مکانیک ؟ ← یک ابزار ← { ✓ قوانین
✓ عملگرها
✓ ...

فیزیک
← مکانیک کوانتومی
← مکانیک کلاسیک

مکانیک کوانتومی ← پیش‌بینی موقعیت زمان و مکان برای ذرات در اندازه ۱۰^-۹ (نانو)

تمامی معادلات و روابط در مکانیک کوانتومی برگشت‌پذیر است.

مکانیک کلاسیک ← بررسی پیش‌بینی مکان و زمان برای ذرات با ابعاد معمولی و سرعت‌های معمولی

$x = vt$

کامپیوترهای کوانتومی بر اساس مکانیک کوانتومی کار می‌کنند. ⇐ در آن‌ها از منطق Reversible استفاده شده است.

Reversible logic → CMOS
→ QCA
→ ...

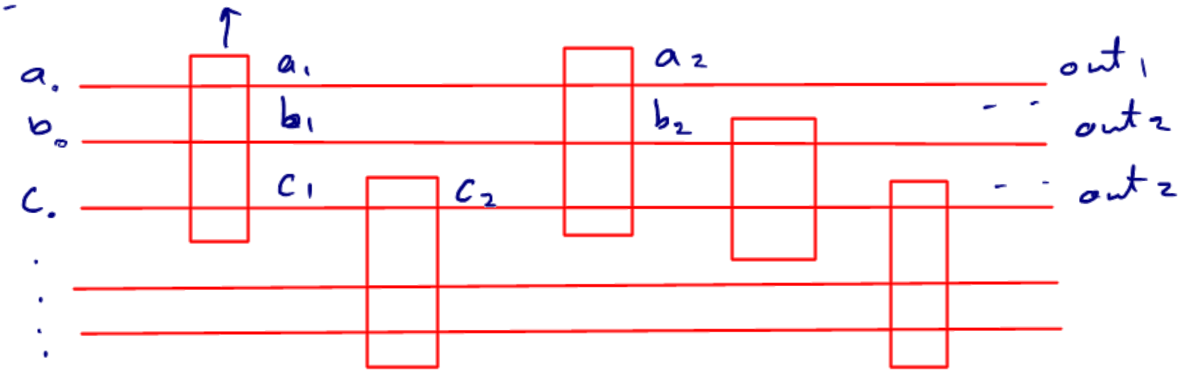
سوال: فایده طراحی در Reversible logic چیست؟

existence of heat loss. As early as 1960, Landauer [2] has proved that even with high technology circuits and systems constructed using irreversible hardware would still result in energy dissipation due to information loss. It has been proved that the loss of each bit of information dissipates kTln2 Joules of heat energy, where k is Boltzmann's constant, whose value is 1.38×10-23J/K, and T is the absolute temperature at which computation is performed. But the same circuit which is constructed using the reversible logic gates will allow the recovery of the information. In 1973, Bennett showed that kTln2 energy dissipation would not occur if a computation is carried out in a reversible logic [3]. Thus, reversible logic is likely to be in demand in high speed power aware circuits when calculation with minimum energy consumption is considered.

ساختار

مدارات برگشت پذیر

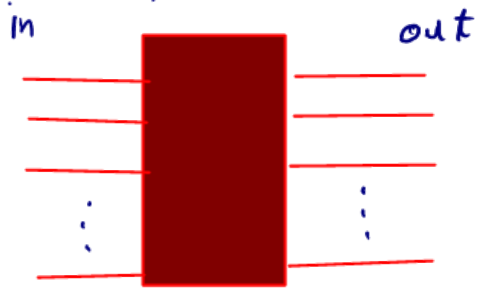
گیت های برگشت پذیر



Reversible Gate

تعداد ورودی ها =

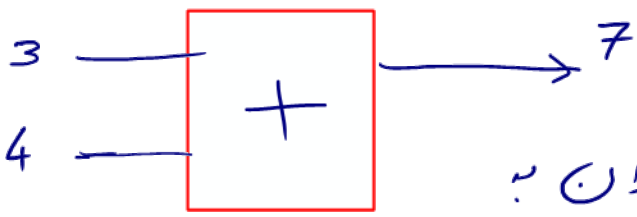
تعداد خروجی ها



مثال از یک جعبه برگشت پذیر

اولین شرط: از روی خروجی مدار (گیت) بتوان ورودی ها را بدست آورد.

* کدام ورودی این خروجی را نتیجه داده است؟



فقط با یک خروجی نمی‌توان به ورودی ها رسید

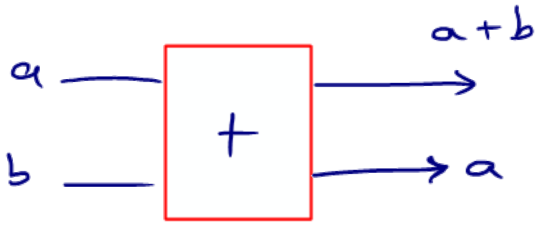
irreversible

کدام ورودی؟

$$\begin{cases} 1+6=7 \\ 2+5=7 \\ 3+4=7 \\ 0+7=7 \end{cases}$$

تبدیل به مدار برگشت پذیر

Reversible



خروجی garbage

✓ هیچ تابع منطقی معنی‌داری ندارد

✓ فقط به منظور ایجاد ویژگی برگشت پذیری در مدار اضافه شد.

in		out	
a	b	a+b	a
3	4	7	3

in	out
a = 3	a+b = 7
b = 4	a = 3

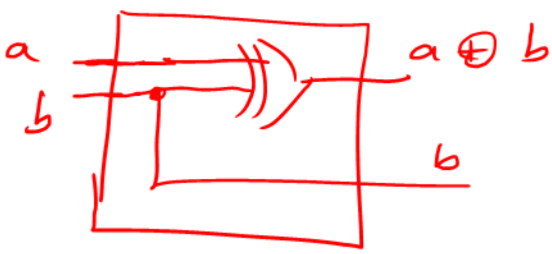
مدار برگشت پذیر ← یک نگاشت یک به یک بین خروجی ها و ورودی ها باید باشد

مثال طراحی گیت XOR به صورت برگشت پذیر طراحی نمایید

① جدول Truth table

② حتما مدار ← { ورودی ۲ / خروجی ۲

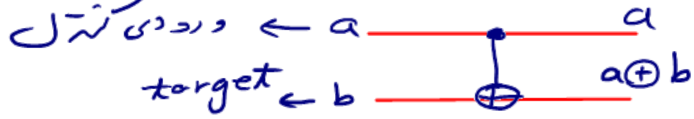
a	b	
0	0	0
1	1	



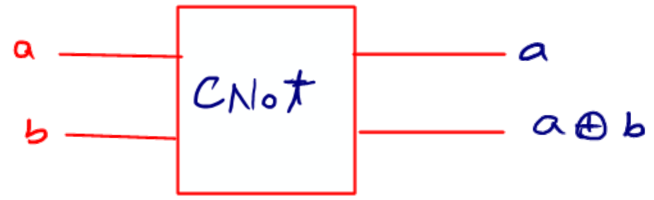
XOR برگشت پذیر

XoR

	in		out		
	a	b	a	a⊕b	
a = 0	0	0	0	0	b
	0	1	0	1	
a = 1	1	0	1	1	b′
	1	1	1	0	



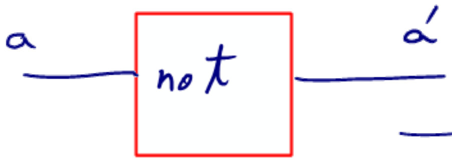
مدار 2x2



CNot یک گیت در مدارات کوانتومی است.

↓

Feynman Gate



not

طراحی گیت OR به صورت برگشت پذیر

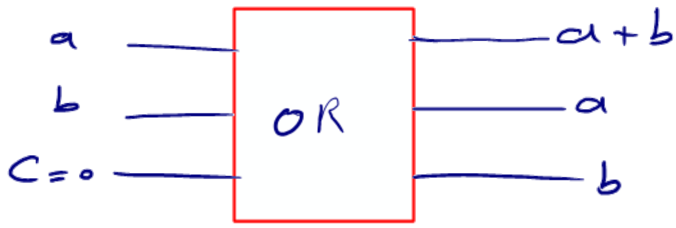
↓

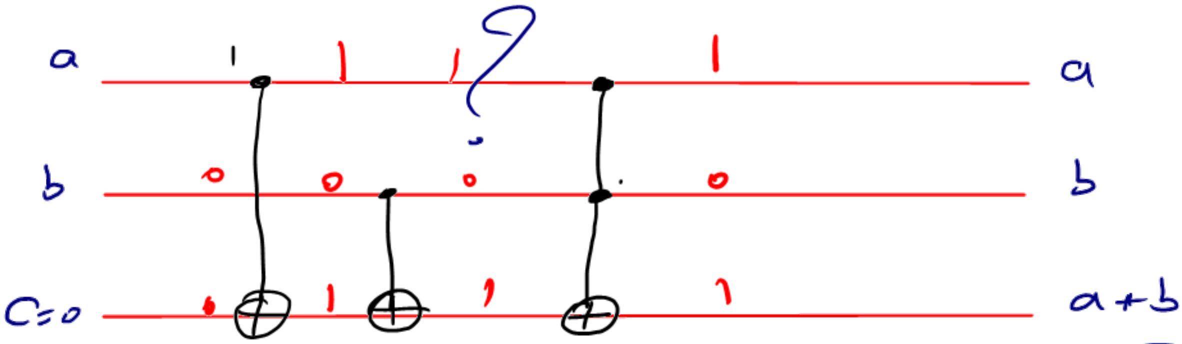
حداقل 3x3 است

ثابت

↑

C	a (in)	b (in)	a+b (out)	a	b
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1



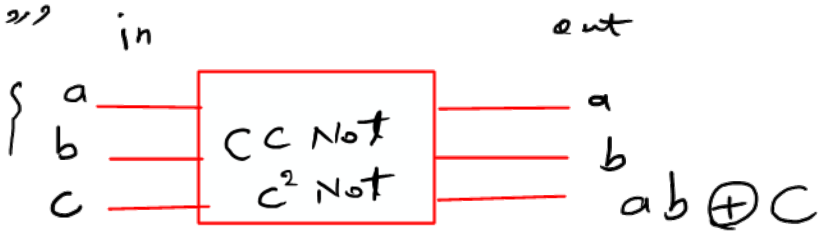


CC Not

OR

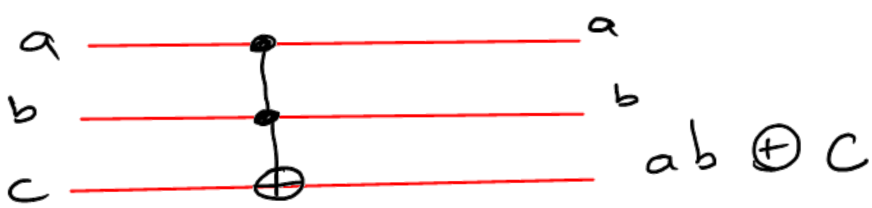
گیت Toffoli یک گیت 3×3

ورودی های کنترل

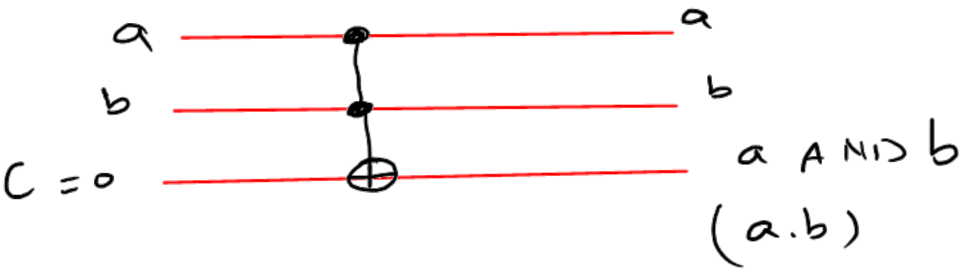


وقتی C، Not می‌گردد که هر دو ورودی a و b باهم یک باشند.

CNot



if $\underline{C = 0}$ $\qquad C^2 Not \equiv a \text{ AND } b$



* گیت Toffoli به عنوان یک گیت پایه در نظر گرفته نمی‌شود.
primitive Gate

* گیت‌های پایه $\underline{CNot}, V, V^+,$
$X, Y, Z, \ldots$

* برای سادگی مقایسه بین طراحی های انجام شده از کمیت

Quantum cost (Q.C) استفاده می‌شود.

فرضیهٔ کوانتومی

قرارداد شده است که برای Q.C

CNot

V, V^{+}, ...

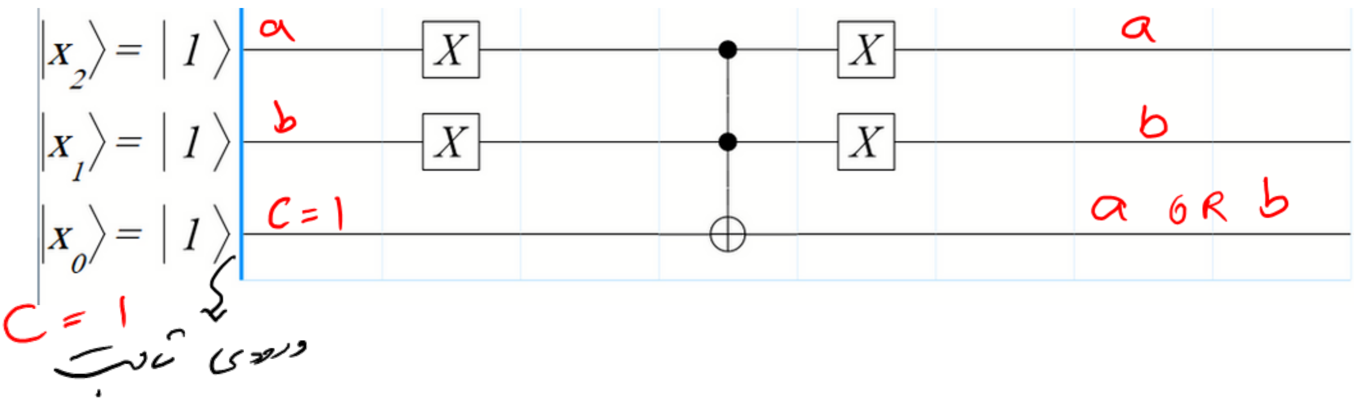
مقدار 1 واحد باشد.

در مقایسه بین دو مدار، مداری با Q.C کمتر، بهتر و کارایی بالاتری دارد.

طراحی OR به صورت برگشت‌پذیر

ثابت

	in		out		
C	a	b	a+b	a	b
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1



Not

in	out
$\|0\rangle$	$\|1\rangle$
$\|1\rangle$	$\|0\rangle$
$\|\psi\rangle = \alpha\|0\rangle \pm \beta\|1\rangle$	$\alpha\|1\rangle \pm \beta\|0\rangle$

$\underbrace{|\psi\rangle}_{\text{qubit یک}}$

* عملکرد گیت X همان Not است

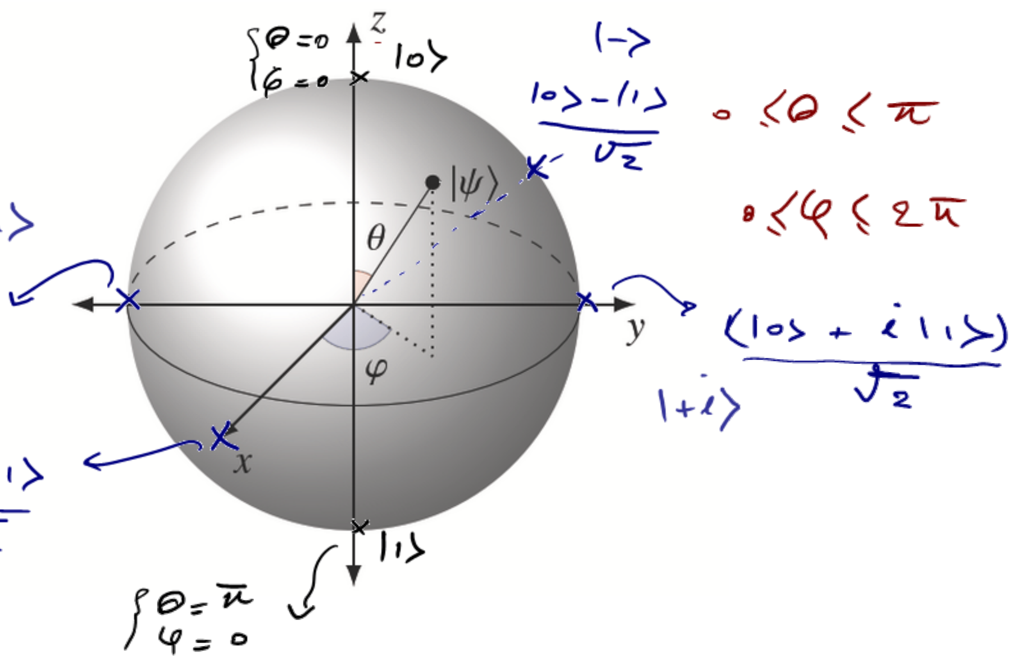
$X|0\rangle = |1\rangle$
$X|1\rangle = |0\rangle$

گیت های X, Y, Z گیت های پایه در کامپیوتر کوانتومی هستند
(گیت های پاولی)

گیت V ← همان گیت $\sqrt{x}$ است.

و همان چرخش حول محور x به اندازه $\pi/2$ است.

Bloch

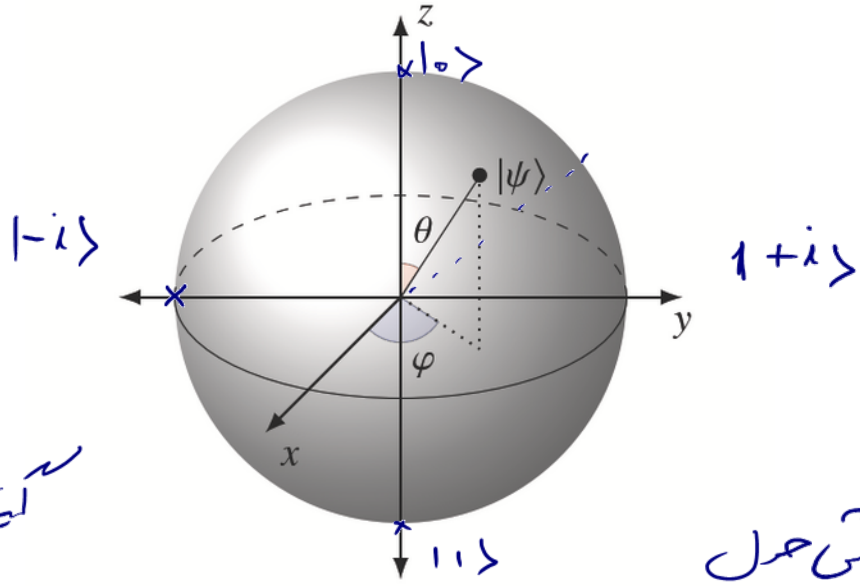


$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$



گیت $\bar{V}$ مثل $\sqrt{x}$

گیت X چرخش حول محور x ها است (به اندازه ۱۸۰ درجه)

$$X|0\rangle = |1\rangle$$
$$X|1\rangle = |0\rangle$$

$$\bar{V}|0\rangle = |-i\rangle$$
$$\bar{V}|-i\rangle = |1\rangle$$

$|0\rangle$ —[$\bar{V}$]—[$\bar{V}$]— $|1\rangle$

Not —⊕— معادل

dagger

گیت V^{+}

چرخش حول محور x ها به اندازه $-\pi/2$ است.

برعکس گیت $\bar{V}$ عمل می‌نماید

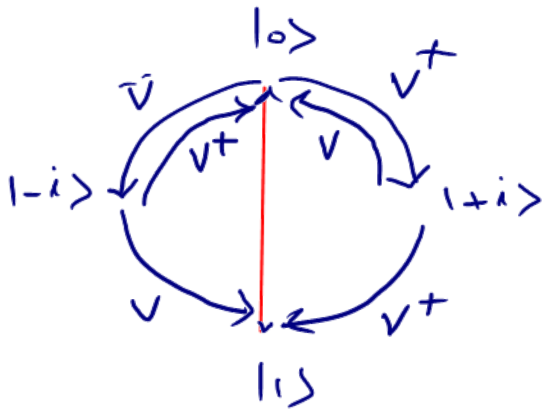
$|0\rangle$ —[V^{+}]—[V^{+}]— $|1\rangle$

$|1\rangle$ — — $|0\rangle$

مانند Not است

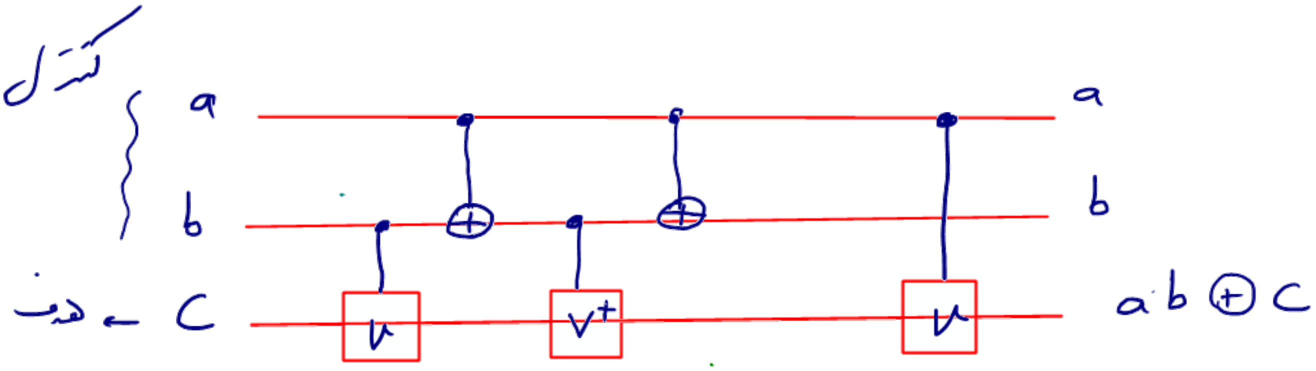
$|0\rangle$ —[V]— $|-i\rangle$ —[V^{+}]— $|0\rangle$

* دو گیت متوالی یکی V و دیگری V^+ تأثیر همدیگر را از بین می‌برند.



ترین ساختار گیت Toffoli

CNot, CV, CV$^+$

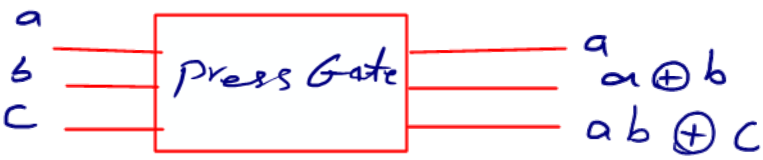


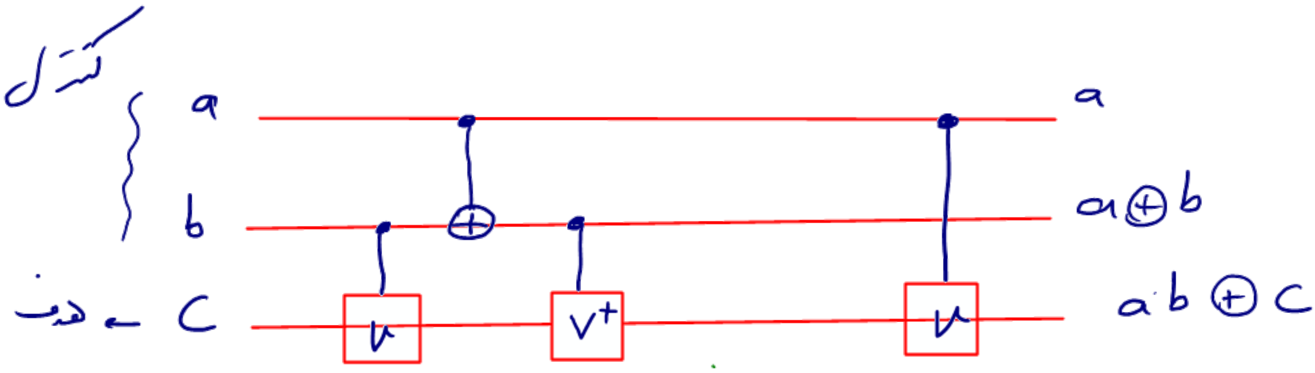
a	b	c	out	g_1 (a)	g_2 (b)
0	0	X	C	X	X
0	1	X	C	X	X
1	0	X	C	X	X
1	1	X	C′	X	X

QC = 5

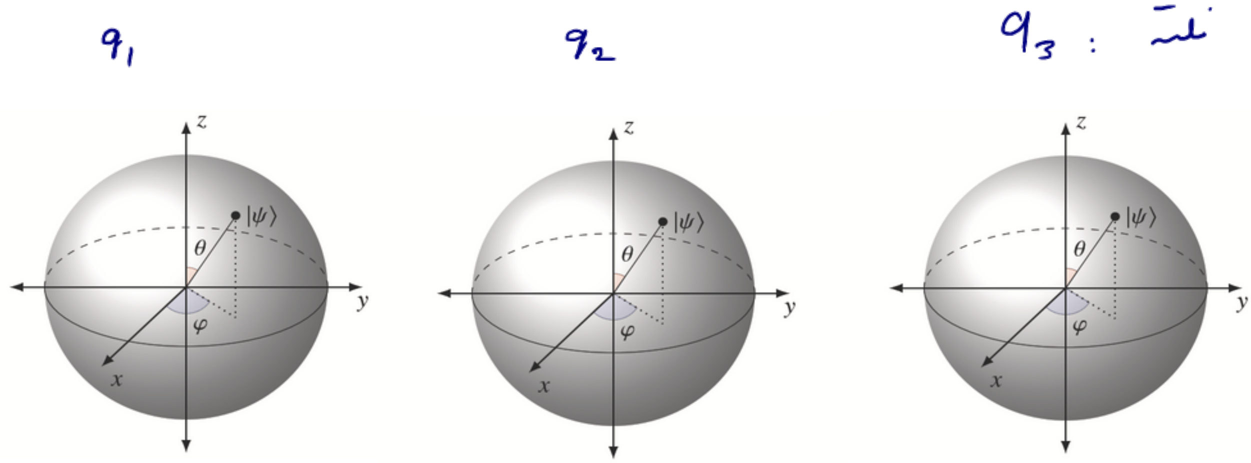
Toffoli 3 x 3

press Gate گیت



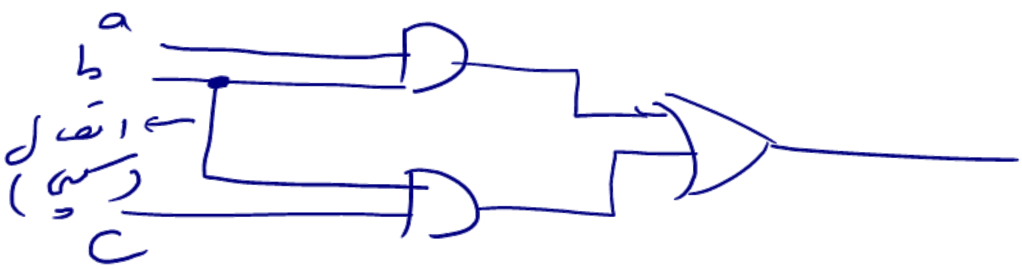


نکته:



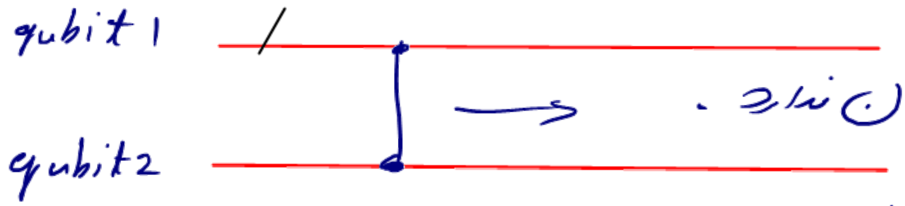
یک سیستم کوانتومی (کامپیوتر کوانتومی) که از سه تا qubit تشکیل شده است

مفهوم سیم در کامپیوتر کلاسیک

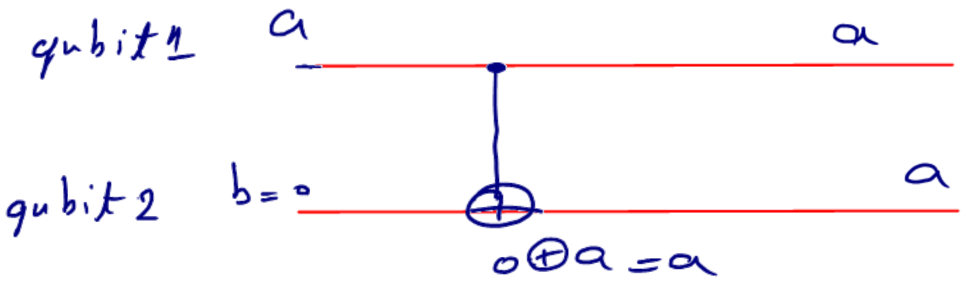


nocloning ⟶ copy مدار کپی

در کامپیوتر کوانتومی سیم دو انشعاب وجود ندارد.

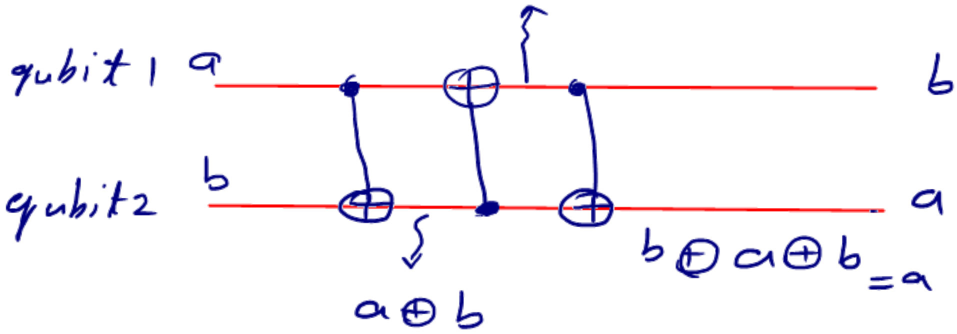


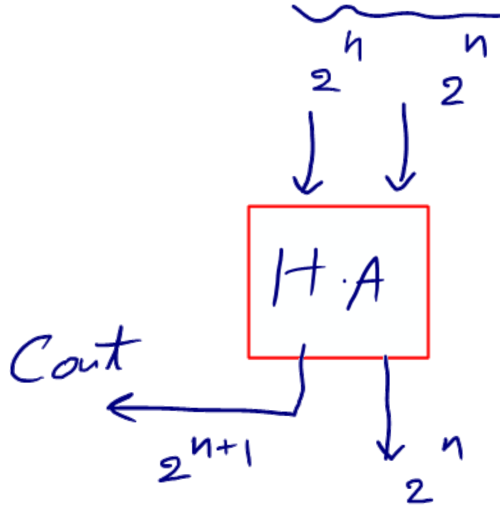
⟶ امکان ندارد.



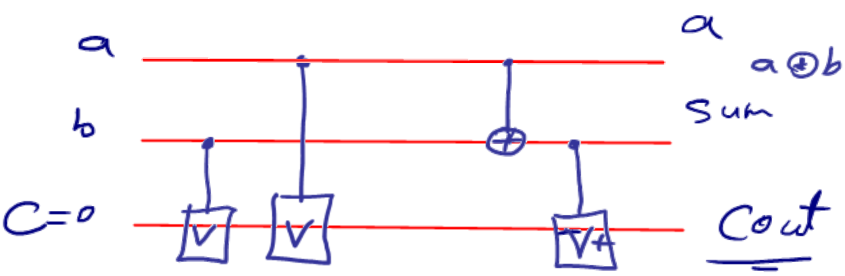
مدار جابجایی دو qubit ورودی

$a \oplus b \oplus a = b$





طراحی Half Adder



C=0	a	b	Carry	sum	a
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1

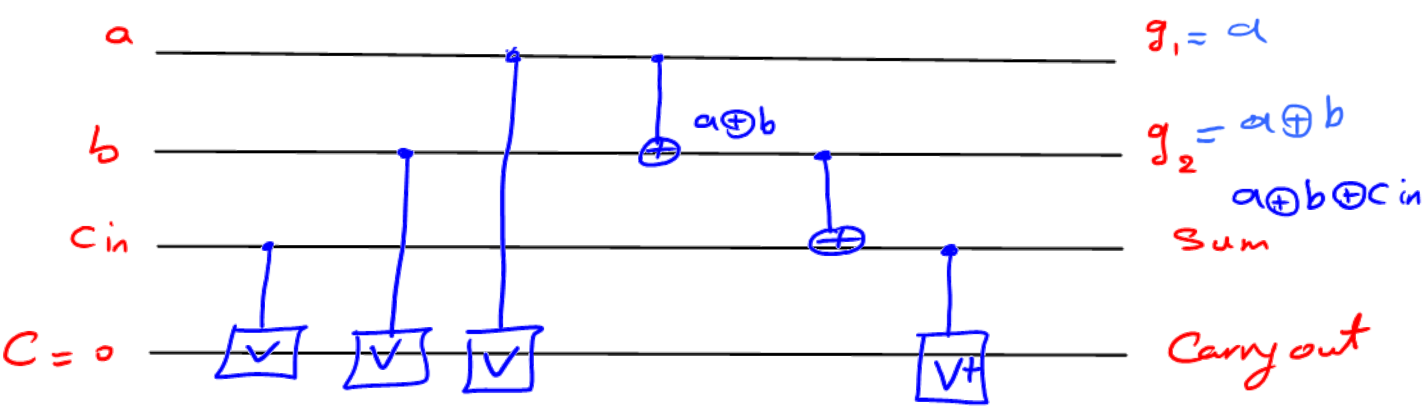
الف

حداقل مدار طراحی شده برای H.A در اندازه: 3x3

Full Adder

$C=0$	a	b	c	cout	sum	g_1	g_2
0	0	0	0	0	0	?	?
0	0	0	1	0	1		
0	0	1	0	0	1		
0	0	1	1	1	0		
0	1	0	0	0	1		
0	1	0	1	1	0		
0	1	1	0	1	0		
0	1	1	1	1	1		

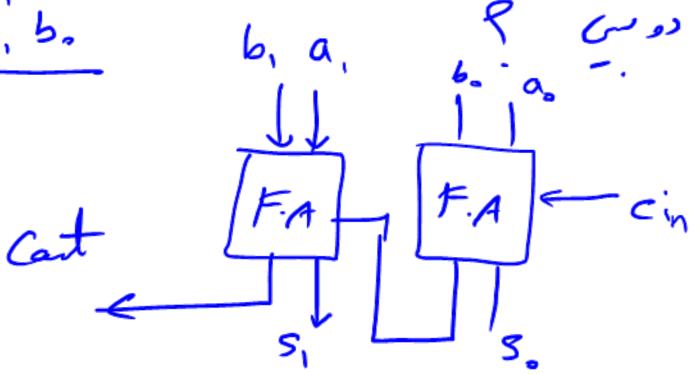
اندازه مدار F.A ، 4×4 است

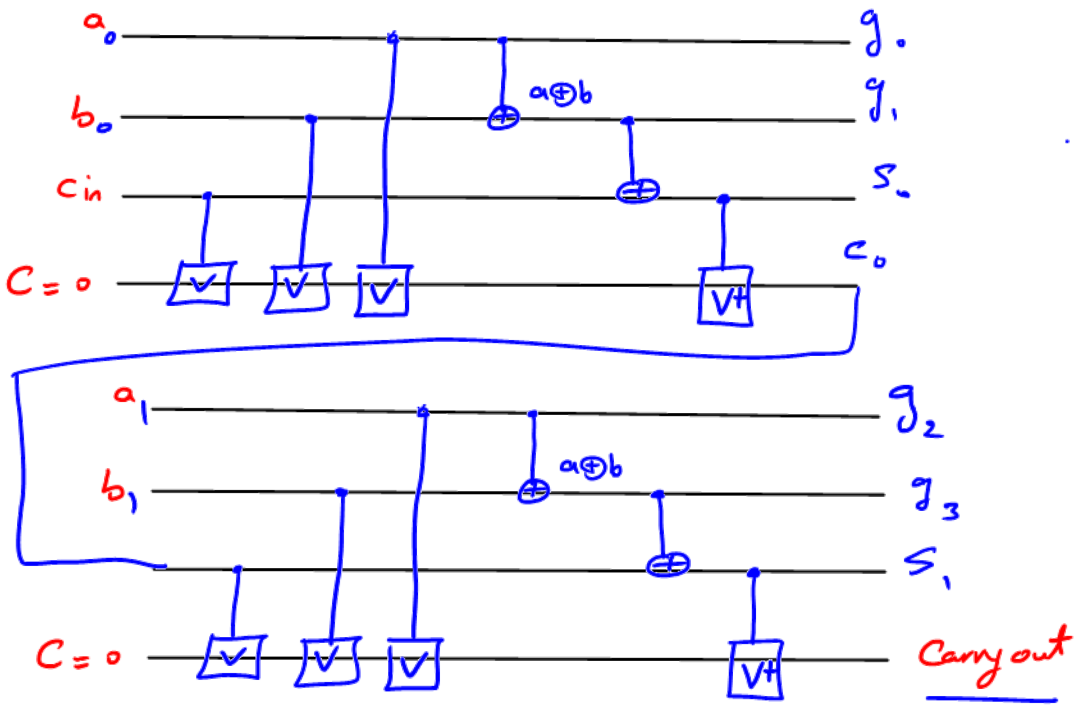


Q.C = 6

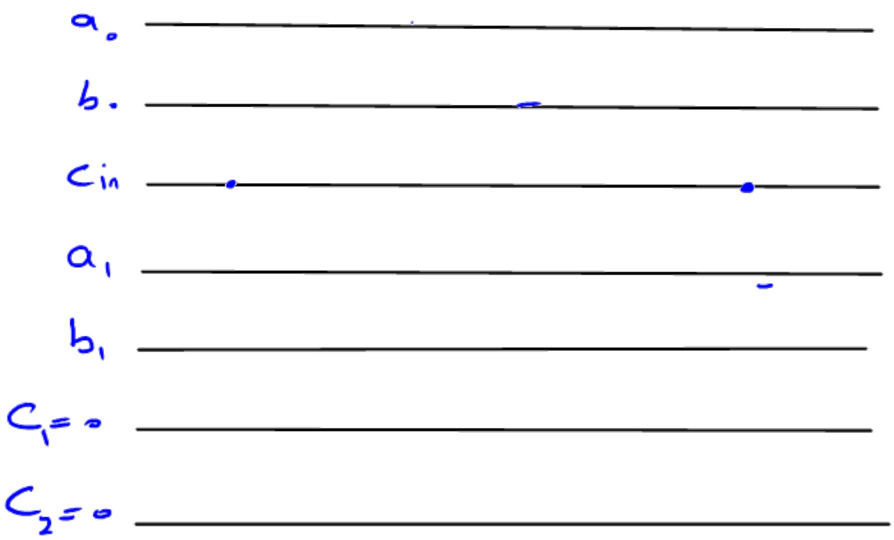
تمرین: طراحی Full Adder دو بیتی ؟

$A \rightarrow \begin{matrix} a_1 a_0 \\ b_1 b_0 \end{matrix}$





شبیه سازی ← تمرین



$Sum = ?$

$C_{out} = ?$

$i \to -i$

ماتریس

کمکری

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 0.5-0.5i & 0.5+0.5i \\ 0.5+0.5i & 0.5-0.5i \end{bmatrix}$$

$$V^{+} = \begin{bmatrix} 0.5+0.5i & 0.5-0.5i \\ 0.5-0.5i & 0.5+0.5i \end{bmatrix}$$

Full-Adder

تمرین طراحی

Full Adder-subtractor

✓ در سیستم مکمل 2

توضیح

$A - B = A + B' + 1$

if $S = 0 \Rightarrow A + B$ if $S = 1 \Rightarrow A - B$

Decoder 2×4

تمرین

mux

توزیع کننده

Alu طراحی

مفهوم bit در کامپیوتر های کلاسیک

bit → منطقی 0 1

یک بیت یا صد درصد 0 و یا صد درصد 1 است.

qubit → $|0\rangle$ بردار $|1\rangle$ بردار

qubit یک بیت کوانتومی در واقع یک سیستم کوانتومی است که وضعیت آن توسط یک بردار حالت در مکانیک کوانتومی نمایش داده می شود.

بردار حالت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

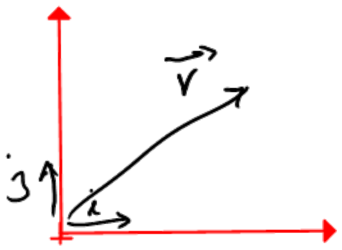
برای qubit

α و β اعدادی مختلط هستند

α^2 احتمال بودن سیستم درحالت $|0\rangle$ را نشان می‌دهد

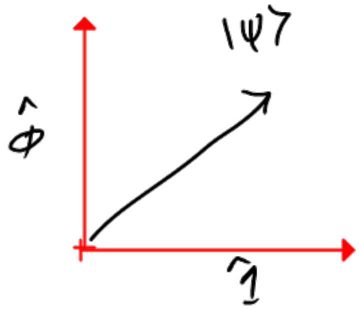
$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

β^2 احتمال بودن سیستم درحالت $|1\rangle$ را نشان می‌دهد



دستگاه مختصات دوبعدی

$$\vec{r} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j}$$



ket

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{محور } \hat{0} \\ \rightarrow \text{محور } \hat{1} \end{array}$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{محور } \hat{0} \\ \rightarrow \text{محور } \hat{1} \end{array}$$

در کامپیوترهای کوانتومی دو بردار $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به عنوان بردارهای پایه در فضای برداری دوبعدی (مختلط) استفاده می‌شوند.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{محور } 0 \\ \text{محور } 1 \end{array} \rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

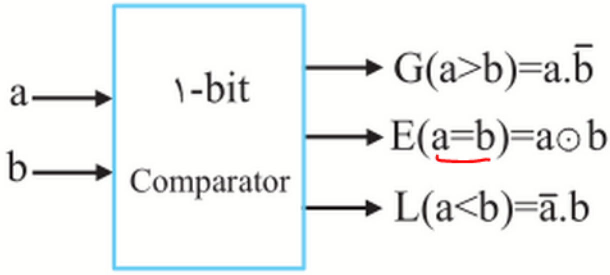
نمایش براکت

Bra ket

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تمرین : طراحی برگشت پذیر مدار زیر در کامپیوتر کوانتومی

$V, V^+, CNOT$ ✓ , $X, Y, Z, H, S, T, \dots$

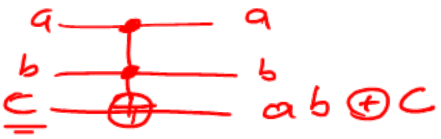


بلوک دیاگرام

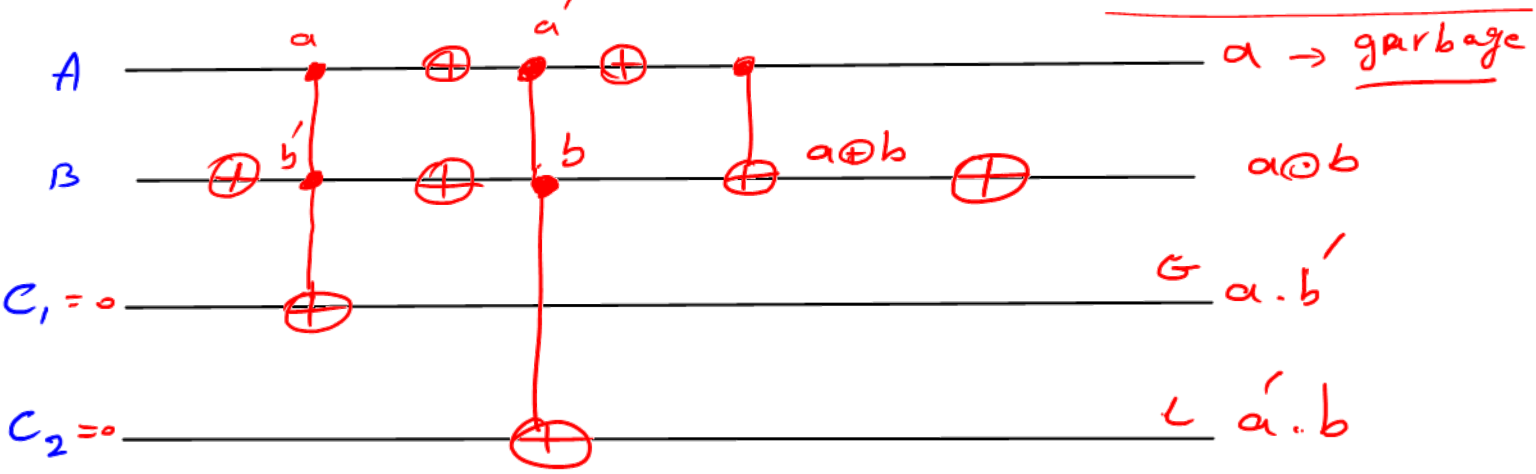
C_2	C_1	A	B	out 1 A=B	out 2 A>B	out 3 A<B	garbage	
?	?	0	0	1	0	0	0	
?	.	0	1	0	0	1	0	?
?	?	1	0	0	1	0	1	?
?	?	1	1	1	0	0	1	

* حداقل اندازه مدار طراحی شده برای مقایسه گر بیتی 4×4 است.

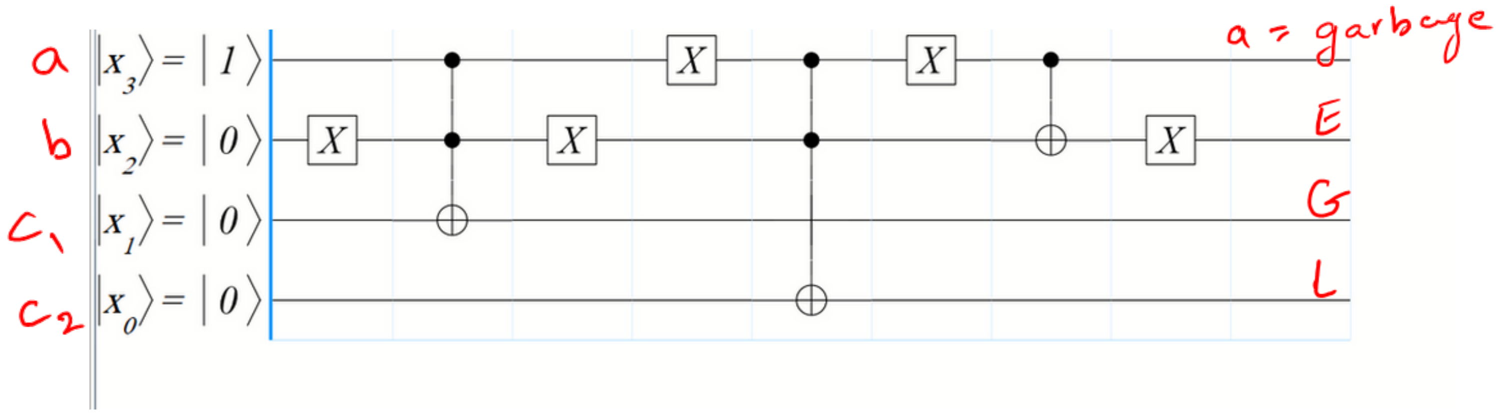
Toffoli:



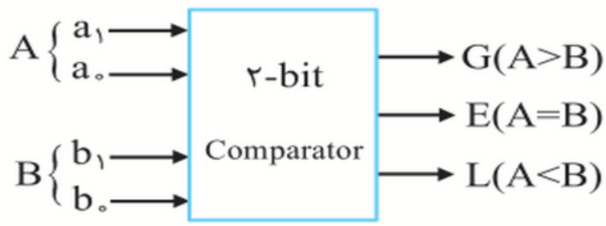
if $c = 0$ $\Rightarrow out = a.b$



$Q.C = 6_{NOT} + 2_{Toffoli} = 6 + 10 = 16$



تمرین طراحی مقایسه گر دو بیتی



بلوک دیاگرام

مفهوم گیت در کامپیوترهای کوانتومی همان اپراتور که در مکانیک کوانتومی است.

$$\hat{A}\,|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$$

در مکانیک کوانتومی اپراتورهای پاولی X و Y و Z

گیت $X\,|0\rangle = |1\rangle$

علامت گذاری دیراک $|0\rangle$ بردار ket

$\langle 0|$ بردار Bra

dagger

$$(|\psi\rangle)^{\dagger} = \langle\psi|$$

$$(\langle\psi|)^{\dagger} = |\psi\rangle$$

عملیات روی بردارها

1 ضرب اسکالر

$\vec{a}\cdot\vec{b} =$ عدد

$|\psi_1\rangle$
$|\psi_2\rangle$ $\Rightarrow$ $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = ?$ (عددی مختلط)

2 ضرب برداری

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$

عملگر است $\leftarrow$ $(|\psi_1\rangle\langle\psi_2|)\,|A\rangle = |B\rangle$

$(|\psi_2\rangle\langle\psi_1|)\,|A\rangle = |C\rangle$

بردار بردار

معادل گیت‌های کوانتومی

فرم عملگری گیت‌های کوانتومی

عملگر برروی یک بردار اثر می‌کند و نتیجه آن یک بردار خواهد بود

بردارهای پایه $\quad |0\rangle , |1\rangle$

فرم ماتریسی

$$\underset{(ket)}{|0\rangle} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \text{محور ۰} \\ \text{محور ۱} \end{array} \Rightarrow (|0\rangle)^{\dagger} = \underset{Bra}{\langle 0|} = (1 \quad 0)$$

۱ می‌شه ماتریس ترانهاده $|0\rangle$

۲ می‌شه مزدوج مختلط تمام مقادیر ($i \to -i$)

$$\langle 0|0\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\sqrt{\langle a|a\rangle} = \text{عدد}$$ طول بردار (norm)

برداری که طول آن یک باشد آن بردار، نرمال است.

$$\langle 1|1\rangle = 1$$

⟸ بردارهای $|0\rangle , |1\rangle$ نرمال هستند.

$$\langle 0|1\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle 1|0\rangle = 0$$

وقتی دو بردار دو به دو بر هم عمود باشند (ضرب اسکالر آنها صفر باشد)

این دو بردار متعامد هستند (مجموعه بردارهای متعامد را تشکیل می‌دهند)

⟸ دو بردار $|0\rangle , |1\rangle$ متعامد هستند.

مجموعه بردارهای متعامد و نرمال می‌توانند به عنوان بردارهای پایه در فضای برداری تشکیل شده استفاده شوند.

$\Leftarrow$ $|0\rangle$, $|1\rangle$ بردارهای پایه هستند.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

تمرین: بردارهای $|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ و $|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ آیا می‌توانند به عنوان بردارهای پایه استفاده شوند؟

طول بردار $\sqrt{\langle\psi_1|\psi_1\rangle} = \sqrt{(1 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad |\psi_1\rangle \longrightarrow$ نرمال‌سازی $\qquad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$|\psi_2\rangle = \quad \sim \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underset{?}{\alpha}\,|0\rangle + \underset{?}{\beta}\,|1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{|1\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{|0\rangle}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

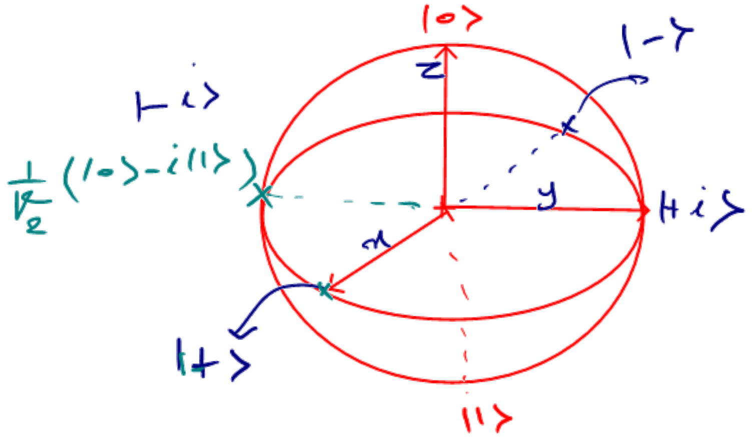
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{|0\rangle} - \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{|1\rangle}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

$$\langle + | - \rangle = 0$$

$$\langle - | + \rangle = 0$$

$\Leftarrow$ بردارهای $|+\rangle$ و $|-\rangle$
می‌توانند بردارهای پایه باشند.



* نکته: بردارهای $|+\rangle$ و $|-\rangle$ بردارهای پایه در عملگرهای هادامارد (H) استفاده می‌شوند

تمرین: بردارهای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را برحسب بردارهای پایه‌ی $|+\rangle$ و $|-\rangle$ به دست آورید

$$|0\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

$$|1\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{\beta}{\sqrt{2}}\\ -\frac{\beta}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} = 1\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} = 0\end{cases} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{\beta}{\sqrt{2}}\\ -\frac{\beta}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} = 0\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} = 1\end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۲. بردار $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix}$ را در بردارهای پایه $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ بنویسید و احتمال بودن

این سیستم کوانتومی در حالت $|+\rangle$ را بدست آورید؟ آیا بردار $|\psi\rangle$ نرمالیزه است؟ (۳ نمره)

طول بردار $\quad \langle\psi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} = 9 + 16 = 25$

بردار نرمالیزه $\quad |\psi\rangle = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \implies \alpha = ? \quad \beta = ?$$

تمرین: تأثیر operator های زیر را روی حالت های گفته شده بدست آورید؟

a) $\hat{A}|+\rangle$ $\qquad$ b) $\hat{A}|-\rangle$

کافی

$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$

$\langle 1|1\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$

$$\hat{A} = |0\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 0|$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \left(|0\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 0|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} + |0\rangle\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1} - i|1\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} - i|1\rangle\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - i|1\rangle\right)$$

$$\hat{A}|+\rangle = |-i\rangle$$

$$\hat{A}|-\rangle = -|+i\rangle$$

$$\hat{A}|+i\rangle = i|-\rangle$$

$$\hat{A}|-\rangle = e^{i\pi}|+i\rangle$$

- تغییر فاز برای کل سیستم به اندازه ی π است

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}$$

$$\hat{A} = |0\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 0|$$

$$\hat{A}|+i\rangle = \Big(|0\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 0|\Big)\big(|+i\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 0|\big)\big(|0\rangle + i|1\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(i|0\rangle - i|1\rangle\big) = i\,\frac{\big(|0\rangle - |1\rangle\big)}{\sqrt{2}} = \underbrace{i}\,|-\rangle$$

✓ احتمال بودن سیستم در حالت $|-\rangle$ چقدر است؟

✓ احتمال بودن سیستم در حالت $|0\rangle$ چقدر است؟

$$\frac{i}{\sqrt{2}}\,\underbrace{|0\rangle} - \frac{i}{\sqrt{2}}\,|1\rangle$$

$$\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \times \frac{-i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \underset{\substack{\downarrow \\ -1}}{-i^2} = \frac{1}{2}$$

یادآوری

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{عدد مختلط}}}{z} = z^2 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{مزدوج مختلط}}}{z \times z^*} \qquad z = a + bi$$

$$(i \rightarrow -i) \qquad \underline{i^2 = -1} \qquad z^* = a - bi$$

$$\underline{z^2 = z \times z^* = a^2 + b^2}$$

احتمال بودن سیستم در حالت $|1\rangle$ چقدر است؟

$$\left((-1)\times\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

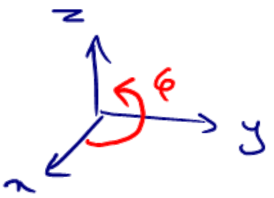
i تأثیری در اندازه‌گیری احتمال بودن سیستم در حالت های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ ندارد

پس i یک چرخش برای کل سیستم می‌باشد.

$$\hat{A}\,|+i\rangle = i\,|-\rangle$$

تغییر فاز یا چرخش روی کل سیستم

(کل کره Bloch)



$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

زاویه φ چقدر باشد تا

$$e^{i\varphi} = i$$

if $\varphi = \pi/2$

$$e^{i\pi/2} = \cos\underbrace{\pi/2}_{0} + i\sin\underbrace{\pi/2}_{1}$$

$$e^{i\pi/2} = i$$

پس i چرخش کل سیستم به اندازه‌ی $\varphi = \pi/2$ است.

تمرین :

اندازه‌گیری سیستم کوانتومی با وضعیت زیر احتمال بودن در حالت $|0\rangle$ و در حالت $|1\rangle$ چقدر است ؟

$$|\psi\rangle = \underbrace{\frac{(1-i)}{\sqrt{3}}}_{\alpha}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle$$

احتمال اینکه سیستم کوانتومی در حالت $|0\rangle$: α^2

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\,(1-i)\times(1+i)$$

$$= 1/3\left(1+\cancel{i}-\cancel{i}-(\underbrace{i^2}_{-1})\right)$$

$$= 2/3$$

$\Leftarrow$ احتمال اینکه در حالت $|1\rangle$ چقدر است ؟

$\beta^2 = ?$ $\qquad 1 - 2/3 = 1/3 \uparrow$

گیت‌های کوانتومی

7.6.1 The quantum X gate

The **X** gate has the matrix

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

فرم ماتریسی

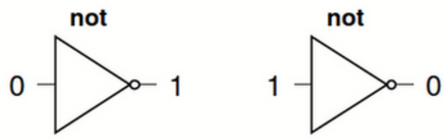
and this is the Pauli **X** matrix, named after Wolfgang Pauli. By "abuse of notation" I often use the same name (in this case **X**) for both the gate and its unitary matrix in the standard basis kets.

It has the property that

گیت X = چرخش حول محور x به اندازه π است

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle \quad \text{and} \quad \sigma_x|1\rangle = |0\rangle\ .$$

It "flips" between $|0\rangle$ and $|1\rangle$. The classic **not** gate is



$$X|+\rangle = +|+\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X|-\rangle = -|-\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$X|-\rangle = e^{i\pi}(|-\rangle) = e^{i\pi}\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

تغییر فاز به اندازه π درجه

در کل سیستم کوانتومی

در اندازه‌گیری احتمال

بودن در $|0\rangle$, $|1\rangle$ تاثیری ندارد.

$$(e^{i\pi})^2 = e^{i\pi} \times e^{-i\pi} = e^{0} = 1$$

$|1\rangle\langle 0|0\rangle, \quad |0\rangle\langle 1|1\rangle, \quad X$ فرم کلی گیت

$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$

$|1\rangle = |0\rangle$

راه اول $\quad X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$

راه دوم از روی ماتریس

$$X = \begin{array}{c|cc} & \langle 0| & \langle 1| \\ \hline |0\rangle & 0 & 1 \\ |1\rangle & 1 & 0 \end{array}$$

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

$$X|+i\rangle = |-i\rangle \quad X\left(\frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = ? \quad \begin{cases} \langle 0|0\rangle = 1 \\ \langle 1|1\rangle = 1 \\ \langle 0|1\rangle = 0 \\ \langle 1|0\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\left(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\right)\left(\frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\langle 1|0\rangle + i|0\rangle\langle 1|1\rangle + |1\rangle\langle 0|0\rangle + i|1\rangle\langle 0|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|0\rangle + |1\rangle\right) = i\left(\frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = e^{i\pi/2}|-i\rangle$$

معادل فاز

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \rightarrow \text{if } \varphi = \pi/2 \Rightarrow e^{i\pi/2} = i$$

تغییر فاز به اندازه $\pi/2$ در کل سیستم کوانتومی و تاثیری در اندازه‌گیری

احتمال $|0\rangle$ و $|1\rangle$ ندارد.

Since **X X** = I_2, the **X** gate is its own inverse.

* تمام گیت های پاولی X, Y, Z از نوع اپراتورهای unitary هرمیتی

هستند یعنی وارون آنها با خود گیت برابر است.

* اپراتور یکانی Unitary

اپراتوری که وارون آن همان A^+ است $\quad A^{-1} = A^+$

$$A \times A^{-1} = I \Rightarrow \hat{A} \times \hat{A}^+ = I$$

تمام گیت‌ها در کامپیوتر کوانتومی unitary هستند

$$H, X, Y, Z, V, V^+, S, S^+$$

$H = H^+$

$X = X^+$

$Y = Y^+$

$Z = Z^+$

V, V^+ : وارون همدیگر هستند

S, S^+ : وارون همدیگر هستند

$|\psi\rangle$ — $\boxed{H}$ — $\boxed{H}$ — $|\psi\rangle$

$$H = H^{-1} = H^+$$

* تعریف : اپراتور هرمیتی *

if $\hat{A} = \hat{A}^+ \Rightarrow$ $\hat{A}$ هرمیتی گفته می‌شود.

مانند X , Y , Z و H

نکته : درایه‌های ماتریس اپراتور هرمیتی عناصر روی قطر اصلی حقیقی هستند.

گیت X : هم هرمیتی است و هم یکانی است

$$\Rightarrow \hat{X} = \hat{X}^+ = \hat{X}^{-1}$$

می‌شه dagger یک operator

$\underbrace{\text{dagger}}_{\text{Hermition adjoint}}$

$$(A)^+ = A^+$$

⑨ می‌شه dagger از روی فرم ماتریسی یک عملگر

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حاصل

① می‌شه ماتریس ترانهاده

② بدست آوردن مزدوج مختلط هر یک از درایه‌ای ماتریس ترانهاده

$$X^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = X^{+}$$

① ② مزدوج مختلط

$$V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \qquad V^{+} = ?$$

$$\cancel{V^{+}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \rightarrow V^{+}$$

① ترانهاده ② مزدوج مختلط

$$\hat{A} = |0\rangle\langle 1| - i\,|1\rangle\langle 0| \qquad \text{فرم ماتریسی} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{array}{c|cc} & \langle 0| & \langle 1| \\ \hline |0\rangle & 0 & i \\ |1\rangle & 1 & 0 \end{array} \qquad i \to -i$$

$$\Rightarrow A^{+} = i\,|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

(b) میسبت از روی رابطهٔ عملگری

قانون
$$(|0\rangle\langle 1|)^{\dagger} = |1\rangle\langle 0|$$
$$(|1\rangle\langle 0|)^{\dagger} = |0\rangle\langle 1|$$
$$(\alpha \hat{A})^{\dagger} = \alpha^{*} A^{\dagger} \quad ,$$
$$(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger} + C^{\dagger}$$

$$(|0\rangle)^{\dagger} = \langle 0|$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = |0\rangle\langle 1| - i\,|1\rangle\langle 0|$$

$$A^{\dagger} = \big(\underbrace{|0\rangle\langle 1|}_{\downarrow} \underbrace{-i\,|1\rangle\langle 0|}_{\downarrow}\big)^{\dagger}$$
$$= \big(|1\rangle\langle 0| + i\,|0\rangle\langle 1|\big)$$

① $(\alpha \hat{A})^{\dagger} = \alpha^{*} \hat{A}^{\dagger}$

② $(|\psi\rangle)^{\dagger} = \langle\psi|$

③ $(\langle\psi|)^{\dagger} = |\psi\rangle$

* ④ $(\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$

⑤ $(\hat{A}|\psi\rangle)^{\dagger} = \langle\psi|\hat{A}^{\dagger}$

⑥ $(\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle)^{\dagger} = \langle\psi|\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$

⑦ ✓ $\hat{A} = |\psi\rangle\langle\phi| \Rightarrow \hat{A}^{\dagger} = |\phi\rangle\langle\psi|$

⑧ $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})^{\dagger} = \hat{A}^{\dagger} + \hat{B}^{\dagger} + \hat{C}^{\dagger}$

تمرین

$XYV\,|+i\rangle = ?$

$\hat{Y} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$

$(XY)^{\dagger}|+i\rangle = ?$

$= Y^{\dagger}X^{\dagger}|+i\rangle = ?$

$(X+Y)^{\dagger}|+i\rangle = ?$

$(X^{\dagger}+Y^{\dagger})|+i\rangle =$

7.6.2 The quantum Z gate

گیت Z چرخش حول محور z به اندازه π است.

The **Z** gate has the matrix

$$\begin{array}{c|cc} & \langle 0| & \langle 1| \\ \hline |0\rangle & 1 & 0 \\ |1\rangle & 0 & -1 \end{array} \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Z = گیت فاز :

$$|0\rangle \longrightarrow |0\rangle \qquad \varphi = \pi$$

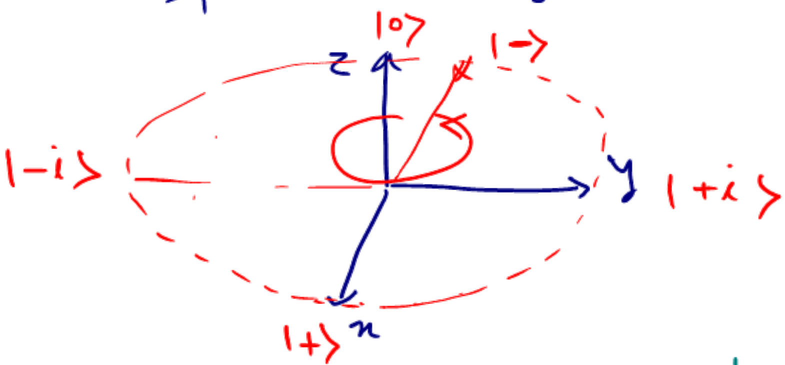
$$|1\rangle \longrightarrow -|1\rangle = e^{i\pi}|1\rangle$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\text{if } \varphi = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = -1$$

مثال $Z|0\rangle = ?$ $\quad (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)|0\rangle =$

$$= |0\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} - |1\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} = |0\rangle$$



مثال ۲ $Z|+\rangle = ?$ $\qquad Z = Z^{+} = Z^{-1}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle) = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} + |0\rangle\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0} - |1\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} - |1\rangle\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$$

مثال ۳ $Z|+i\rangle = ?$ $\quad$ ($|-i\rangle$ جواب)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(|0\rangle + i|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} + i|0\rangle\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0}$$

$$- |1\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} - i|1\rangle\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) = |-i\rangle$$

گیت Y چرخش حول محور Y به اندازه π است.

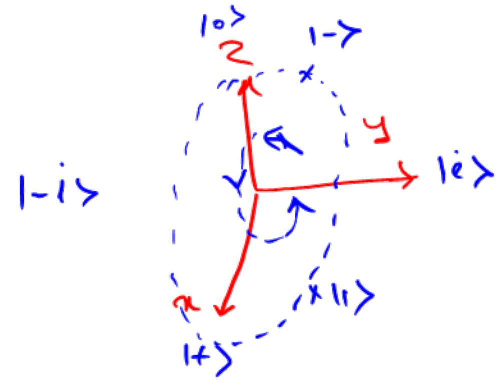
7.6.3 The quantum Y gate

The **Y** gate has the matrix

$$\sigma_y = \begin{array}{c|cc} & \langle 0| & \langle 1| \\ \hline |0\rangle & 0 & -i \\ |1\rangle & i & 0 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

It swaps $|0\rangle$ and $|1\rangle$ and so is a bit flip. It also swaps $|+\rangle$ and $|-\rangle$ but leaves $|i\rangle$ and $|-i\rangle$

$$\hat{Y} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$$



مثال

$\hat{Y}|+\rangle = ?$ ($|-\rangle$ جواب)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|\right)\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|0\rangle\langle 1|0\rangle - i|0\rangle\langle 1|1\rangle + i|1\rangle\langle 0|0\rangle + i|1\rangle\langle 0|1\rangle\right)$$

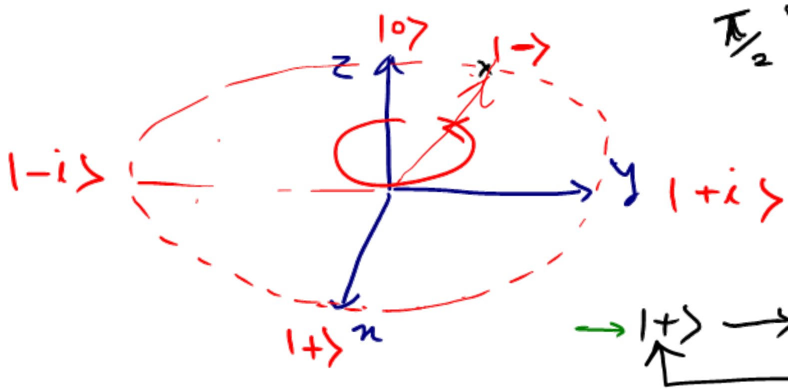
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|0\rangle + i|1\rangle\right) = -i\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow |-\rangle$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \text{if } \varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \underline{e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i}$$

اختلاف فاز به اندازه $e^{3\pi/2}$ است

گیت $S = \sqrt{Z}$ را بدست آورید

S چرخش حول محور Z به اندازه $\pi/2$ است.



$$\rightarrow |+\rangle \rightarrow |+i\rangle \rightarrow |-\rangle \rightarrow |-i\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$$

تمرین: $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ و $|1\rangle \rightarrow i|1\rangle$ ✓

$$\hat{S} = |0\rangle\langle 0| + i\,|1\rangle\langle 1|$$

فرم ماتریسی $\hat{S} = \begin{array}{c|cc} & \langle 0| & \langle 1| \\ \hline |0\rangle & 1 & 0 \\ |1\rangle & 0 & i \end{array}$ آیا $S^\dagger$ وارون S است.

$$S^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \qquad SS^\dagger = I \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: تمام اپراتورهای (گیت های) در کوانتوم unitary

$S^{-1} = S^\dagger$ وارون آنها همان dagger است.

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^{\mathbf{z}}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi i}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

گیت T چرخش حول محور z به اندازه $\pi/4$

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^{\mathbf{z}}_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi i}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{bmatrix}$$

فرم عملگری $T = |0\rangle\langle 0| + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)}_{e^{\frac{\pi}{4} i}} |1\rangle\langle 1|$

$z = SS$

We can get the **S** by applying the **T** twice: **S** = **T** ∘ **T**.

$$\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{R}^z_{\frac{7\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{7\pi i}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{bmatrix}$$

It gets its name because the matrix for $\mathbf{T}^\dagger$ is the adjoint of the $\mathbf{T}$ matrix.

$$T \text{ ماتریس} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{bmatrix}$$

نکته :

$$Z = S \cdot S$$

$$S = T \cdot T$$

$$S^\dagger = T^\dagger \cdot T^\dagger$$

گیت $V^\dagger$ و V

$V = \sqrt{Not}$ ،

یا $V = \sqrt{X}$

V چرخش حول محور x ها به اندازه $\pi/2$

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

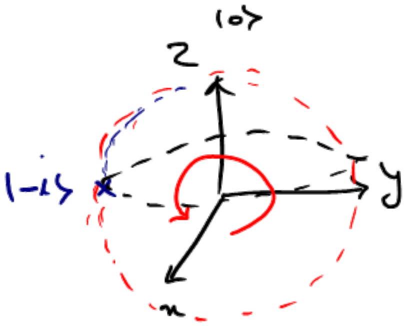
$V^\dagger$ چرخش حول محور x ها به اندازه $-\pi/2$ یا $3\pi/2$

فرم محاسباتی

$$V = \frac{1}{2}\left((1+i)|0\rangle\langle 0| + (1-i)|0\rangle\langle 1| + (1-i)|1\rangle\langle 0| + (1+i)|1\rangle\langle 1| \right)$$

$$V^{+} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

$$\bar{V}|0\rangle = |-i\rangle$$



$$= \frac{1}{2}\Big((1+i)\,|0\rangle\underbrace{\langle 0|}_{1}\,|0\rangle + (1-i)\,|0\rangle\underbrace{\langle 1|}_{0}\,|0\rangle + (1-i)\,|1\rangle\underbrace{\langle 0|}_{1}\,|0\rangle + (1+i)\,|1\rangle\underbrace{\langle 1|}_{0}\Big)\,|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\Big((1+i)|0\rangle + (1-i)|1\rangle \Big) = e^{i\varphi}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - i|1\rangle\big)}_{|-i\rangle}$$

$= ?$ تمرین

$\varphi = ?$

$$\bar{V}|0\rangle = e^{i\varphi}\,|-i\rangle$$

$\varphi = ?$

$$|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - i|1\rangle\big)$$

$$\bar{V}|0\rangle = \frac{1}{2}\Big((1+i)|0\rangle + (1-i)|1\rangle \Big)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - i|1\rangle\big)}_{} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}_{}\,|-i\rangle$$

$$\big(-i \times (1+i) = -i+1\big)$$

تغییر فاز در کل سیستم

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

if $\varphi = 45° = \pi/4$

$$e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

7.6.5 The quantum H gate

The **H** gate, or $\mathbf{H}^{\otimes 1}$ or Hadamard gate, has ~~the~~ matrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

operating on $\mathbb{C}^2$.

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \right)$$

By matrix multiplication,

$$\mathbf{H}|0\rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = |+\rangle \quad \text{and} \quad \mathbf{H}|1\rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = |-\rangle.$$

By linearity,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}|+\rangle &= \mathbf{H}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{H}|0\rangle + \mathbf{H}|1\rangle\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle \end{aligned}$$

and $\mathbf{H}|-\rangle = |1\rangle$.

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right)$$

از این گیت برای ایجاد superposition در یک qubit استفاده می‌شود

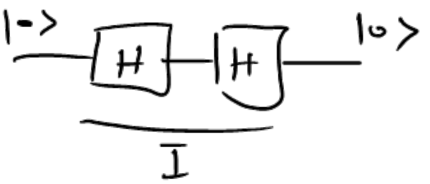
By matrix multiplication,

$$\mathbf{H}|0\rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = |+\rangle \quad \text{and} \quad \mathbf{H}|1\rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = |-\rangle.$$

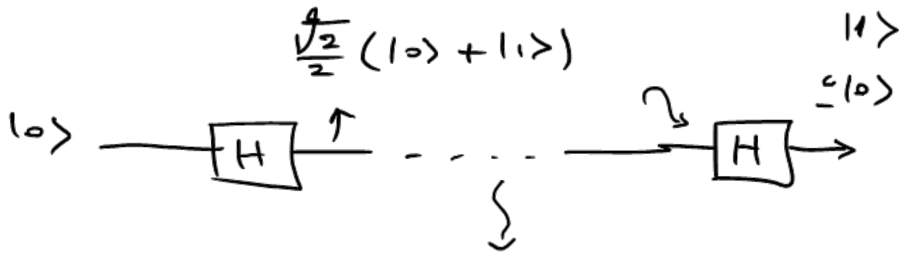
By linearity,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}|+\rangle &= \mathbf{H}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{H}|0\rangle + \mathbf{H}|1\rangle\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle\right) = |0\rangle\end{aligned}$$

and $\mathbf{H}|-\rangle = |1\rangle$.



$H = H^{-1}$ ← نتیجه



For our **H** gate, we can stare at

$$\mathbf{H}|0\rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \quad \text{and} \quad \mathbf{H}|1\rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

and notice that

$$\mathbf{H}|u\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + (-1)^u|1\rangle\right)$$

when u is one of $\{0, 1\}$. When $u = 0$ we have $|0\rangle$ going to $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$, as expected. For $u = 1$ we end up with $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$.

تمرین

جواب ×

$H Z H = ?$

$H X H = ?$

مشکل/ $HZH|0\rangle = ?$

$HXH|1\rangle = ?$

حل

$(TVS)|1\rangle = ?$

$V = \sqrt{X}$

$S|1\rangle = ?$ $|1\rangle$

$V(S|1\rangle) = V|1\rangle = |+i\rangle$

$T(VS|1\rangle) = T|+i\rangle = ?$

$$\left(|0\rangle\langle 0| + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)|1\rangle\langle 1|\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)$$

$$= ?\ \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)|1\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)}_{e^{\varphi i} \rightarrow \varphi = ?}|1\rangle$$

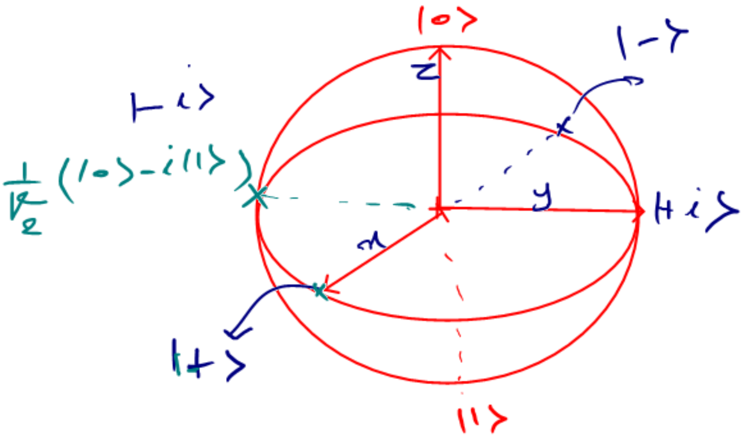
$\cos\varphi + i\sin\varphi$

$HZH|0\rangle = ?$ $\qquad$ $HZH|0\rangle = |1\rangle$

$H|0\rangle = |+\rangle$

$Z|+\rangle = |-\rangle$

$H|-\rangle = |1\rangle$



$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} + |0\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} + |1\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} - |1\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right) \times |0\rangle = ?$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = |+\rangle$$

$$\underbrace{\left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right)}_{Z} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = ?$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} + |0\rangle\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0} - |1\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} - |1\rangle\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = |-\rangle$$