

Solución a problemas de Sistemas No Lineales. Primer parcial. Teoría de Control. 2021

13 de mayo de 2021

1. Problema 1. Ascensor

1.1. a) Encuentre un modelo de estado del sistema

A partir de la inspección del sistema, un vector de estados válido es:

$$x = [I_a \quad \omega \quad F_k \quad v_{M_2}]$$

donde I_a es la corriente de armadura, ω es la velocidad angular del eje del motor de CC, F_k es la fuerza en el resorte que modela la elasticidad del cable y v_{M_2} es la velocidad del ascensor de masa M_2 .

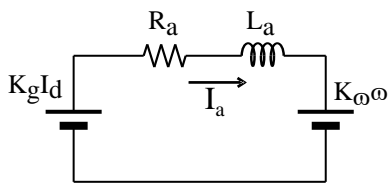
El circuito electromecánico compuesto por el generador controlado por campo y el motor de CC, puede modelarse como se muestra en la fig. 1a. Por otro lado, la carga mecánica conectada al eje del motor puede modelarse mediante un circuito análogo que se muestra en la fig. 1b.

La tensión gate-source en el FET puede calcularse de la siguiente manera:

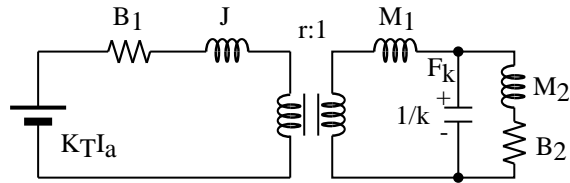
$$\begin{aligned} i_{R_1} &= \frac{K_f \omega - V_r}{R_1} \\ V_{gs} &= V_r - i_{R_1} R_2 = V_r - \frac{K_f \omega - V_r}{R_1} R_2 \\ V_{gs} &= V_r \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - K_f \omega \frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (1)$$

Por lo tanto, considerando la relación entre la corriente de drain y la tensión gate-source tal como está expresada por (1), la primera puede calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_d &= I_{dss} \left(1 - 2 \frac{V_{gs}}{V_p} + \frac{V_{gs}^2}{V_p^2}\right) \\ &= I_{dss} - 2V_{gs} \frac{I_{dss}}{V_p} + \frac{V_{gs}^2}{V_p^2} I_{dss} \\ &= I_{dss} - 2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_r \frac{I_{dss}}{V_p} + 2K_f \omega \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p} + \frac{V_r^2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2}{V_p^2} I_{dss} - \\ &\quad - 2V_r \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) K_f \omega \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p^2} + \frac{K_f^2 \omega^2}{V_p^2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 I_{dss} \end{aligned} \quad (2)$$



(a) Circuito electromecánico



(b) Circuito análogo de la carga mecánica

Figura 1: Circuitos del modelo del sistema.

Por otro lado, la ecuación que rige a la corriente de armadura puede obtenerse considerando que las caídas de tensión en la malla del circuito de la fig. 1a suman cero, es decir:

$$\begin{aligned} L_a \dot{I}_a &= -R_a I_a + K_g I_d - K_\omega \omega \\ \dot{I}_a &= -\frac{R_a}{L_a} I_a + \frac{K_g}{L_a} I_d - \frac{K_\omega}{L_a} \omega \end{aligned} \quad (3)$$

Por lo tanto, reemplazando (2) en (3), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{I}_a &= -\frac{R_a}{L_a} I_a + \frac{K_g}{L_a} I_{dss} - 2 \frac{K_g}{L_a} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_r \frac{I_{dss}}{V_p} + 2 \frac{K_g}{L_a} K_f \omega \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p} + \frac{K_g}{L_a} \frac{V_r^2}{V_p^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 I_{dss} - \\ &\quad - 2 \frac{K_g}{L_a} V_r \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) K_f \omega \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p^2} + \frac{K_g}{L_a} \frac{K_f^2}{V_p^2} \omega^2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 I_{dss} - \frac{K_\omega}{L_a} \omega \end{aligned}$$

Reorganizando términos:

$$\begin{aligned} \dot{I}_a &= -\frac{R_a}{L_a} I_a + \left(2 \frac{K_g}{L_a} K_f \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p} - \frac{K_\omega}{L_a}\right) \omega - 2 \frac{K_g}{L_a} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{I_{dss}}{V_p} V_r + \frac{K_g}{L_a} \frac{K_f^2}{V_p^2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 I_{dss} \omega^2 \\ &\quad - 2 \frac{K_g}{L_a} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) K_f \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p^2} \omega V_r + \frac{K_g}{L_a} \frac{I_{dss}}{V_p^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 V_r^2 + \frac{K_g}{L_a} I_{dss} \end{aligned} \quad (4)$$

El resto de las ecuaciones diferenciales que rigen a las variables de estado restantes pueden obtenerse a partir del análisis del circuito eléctrico análogo de la fig. 1b, como sigue. Para la velocidad angular del eje del motor de CC:

$$\begin{aligned} J \dot{\omega} &= K_T I_a - B_1 \omega - r T_L \\ T_L &= r M_1 \dot{\omega} + F_k \\ (J + r^2 M_1) \dot{\omega} &= K_T I_a - B_1 \omega - r F_k \\ \dot{\omega} &= \frac{K_T}{J + r^2 M_1} I_a - \frac{B_1}{J + r^2 M_1} \omega - \frac{r}{J + r^2 M_1} F_k \end{aligned} \quad (5)$$

Para F_k :

$$\dot{F}_k = k \omega r - k v_{M_2} \quad (6)$$

Finalmente, para v_{M_2} :

$$\begin{aligned} M_2 \dot{v}_{M_2} &= F_k - B_2 v_{M_2} \\ \dot{v}_{M_2} &= \frac{F_k}{M_2} - \frac{B_2}{M_2} v_{M_2} \end{aligned} \quad (7)$$

El modelo de estado puede describirse mediante las ecuaciones (4)-(7).

1.2. b) Encuentre el modelo linealizado del modelo no lineal original, en función de un punto de equilibrio genérico

La ecuación (4) es la única que posee términos no lineales. A su vez, los términos no lineales dependen solamente de la entrada V_r y de ω . Por lo tanto, calculo las derivadas parciales de (4) con respecto a ω y V_r . Para el resto de las variables de estado, las derivadas parciales van a coincidir con los coeficientes del modelo original.

$$\left. \frac{\partial \dot{I}_a}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ V_r=V_{r0}}} = k_{\omega_0} = 2 \frac{K_g}{L_a} K_f \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p} - \frac{K_\omega}{L_a} + 2 \frac{K_g}{L_a} \frac{K_f^2}{V_p^2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 I_{dss} \omega_0 - 2 \frac{K_g}{L_a} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) K_f \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p^2} V_{r0} \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{I}_a}{\partial V_r} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ V_r=V_{r0}}} = k_{V_r} = -2 \frac{K_g}{L_a} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{I_{dss}}{V_p} - 2 \frac{K_g}{L_a} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) K_f \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{dss}}{V_p^2} \omega_0 + 2 \frac{K_g}{L_a} \frac{I_{dss}}{V_p^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 V_{r0} \quad (9)$$

El modelo linealizado resultante en el punto

$$x^* = [I_a^* = I_a - I_{a0} \quad \omega^* = \omega - \omega_0 \quad F_k^* = F_k - F_{k0} \quad v_{M_2}^* = v_{M_2} - v_{M_20}]^T \quad (10)$$

es

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & k_{\omega_0} & 0 & 0 \\ \frac{K_T}{J+r^2 M_1} & -\frac{B_1}{J+r^2 M_1} & -\frac{r}{J+r^2 M_1} & 0 \\ 0 & k_r & 0 & -k \\ 0 & 0 & \frac{1}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} k_{V_r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (V_r - V_{r0}) \quad (11)$$

Las salidas pueden elegirse libremente.

1.3. c) Encuentre el punto de equilibrio ante un escalón en V_r de amplitud $V_{r0} = 5$ V. Luego, calcule las matrices del modelo linealizado alrededor del punto de equilibrio encontrado

El punto de equilibrio para $V_{r0} = 5$ V, mediante simulaciones, es

$$x_0 = [I_{a0} = 93,3 \text{ mA} \quad \omega_0 = 46,6593 \text{ rad/s} \quad F_{k0} = 4,6659 \text{ N} \quad v_{M20} = 46,6593 \text{ m/s}]^T \quad (12)$$

Por lo tanto, reemplazando los datos del problema y los valores de las variables de estado en el punto de equilibrio, el modelo linealizado es:

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} -1000 & -2,8326 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0,3332 & -3,3322 \times 10^{-4} & -0,0033 & 0 \\ 0 & 1000000 & 0 & -1000000 \\ 0 & 0 & 0,0022 & -2,2222 \times 10^{-4} \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} 2,7394 \times 10^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (V_r - 5) \quad (13)$$

2. Problema 3. Horno

2.1. a) Encuentre un modelo de estado del sistema

A partir de la inspección del sistema un vector de estados válido es:

$$x = [T_R \quad T_C \quad T_S] \quad (14)$$

donde T_R es la temperatura de la resistencia calentadora, T_C es la temperatura del recinto y T_S es la temperatura del termistor. El sistema térmico puede modelarse mediante un circuito análogo que se muestra en la fig. 2. La potencia calorífica puede calcularse como:

$$P = I_d^2 R_T \quad (15)$$

donde I_d es la corriente por el drain del MOSFET. Sabiendo que I_d es igual a la corriente por el source del MOSFET, entonces:

$$I_d = \frac{V_r}{R_s} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{V_o}{R_s} \frac{R_2}{R_1} \quad (16)$$

donde V_o es:

$$V_o = V_{CC} - R_o I_o + r T_S I_o \quad (17)$$

A su vez:

$$I_o = \frac{V_Z - V_{be}}{R_E} \quad (18)$$

Como puede verse en (17), se consideró $\Delta T = T_S$ dado que se tomó una temperatura ambiente $T_A = 25^\circ \text{C}$ como temperatura de referencia. Definiendo $V_{pol} = V_{CC} - R_o I_o$ como la tensión de polarización del TBJ, y reemplazando (17) en (16), queda:

$$I_d = \frac{V_r}{R_s} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{V_{pol}}{R_s} \frac{R_2}{R_1} - \frac{r T_S I_o}{R_s} \frac{R_2}{R_1} \quad (19)$$

Por lo tanto, P puede calcularse reemplazando (19) en (15), quedando:

$$P = \frac{V_r^2}{R_s^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)^2 R_T + \frac{V_{pol}^2}{R_s^2} \frac{R_2^2}{R_1^2} R_T + r^2 T_S^2 \frac{I_o^2}{R_s^2} \frac{R_2^2}{R_1^2} R_T - 2 \frac{V_r}{R_s^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2}{R_1} V_{pol} R_T - 2 \frac{V_r}{R_s^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) r T_S I_o \frac{R_2}{R_1} R_T + 2 \frac{V_{pol}}{R_s^2} \frac{R_2^2}{R_1^2} r T_S I_o R_T \quad (20)$$

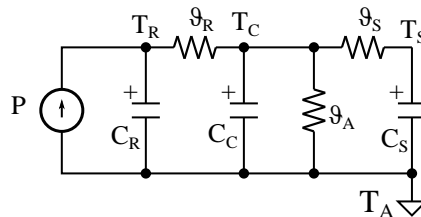


Figura 2: Circuito análogo del sistema térmico.

Por otro lado, las ecuaciones que rigen a las diferentes temperaturas del sistema térmico pueden obtenerse a partir del circuito análogo que se muestra en la fig. 2, de la siguiente manera:

$$\dot{T}_R = \frac{P}{C_R} - \frac{T_R}{C_R \theta_R} + \frac{T_C}{C_R \theta_R} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_C &= \frac{T_R}{C_C \theta_R} - \frac{T_C}{C_C \theta_R} - \frac{T_C}{C_C \theta_A} - \frac{T_C}{C_C \theta_S} + \frac{T_S}{C_C \theta_S} \\ &= \frac{T_R}{C_C \theta_R} - \frac{T_C}{C_C} \left(\frac{1}{\theta_S} + \frac{1}{\theta_A} + \frac{1}{\theta_R} \right) + \frac{T_S}{C_C \theta_S} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\dot{T}_S = \frac{T_C}{C_S \theta_S} - \frac{T_S}{C_S \theta_S} \quad (23)$$

Finalmente, el modelo de estado del sistema queda descrito por las ecuaciones (21)-(23), previo reemplazo de (20) en (21).

2.2. b) Encuentre el modelo linealizado del modelo no lineal original, en función de un punto de equilibrio genérico

Una vez hecho el reemplazo mencionado, la ecuación (21) es la única que posee términos no lineales. A su vez, los términos no lineales dependen solamente de la entrada V_r y de T_S . Por lo tanto, calculo las derivadas parciales de (21) con respecto a V_r y T_S . Para el resto de las variables de estado, las derivadas parciales van a coincidir con los coeficientes del modelo original.

$$\left. \frac{\partial \dot{T}_R}{\partial V_r} \right|_{\substack{T_S=T_{S0} \\ V_r=V_{r0}}} = k_{V_r} = \frac{2R_T}{C_R R_S^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)^2 V_{r0} - \frac{2V_{pol}}{R_s^2 C_R} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2}{R_1} R_T - \frac{2rT_{S0}I_o R_2 R_T}{C_R R_s^2 R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{T}_R}{\partial T_S} \right|_{\substack{T_S=T_{S0} \\ V_r=V_{r0}}} = k_{T_S} = \frac{2r^2 T_{S0} I_o^2 R_2^2 R_T}{C_R R_s^2 R_1^2} - \frac{2V_{r0}}{R_s^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{r I_o R_2 R_T}{C_R R_1} + \frac{2V_{pol} R_2^2 r I_o R_T}{R_s^2 R_1^2 C_R} \quad (25)$$

El modelo linealizado resultante en el punto

$$x^* = [T_R^* = T_R - T_{R0} \quad T_C^* = T_C - T_{C0} \quad T_S^* = T_S - T_{S0}]^T \quad (26)$$

es

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_R \theta_R} & \frac{1}{C_R \theta_R} & k_{T_S} \\ \frac{1}{C_C \theta_R} & -\frac{1}{C_C} \left(\frac{1}{\theta_S} + \frac{1}{\theta_A} + \frac{1}{\theta_R} \right) & \frac{1}{C_C \theta_S} \\ 0 & \frac{1}{C_S \theta_S} & -\frac{1}{C_S \theta_S} \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} k_{V_r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (V_r - V_{r0}) \quad (27)$$

Las salidas pueden elegirse libremente.

2.3. c) Encuentre el punto de equilibrio ante un escalón en V_r de amplitud $V_{r0} = 5$ V. Luego, calcule las matrices del modelo linealizado alrededor del punto de equilibrio encontrado

El punto de equilibrio para $V_{r0} = 3$ V, mediante simulaciones, es

$$x0 = [T_{R0} = 243,01^\circ\text{C} \quad T_{C0} = 240,61^\circ\text{C} \quad T_{S0} = 240,61^\circ\text{C}]^T \quad (28)$$

Por lo tanto, reemplazando los datos del problema y los valores de las variables de estado en el punto de equilibrio, el modelo linealizado es:

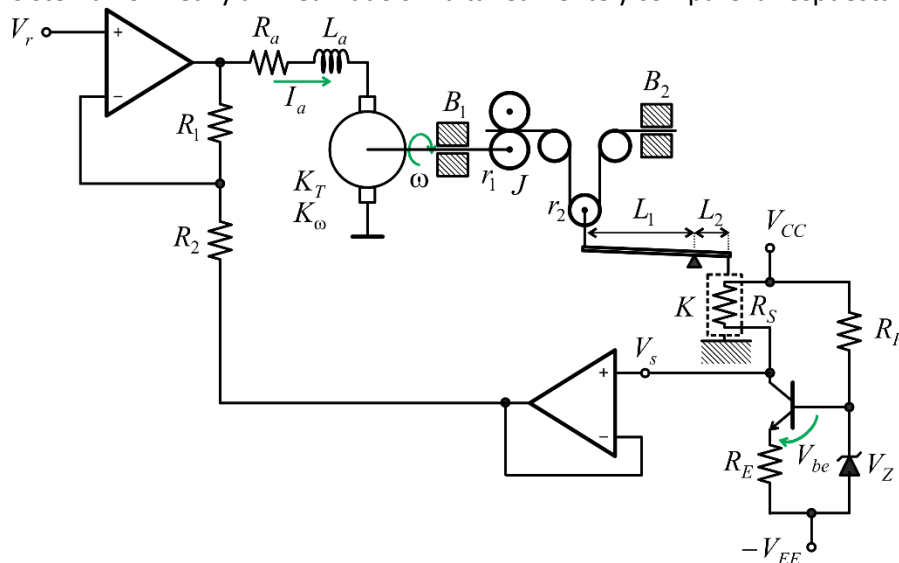
$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,1 & -0,0526 \\ 0,01 & -0,1101 & 0,1 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} 4,3873 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (V_r - 3) \quad (29)$$

Problema 2 – Control de tensión de una lámina

La figura muestra en forma esquemática y cualitativa, un sistema de control de tensión mecánica de una lámina delgada no elástica. La lámina es traccionada sin deslizamiento por un rodillo movido por un motor de corriente continua controlado por armadura. El arreglo de rodillos y polea produce una fuerza proporcional a la tensión mecánica de la lámina, aplicada al extremo de una palanca. La distancia desde este extremo hasta el pivote es L_1 . En el otro extremo de la palanca, que se encuentra a una distancia L_2 mucho menor que L_1 , se transmite la fuerza de tal manera de comprimir una celda de carga de elasticidad k . La celda de carga cuenta con una galga extensiométrica que varía su resistencia con la deformación de la celda, siguiendo la siguiente ecuación: $R_s = R_o - r \cdot x$, donde x es la compresión sufrida por la celda de carga en la dirección vertical. Para el análisis asuma que x es mucho menor que L_2 . Por la resistencia de la galga circula la corriente de colector de un TBJ con beta tendiendo a infinito y tensión base-emisor V_{be} constante. El diodo Zener es polarizado por la resistencia R_p , obteniendo una tensión de Zener V_z . La corriente de emisor es por lo tanto función de esta tensión y del valor de la resistencia de emisor R_E . La tensión en el colector del TBJ V_s , que es función de la resistencia de la galga y de la tensión de alimentación V_{CC} , es realimentada para controlar la compresión de la galga y por consiguiente la tensión mecánica de la lámina. La tensión de alimentación V_{EE} es igual a V_{CC} pero de signo opuesto. Considere para el análisis que los amplificadores operacionales tienen características ideales.

Datos: $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$; $L_a = 1 \text{ mH}$; $R_a = 1 \Omega$; $K_T = 10 \text{ N.m/A}$; $K_\omega = 10 \text{ V.s}$; $B_1 = 0,1 \text{ N.m.s}$; $J = 1 \text{ N.m.s}^2$; $r_1 = 1 \text{ m}$; $L_1 = 1 \text{ m}$; $L_2 = 10 \text{ cm}$; $K = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$; $B_2 = 10 \text{ N.m.s}$; $R_o = 1 \text{ k}\Omega$; $r = 1 \text{ k}\Omega/\text{mm}$; $V_z = 4,7 \text{ V}$; $V_{be} = 0,6 \text{ V}$; $R_E = 342 \Omega$; $V_{CC} = 12 \text{ V}$.

1. Encuentre un modelo de estados del sistema.
2. Encuentre el modelo linealizado del modelo no lineal original, en función de un punto de equilibrio genérico.
3. Encuentre el punto de equilibrio ante un escalón en V_r de amplitud $V_{r0} = 5 \text{ V}$. Luego, calcule las matrices del modelo linealizado alrededor del punto de equilibrio encontrado. Sugerencia: realice una simulación colocando un escalón de valor V_{r0} durante el tiempo suficiente para que las variables de estado alcancen el punto de equilibrio.
4. Verifique, mediante una simulación, que el modelo linealizado es una buena aproximación al modelo no lineal. Sugerencia: Dejando que el sistema alcance el punto de equilibrio, aplique un escalón de pequeña magnitud (1% de V_r , p. ej.) al sistema no lineal y al linealizado simultáneamente y compare la respuesta de ambos sistemas.

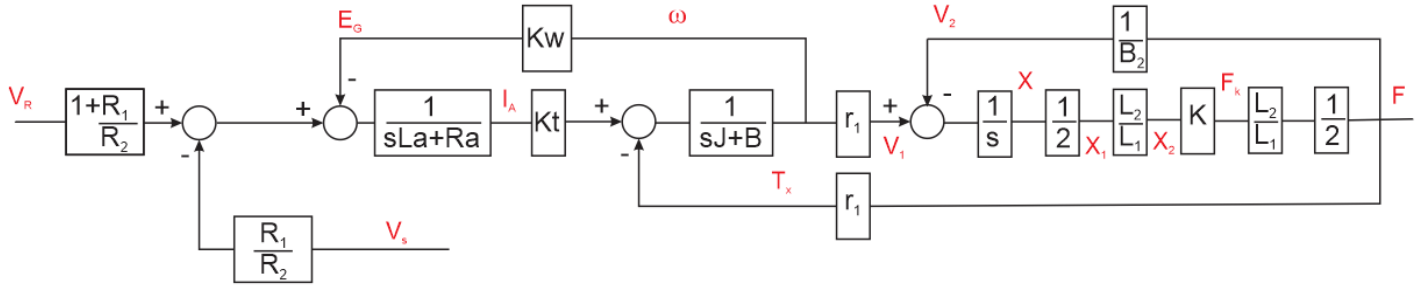


Resolución:

- 1) La entrada del sistema compara la señal V_s proveniente del sensor con la tensión de referencia con distintas ganancias dadas por las resistencias colocadas en el amplificador operacional.

Aplicando superposición, la salida V_0 resulta: $V_0 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)V_R - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)V_S$

La tensión aplicada al motor se divide en la reacción de armadura y la caída en la impedancia interna. El comportamiento del amplificador y del motor se puede representar por el siguiente diagrama en bloques:



En el diagrama se tiene en cuenta que la carga mecánica está compuesta por los elementos de rotación B_1 y J y el torque reflejado del movimiento lineal T_x . La diferencia entre el torque del motor menos el reflejado determina el torque en la carga de rotación, entonces dividiendo por ésta se tiene la velocidad angular.

La velocidad angular afectada por el radio de la p Polea se transforma en velocidad tangencial V_1 . Esta velocidad se compone de la velocidad de la p Polea móvil más la velocidad V_2 de la cinta en el elemento B_2 . En el diagrama se calcula la velocidad de la p Polea móvil, e integrando se llega al desplazamiento relativo de los extremos de la cinta X . Este movimiento es el doble del desplazamiento de la p Polea móvil X_1 .

El desplazamiento del sensor X_2 se transforma en la palanca en función de las longitudes de sus brazos. Este desplazamiento por la constante del resorte da como resultado la fuerza y esta fuerza se lleva a la referencia de la cinta F . Esta fuerza se desarrolla sobre el elemento B_2 y de esta se calcula V_2 .

$$I_A = \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)V_R - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)V_S \right] - K_W \omega \left| \frac{1}{sL_A + R_A} \right.$$

$$K_T I_A - \frac{r_1 K L_2}{2L_1} X_2 = (sJ + B) \omega$$

$$\dot{I}_A = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_R}{L_A} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_S}{L_A} - \frac{K_W}{L_A} \omega - \frac{R_A}{L_A} I_A$$

$$\dot{\omega} = \frac{K_T}{J} I_A - \frac{B}{J} \omega - \frac{r_1 K L_2}{2L_1 J} X_2 \quad (2)$$

$$\left(r_1 \omega - \frac{K L_2}{2L_1 B_2} X_2 \right) \frac{L_2}{2L_1} \frac{1}{s} = X_2$$

$$\dot{X}_2 = \frac{L_2 r_1}{2L_1} \omega - \frac{K}{4B_2} \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 X_2 \quad (3)$$

El valor de resistencia del sensor es: $R_s = R_0 - r$. X_2 . La tensión desarrollada en esta resistencia es $I_c R_s$. Para calcular la corriente de colector analizamos el circuito.

$$V_z = V_{BE} + I_C R_E \quad I_C = \frac{V_z - V_{BE}}{R_E}$$

$$V_S = V_{CC} - I_C R_s \quad V_S = V_{CC} - I_C (R_0 - r X_2)$$

Entonces la ecuación de estado de la corriente queda:

$$\dot{I}_A = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_R}{L_A} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_{CC} - I_C R_0 + I_C r X_2}{L_A} - \frac{K_W}{L_A} \omega - \frac{R_A}{L_A} I_A$$

$$\dot{I}_A = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_R}{L_A} - \frac{K_W}{L_A} \omega - \frac{R_A}{L_A} I_A - \underbrace{\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \frac{I_C r X_2}{L_A} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \left(\frac{V_{CC} - I_C R_0}{L_A} \right)}_{CTE} \quad (1)$$

La anterior ecuación es no lineal, ya que posee términos constantes.

- 2) El modelo lineal en el entorno del punto de equilibrio, solamente elimina los términos constantes de la ecuación de la corriente, al derivar respecto de las variables quedan los mismos coeficientes, pero afectando a las variables en el punto de equilibrio.

$$x^* = \begin{bmatrix} I_A^* & \omega^* & X_2^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} I_A - I_{A0} & \omega - \omega_0 & X_2 - X_{20} \end{bmatrix}^T$$

$$u^* = V_R - V_{R0}$$

Entonces, queda:

$$\dot{I}_A^* = \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) \frac{A}{L_A} V_R^* - \left(\frac{R_b}{R_a}\right) \frac{I_C r}{L_A} X_2^* - \frac{K_W}{L_A} \omega^* - \frac{R_A}{L_A} I_A^*$$

$$\dot{\omega}^* = \frac{K_T}{J} I_A^* - \frac{B}{J} \omega^* - \frac{r_1 K L_2}{2 L_1 J} X_2^*$$

$$\dot{X}_2^* = \frac{L_2 r_1}{2 L_1} \omega^* - \frac{K}{4 B_2} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 X_2^*$$

El modelo matricial es:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A^* \\ \dot{\omega}^* \\ \dot{X}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{K_W}{L_A} & -\left(\frac{R_b}{R_a}\right) \frac{I_C r}{L_A} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} & -\frac{r_1 K L_2}{2 L_1 J} \\ 0 & \frac{L_2 r_1}{2 L_1} & -\frac{K}{4 B_2} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A^* \\ \omega^* \\ X_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) \frac{A}{L_A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_R^*$$

3) Punto de Equilibrio:

En el punto de equilibrio las derivadas de las variables deben ser igual a cero.

$$\text{De la ecuación (3) sale: } \frac{L_2}{2 L_1} \left(r_1 \omega - \frac{K L_2}{2 L_1 B_2} X_2 \right) = 0 \quad \omega_0 = \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} X_{20}$$

$$\text{De la ecuación (2) sale: } \frac{K_T}{J} I_A - \frac{B}{J} \omega - \frac{r_1 B_2}{J} \omega = 0 \quad I_{A0} = \frac{(B + r_1 B_2)}{K_T} \omega_0$$

De la ecuación (1), reemplazando los valores anteriores resulta:

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_R}{L_A} - \frac{K_W}{L_A} \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} X_2 - \frac{R_A (B + r_1 B_2)}{L_A K_T} \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} X_2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \frac{I_C r}{L_A} X_2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \left(\frac{V_{CC} - I_C R_0}{L_A} \right) = 0$$

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_R}{L_A} - \left(\frac{K_W}{L_A} \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} + \frac{R_A (B + r_1 B_2)}{L_A K_T} \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \frac{I_C r}{L_A} \right) X_2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \left(\frac{V_{CC} - I_C R_0}{L_A} \right) = 0$$

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_R}{L_A} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \left(\frac{V_{CC} - I_C R_0}{L_A} \right) = \left(\frac{K_W}{L_A} \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} + \frac{R_A (B + r_1 B_2)}{L_A K_T} \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \frac{I_C r}{L_A} \right) X_2$$

$$X_{20} = \frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{V_{R0}}{L_A} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \left(\frac{V_{CC} - I_C R_0}{L_A} \right)}{\left(\frac{K_W}{L_A} \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} + \frac{R_A (B + r_1 B_2)}{L_A K_T} \frac{K L_2}{2 r_1 L_1 B_2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \frac{I_C r}{L_A} \right)} = 0.0003137$$

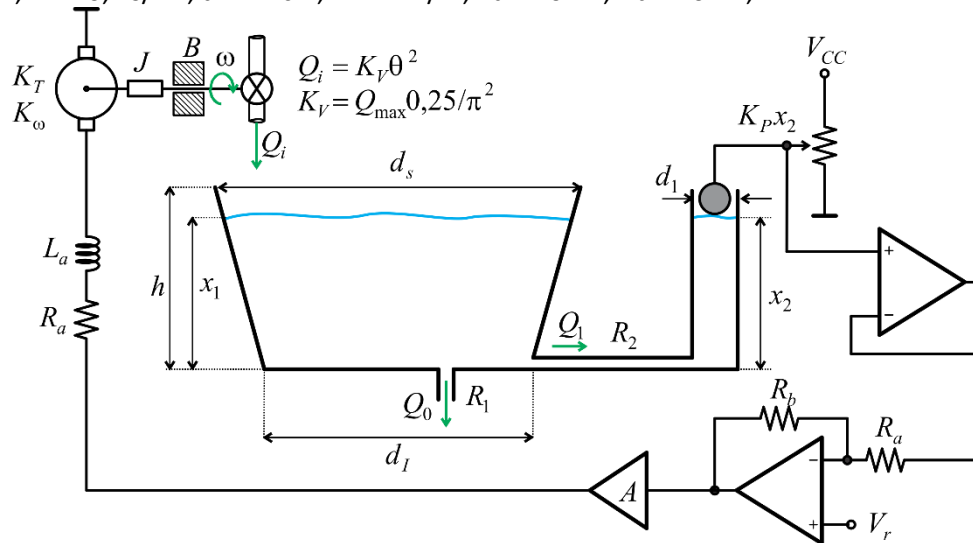
$$\omega_0 = \frac{KL_2}{2r_1L_1B_2} X_{20} = 1.5686871$$

$$I_{A0} = \frac{(B + r_1B_2)}{K_T} \omega_0 = 1.584374$$

Ejercicio 4 – Control de nivel de un Tanque Cónico

La figura muestra en forma esquemática y cualitativa, un sistema de control de nivel de líquido x_1 de un tanque cónico. El tanque cónico posee un diámetro superior d_s , un diámetro inferior d_i y una altura h . En el fondo posee un tubo de resistencia dinámica R_1 por el que se derrama un caudal Q_0 . Por un tubo comunicante de resistencia dinámica R_2 circula un caudal Q_1 que sirve para llenar un tanque cilíndrico de diámetro d_1 , mucho menor a d_i , el cual se utiliza para medir indirectamente la altura del tanque cónico. El nivel de líquido del tanque cilíndrico es sentido por un flotador que mueve el dial de un potenciómetro lineal de ganancia K_p . Mediante un circuito con amplificadores operacionales y un amplificador de ganancia A , se aplica una tensión al bobinado de armadura de un motor de CC cuyo rotor se encuentra conectado a un eje con momento de inercia J y rozamiento B , el cual hace girar una válvula que varía el caudal de llenado Q_i del tanque cónico. El caudal que deja pasar la válvula varía con el ángulo θ del eje siguiendo la ecuación: $Q_i = K_v \theta^2$. Considere para el análisis que los amplificadores operacionales tienen características ideales. Considere que la tensión V_{CC} no impone un límite en el sentido del nivel de líquido x_2 .

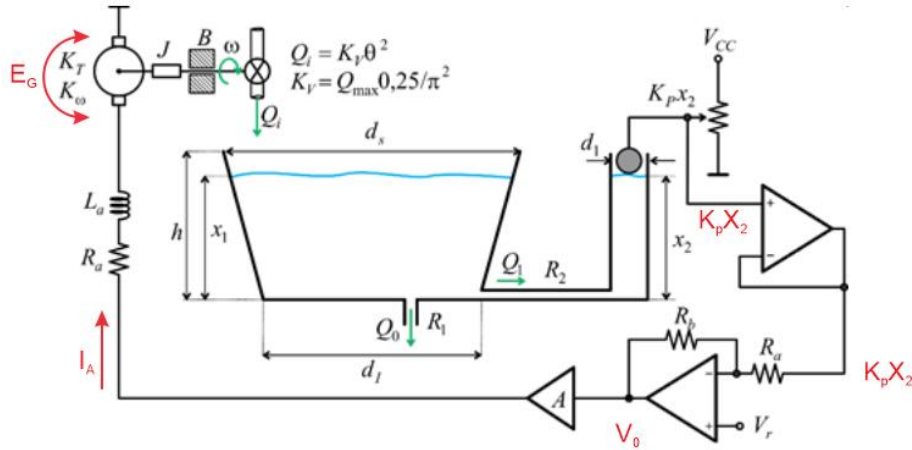
Datos: $R_a = 1 \Omega$; $L_a = 1 \text{ mH}$; $K_T = 1 \text{ N.m/A}$; $K_\omega = 1 \text{ V.s}$; $J = 0,01 \text{ N.m.s}^2$; $B = 0,01 \text{ N.m.s}$; $Q_{\max} = 10 \text{ m}^3/\text{s}$; $d_i = 1 \text{ m}$; $d_s = 2 \text{ m}$; $h = 3 \text{ m}$; $R_1 = 1 \text{ s/m}^2$; $R_2 = 0,1 \text{ s/m}^2$; $d_1 = 1 \text{ cm}$; $K_P = 1 \text{ V/m}$; $R_a = 10 \text{ k}\Omega$; $R_b = 10 \text{ k}\Omega$; $A = 1$.



- Encuentre un modelo de estados del sistema.
- Encuentre el modelo linealizado del modelo no lineal original, en función de un punto de equilibrio genérico.
- Encuentre el punto de equilibrio ante un escalón en V_r de amplitud $V_{r0} = 1 \text{ V}$. Luego, calcule las matrices del modelo linealizado alrededor del punto de equilibrio encontrado. Sugerencia: realice una simulación colocando un escalón de valor V_{r0} durante el tiempo suficiente para que las variables de estado alcancen el punto de equilibrio.
- Verifique, mediante una simulación, que el modelo linealizado es una buena aproximación al modelo no lineal. Sugerencia: Dejando que el sistema alcance el punto de equilibrio, aplique un escalón de pequeña magnitud (1% de V_r , p. ej.) al sistema no lineal y al linealizado simultáneamente y compare la respuesta de ambos sistemas.

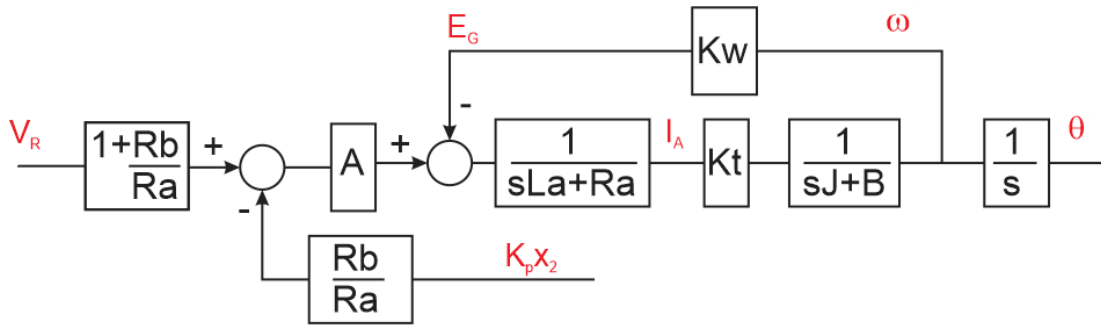
Resolución:

- a) La entrada del sistema compara la señal proveniente del sensor de nivel con la tensión de referencia con distintas ganancias dadas por las resistencias colocadas en el amplificador operacional.



Aplicando superposición, la salida V_0 resulta: $V_0 = \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) V_R - \left(\frac{R_b}{R_a}\right) K_P x_2$

La tensión aplicada al motor se divide en la reacción de armadura y la caída en la impedancia interna. El comportamiento del amplificador y del motor se puede representar por el siguiente diagrama en bloques:



$$I_A = \left[\left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) V_R - \left(\frac{R_b}{R_a}\right) K_P x_2 \right] A - K_W \omega \left[\frac{1}{sL_A + R_A} \right]$$

$$\dot{I}_A = \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) \frac{A}{L_A} V_R - \left(\frac{R_b}{R_a}\right) \frac{AK_P}{L_A} x_2 - \frac{K_W}{L_A} \omega - \frac{R_A}{L_A} I_A$$

$$K_T I_A = (sJ + B) \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{K_T}{J} I_A - \frac{B}{J} \omega$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

La relación entre el caudal de entrada y la posición de la válvula es no lineal resultando: $Q_i = \frac{0.25 Q_{MAX}}{\pi^2} \theta^2$

La ecuación de continuidad del primer tanque indica que el caudal de entrada es igual al caudal de salida más la variación del volumen respecto del tiempo: $Q_i = Q_s + \frac{dV}{dt} = K_V \theta^2$

El volumen del tanque puede calcularse como: $V(x_1) = \int_0^{x_1} A(x_1) dx$ $A(x_1) = \frac{\pi}{4} d^2(x_1)$

$$d(x_1) = a + bx_1 \text{ con } a = d_I \text{ y } b = \frac{d_s - d_I}{h} \text{ y } A(x_1) = \frac{\pi}{4} (a + bx_1)^2$$

$$\text{Entonces } \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \frac{\pi}{4} (a + bx_1)^2 \dot{x}_1$$

$$\text{Reemplazando queda: } \frac{\pi}{4} (a + bx_1)^2 \dot{x}_1 = K_V \theta^2 - \frac{x_1}{R_1} - \frac{x_1 - x_2}{R_2}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{K_V}{\frac{\pi}{4}(a+bx_1)^2} \theta^2 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{x_1}{\frac{\pi}{4}(a+bx_1)^2} + \frac{x_2}{\frac{\pi R_2}{4}(a+bx_1)^2}$$

Para el segundo tanque: $\frac{x_1 - x_2}{R_2} = \frac{\pi}{4} d_1^2 \dot{x}_2$, entonces: $\dot{x}_2 = \frac{x_1}{\frac{\pi}{4} d_1^2 R_2} - \frac{x_2}{\frac{\pi}{4} d_1^2 R_2}$

Agrupando las ecuaciones de estado:

$$\dot{I}_A = \left(1 + \frac{R_b}{R_a} \right) \frac{A}{L_A} V_R - \left(\frac{R_b}{R_a} \right) \frac{AK_P}{L_A} x_2 - \frac{K_W}{L_A} \omega - \frac{R_A}{L_A} I_A \quad (1)$$

$$\dot{\omega} = \frac{K_T}{J} I_A - \frac{B}{J} \omega \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{K_V}{\frac{\pi}{4}(a+bx_1)^2} \theta^2 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{x_1}{\frac{\pi}{4}(a+bx_1)^2} + \frac{x_2}{\frac{\pi R_2}{4}(a+bx_1)^2} \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{\frac{\pi}{4} d_1^2 R_2} - \frac{x_2}{\frac{\pi}{4} d_1^2 R_2} \quad (5)$$

2) La única ecuación no lineal del modelo es la (4), el resto de las ecuaciones es lineal y no cambiarán el formato, aunque estarán referidas al punto de equilibrio.

$$\left. \frac{d\dot{x}_1}{d\theta} \right|_{x_0, u_0} = \frac{8K_V \theta_0}{\pi(a+bx_{10})^2} = k_\theta$$

$$\left. \frac{d\dot{x}_1}{dx_2} \right|_{x_0, u_0} = \frac{4}{\pi R_2 (a+bx_{10})^2} = k_{x_2}$$

$$\left. \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} \right|_{x_0, u_0} = -\frac{8bK_V \theta_0^2}{\pi(a+bx_{10})^3} + \frac{4(bx_{10} - a)(R_1 + R_2)}{\pi R_1 R_2 (a+bx_{10})^3} - \frac{8bx_{20}}{R_2 \pi (a+bx_{10})^3} = k_{x_1}$$

El modelo lineal en el entorno del punto de equilibrio queda:

$$\dot{I}_A^* = \left(1 + \frac{R_b}{R_a} \right) \frac{A}{L_A} V_R^* - \left(\frac{R_b}{R_a} \right) \frac{AK_P}{L_A} x_2^* - \frac{K_W}{L_A} \omega^* - \frac{R_A}{L_A} I_A^*$$

$$\dot{\omega}^* = \frac{K_T}{J} I_A^* - \frac{B}{J} \omega^*$$

$$\dot{\theta}^* = \omega^*$$

$$\dot{x}_1^* = k_\theta \theta^* + k_{x_1} x_1^* + k_{x_2} x_2^*$$

$$\dot{x}_2^* = \frac{x_1^*}{A_2 R_2} - \frac{x_2^*}{A_2 R_2}$$

Donde :

$$x^* = \begin{bmatrix} I_A^* & \omega^* & \theta^* & x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} I_A - I_{A0} & \omega - \omega_0 & \theta - \theta_0 & x_1 - x_{10} & x_2 - x_{20} \end{bmatrix}^T$$

$$u^* = V_R - V_{R0}$$

El modelo matricial es:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A^* \\ \dot{\omega}^* \\ \dot{\theta}^* \\ \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{K_W}{L_A} & 0 & 0 & \left(\frac{R_b}{R_a}\right)\frac{AK_P}{L_A} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta & k_{x_1} & k_{x_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_2 R_2} & -\frac{1}{A_2 R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A^* \\ \omega^* \\ \theta^* \\ x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right)\frac{A}{L_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_R^*$$

- 4) El punto de equilibrio se puede determinar considerando que las alturas de los tanques van a ser iguales y que el caudal de entrada deberá ser igual al de salida. Además, la posición de la válvula deberá ser constante por lo que la velocidad será igual a cero, lo mismo para la corriente.

$$x_{10} = x_{20} \quad I_{A0} = 0 \quad \omega_0 = 0$$

En el amplificador de entrada se cumple que:

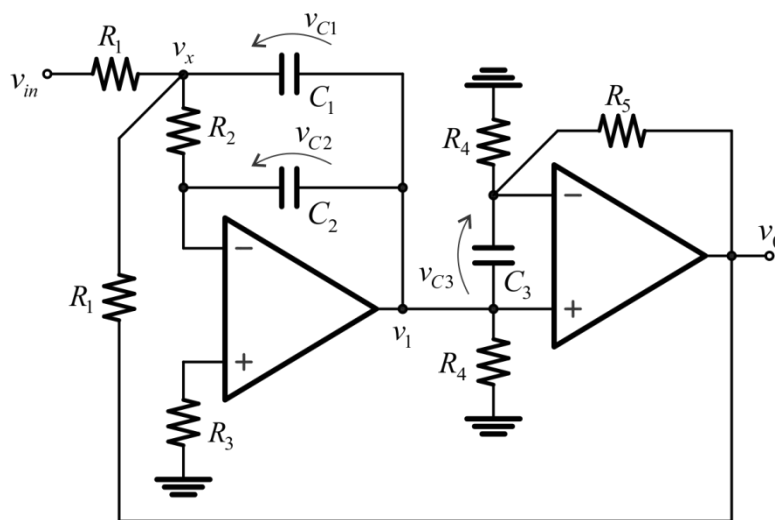
$$\frac{R_b}{R_a} K_P x_{20} = \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) V_R \quad \text{por lo tanto: } x_{20} = \frac{\left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) V_R}{\frac{R_b}{R_a} K_P} = x_{10} = 2\text{m}$$

El caudal de entrada, en el punto de equilibrio, cumple con la siguiente ecuación: $K_V \theta_0^2 = \frac{x_{10}}{R_1}$ entonces:

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{x_{10}}{K_V R_1}} = 2.81 \text{ rad}$$

Ejercicio A

Para el circuito de la figura implementado con operacionales ideales:



Datos:

$$\begin{aligned} R_1 &= 2\text{k}\Omega \\ R_2 &= 22\text{k}\Omega \\ R_3 &= 22\text{k}\Omega \\ R_4 &= 1\text{k}\Omega \\ R_5 &= 100\text{k}\Omega \\ C_1 &= 4.3\text{nF} \\ C_2 &= 17.4\text{nF} \\ C_3 &= 15\text{pF} \end{aligned}$$

- Planteé las ecuaciones diferenciales del sistema y encuentre el correspondiente modelo de estado.
- A partir del modelo de estado y haciendo uso de las matrices del modelo, encuentre la función de transferencia entre v_0 y v_{IN} . Deje expresadas todas las matrices utilizadas para el cálculo.
- Encuentre una transformación lineal para que en el vector de estado aparezcan la tensión v_x y la tensión v_1 .
- Evalúe por simulación la salida v_0 para una entrada v_{IN} en escalón de amplitud 1V. Considere los valores proporcionados en la tabla de la figura.

Solución Ejercicio A

a) Ecuaciones

$$v_{C3} = 0 \quad (\text{A.O. ideal: ganancia infinita})$$

$$v_x = v_{C1} - v_{C2}$$

$$v_1 = -v_{C2}$$

$$v_0 = (1 + R_5/R_4)v_1$$

$$\frac{v_{IN} - v_x}{R_1} = \frac{v_x}{R_2} + C_1 \dot{v}_{C1} + \frac{v_x - v_0}{R_1}$$

$$\rightarrow \dot{v}_{C1} = -\frac{1}{R_1 C_1} \left(2 + \frac{R_1}{R_2} \right) v_{C1} - \frac{1}{R_1 C_1} \left(\frac{R_5}{R_4} - \frac{R_1}{R_2} - 1 \right) v_{C2} + \frac{1}{R_1 C_1} v_{IN}$$

$$\frac{v_x}{R_2} = C_2 \dot{v}_{C2}$$

$$\rightarrow \dot{v}_{C2} = \frac{1}{R_2 C_2} v_{C1} - \frac{1}{R_2 C_2} v_{C2}$$

$$v_0 = -\left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) v_{C2}$$

Modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_1 C_1} \left(\frac{R_5}{R_4} - \frac{R_1}{R_2} - 1\right) \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_{IN}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

Reemplazando numéricamente por los datos de la tabla

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -243128.9 & -11501057.08 \\ 2612.3 & -2612.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 116279.06 \\ 0 \end{bmatrix} v_{IN}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & -101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de función de transferencia

Se tiene que:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Luego:

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{-0.5 \cdot (1 + R_5/R_4)}{0.5 \cdot C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + C_2 (R_1/2 + R_2)s + 0.5 \cdot (1 + R_5/R_4)}$$

Evaluando numéricamente:

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{-30679691866.5}{s^2 + 245741.29s + 30679691866.5}$$

c) Transformación lineal

Se tiene que:

$$\bar{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados del sistema original, $\bar{x}(t)$ es el vector de estados del modelo transformado y T es una matriz no singular que transforma de un modelo al otro.

A partir de las expresiones enunciadas en a) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las matrices del modelo transformado son:

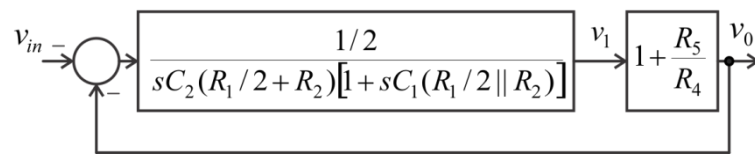
$$\bar{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -245741.29 & 11744186.04 \\ -2612.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 116279.06 \\ 0 \end{bmatrix}$$

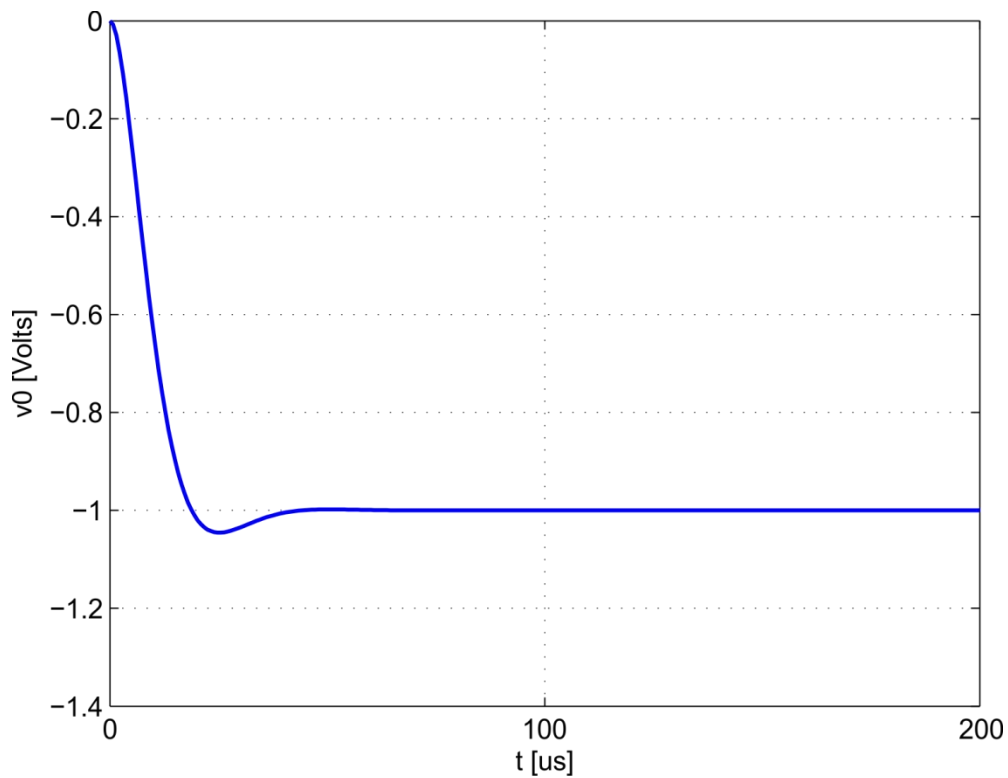
$$\bar{C} = CT = [0 \quad 101]$$

$$\bar{D} = D = 0$$

d) Respuesta del sistema y diagrama de bloques.

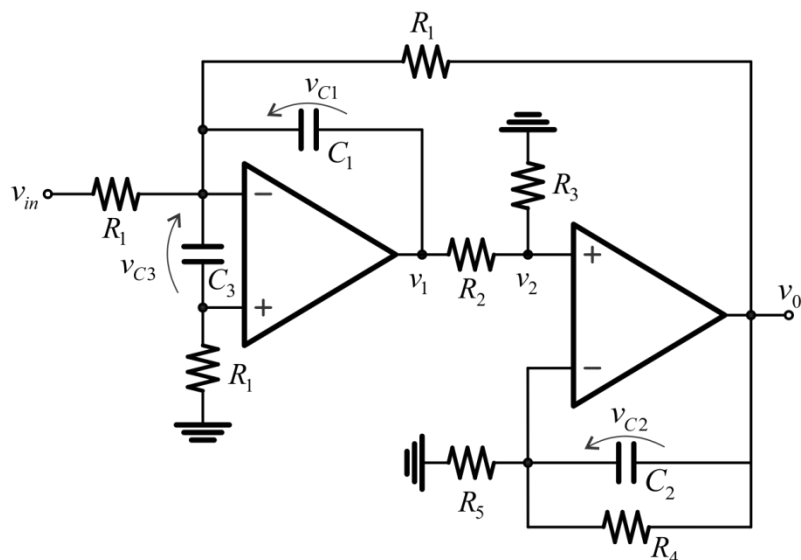


Respuesta a una entrada en escalón de 1V



Ejercicio B

Para el circuito de la figura implementado con operacionales ideales:



Datos:

$$\begin{aligned} R_1 &= 10\text{k}\Omega \\ R_2 &= 22\text{k}\Omega \\ R_3 &= 22\text{k}\Omega \\ R_4 &= 27\text{k}\Omega \\ R_5 &= 1\text{k}\Omega \\ C_1 &= 115\text{nF} \\ C_2 &= 2.2\text{nF} \\ C_3 &= 10\text{pF} \end{aligned}$$

- Plantee las ecuaciones diferenciales del sistema y encuentre el correspondiente modelo de estado.
- A partir del modelo de estado y haciendo uso de las matrices del modelo, encuentre la función de transferencia entre v_0 y v_{IN} . Deje expresadas todas las matrices utilizadas para el cálculo.
- Encuentre una transformación lineal para que en el vector de estado aparezcan la tensión v_1 y la tensión v_0 .
- Evalúe por simulación la salida v_0 para una entrada v_{IN} en escalón de amplitud 1V. Considere los valores proporcionados en la tabla de la figura.

Solución Ejercicio B

a) Ecuaciones

$$v_{C3} = 0 \quad (\text{A.O. ideal: ganancia infinita})$$

$$v_1 = -v_{C1}$$

$$v_2 = -[R_3/(R_2 + R_3)]v_{C1}$$

$$v_0 = v_2 - v_{C2}$$

$$\frac{v_{IN}}{R_1} + \frac{v_0}{R_1} = C_1 \dot{v}_{C1}$$

$$\rightarrow \dot{v}_{C1} = -\frac{R_3}{R_1} \left[\frac{1}{C_1(R_2 + R_3)} \right] v_{C1} - \frac{1}{R_1 C_1} v_{C2} + \frac{1}{R_1 C_1} v_{IN}$$

$$\frac{v_2}{R_5} + \frac{v_{C2}}{R_4} = -C_2 \dot{v}_{C2}$$

$$\rightarrow \dot{v}_{C2} = \frac{R_3}{R_5} \left[\frac{1}{C_2(R_2 + R_3)} \right] v_{C1} - \frac{1}{R_4 C_2} v_{C2}$$

$$v_0 = -[R_3/(R_2 + R_3)]v_{C1} - v_{C2}$$

Modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_3}{R_1} \left[\frac{1}{C_1(R_2 + R_3)} \right] & -\frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{R_3}{R_5} \left[\frac{1}{C_2(R_2 + R_3)} \right] & -\frac{1}{R_4 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_{IN}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

Reemplazando numéricamente por los datos de la tabla

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -434.78 & -869.56 \\ 227272.7 & -16835.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 869.56 \\ 0 \end{bmatrix} v_{IN}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de función de transferencia

Se tiene que:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Luego:

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{(1 + sC_2R_4||R_5)}{\left[C_1C_2 \frac{R_1R_4R_5(R_2 + R_3)}{R_3(R_5 + R_4)} \right] s^2 + \left[C_1 \frac{R_1R_5(R_2 + R_3)}{R_3(R_5 + R_4)} + C_2R_4||R_5 \right] s + 1}$$

Evaluando numéricamente:

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{-434.782 (s + 471380.47)}{s^2 + 17269.8s + 204948031}$$

c) Transformación lineal

Se tiene que:

$$\bar{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados del sistema original, $\bar{x}(t)$ es el vector de estados del modelo transformado y T es una matriz no singular que transforma de un modelo al otro.

A partir de las expresiones enunciadas en a) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -R_3 & -1 \\ (R_2 + R_3) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las matrices del modelo transformado son:

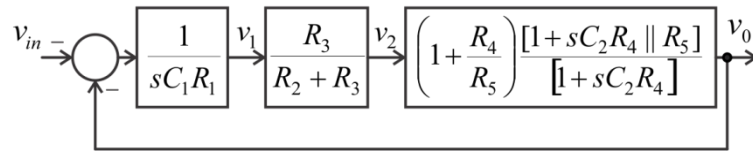
$$\bar{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -5.684e-14 & -869.56 \\ 235690.23 & -17269.8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -869.56 \\ -434.78 \end{bmatrix}$$

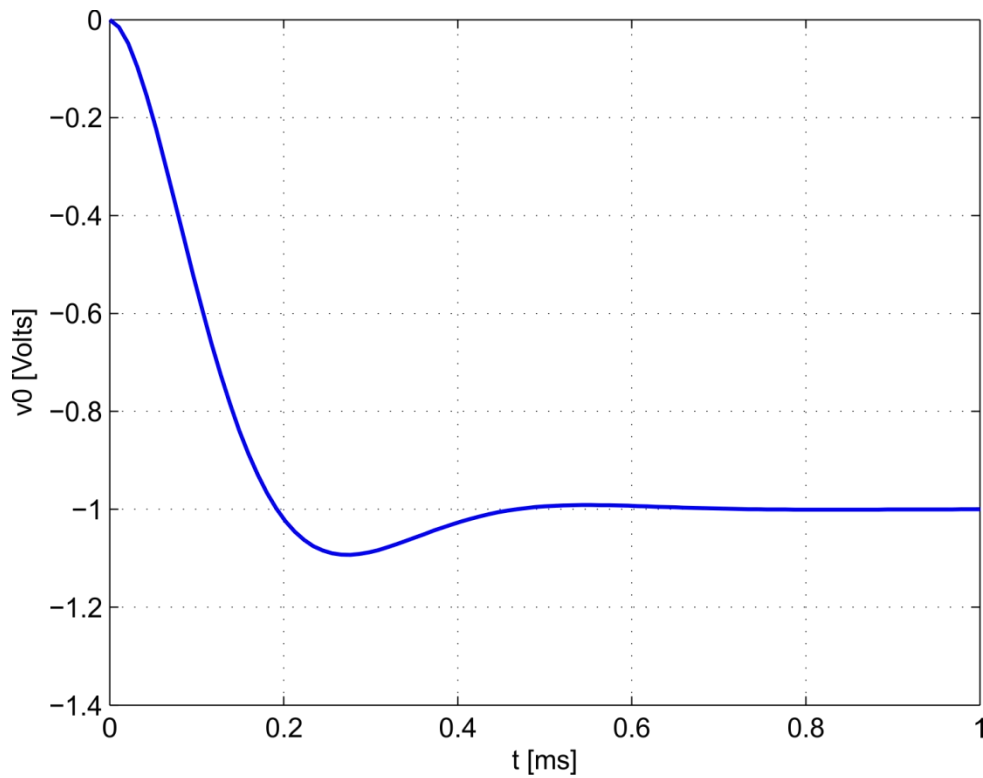
$$\bar{C} = CT = [0 \quad 1]$$

$$\bar{D} = D = 0$$

d) Respuesta del sistema y diagrama de bloques.

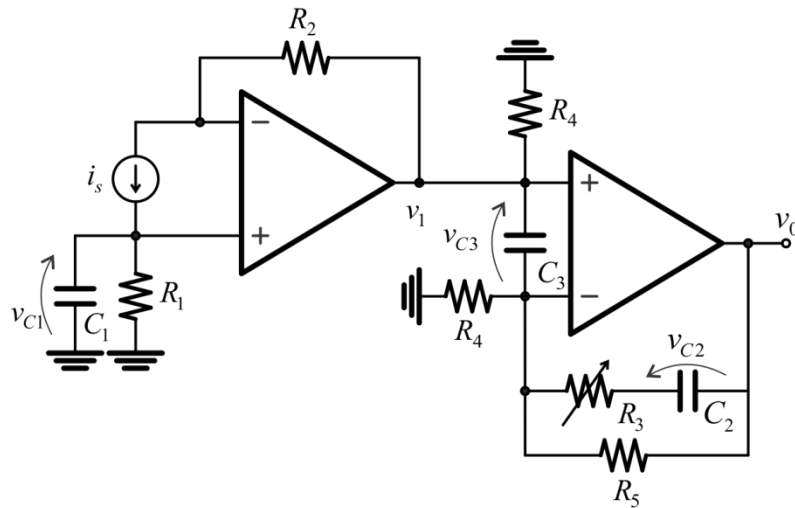


Respuesta a una entrada en escalón de 1V



Ejercicio C

Para el circuito de la figura implementado con operacionales ideales:



Datos:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1\text{k}\Omega \\ R_2 &= 100\text{k}\Omega \\ R_3 &= 1\text{k}\Omega \\ R_4 &= 1\text{k}\Omega \\ R_5 &= 4.7\text{k}\Omega \\ C_1 &= 20\text{nF} \\ C_2 &= 20\text{nF} \\ C_3 &= 6\text{pF} \end{aligned}$$

- Plantee las ecuaciones diferenciales del sistema y encuentre el correspondiente modelo de estado.
- A partir del modelo de estado y haciendo uso de las matrices del modelo, encuentre la función de transferencia entre v_0 y i_s . Deje expresadas todas las matrices utilizadas para el cálculo.
- Encuentre una transformación lineal para que en el vector de estado aparezcan la corriente por R_1 y la tensión $-v_{C2}$.
- Evalúe por simulación la salida v_0 para una entrada i_s en escalón de amplitud $10\mu\text{A}$. Considere los valores proporcionados en la tabla de la figura.

Solución Ejercicio C

a) Ecuaciones

$$v_{C3} = 0 \quad (\text{A.O. ideal: ganancia infinita})$$

$$i_s = \frac{v_{C1}}{R_1} + C_1 \dot{v}_{C1}$$

$$\rightarrow \dot{v}_{C1} = -\frac{1}{R_1 C_1} v_{C1} + \frac{1}{C_1} i_s$$

$$v_1 = v_{C1} + i_s R_2$$

$$\frac{v_1}{R_4} + \frac{v_1 - v_0}{R_5} + C_2 \dot{v}_{C2} = 0$$

$$\frac{v_0 + v_{C2} - v_1}{R_3} = -C_2 \dot{v}_{C2}$$

$$\rightarrow \dot{v}_{C2} = -\frac{1}{(1 + R_3/R_5)R_4 C_2} v_{C1} - \frac{1}{(1 + R_3/R_5)R_5 C_2} v_{C2} - \frac{(R_2/R_4)}{(1 + R_3/R_5)C_2} i_s$$

$$v_0 = \left(1 + \frac{R_3 || R_5}{R_4}\right) v_{C1} - \frac{R_5}{(R_3 + R_5)} v_{C2} + R_2 \left(1 + \frac{R_3 || R_5}{R_4}\right) i_s$$

Modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ -\frac{1}{(1 + R_3/R_5) R_4 C_2} & -\frac{1}{(1 + R_3/R_5) R_5 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ -\frac{(R_2/R_4)}{(1 + R_3/R_5) C_2} \end{bmatrix} i_s$$

$$v_0 = \left[\left(1 + \frac{R_3 || R_5}{R_4}\right) \quad -\frac{R_5}{(R_3 + R_5)} \right] \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + R_2 \left(1 + \frac{R_3 || R_5}{R_4}\right) i_s$$

Reemplazando numéricamente por los datos de la tabla

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50000 & 0 \\ -41228.07 & -8771.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50000000 \\ -4122807017.5 \end{bmatrix} i_s$$

$$v_0 = [1.8245 \quad -0.8245] \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + 182456.1 \cdot i_s$$

b) Cálculo de función de transferencia

Se tiene que:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\frac{V_0(s)}{i_s(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Luego:

$$\frac{V_0(s)}{i_s(s)} = (R_1 + R_2) \left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) \left[\frac{(1 + sC_1 R_1 || R_2)}{(1 + sC_1 R_1)} \right] \left[\frac{1 + sC_2 R_{eq}}{1 + sC_2 (R_5 + R_3)} \right]$$

$$\text{Dónde: } R_{eq} = \frac{(R_5 + R_3) + R_3 R_5 / R_4}{(R_4 + R_5) / R_4}$$

Evaluando numéricamente:

$$\frac{V_0(s)}{i_s(s)} = \frac{1.8246e05 (s + 5.05e04) (s + 2.74e04)}{(s + 5e04) (s + 8772)}$$

c) Transformación lineal

Se tiene que:

$$\bar{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados del sistema original, $\bar{x}(t)$ es el vector de estados del modelo transformado y T es una matriz no singular que transforma de un modelo al otro.

A partir de las expresiones enunciadas en a) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} i_{R1} \\ -v_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1e-03 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las matrices del modelo transformado son:

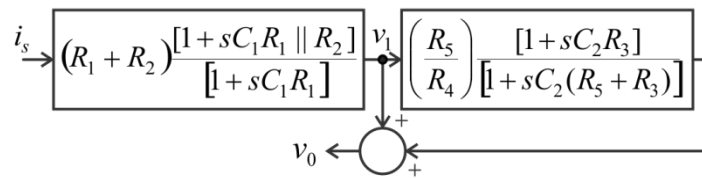
$$\bar{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -50000 & 0 \\ 4.123e+07 & -8772 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 50000 \\ 4.123e+09 \end{bmatrix}$$

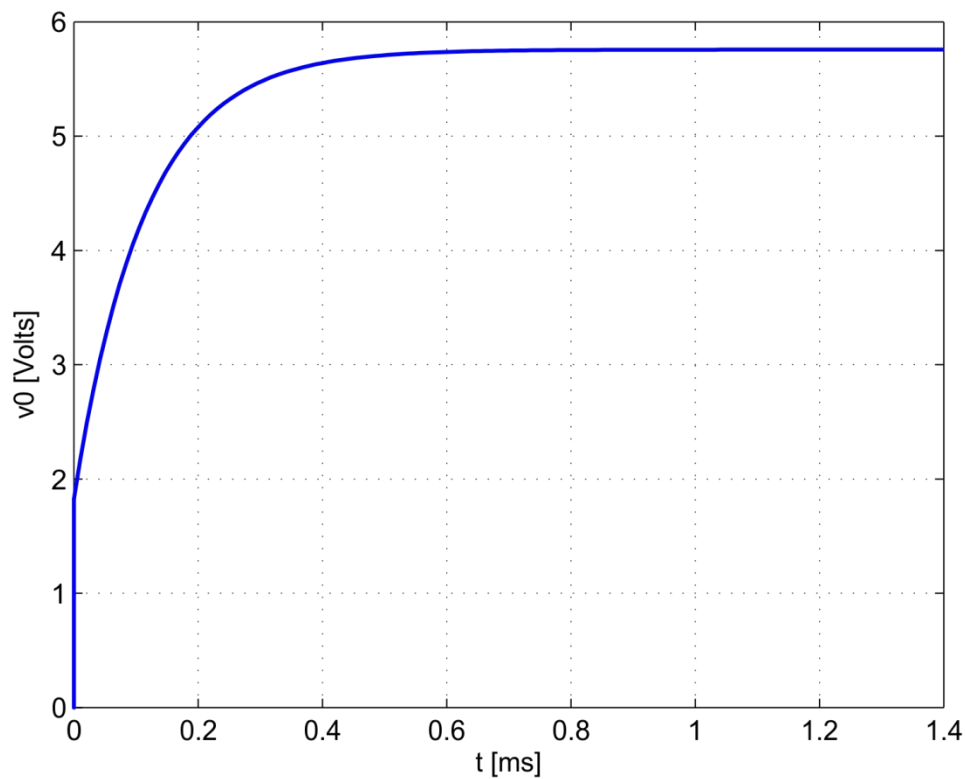
$$\bar{C} = CT = [1825 \quad 0.8246]$$

$$\bar{D} = D = 182456.1$$

d) Respuesta del sistema y diagrama de bloques.

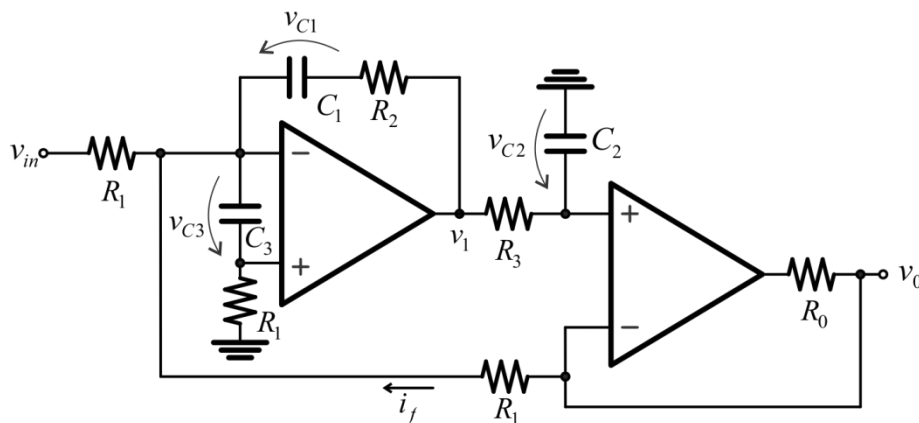


Respuesta a una entrada en escalón de 10uA (corriente máxima de un fotodiodo).



Ejercicio D

Para el circuito de la figura implementado con operacionales ideales:



Datos:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1\text{k}\Omega \\ R_2 &= 3.16\text{k}\Omega \\ R_3 &= 50\text{k}\Omega \\ R_0 &= 10\Omega \\ C_1 &= 20\text{nF} \\ C_2 &= 4\text{nF} \\ C_3 &= 12\text{pF} \end{aligned}$$

- Planteé las ecuaciones diferenciales del sistema y encuentre el correspondiente modelo de estado.
- A partir del modelo de estado y haciendo uso de las matrices del modelo, encuentre la función de transferencia entre v_0 y v_{IN} . Deje expresadas todas las matrices utilizadas para el cálculo.
- Encuentre una transformación lineal para que en el vector de estado aparezca la corriente i_f .
- Evalúe por simulación la salida v_0 para una entrada v_{IN} en escalón de amplitud 1V. Considere los valores proporcionados en la tabla de la figura.

Solución Ejercicio D

a) Ecuaciones

$$v_{C3} = 0 \quad (\text{A.O. ideal: ganancia infinita})$$

$$v_0 = v_{C2}$$

$$\frac{v_{IN}}{R_1} + \frac{v_0}{R_1} = C_1 \dot{v}_{C1}$$

$$\rightarrow \dot{v}_{C1} = \frac{1}{R_1 C_1} v_{C2} + \frac{1}{R_1 C_1} v_{IN}$$

$$\frac{v_{C1} + v_1}{R_2} = -C_1 \dot{v}_{C1}$$

$$v_1 = -v_{C1} - (R_2/R_1)v_{C2} - (R_2/R_1)v_{IN}$$

$$\frac{v_1 - v_{C2}}{R_3} = C_2 \dot{v}_{C2}$$

$$\rightarrow \dot{v}_{C2} = -\frac{1}{R_3 C_2} v_{C1} - \frac{1}{R_3 C_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_{C2} - \frac{1}{R_3 C_2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right) v_{IN}$$

Modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ -\frac{1}{R_3 C_2} & -\frac{1}{R_3 C_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ -\frac{1}{R_3 C_2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \end{bmatrix} v_{IN}$$
$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

Reemplazando numéricamente por los datos de la tabla

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 50000 \\ -5000 & -20800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50000 \\ -15800 \end{bmatrix} v_{IN}$$
$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de función de transferencia

Se tiene que:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Luego:

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{(1 + sC_1R_2)}{[s^2C_1C_2R_1R_3 + sC_1(R_1 + R_2) + 1]}$$

Evaluando numéricamente:

$$\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{-15800 (s + 1.582e04)}{(s^2 + 2.08e04s + 2.5e08)}$$

c) Transformación lineal

Se tiene que:

$$\bar{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados del sistema original, $\bar{x}(t)$ es el vector de estados del modelo transformado y T es una matriz no singular que transforma de un modelo al otro.

Se pide que en el vector transformado este i_f . Luego se adopta mantener v_{C1} .

$$\begin{bmatrix} v_{C1} \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1e-3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las matrices del modelo transformado son:

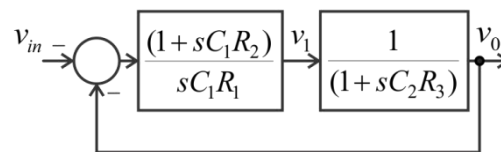
$$\bar{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 50000000 \\ -5 & -208000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 50000 \\ -15.8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = [0 \quad 1000]$$

$$\bar{D} = D = 0$$

d) Respuesta del sistema y diagrama de bloques.



Respuesta a una entrada en escalón de 1V

