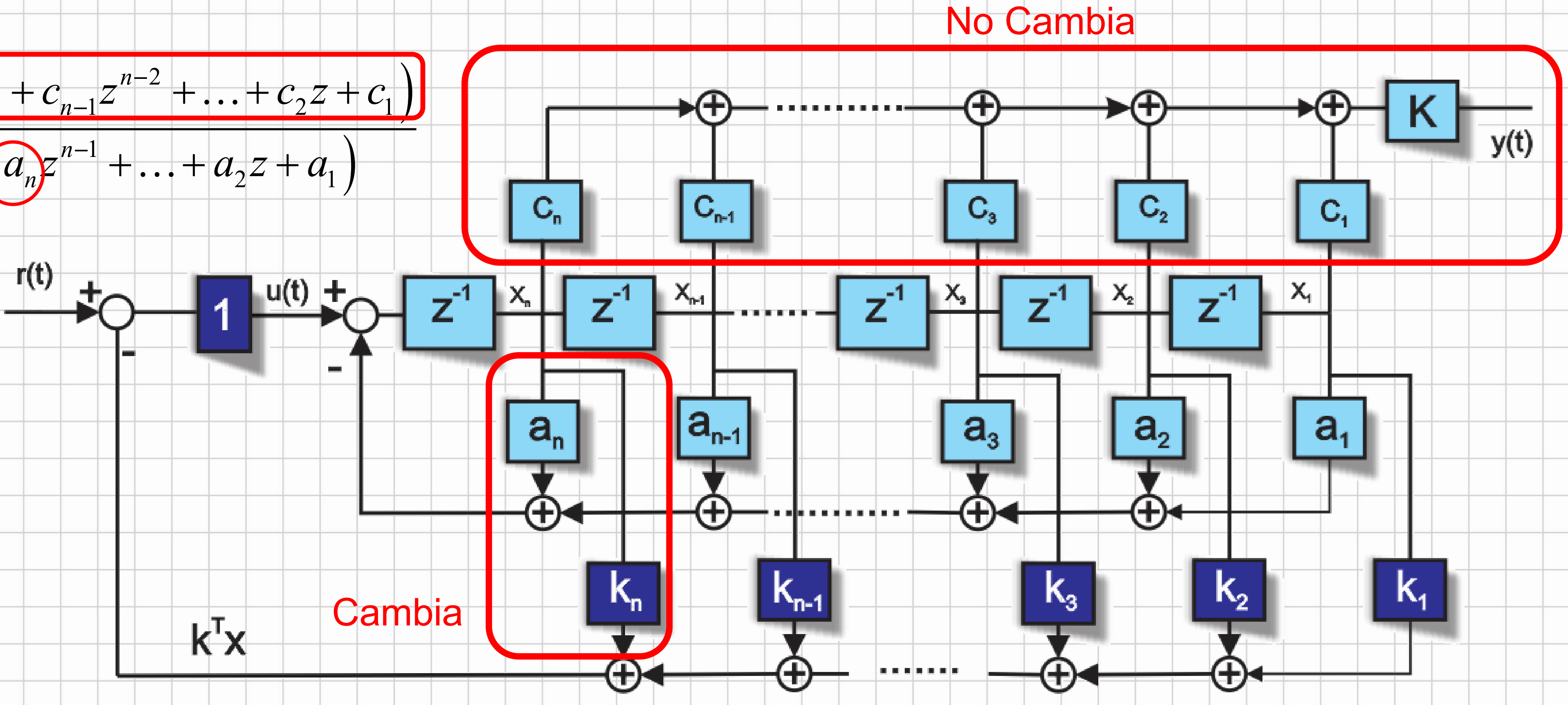
Entonces, partiendo de un sistema observable, se ha obtenido por realimentación de estados un sistema no observable.
Por lo tanto, la observabilidad puede verse modificada por la realimentación de estados.

Ceros de la Función de Transferencia

En el desarrollo anterior, se ha puesto atención en la ubicación de los polos de la función de transferencia de un sistema SISO, ya que de ellos depende la respuesta del sistema. Sin embargo nada se ha dicho respecto de que tipo de comportamiento van a tener los ceros.

Para analizar el comportamiento de los ceros, se hace uso del modelo canónico controlable obtenido a partir de la función de transferencia.

$$G(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\boxed{K\left(c_n z^{n-1}+c_{n-1}z^{n-2}+\ldots+c_2 z+c_1\right)}}{\left(z^n+a_n z^{n-1}+\ldots+a_2 z+a_1\right)}$$



Ceros de la Función de Transferencia

En el desarrollo anterior, se ha puesto atención en la ubicación de los polos de la función de transferencia de un sistema SISO, ya que de ellos depende la respuesta del sistema. Sin embargo nada se ha dicho respecto de que tipo de comportamiento van a tener los ceros.

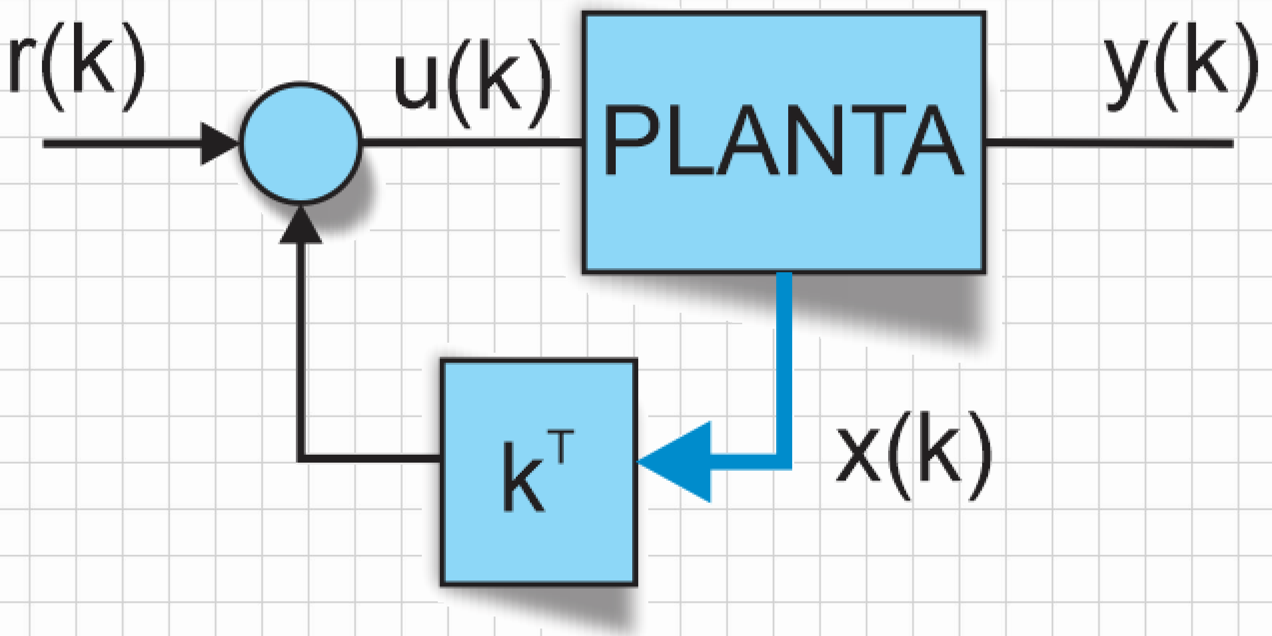
Para analizar el comportamiento de los ceros, se hace uso del modelo canónico controlable obtenido a partir de la función de transferencia.

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{K\left(c_n z^{n-1} + c_{n-1} z^{n-2} + \ldots + c_2 z + c_1\right)}{\left(z^n + a_n z^{n-1} + \ldots + a_2 z + a_1\right)}$$

Como puede verse al agregar la realimentación solamente modifica los coeficientes ai y por lo tanto el denominador de la transferencia D(z), y no altera el valor de los coeficientes ci de N(z).Por lo tanto la realimentación de estado no afecta la ubicación de los ceros, para un sistema SISO.

Estabilidad con realimentación de estados

Si bien la realimentación de estados reasigna los autovalores de lazo cerrado a posiciones arbitrarias, esta ubicación puede cambiar ante variaciones de la ganancia de la planta hasta el punto de hacer inestable al sistema. Para determinar esta situación se debe analizar la estabilidad relativa (por ej. mediante diagramas de Bode), para lo cual se requiere conocer la transferencia de lazo abierto del sistema.



La transferencia de lazo abierto tiene como entrada a u(k) y como salida a $k^T x(k)$.

Estabilidad con realimentación de estados

Aplicando transformada Z al modelo de estado con condiciones iniciales nulas resulta:

$$X(z) = \left[zI - A\right]^{-1} BU(z)$$

Entonces la transferencia de lazo abierto resulta:

$$GH(z) = k^T \left[zI - A\right]^{-1} B$$

Desarrollando esta transferencia resulta de la siguiente forma:

$$GH(z) = \frac{k^T \, Adj\left[zI - A\right]B}{\det\left(zI - A\right)}$$

Esta transferencia tiene los mismos polos que la planta, sin embargo posee (n-1) ceros cuya posición dependen del valor de k^T. Estos ceros permiten que la trayectoria de los polos ante variaciones de la ganancia pasen, para un valor unitario, por la posición deseada para lazo cerrado.

Teoría de Control

Realimentación de Variables de Estado
Sistemas SISO No Controlables

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Dado un sistema SISO:

$$x(k+1) = A\,x(k) + b\,u(k)$$

$$y(k) = c^T\,x(k)$$

La matriz Controlabilidad del modelo :

$$U = \left[b \;\middle|\; Ab \;\middle|\; A^2 b \;\middle|\; \dots \;\middle|\; A^{n-1} b \right]$$

es de rango: $Rg\left[\;U\;\right] = j < n$ (con n = número de estados).

En estas condiciones, debido a que el sistema no es totalmente controlable, no se pueden reasignar todos los autovalores del modelo por realimentación de estados.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

A partir de la situación planteada, se presentan los siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son las variables de estado no controlables?
- ¿Se pueden reasignar algunos autovalores?
- ¿Si es posile, cuáles?
- ¿Se puede estabilizar el sistema por realimentación de variables de estados aunque el sistema sea no controlable?

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Si $Rg[U] = j < n$, entonces, se puede demostrar que la matriz U tiene las primeras j columnas linealmente independientes (LI).

A partir de esta propiedad, se construye una matriz Q como sigue:

$$Q = \left[\underbrace{b \mid Ab \mid A^2b \mid \ldots \mid A^{j-1}b}_{j \text{ Columnas LI de } U} \;\middle|\; \underbrace{q_1 \mid q_2 \mid \ldots \mid q_{n-j}}_{(n-j) \text{ Columas LI}} \right]$$

La matriz Q , debido a que todas sus columnas son LI, es no singular y por lo tanto $Rg[Q] = n$

Ahora si se define la siguiente transformación lineal: $x(k) = Q\,\hat{x}(k)$

Queda: $\hat{A} = Q^{-1}AQ \qquad \hat{b} = Q^{-1}b \qquad \hat{c} = cQ$

SISTEMAS NO CONTROLABLES

El modelo resultante de aplicar la transformación tiene la siguiente forma:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix}(k+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}}^{\hat{A}} \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix}(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\hat{b}} u(k) \quad \begin{matrix} \}\, j \\ \}\, n-j \end{matrix}$$

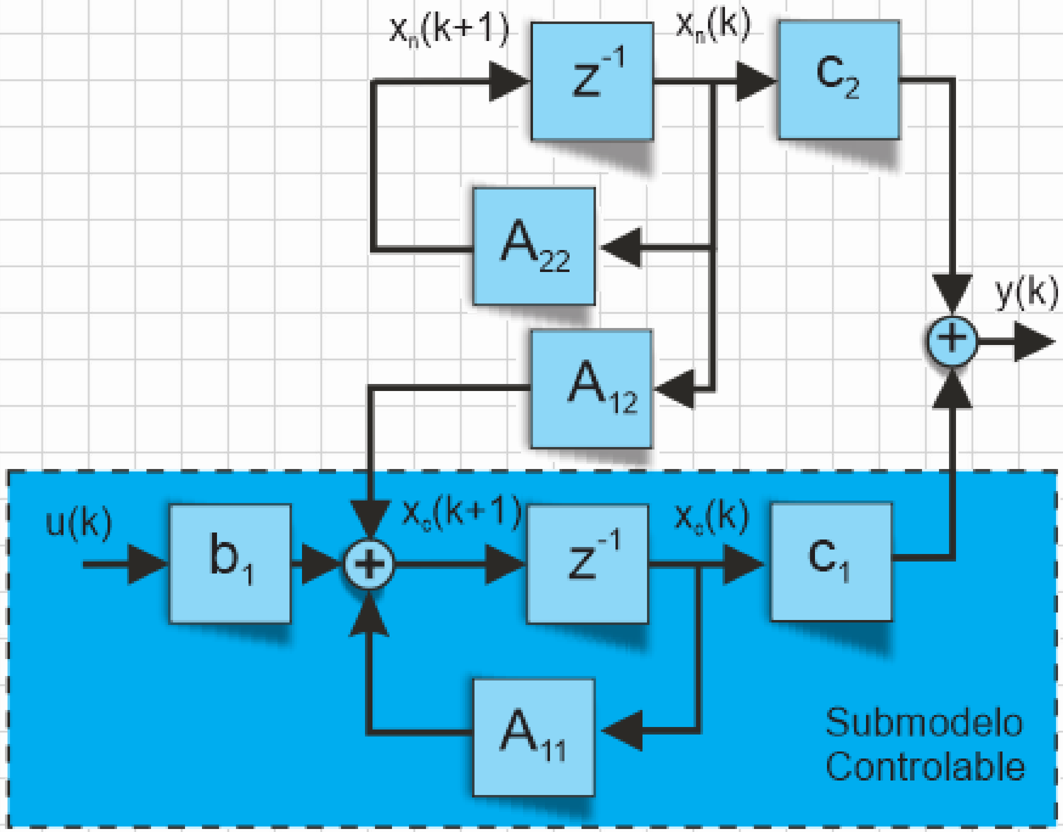
$$\underbrace{\hphantom{A_{11}}}_{j} \quad \underbrace{\hphantom{A_{22}}}_{n\text{-}j}$$

Las *(n-j)* variables x_n son no controlables ya que dependen de si mismas y no dependen de la entrada; en consecuencia, las variables x_c resultan controlables.

- La matriz A_{11} contiene los autovalores controlables del modelo, es decir los reasignables.
- La matriz A_{22} contiene los autovalores no controlables del modelo y por lo tanto no reasignables.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

La situación de las variables de estado, respecto de su controlabilidad , puede verse representada en el siguiente gráfico.



SISTEMAS NO CONTROLABLES

Se va a realimentar a este sistema con la siguiente ley de control:

$$u(k) = r(k) - \begin{bmatrix} k_c & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} (k)$$

El modelo realimentado queda:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} (k) - \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_c & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 k_c & b_1 k_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} A_{11} - b_1 k_c & A_{12} - b_1 k_n \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

Los autovalores del modelo realimentado son los de $A_{11} - b_1 k_c$ y A_{22}

SISTEMAS NO CONTROLABLES

La respuesta de las variables no controlables depende exclusivamente de los autovalores de la matriz A_{22}, es decir que si estos autovalores son estables estas variables tenderán a cero, caso contrario el comportamiento de estas variables será inestable y esta situación abarcará a todo el modelo.

Ahora, el par [A_{11} , b_1] es controlable , por lo tanto se puede plantear una ecuación de estado para el submodelo controlable:

$$x_c(k+1) = A_{11}\, x_c(k) + b_1\, u(k)$$

Sobre este modelo se puede encontrar un vector k_c , que reasigne los autovalores a posiciones arbitrarias por los métodos conocidos.

Esta realimentación , no provocará ningún efecto sobre el comportamiento de las variables no controlables.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Luego de la realimentación, el submodelo controlable resulta:

$$x_c(k+1) = \left(A_{11} - b_1 k_c\right)\, x_c(k) + b_1\; r(k)$$

El acoplamiento de las variables no controlables a través de la matriz A_{12} no modifica los autovalores de este submodelo y que puede ser considerada una perturbación ; del mismo modo si se realiza una realimentación de estas variables.

El vector k_c tiene ***j*** componentes por lo tanto para aplicarlo al modelo completo debo llevarlo a ***n*** componentes. Agrego ***(n-j)*** ceros al final correspondientes a las variables no controlables.

$$\hat{k} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_c & \overbrace{0 \ldots 0}^{n-j} \end{bmatrix}}_{n}$$

Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

El vector $\hat{k}$ reasigna los autovalores controlables del modelo con variables $\hat{x}$.

Para reasignar los autovalores del modelo original se debe transformar el vector mediante la transformación *Q*

$$k^T = \hat{k}\, Q^{-1}$$

ETABILIZABILIDAD

Si los autovalores de la matriz A_{22} resultan estables se dice que el sistema no es controlable pero es estabilizable , ya que si el modelo tuviese autovalores inestables estos pueden ser reasignados por realimentación.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Ahora bien, en todo momento se trabajó con las variables no controlables del modelo transformado entonces, ¿cuáles son las variables controlables del modelo original?.

La transformación lineal $x(k) = Q\,\hat{x}(k)$ se puede expresar como una combinación lineal de las variables del modelo transformado:

$$\begin{cases} x_1(k) = q_{11}\hat{x}_1(k) + q_{12}\hat{x}_2(k) + \ldots + q_{1n}\hat{x}_n(k) \\ x_2(k) = q_{21}\hat{x}_1(k) + q_{22}\hat{x}_2(k) + \ldots + q_{2n}\hat{x}_n(k) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ x_n(k) = q_{n1}\hat{x}_1(k) + q_{n2}\hat{x}_2(k) + \ldots + q_{nn}\hat{x}_n(k) \end{cases}$$

Aquellas variables que resulten solamente combinación lineal de las *(n-j)* últimas variables, es decir la no controlables, resultarán incontrolables. El resto serán controlables.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Finalmente:

- Se pueden resignar tantos autovalores como el rango de la matriz controlabilidad *U*.
- Los autovalores reasignables son los de la matriz A_{11}
- Las variables no controlables son aquellas que resultan solamente combinación lineal de las variables no controlables de $\hat{x}$.
- Un sistema resulta estabilizable si los autovalores de A_{22} son estables.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

RESUMEN:

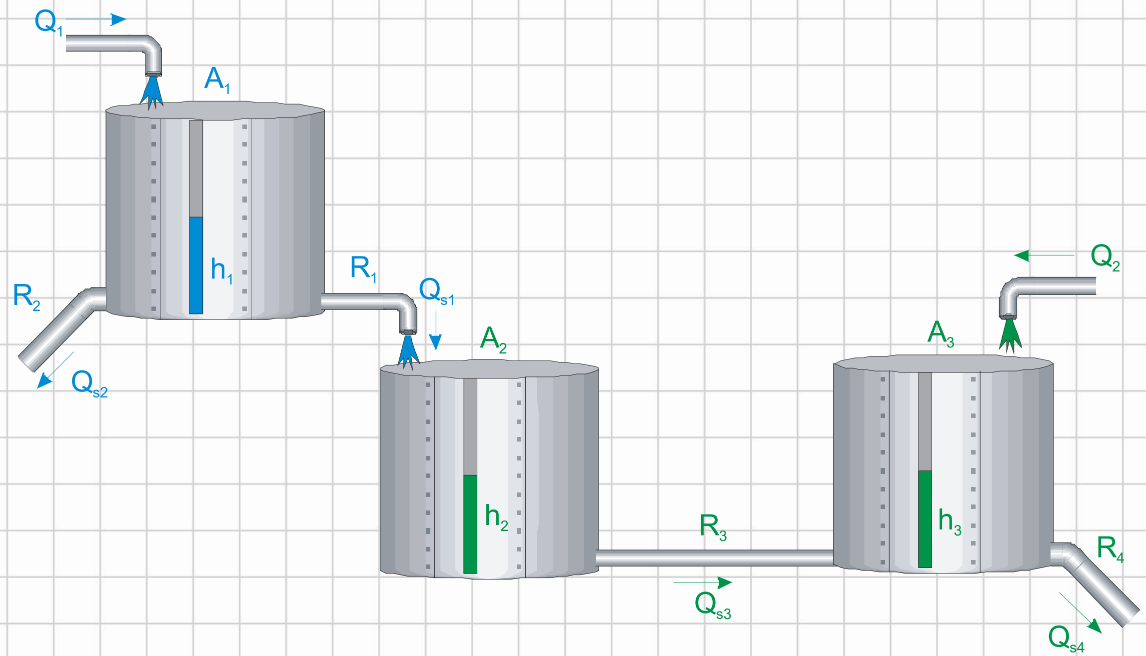
- Hallar la matriz controlabilidad U y calcular el rango.
- Si resulta no totalmente controlable, construir la matriz Q y aplicar la transformación al modelo.
- Hallar el vector de realimentación k_c del submodelo controlable (p.e. transformando al M.C.C.)
- Ampliar el vector de realimentación para las variables no controlables.
- Transformar el vector de realimentación al modelo original.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Ejemplo:

La figura muestra un sistema de nivel de líquidos en el cual se desea controlar el nivel h2 actuando sobre el caudal Q2. Se va a considerar al caudal Q1 como una perturbación.

$A1 = 5\ m^2$
$A2 = 4\ m^2$
$A3 = 3.5\ m^2$
$R1 = 120$ seg $/m^2$
$R2 = 360$ seg $/m^2$
$R3 = 72$ seg $/m^2$
$R4 = 300$ seg $/m^2$

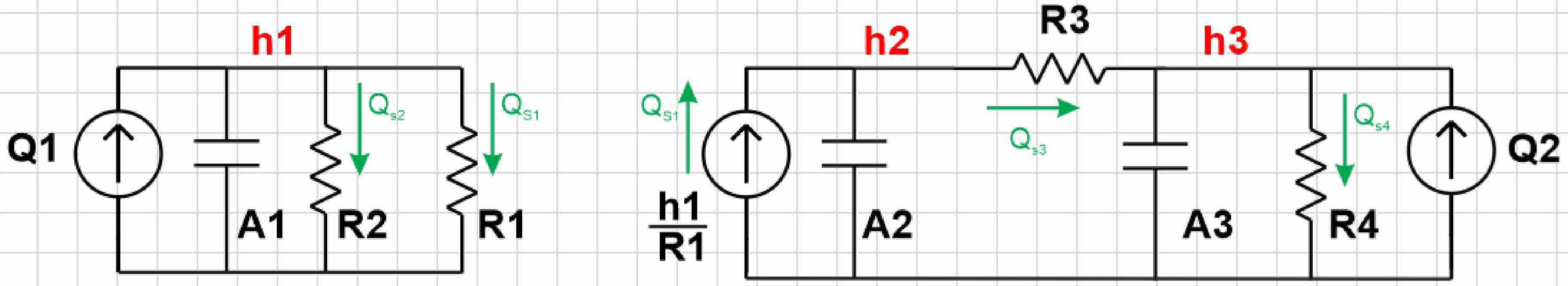


Analice la posibilidad de utilizar una realimentación de estado para lograr un control con las siguientes especificaciones : Sobrepico 5% y Tiempo de Establecimiento : 3000 seg.
Considere que para controlar el caudal se utiliza una válvula con ganancia $Kq=0.007m^3/V$.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Ejemplo:

El modelo de estado de la planta se puede extraer del circuito eléctrico equivalente:



Aplicando nodos se extraen las ecuaciones diferenciales:

$$Q_1 = A_1\frac{dh_1}{dt} + \frac{h_1}{R_1} + \frac{h_1}{R_2}$$

$$\frac{h_1}{R_1} = A_2\frac{dh_2}{dt} + \frac{h_2 - h_3}{R_3}$$

$$Q_2 + \frac{h_2 - h_3}{R_3} = A_3\frac{dh_3}{dt} + \frac{h_3}{R_4}$$

SISTEMAS NO CONTROLABLES

El modelo de estado continuo de la planta es:

$$\begin{bmatrix}\dot{h}_1\\ \dot{h}_2\\ \dot{h}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & 0 & 0\\ \frac{1}{A_2R_1} & -\frac{1}{A_2R_3} & \frac{1}{A_2R_3}\\ 0 & \frac{1}{A_3R_3} & -\frac{1}{A_3}\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{A_1} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{A_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}$$

Reemplazando las constantes queda:

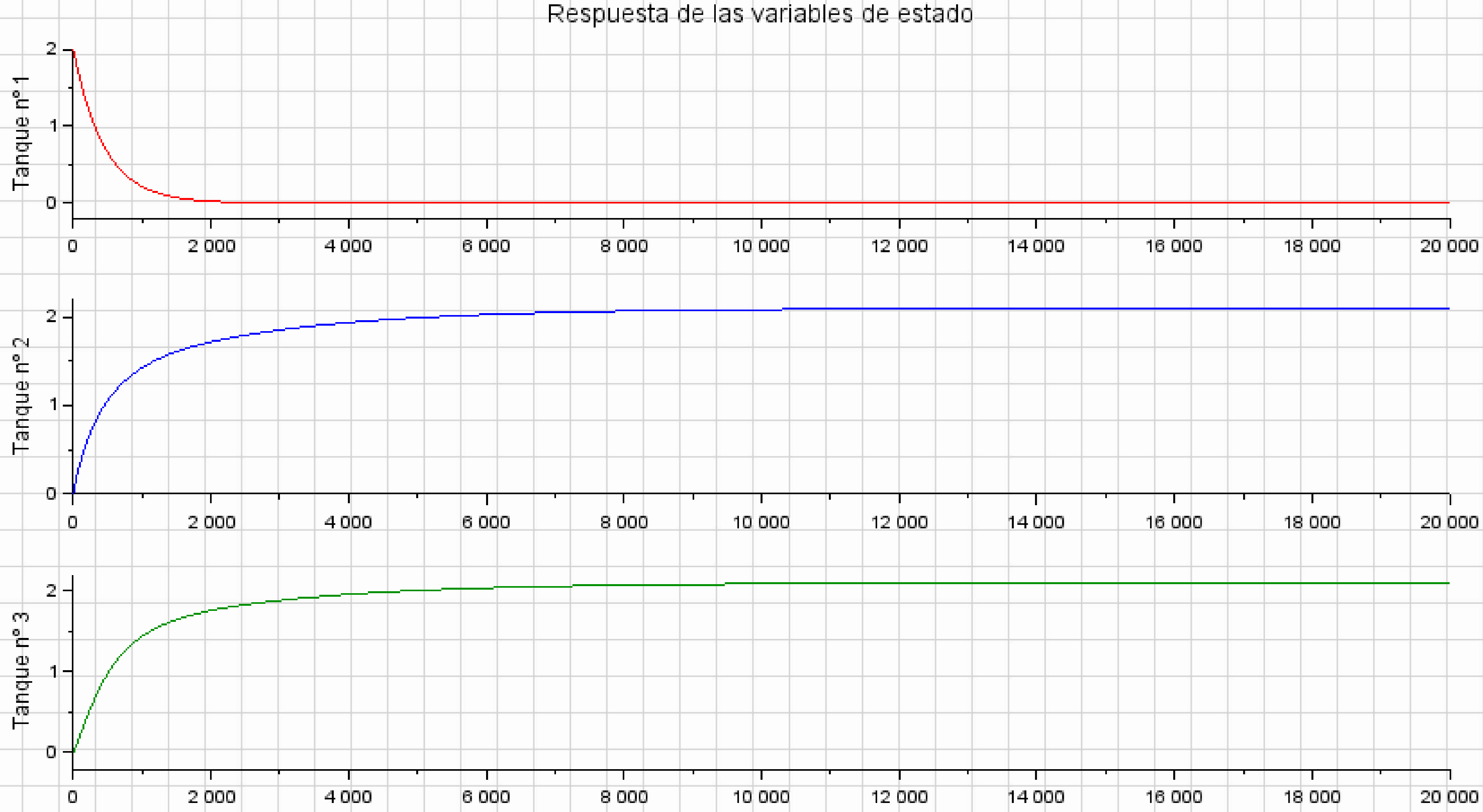
$$\begin{bmatrix}\dot{h}_1\\ \dot{h}_2\\ \dot{h}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.002222 & 0 & 0\\ 0.0020833 & -0.0034722 & 0.0034722\\ 0 & 0.0039683 & -0.0049206\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0.2857143\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}$$

$$y=h_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}$$

El caudal Q_2 se va a controlar a partir de una válvula. Por lo tanto $Q_2=0.007 *u(t)$

SISTEMAS NO CONTROLABLES

La respuesta del sistema para una entrada unitaria, considerando el actuador del caudal Q_2 y con h_1=2m.



SISTEMAS NO CONTROLABLES

Se muestrea con un periodo T=10s, entonces el modelo de estado discreto es :

$$\begin{bmatrix} h_1(k+1) \\ h_2(k+1) \\ h_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9780229 & 0 & 0 \\ 0.0202533 & 0.966536 & 0.0333032 \\ 0.000399 & 0.0380608 & 0.9526438 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.97794 & 0 \\ 0.0204445 & 0.0003377 \\ 0.0002684 & 0.0195204 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

La matriz controlabilidad respecto la entrada u_2 es:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.0003377 & 0.0009765 & 0.0015635 \\ 0.0195204 & 0.0186088 & 0.0177647 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz es 2. El sistema no es totalmente controlable.

SISTEMAS NO CONTROLABLES

La matriz de transformación para separar las variables controlables puede ser :

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0.0003377 & 0.0009765 & 0\\ 0.0195204 & 0.0186088 & 0\end{bmatrix}$$

Se utiliza el modelo solamente con la entrada Q_2 .El modelo transformado con la matriz Q resulta:

$$\hat{x}(k+1)=\begin{bmatrix}-4.438\times10^{-17} & -0.9194969 & -29.46643\\ 1 & 1.9191797 & 30.931\\ 0 & 0 & 0.9780229\end{bmatrix}\hat{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\ 9.708\times10^{-18}\\ 0\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=h_2=\begin{bmatrix}0.0003377 & 0.0009765 & 0\end{bmatrix}$$

El sub-modelo controlable agregando la válvula de control es:

$$x_c(k+1)=\begin{bmatrix}-4.438\times10^{-17} & -0.9194969\\ 1 & 1.9191797\end{bmatrix}x_c(k)+\begin{bmatrix}1\\ 9.708\times10^{-18}\end{bmatrix}u(k)$$

SISTEMAS NO CONTROLABLES

En base a las especificaciones se determina que los autovalores deseados son:

$$z_1 = 0.9867 + 0.0138j \quad \text{y} \quad z_2 = 0.9867 - 0.0138j$$

El vector de realimentación para el sub- modelo controlable es:

$$k_c^T = \begin{bmatrix} -0.0541377 & -0.0497111 \end{bmatrix}$$

El vector de realimentación para el modelo transformado es:

$$\hat{k}^T = \begin{bmatrix} -0.0541377 & -0.0497111 & 0 \end{bmatrix}$$

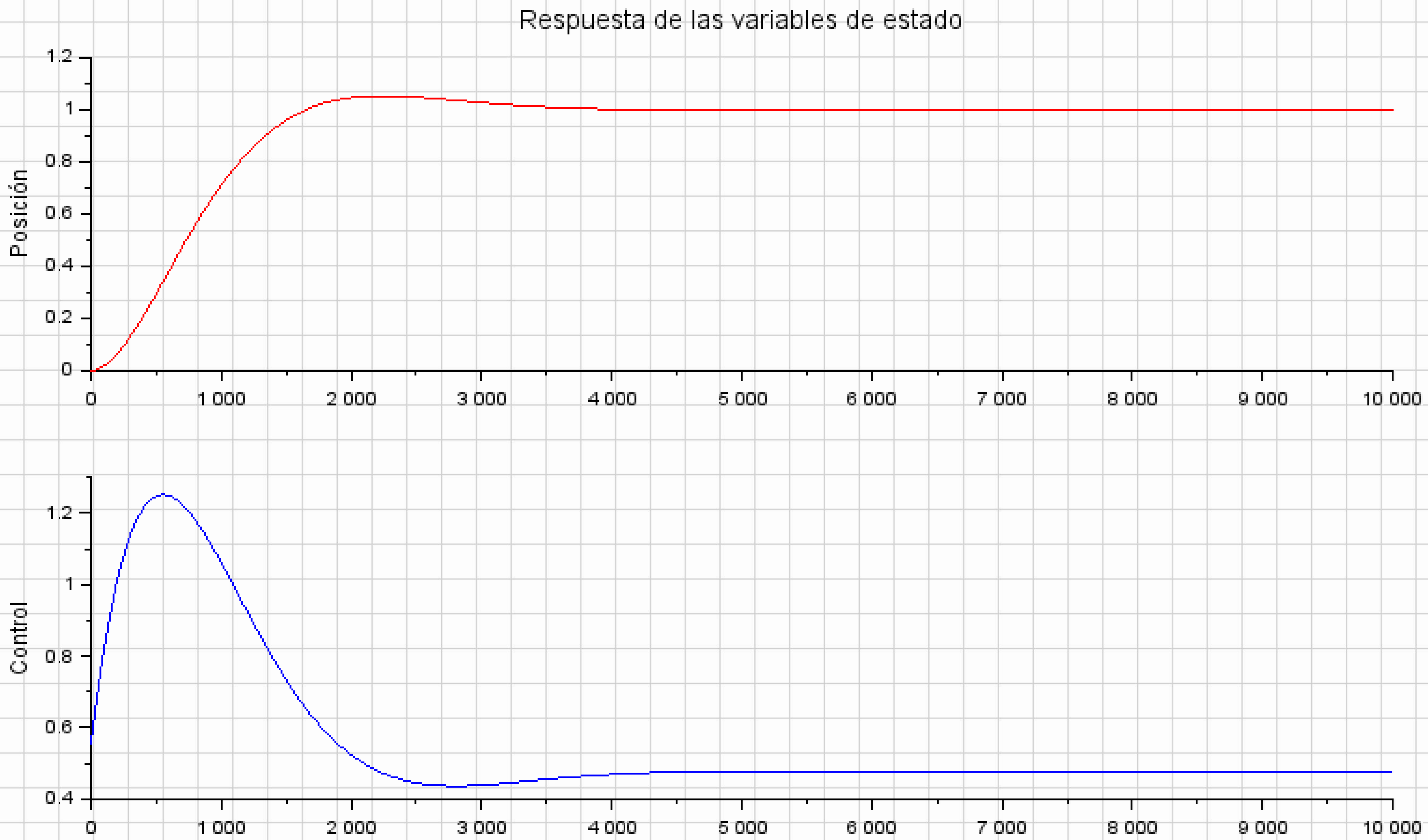
El vector de realimentación para el modelo original es:

$$k^T = \begin{bmatrix} 0 & 2.90038 & -2.82357 \end{bmatrix}$$

Se ajusta la ganancia del controlador para que el sistema a lazo cerrado gane 1. Entonces queda:

$$A_0 = 1.8083 \quad y \quad k_0^T = \frac{k^T}{A_0} = \begin{bmatrix} 0 & 5.2448 & -5.1059 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS NO CONTROLABLES

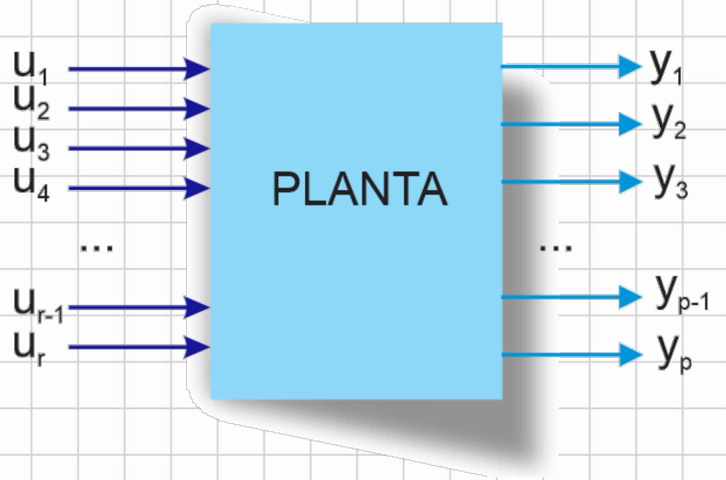


Teoría de Control

Realimentación de Variables de Estado
Sistemas MIMO Controlables

Sistemas MIMO controlables.

Considere un sistema , representado mediante variables de estado en el cual existen múltiples entradas.



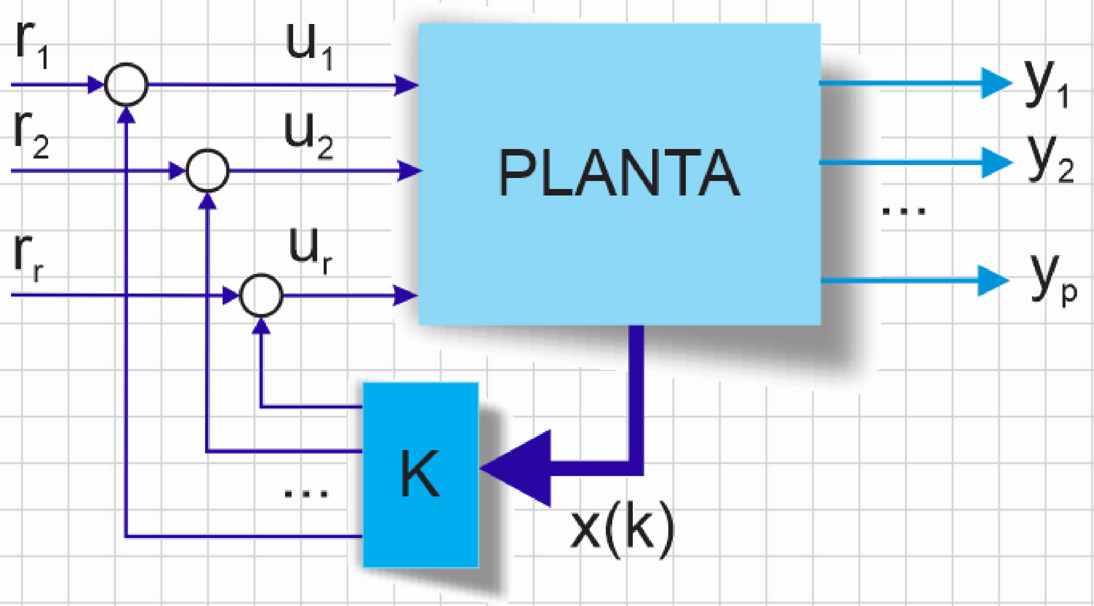
$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$$

$$y(k) = C\,x(k)$$

En donde las dimensiones de B son [n x r].

El sistema se considera controlable desde las r entradas.

Se plantea una realimentación de estados sobre todas las entradas con una ley de control $u(k) = r(k) - Kx(k)$



La matriz K tiene dimensiones [r x n].

Si el objetivo es reasignar los "n" autovalores del sistema, existen infinitas matrices K que cumplen con ese objetivo, ya que existen n ecuaciones y (n*r) incógnitas.

Sistemas MIMO controlables.

Analizando el problema: Si el sistema es controlable puedo reasignar todos los autovalores.

¿Cuantas entradas necesito para que el sistema sea controlable?

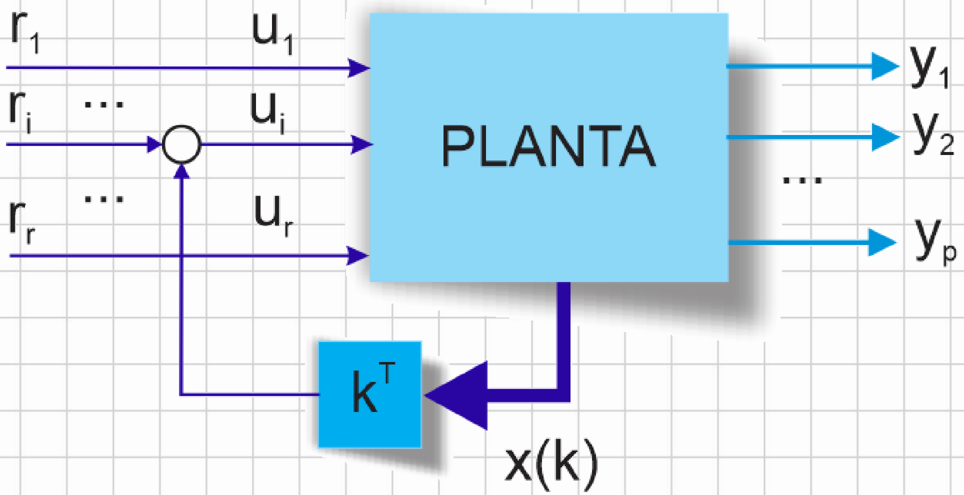
La matriz B esta formada por “r” columnas, cada una correspondiente a una entrada.

$$B = \left[b_1 \,\middle|\, b_2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, b_r \right]$$

Se puede calcular la matriz controlabilidad para cada entrada en particular. Para el caso de la entrada ui será:

$$U_i = \left[b_i \,\middle|\, Ab_i \,\middle|\, A^2 b_i \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, A^{n-1} b_i \right]$$

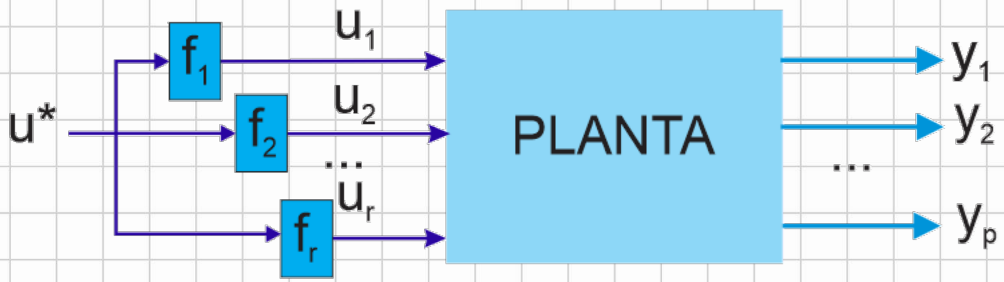
Si el rango de alguna de estas Ui resulta ser “n”, el problema se puede resolver con una solución SISO. En este caso, realimentando solamente sobre la entada en cuestión reasigno todos los autovalores del sistema.



Si no se da la situación anterior, hay que encontrar el mínimo número de entradas que hacen al sistema controlable. Esta cantidad está dada por el rango de la matriz B.

Sistemas MIMO controlables.

En caso de necesitar más de una entrada para que el sistema resulte controlable, se plantea la siguiente solución:



Se considera una entrada u* (entrada ficticia), de modo que cada una de las entradas del modelo resulte proporcional a u* .

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f_1 \cdot u^* \\ u_2 &= f_2 \cdot u^* \\ &\dots \\ u_r &= f_r \cdot u^* \end{aligned}\right\}$$

es decir: $u(k) = F \cdot u^*(k)$ con $f_1, f_2, \dots, f_r$ arbitrarios

Entonces, reemplazando u(k) en el modelo de estado queda: $x(k+1) = A\,x(k) + B\,F\,u^*(k)$

Ahora, el modelo resulta de una sola entrada, con un vector b*= B.F

Se debe cumplir que la matriz controlabilidad para la nueva entrada: $U^* = \left[b^* \middle| Ab^* \middle| \dots \middle| A^{n-1}b^* \right]$

tenga rango n: $Rg\left[U^*\right] = n$ para que mantenga la controlabilidad.

Sistemas MIMO controlables.

A partir de esta modificación, se obtiene un sistema SISO totalmente controlable y se pueden reasignar todos los autovalores del modelo, realimentando las variables de estado sobre u*.

Se puede calcular el vector k^{T*} por el método del MCC para reasignar los autovalores.

La matriz A de la planta realimentada resulta: $A_r = (A - b^* k^{T*})$

Reemplazando b* queda: $A_r = (A - BFk^{T*})$

$$A_r = (A - BK)$$

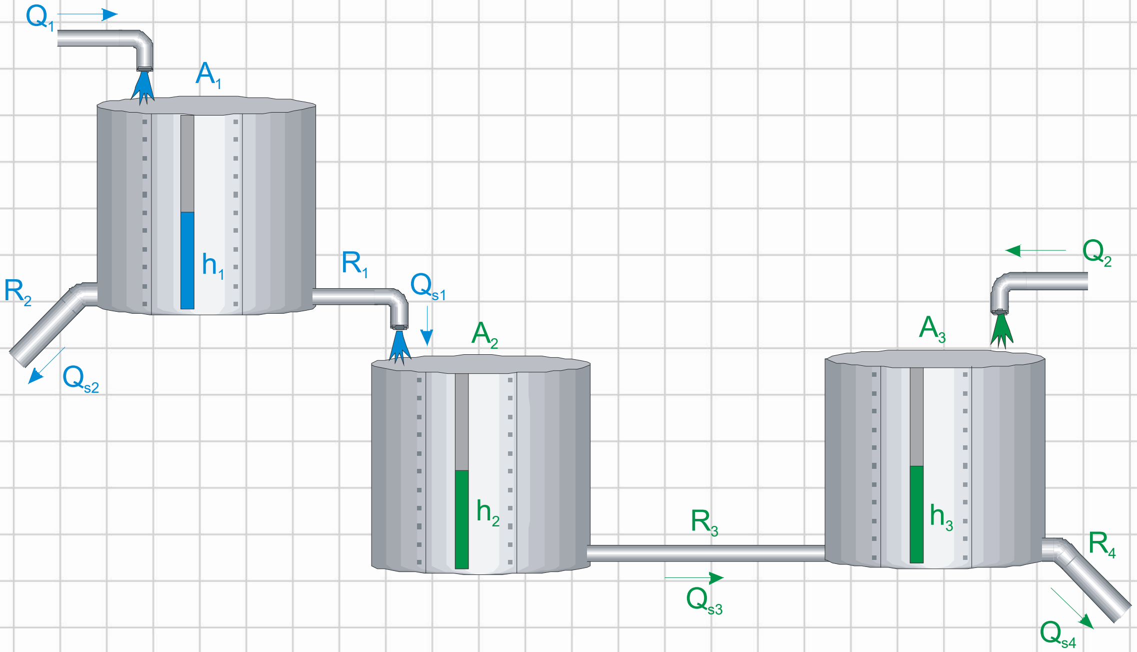
La matriz K que reasigna los autovalores resulta K=F k^{T*} . Es decir que todas las filas de K resultan proporcionales de acuerdo al valor de fi asignado

Sistemas MIMO controlables.

Ejemplo:

La figura muestra un sistema de nivel de líquidos en el cual se desea controlar el nivel h2 actuando sobre el los caudales Q1 y Q2

A1 = 5 m2
A2 = 4 m2
A3 = 3.5 m2
R1 = 120 seg /m2
R2 = 360 seg /m2
R3 = 72 seg /m2
R4 = 300 seg /m2



Analice la posibilidad de utilizar una realimentación de estado para lograr un control con las siguientes especificaciones : Sobrepico 5% y Tiempo de Establecimiento : 3000 seg.

Sistemas MIMO controlables.

El modelo hallado en el desarrollo del ejemplo de sistemas no controlables con entradas Q1 y Q2 resulta:

$$\begin{bmatrix} h_1(k+1) \\ h_2(k+1) \\ h_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9780229 & 0 & 0 \\ 0.0202533 & 0.966536 & 0.0333032 \\ 0.000399 & 0.0380608 & 0.9526438 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.97794 & 0 \\ 0.0204445 & 0.0482428 \\ 0.0002684 & 2.7886217 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$y = h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

La matriz controlabilidad del sistema considerando las dos entradas es:

$$U = \begin{bmatrix} 0.0138456 & 0 & 0.0135413 & 0 & 0.0132437 & 0 \\ 0.0001431 & 0.0003377 & 0.0004188 & 0.0009765 & 0.0006795 & 0.0015635 \\ 0.0000019 & 0.0195204 & 0.0000128 & 0.0186088 & 0.0000335 & 0.0177647 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz es 3

Sistemas MIMO controlables.

Se define el vector de transformación para la entrada ficticia como: $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto, la nueva matriz de entrada resulta:

$$B^* = BF = \begin{bmatrix} 0.0138456 & 0 \\ 0.0001431 & 0.0003377 \\ 0.0000019 & 0.0195204 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0138456 \\ 0.0004808 \\ 0.0195222 \end{bmatrix}$$

La matriz controlabilidad para la entrada ficticia es:

$$U^* = \begin{bmatrix} 0.0138456 & 0.0135413 & 0.0132437 \\ 0.0004808 & 0.0013953 & 0.002243 \\ 0.0195222 & 0.0186216 & 0.0177982 \end{bmatrix}$$

El rango de esta matriz controlabilidad es 3.

En base a las especificaciones se determina que los autovalores dominantes deseados son:

$z_1 = 0.9867 + 0.0138j$ y $z_2 = 0.9867 - 0.0138j$ Se agrega un tercer autovalor en: $z_3 = 0.875173$

El vector de realimentación para el modelo correspondiente a la entrada ficticia es:

$$k^T * = \begin{bmatrix} -0.3862277 & -1.0945623 & 2.7960803 \end{bmatrix}$$

Sistemas MIMO controlables.

La matriz de realimentación para el sistema MIMO es: $K^* = F \cdot k^{T*} = \begin{bmatrix} -0.3862277 & -1.0945623 & 2.7960803 \\ -0.3862277 & -1.0945623 & 2.7960803 \end{bmatrix}$

Se va a considerar que la señal de referencia se aplica solamente en la entrada del tanque de área A3. Entonces se va a ajustar la ganancia respecto de esa entrada.

La ganancia del sistema a lazo cerrado se puede calcular utilizando solamente la entrada de referencia 2 [B(2)], como:

$$\frac{1}{A_0} = C\left[I-(A-BK)\right]^{-1} B(2) = -0.0955893$$

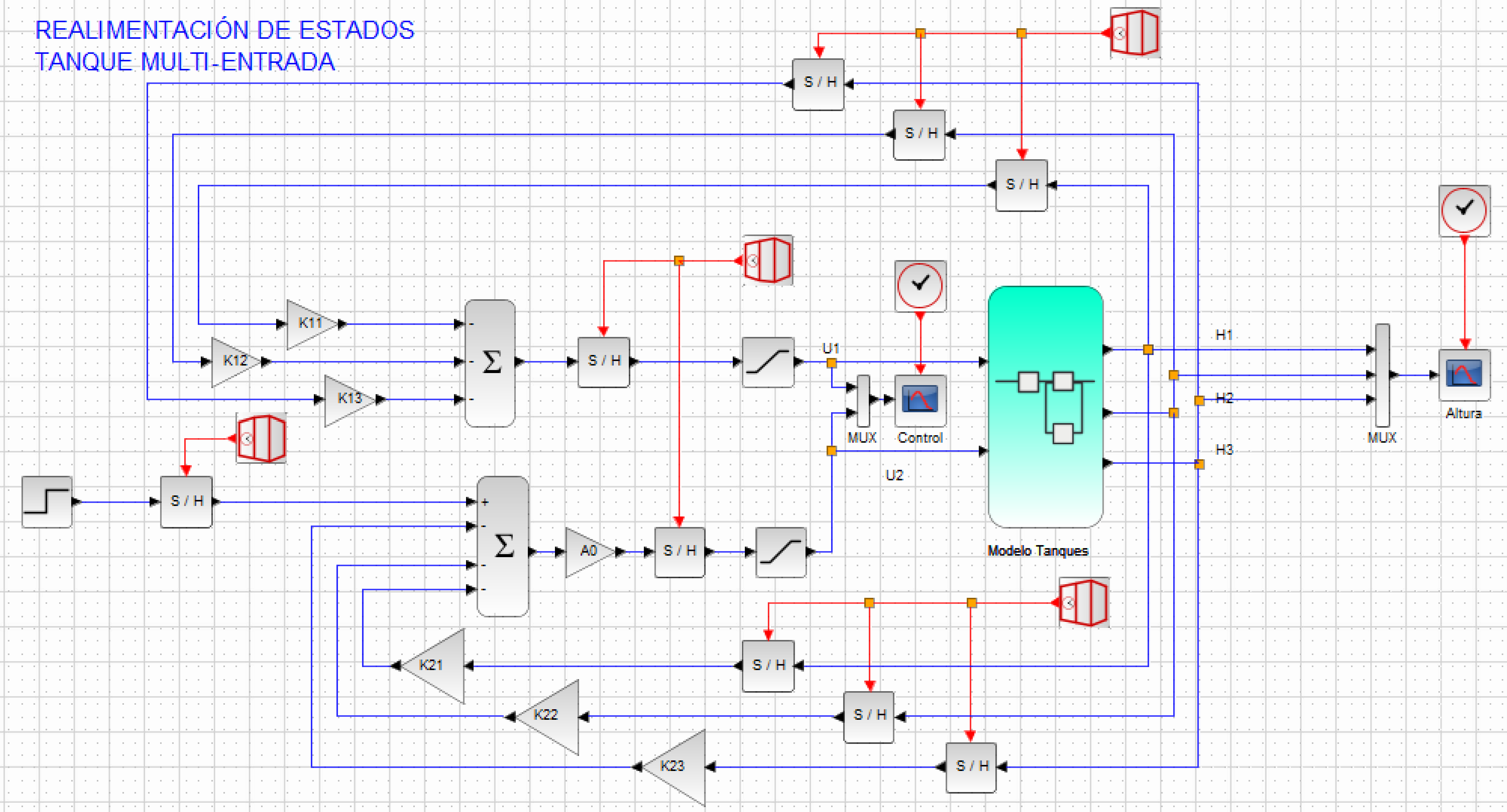
Entonces queda: $A_0 = -10.461427$ y $K = \begin{bmatrix} -0.3862277 & -1.0945623 & 2.7960803 \\ 0.0369192 & 0.104628 & -0.2672752 \end{bmatrix}$

Se analizarán distintas alternativas de diseño por simulación

Realimentación de Variables de Estado

Sistemas MIMO controlables.

Se va a utilizar el siguiente esquema de realimentación:



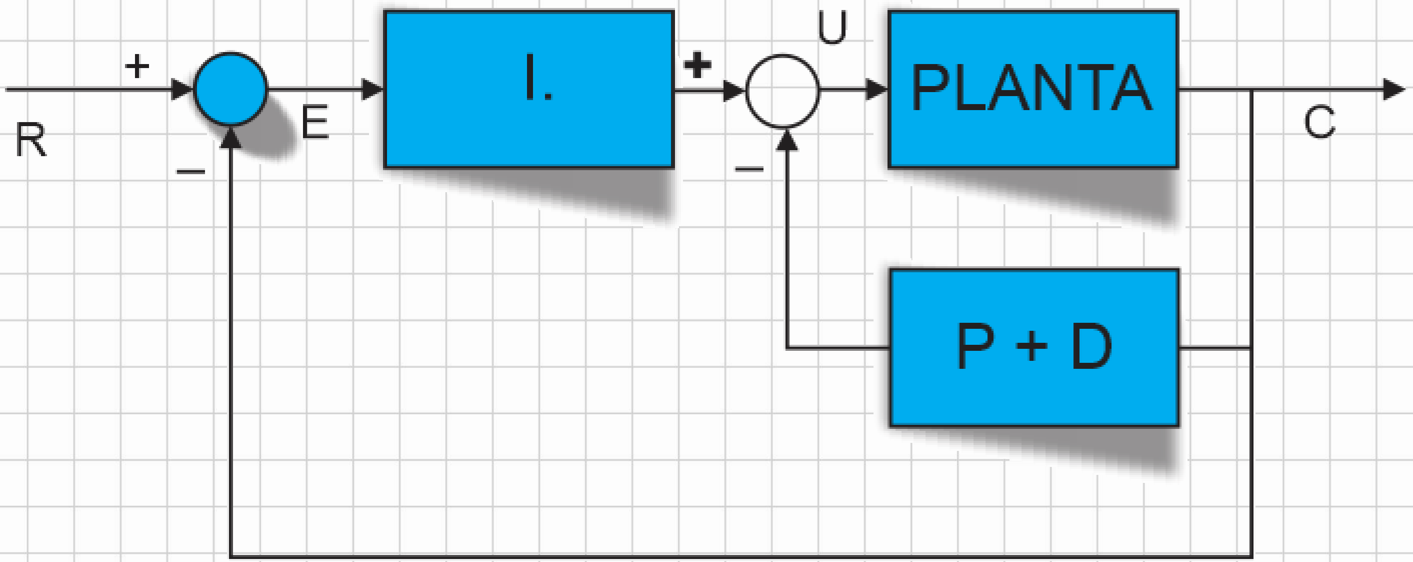
Teoría de Control

Realimentación de Variables de Estado
Sistemas de Seguimiento

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

En el diseño de controladores se suele especificar la precisión del sistema a través del error en régimen permanente. En sistemas de seguimiento se requiere error nulo al escalón, condición que se puede satisfacer con la existencia de un integrador en la transferencia de lazo abierto. Esta situación se puede dar por que la planta ya cuenta con el integrador o mediante la inclusión de este en la transferencia del compensador serie, si la planta fuese tipo cero.

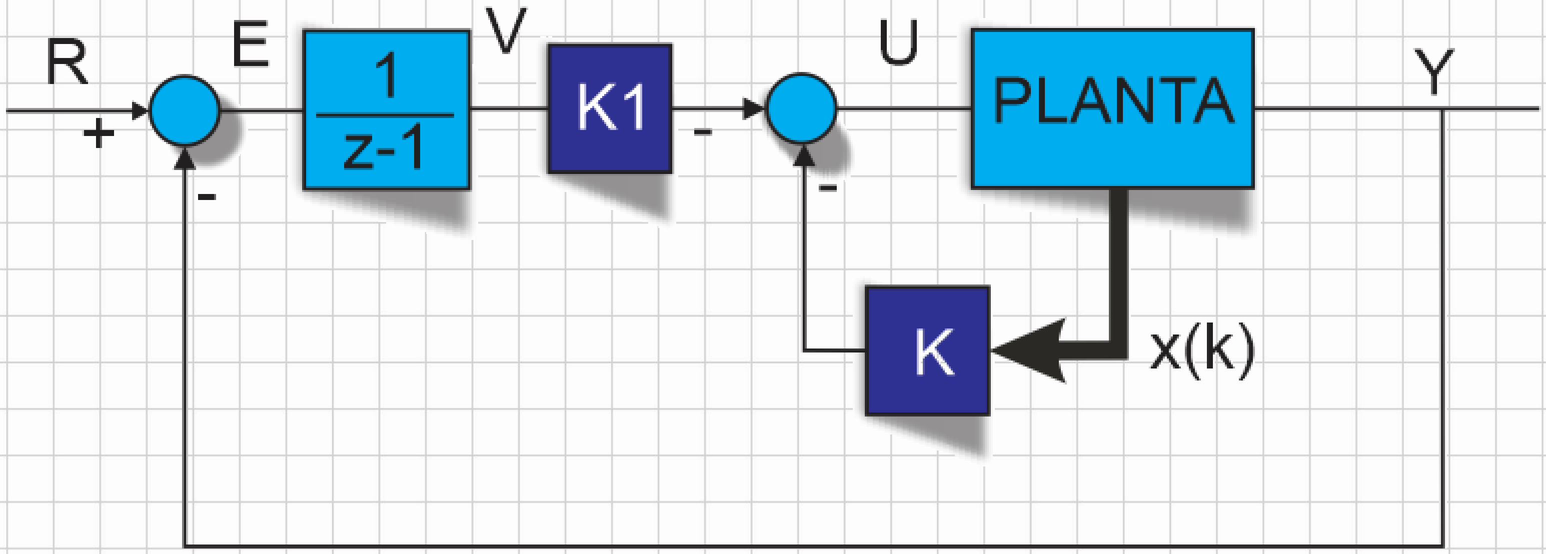
Para el caso de un controlador PID se podía plantear la siguiente solución:



El término integral que afecta al error, asegura el error nulo al escalón.

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Si se desea realizar un sistema de seguimiento utilizando una realimentación de variables de estado, para una planta tipo cero, el esquema a utilizar es el siguiente:

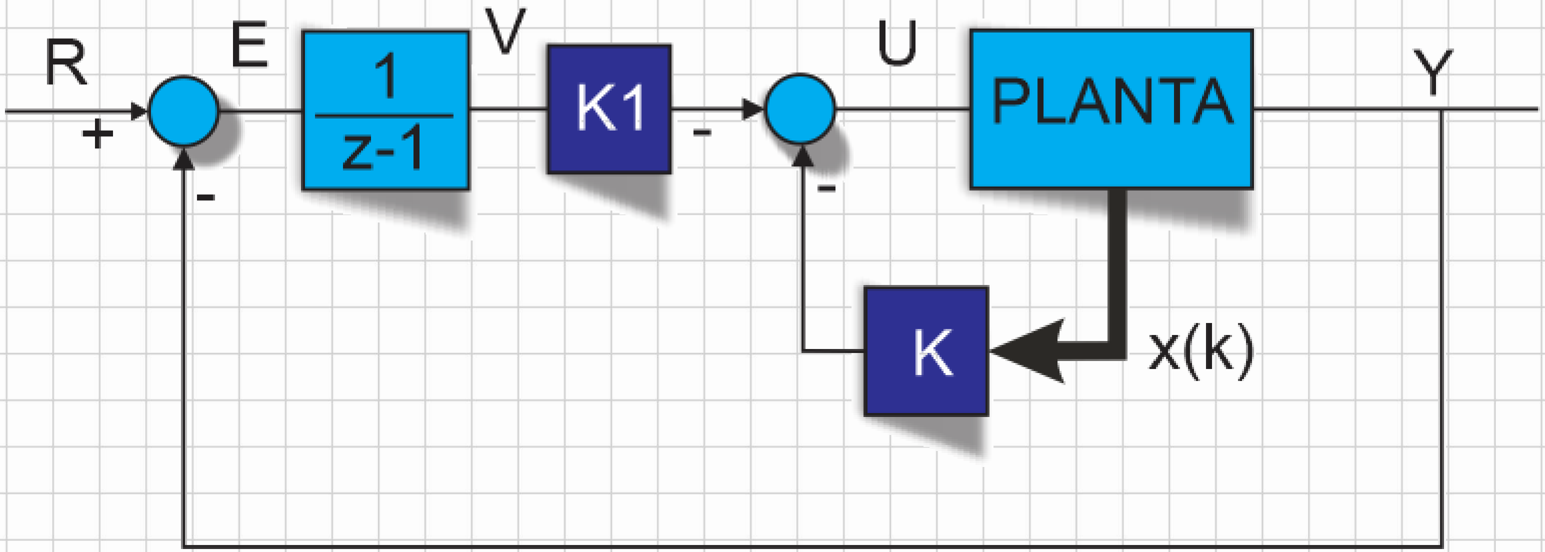


El modelo de estado de la planta es:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$$

$$y(k) = C\,x(k)$$

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO



Al agregar el integrador se incrementa la cantidad de variables de estado .

La ecuación de estado para la nueva variable es:

$$r(k) - y(k) = r(k) - Cx(k) = v(k+1) - v(k)$$

$$v(k+1) = v(k) - Cx(k) + r(k)$$

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

El modelo de estado con la incorporación de la nueva variable resulta:

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}}_{A^*} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B^*} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

La ley de control que se plantea es la siguiente: $u(k) = -K\,x(k) - K_1\,v(k)$

$$u(k) = -\underbrace{\begin{bmatrix} K & K_1 \end{bmatrix}}_{K^*} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}}_{x^*}(k)$$

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

El modelo realimentado con la ley de control planteada resulta:

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}}_{A^*} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}}_{x^*}(k) - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B^*} \underbrace{\begin{bmatrix} K & K_1 \end{bmatrix}}_{K^*} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}}_{x^*} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

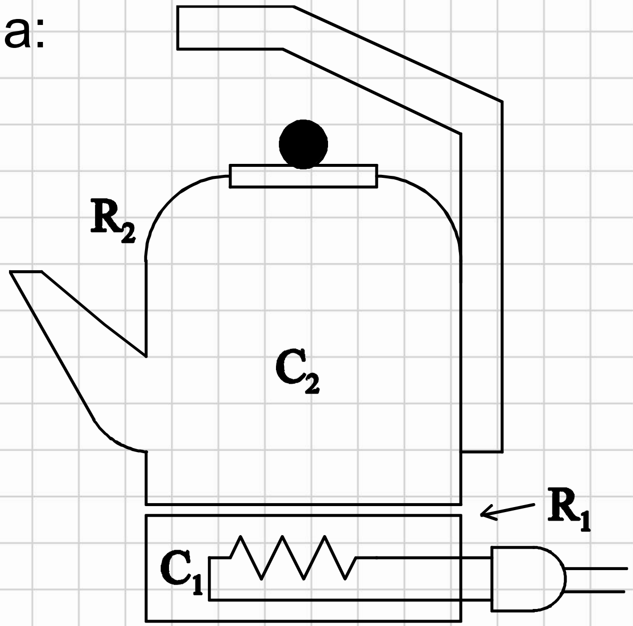
$$x^*(k+1) = \left[A^* - B^* K^* \right] \; x^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

Los autovalores del modelo realimentado pueden reasignarse a posiciones arbitrarias si el par [A*, B*] es controlable y se puede calcular el vector K* utilizando el método del M.C.C..

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

7-9) Se desea controlar el sistema térmico correspondiente al ejercicio 2-2) de modo que la respuesta de lazo cerrado, para una entrada en escalón, tenga:

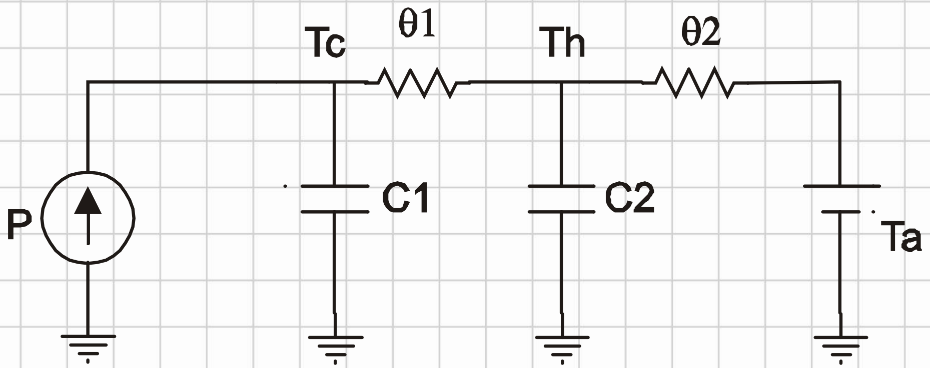
- Ganancia unitaria para la entrada de potencia.
- Amortiguamiento crítico.
- Tiempo de establecimiento de aproximadamente 600 seg.



a) Diseñe un controlador por realimentación de estado que cumpla con las especificaciones.
b) Analice el comportamiento del sistema ante variaciones en la ganancia.
c) Considere el caso en el que a las especificaciones anteriores se le suma la de poseer error nulo, en régimen permanente, para una entrada en escalón. Plantee un controlador por realimentación de estado que tenga en cuenta esta posibilidad.
d) Analice, para esta nueva alternativa, el comportamiento ante variaciones de ganancia.

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Aplicando nodos sobre el circuito equivalente



$$P = \dot{T}_c C_1 + \frac{T_c - T_h}{\theta_1}$$

$$\frac{T_c - T_h}{\theta_1} = \dot{T}_h C_2 + \frac{T_h - T_a}{\theta_2}$$

Agrupando las ecuaciones

$$\dot{T}_c = \frac{P}{C_1} - \frac{T_c}{\theta_1 C_1} + \frac{T_h}{\theta_1 C_1}$$

$$\dot{T}_h = \frac{T_c}{\theta_2 C_2} - \frac{T_h}{C_2}\left(\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1}\right) + \frac{T_a}{\theta_2 C_2}$$

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

$$\begin{bmatrix}\dot{T}_c\\ \dot{T}_h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.003 & 0.003\\ 0.0003 & -0.0011\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_c\\ T_h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0025 & 0\\ 0 & 0.0008\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\\ T_a\end{bmatrix}$$

Modelo de Estado Discreto (T=1 seg)

$$\begin{bmatrix}T_c\\ T_h\end{bmatrix}(k+1)=\begin{bmatrix}0.997 & 0.002994\\ 0.0002994 & 0.9989\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_c\\ T_h\end{bmatrix}(k)+\begin{bmatrix}0.002496 & 1.198e-6\\ 3.745e-7 & 0.0007996\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\\ T_a\end{bmatrix}(k)$$

Autovalores de lazo cerrado

$$\xi=1 \qquad \frac{4}{\xi\omega_n}=600seg$$

$$p_{1,2}=6.67e-3$$ Autovalores continuos

$$\omega_n=6.67e-3$$

$$z_{1,2}=0.9933$$ Autovalores discretos

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Vector de Realimentación

$$K = \begin{bmatrix} 3.7215 & 43.1304 \end{bmatrix}$$

La transferencia a lazo cerrado para la entrada de potencia queda:

$$G(z) = \frac{3.745e\text{-}7\ z + 3.74e\text{-}7}{z^2 - 1.987\ z + 0.9866}$$

La ganancia 1/Ao= 0.0167

El nuevo Vector de Realimentación queda:

$$K = \begin{bmatrix} 0.0621 & 0.7191 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Control Integral

Modelo Ampliado

$$\begin{bmatrix} T_c \\ T_h \\ v \end{bmatrix}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9970 & 0.0030 & 0 \\ 0.0003 & 0.9989 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_c \\ T_h \\ v \end{bmatrix}(k) + \begin{bmatrix} 2.496\text{e-}3 \\ 3.744\text{e-}7 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

Autovalores deseados:

$$z_{1,2} = 0.9933$$
$$z_3 = 0.93$$

Vector de Realimentación

$$K^* = \begin{bmatrix} 31.6 & 1192.1 & 4.2 \end{bmatrix}$$

Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO