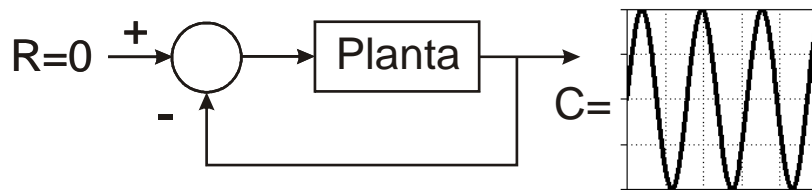
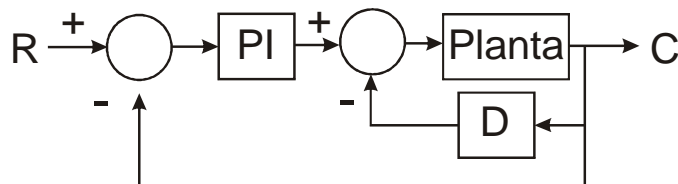


# RESOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL CURSADA 2018

1) Una determinada planta estable, SISO, lineal e invariante en el tiempo, produce una salida prácticamente senoidal, de frecuencia  $f_0$ [Hz], al implementarse una realimentación unitaria en la misma con entrada de referencia nula.



Para que la salida de la planta reproduzca señales de entrada de tipo escalonada se propone agregar un controlador PID con la disposición indicada.



El controlador propuesto realiza un procesamiento digital de señales, tomando muestras y desarrollando el control  $u(k)$ , con retención de orden cero, cada  $T_s$  [s]. Esto se realiza operando a una frecuencia de muestreo mucho mayor que la más alta frecuencia presente en los espectros de las señales a muestrear.

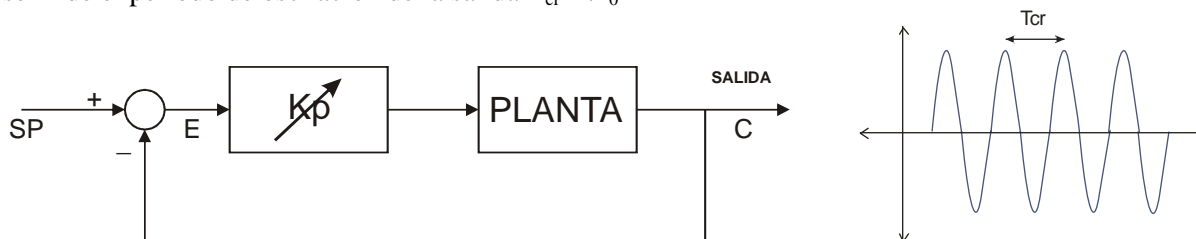
- Explique cómo sintonizar el controlador a partir de la información disponible.
- Indique cómo hallar el algoritmo de control discreto recursivo,  $u(k)$ , para el controlador PID con la disposición indicada, expresando el mismo claramente. Utilice aproximación trapezoidal para la integral.
- Indique, analizando la información brindada en el enunciado, cuál es el motivo por el cual se decide que la acción derivativa se aplique desde la salida.

a) El ejercicio trata sobre el diseño de un controlador PID discreto. Como la frecuencia de muestreo es alta comparada con el ancho de banda del sistema, se pueden considerar las constantes del controlador extraídas de un análisis continuo.

La ecuación del controlador PID para el sistema propuesto tiene la siguiente forma:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt - T_d \frac{dy(t)}{dt} \right]$$

Para el sistema descrito, el lazo cerrado con ganancia unitaria  $K_{cr}=1$  resulta oscilatorio sostenido. En esta condición se mide el periodo de oscilación de la salida  $T_{cr}=1/f_0$



Con los valores de ganancia y periodo de oscilación se encuentran las constantes del controlador mediante la siguiente relación:

CONTROLADOR	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5 K_{cr}$		
PI	$0,45 K_{cr}$	$T_{cr}/1,2$	
PID	$0,6 K_{cr}$	$T_{cr}/2$	$T_{cr}/8$

Estos valores aseguran estabilidad a lazo cerrado pero pueden ser variados criteriosamente para lograr una respuesta más apropiada para el sistema.

La discretización del algoritmo se realiza aplicando la aproximación discreta para la derivada de la salida y para la integral del error por trapecios con un periodo de muestreo  $T_s$ .

Para la derivada se aplica  $D = \frac{y(k) - y(k-1)}{T_s}$

Para la integral se aplica  $I = \sum_{i=0}^k T_s \frac{[e(i) + e(i-1)]}{2}$

Entonces la expresión del controlador PID resulta :

$$u(k) = K_p \left[ e(k) + \frac{T_s}{T_i} \sum_{i=0}^k \frac{[e(i) + e(i-1)]}{2} - \frac{T_d}{T_s} [y(k) - y(k-1)] \right]$$

Esta expresión puede provocar la saturación del valor de  $u(k)$  debido a la sumatoria por lo tanto se aplica la forma de velocidad donde se calcula  $u(k) - u(k-1)$

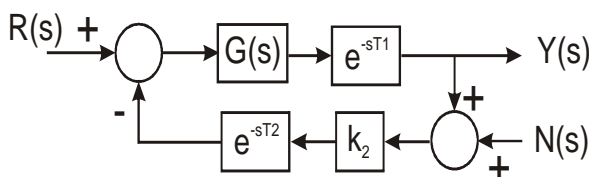
$$u(k) - u(k-1) = K_p \left[ e(k) - e(k-1) + \frac{T_s}{T_i} \frac{e(k) + e(k-1)}{2} - \frac{T_d}{T_s} (y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)) \right]$$

$$u(k) = u(k-1) + \left[ K_p + \frac{K_p T_s}{2T_i} \right] e(k) - \left[ K_p - \frac{K_p T_s}{2T_i} \right] e(k-1) - \frac{K_p T_d}{T_s} y(k) + \frac{2K_p T_d}{T_s} y(k-1) - \frac{K_p T_d}{T_s} y(k-2)$$

Este algoritmo no presenta problemas de saturación.

La acción derivativa se toma desde la salida debido a que se especifica que la planta debe reproducir señales de forma escalonada; si la acción derivativa se ubica sobre el error, en los flancos pueden producir valores del control de gran amplitud que luego requieren un tiempo de estabilización. Al ubicarse sobre la salida las transiciones son más suaves y se evita tener señales de gran amplitud en el control.

2) Dado el sistema realimentado de la figura.



$$G(s) = \frac{k_1 s}{(s+a)^2}$$

$r(t)$  : entrada de referencia.  
 $n(t)$  : entrada de ruido  
 $y(t)$  : salida.

Todas las constantes son reales y positivas.

- Halle la matriz de transferencias del sistema.
- Empleando "diagramas de Bode", explique cómo analizar la estabilidad del sistema indicado.
- Para  $k_1 = 1$ , halle el máximo valor de  $k_2$  que asegura estabilidad del sistema, independientemente de los valores de  $T_1$  y  $T_2$ .

- Par hallar la matriz de transferencia se debe aplicar el principio de superposición para sistemas lineales, en el cual la respuesta total del sistema es la suma de las respuestas individuales para cada una de las entradas, por lo tanto:

$$Y(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)N(s), \text{ en donde } G_1(s) = Y(s)/R(s)|_{N(s)=0} \text{ y } G_2(s) = Y(s)/N(s)|_{R(s)=0}$$

Para este caso con  $N(s)=0$ :

$$Y(s)|_{N=0} = [R(s) - K_2 e^{-sT_2} Y(s)] G(s) e^{-sT_1}$$

$$Y(s) (1 + K_2 G(s) e^{-s(T_1+T_2)}) = G(s) e^{-sT_1} R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) e^{-sT_1}}{1 + K_2 G(s) e^{-s(T_1+T_2)}} = G_1(s)$$

Ahora con  $R(s)=0$

$$Y(s)|_{R=0} = (N(s) + Y(s)) [-K_2 e^{-s(T_1+T_2)} G(s)]$$

$$Y(s) (1 + K_2 G(s) e^{-s(T_1+T_2)}) = -K_2 G(s) e^{-s(T_1+T_2)} R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{-K_2 G(s) e^{-s(T_1+T_2)}}{1 + K_2 G(s) e^{-s(T_1+T_2)}} = G_2(s)$$

Finalmente la matriz de transferencias será:  $G_T(s) = \begin{bmatrix} \frac{G(s)e^{-sT_1}}{1 + K_2 G(s)e^{-s(T_1+T_2)}} & \frac{-K_2 G(s)e^{-s(T_1+T_2)}}{1 + K_2 G(s)e^{-s(T_1+T_2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$

- b) El análisis de estabilidad empleando “diagramas de Bode” se debe resolver utilizando la transferencia de lazo abierto del sistema. En tal sentido, las señales que ingresan al lazo de control no intervienen en el análisis de estabilidad.

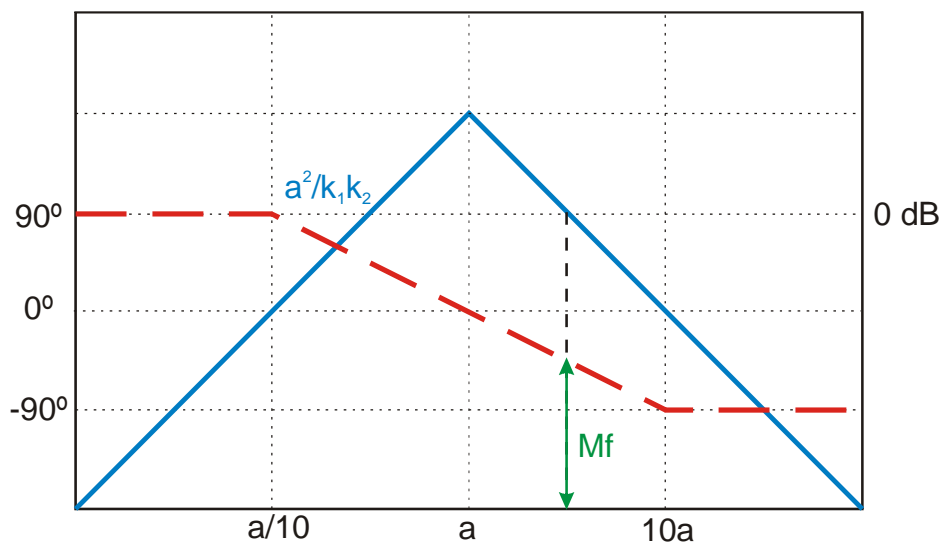
En este caso la transferencia de lazo abierto es:  $GH(s) = K_2 G(s) e^{-s(T_1+T_2)}$ . Queda excluida de esta transferencia el signo del sumador sobre  $R(s)$ , por lo tanto se va a analizar la condición que  $GH(s) = -1$ . Otra forma de ver esta situación es tomar la condición en la que el denominador de las transferencias es igual a cero.

Inicialmente se dibujan las curvas de módulo y fase de la transferencia sin tener en cuenta los retardos  $T_1$  y  $T_2$ . En estas condiciones (y suponiendo los polos y ceros de  $G(s)$  en el semiplano izquierdo, como es el caso) se verifica el valor del margen de fase.

Normalizando la transferencia queda:  $GH^*(s) = \frac{k_1 k_2}{a^2} \frac{s}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)^2}$

Para la transferencia dada la curva de amplitud crece a 20 dB/dec y en  $\omega=a$  empieza a caer con -20 dB/dec. La fase en baja frecuencia es de  $+90^\circ$  una década antes del polo empieza a caer con  $-90^\circ/\text{dec}$  finalizando en  $\omega=10a$  con  $-90^\circ$ . Se muestra la curva a continuación. La proyección de la recta del cero corta 0 db en la frecuencia  $\omega=a^2/k_1 k_2$ .

El valor máximo de amplitud resulta para  $\omega=a$  y es  $\text{Mod}_{\max} = k_1 k_2 / 2a$ .



Si la curva tiene un  $\text{Mod}_{\max}$  mayor que 1 entonces hay 2 cruces por 0 dB y el menor Margen de Fase se da en el segundo cruce. Si este se produce a una frecuencia mayor a  $10a$  el margen de fase será de  $90^\circ$ .

$$\text{MF} = 180^\circ + \text{Fase}(\omega_c).$$

La parte exponencial de  $GH(s)$  (retardo) agrega fase negativa al sistema en forma lineal, sin alterar el módulo,

$$\text{Fase}_{\text{Retardo}} = \omega(T_1+T_2) \text{ (radianes)}$$

Esta fase agregada al gráfico realizado puede generar inestabilidad en el sistema en la medida que supere el Margen de Fase obtenido sin retardo. Por lo tanto, la condición de estabilidad será:

$$T_1+T_2 \text{ (max)} = \text{MF} \pi / (\omega_c 180)$$

Si el valor del retardo excede este máximo el sistema resulta inestable. Caso contrario el margen de fase resultará positivo con un valor:

$$\text{MF} = 180^\circ + \text{Fase}(\omega_c) - \omega_c(T_1+T_2) 180/\pi > 0$$

- c) Si la curva tiene un  $\text{Mod}_{\max}$  menor que 1, el sistema nunca puede hacerse inestable ya que no existe el margen de fase y en esta condición el sistema es estable. (se podría argumentar dibujando el diagrama de Nyquist)

Por lo tanto, para  $k_1=1$ , La condición para que la estabilidad sea independiente del retardo es que el  $\text{Mod}_{\max} \leq 1$  entonces,  $k_2 \leq 2a$ .

3) En la figura 1 se muestra el sistema de control de velocidad de una pulidora, la cual puede modelarse mediante un motor de CC y una carga mecánica acoplada al eje del motor con parámetros  $J$ ,  $B_1$ ,  $k_r$  y  $B_2$ . La velocidad angular  $w$  es medida con un sensor de ganancia  $K_s$  [Vs/rad]. El sistema de control es implementado en el dominio del tiempo continuo con un circuito analógico utilizando amplificadores operacionales y resistencias.

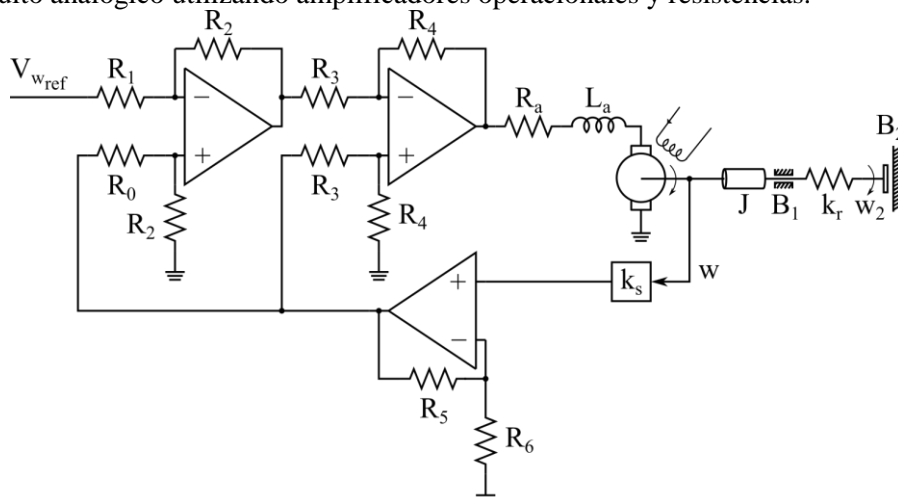


Figura 1: Sistema de control de velocidad de una pulidora

En la figura 2 se muestra el diagrama de bloques del lazo de control resultante.

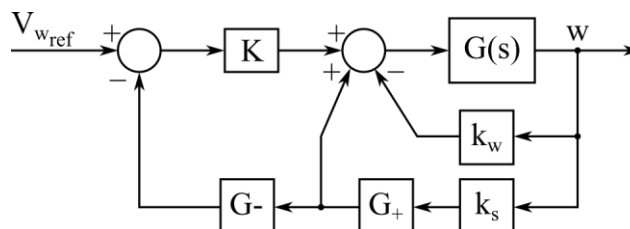


Figura 2: Diagrama de bloques del sistema de control

La transferencia del motor y de la carga mecánica quedan representadas por los bloques  $G(s)$  y  $K_w$ , los cuales resultan:

$$G(S) = \frac{5000(s + 20)}{(s + 10000)(s^2 + 40s + 10400)}$$

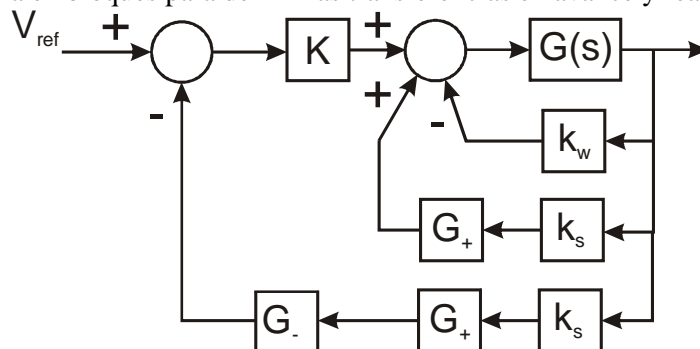
y  $K_w=2,5$  [Vs/rad]. La ganancia del sensor de velocidad es  $K_s=0,01$  [Vs/rad]. El circuito encargado de realizar la realimentación define tres bloques:  $G_+$  que es la ganancia de la etapa no inversora, implementada con  $R_5$  y  $R_6$ ,  $G_- = 0,1$  que es la ganancia definida por la etapa de resistencias  $R_0$ ,  $R_1$  y  $R_2$ , y  $K$  que es la ganancia determinada por la etapa de resistencias  $R_3$  y  $R_4$ .

Dado el sistema de control anterior:

- Definir la ganancia  $G_+$  de modo de obtener un sistema que presente error nulo a una entrada de referencia en escalón.
- Habiendo definido  $G_+$ , encuentre el rango aproximado de valores de  $K$  para los cuales el sistema resulta estable. Realice el análisis empleando diagramas de Bode y de Nyquist.

Resolución:

Se puede redibujar el diagrama en bloques para definir las transferencias en avance y realimentación ( $G_p$  y  $H$ )



La Transferencia de la cadena de avance es:  $G_p(s) = K \frac{G(s)}{1 + G(s)[k_w - k_s G_+]}$  y la transferencia de realimentación es :  
 $H(s) = k_s G_+ G_-$ .

Reemplazando valores en  $G_p(s)$ .

$$G_p(s) = \frac{5000K(s+20)}{(s+10000)(s^2+40s+10400)+5000(s+20)[k_w - k_s G_+]}$$

$$G_p(s) = \frac{5000K(s+20)}{s^3+1.004 \times 10^4 s^2+4.229 \times 10^5 s+1.0425 \times 10^8-50G_+s-1000G_+}$$

Para tener error nulo al escalón  $G_p$  debe ser tipo 1, entonces debe desaparecer el término independiente. Entonces:  
 $1.0425 \times 10^8 = 1000G_+ \Rightarrow 1.0425 \times 10^5 = G_+$

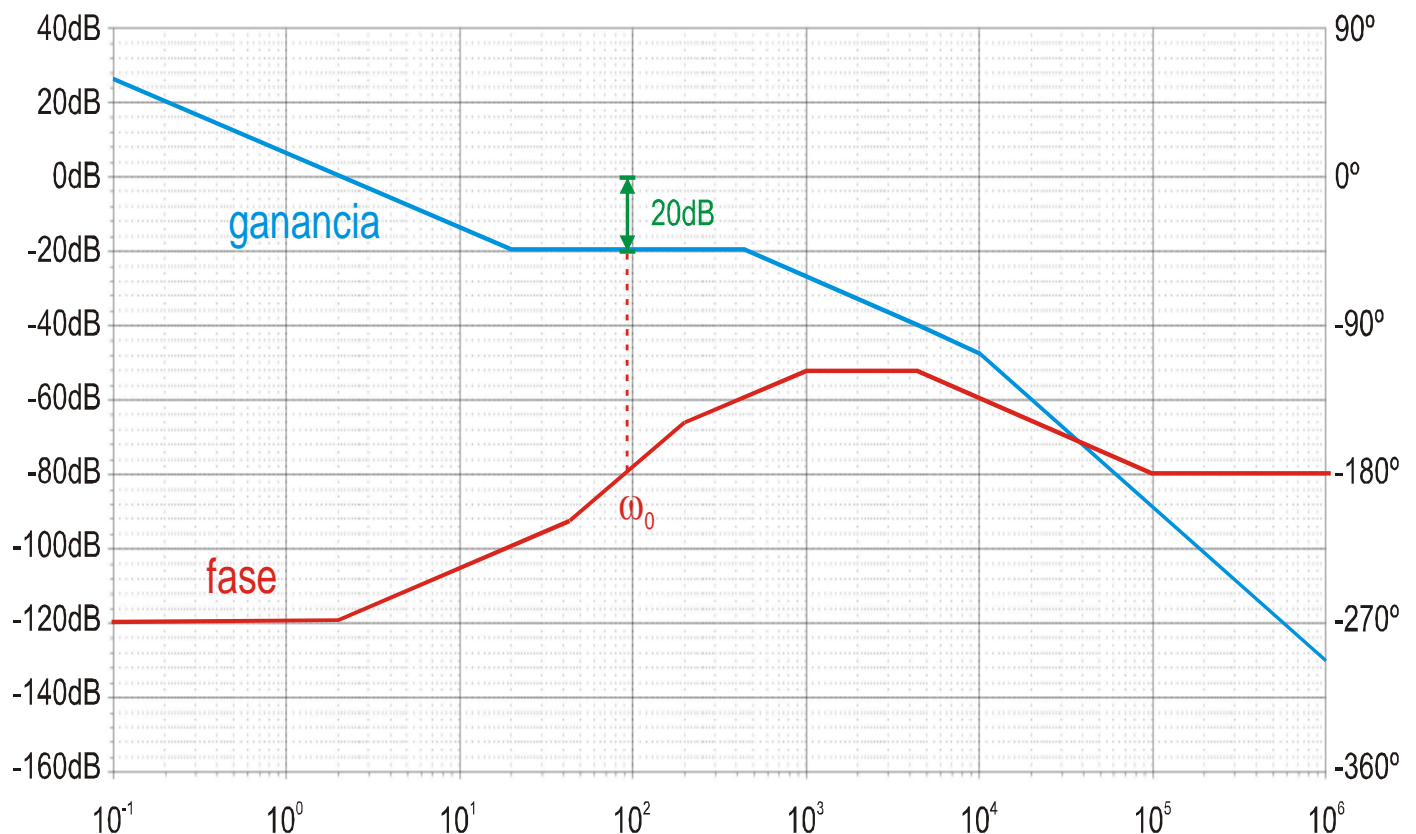
Para este valor la transferencia en avance queda:

$$G_p(s) = \frac{5000K(s+20)}{s(s^2+1.004 \times 10^4 s-4.79 \times 10^6)} = \frac{5000K(s+20)}{s(s-456.3)(s+1.05 \times 10^4)}$$

La transferencia de realimentación es :  $H = k_s G_+ G_- = 104.25$

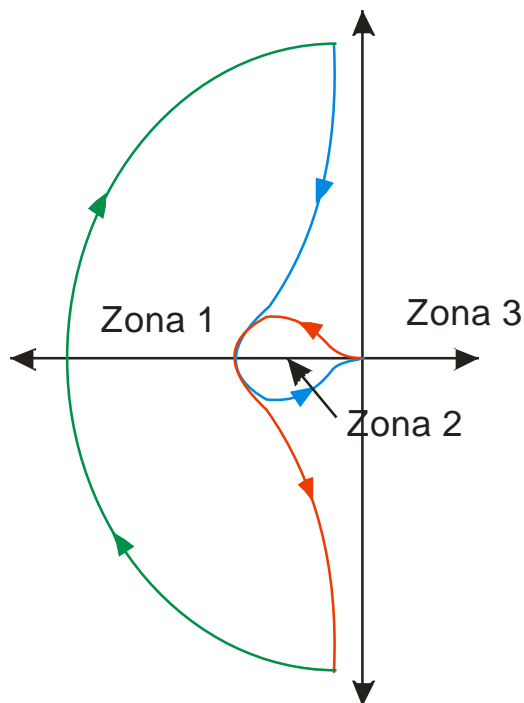
La Transferencia de lazo abierto es:  $G_p(s)H(s) = \frac{5.213 \times 10^5 K(s+20)}{s(s-456.3)(s+1.05 \times 10^4)} = \frac{-2.176K \left(1 + \frac{s}{20}\right)}{s \left(1 - \frac{s}{456.3}\right) \left(1 + \frac{s}{1.05 \times 10^4}\right)}$

Para analizar la estabilidad se dibuja el diagrama de Bode para  $K=1$ .



Como el sistema tiene un polo inestable, se analiza la zona de estabilidad por Nyquist.

El sistema tiene un polo en el semiplano derecho, por lo tanto  $P=1$ .



Se pueden determinar 3 zonas de estabilidad, 2 para ganancias positivas y una para ganancias negativa.

En la zona 1  $K > 0$  y chica,  $N = 1$  entonces  $Z = 2$  y el sistema es inestable.

En la zona 2  $K > 0$  y grande,  $N = -1$  entonces  $Z = 0$  y el sistema es estable.

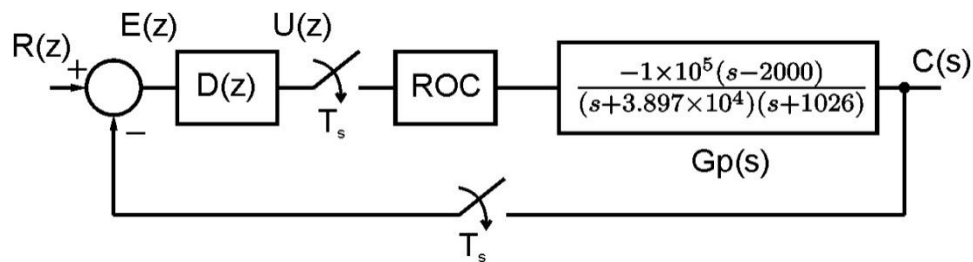
En la zona 3  $K < 0$ ,  $N = 0$  entonces  $Z = 1$  y el sistema es inestable.

Por lo tanto el sistema resultará estable para valores de  $K$  que hacen que la ganancia sea mayor a cero dB en el punto donde la fase es  $-180^\circ$ .

Volviendo al gráfico de Bode, se ve que la ganancia es -20dB entonces  $K$  debe ser aproximadamente mayor a 10 veces para que el sistema resulte estable.

Finalmente, el sistema con  $G = 104250$  tiene error nulo al escalón y es estable para valores de  $K$  mayores a 10.

4) En la siguiente figura se muestra el sistema de control digital de tensión correspondiente a una fuente de alimentación conmutada de potencia. Debido a la naturaleza de la fuente, la función transferencia de la planta continua presenta un cero de fase no mínima, tal como se muestra en el diagrama de bloques.



El sistema digital se muestrea con un período  $T_s = 100\mu s$ , resultando la siguiente función transferencia discreta:

$$G_{ROC} G_P(z) = \frac{-1.9563z + 2.4341}{z^2 - 0.9228z + 0.01832}$$

Debido a que el sistema debe generar pulsos de tensión trapezoidal con precisión, se requiere que el lazo de control siga el tramo de la referencia en rampa sin error de régimen permanente. Se desea diseñar un controlador digital por cancelación, que permita alcanzar el régimen permanente en un número finito de muestras y en el menor tiempo posible. Entonces:

- 1) Halle la transferencia del controlador.
- 2) Encuentre la ecuación en diferencias a implementar.
- 3) Determine el valor de la constante de aceleración  $K_a$  resultante.
- 4) Defina en cuánto tiempo el sistema alcanza el régimen permanente.
- 5) ¿El controlador resultante es estable? Justifique adecuadamente la respuesta.

### Solución:

Según los requerimientos del sistema el controlador digital por cancelación que se adecúa a lo pedido es uno de **Tiempo Finito**.

La expresión factorizada de la planta discreta resulta:

$$G_{ROC} G_P(z) = \frac{-1.9563(z - 1.244)}{(z - 0.9025)(z - 0.0203)}$$

### 1) Transferencia del controlador

A partir de la función transferencia de la planta se pueden identificar las siguientes características:

- El orden del sistema es 2, luego  $T(z)$  debe llegar al menos hasta  $z^{-2}$ .
- La diferencia entre polos y ceros es 1, por lo tanto  $\alpha_0 = 0$ .
- El sistema tiene un cero fuera del círculo unitario, luego debe ser incluido en  $T(z)$ .
- El controlador debe seguir una rampa de referencia, por lo tanto  $P=2$ .

Las ecuaciones de diseño para  $T(z)$  y  $1-T(z)$  resultan:

$$T(z) = (\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2})(1 - 1.244z^{-1})$$

$$1 - T(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + \beta_1 z^{-1})$$

Operando, se llega a la siguiente igualdad:

$$-1.244\alpha_2 z^{-3} + (\alpha_2 - 1.244\alpha_1)z^{-2} + \alpha_1 z^{-1} = -\beta_1 z^{-3} + (2\beta_1 - 1)z^{-2} + (2 - \beta_1)z^{-1}$$

Luego:

$$-1.244\alpha_2 = -\beta_1$$

$$\alpha_2 - 1.244\alpha_1 = 2\beta_1 - 1$$

$$\alpha_1 = 2 - \beta_1$$

El sistema resultante tiene tres ecuaciones independientes con tres incógnitas, por lo tanto tiene solución y no presenta ningún grado de libertad. Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\alpha_1 = -29.045, \alpha_2 = 24.95 \text{ y } \beta_1 = 31.045$$

Finalmente, la expresión del controlador resulta:

$$D(z) = \frac{1}{G_{ROC} G_P(z)} \left[ \frac{T(z)}{1 - T(z)} \right] = \frac{14.8473 (z - 0.9025)(z - 0.859)(z - 0.0203)}{(z + 31.05)(z - 1)^2}$$

Se puede observar que el controlador tiene dos polos en  $z=1$ , con lo cual el lazo de control resulta del tipo 2 y el sistema puede seguir con error nulo el tramo de la referencia en rampa.

### 2) Ecuación en diferencias

El controlador puede ser expresado en potencias negativas de  $z$  como:

$$D(z) = \frac{14.847 - 26.455z^{-1} + 12.041z^{-2} - 0.23366z^{-3}}{1 + 29.05z^{-1} - 61.1z^{-2} + 31.05z^{-3}}$$

Teniendo en cuenta que  $D(z)=U(z)/E(z)$  y aplicando la transformada Z inversa, se tiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$u(k) = [14.847e(k) - 26.455e(k-1) + 12.041e(k-2) - 0.23366e(k-3) - 29.05u(k-1) + 61.1u(k-2) - 31.05u(k-3)]$$

### 3) Constante de aceleración

La constante de aceleración se calcula como:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T_s^2} (z-1)^2 D(z) G_{ROC} G_P(z)$$

Luego:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T_s^2} (z-1)^2 \left[ \frac{-29.0457(z-1.244)(z-0.859)}{(z+31.05)(z-1)^2} \right] = 3.1179 \times 10^6 \left[ \frac{1}{s^2} \right]$$

#### 4) Tiempo de la respuesta transitoria

Teniendo en cuenta que el sistema es de segundo orden y que existe un cero fuera del círculo unitario, el tiempo mínimo en el cual el sistema alcanza el régimen permanente es de 3 muestras, lo que resulta equivalente a 300us.

5) A partir de la expresión  $D(z)$  se puede ver que el controlador a lazo abierto resulta inestable debido al polo en  $z=31.05$ .