Модуль 4. Теоретический минимум для ML: линейная алгебра, начала мат.анализа и оптимизации, статистика.

1 Линейная алгебра

Задача 1.1.

Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Посчитайте матрицу $D = A^\top C - 2A^\top B^\top$

Приведите полную последовательность вычислений.

РЕШЕНИЕ:

Преобразуем выражение:

$D = A^T C - 2A^T B^T = A^T (C - 2B^T)$

1) Расчет $C - 2B^T$

Транспонируем матрицу B^T:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножим матрицу B^T на 2

$$2B^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 4 & -8 & 4 \\ 14 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычитание матриц $C - 2B^T$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 4 & -8 & 4 \\ 14 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Расчет $A^T (C - 2B^T)$

Транспонируем матрицу A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножим матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 & -11 \\ -16 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 14 & 14 & -11 \\ -16 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

Задача 1.2.

Дано выражение:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдите значения x, y, z и v, при которых выражение верно.

РЕШЕНИЕ:

$$\begin{pmatrix} 3x & 6 & 9 \\ -3 & 3y & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 4 & -12 & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

3x + 2 = 8 => 3x = 6; **x = 2**
6 + 4 = v => **v = 10**
3y – 12 = 6 => 3y = 6 – (–12) = – 18; **y = – 6**
12 + 2z = 4 => 2z = 4 – 12 = – 8; **z = – 4**
Ответ: **x = 2; y = – 6; z = – 4; v = 10**

Задача 1.3.

Укажите те значения параметров p и q, при которых ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{pmatrix}$ равен 1

РЕШЕНИЕ:
Ранг матрицы - это максимальное количество линейно независимых строк (столбцов)
Если ранг матрицы = 1, это значит, что у нее одна линейно независимая строка (столбец). Считаем, что это 1-я строка.
Тогда вторую строку получаем умножением соответствующих элементов первой строки на 3 => p=3*3=9
Третью строку получаем умножением соответствующих элементов первой строки на 5 => q=3*5=15
Ответ: p = 9; q = 15

Задача 1.4.

Исследовательское задание: малоранговая аппроксимация матрицы. Сгенерируйте случайную квадратную матрицу A ∈ R n×n, n ≥ 100. Выполните сингулярное разложение этой матрицы, и получите три матрицы: U, S, $V^\top$. Выполняйте аппроксимацию матрицы A с рангом r, меняя его значение, например, от 2 до n:

$$\tilde{A} = U[:,\ :r]S[:r,\ :r]V^\top[:r,\ :],$$

и каждый раз считайте ошибку аппроксимации (как восстановленная матрица отличается от исходной):

$$E(r) = ||A - \tilde{A}||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \tilde{a}_{ij})^2}$$

Используя библиотеку matplotlib, постройте график зависимости ошибки аппроксимации матрицы от ранга r.

РЕШЕНИЕ: было выполнено в jupyter notebook и приведено в файле hw_4_Marfa.ipynb

2. Начала мат.анализа и оптимизации

Задача 2.1.

Посчитайте матрицу Гессе следующей функции:
$f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2,$ x ∈ R^2.
Найдите критические точки и определите их природу (локальный экстремумы или седловые).

РЕШЕНИЕ:
Критические точки функции:
a) если гессиан положительно определён, то x_0 — точка локального минимума функции f(x),
b) если гессиан отрицательно определён, то x_0 — точка локального максимума функции f(x),
c) если гессиан не является знакоопределённым (принимает как положительные, так и отрицательные значения) и невырожден (det G(f) ≠ 0), то x_0 — седловая точка функции f(x).

1. Найдем критические точки для этого:

1.1 Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 3 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2 - 3$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 2$$

1.2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2 - 3 = 0 & (1) \\ -2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

1.2.1.Из уравнения (1) выражаем x_2: $x_2 = \frac{3}{2}(x_1^2 - 1)$ и подставляем x_2 в уравнение (2):

$-2 \cdot x_1 + 2 \cdot 3/2 \cdot (x_1^2 - 1) - 2 = 0$

$3 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_1 - 5 = 0$

Чтобы определить количество корней подчитаем дискриминант $D = b^2 - 4ac$; $a = 3$; $b = -2$; $c = -5$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 64$; $D>0 \Rightarrow$ 2 корня

$$x_1 = \frac{-\mathrm{b} - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{2-8}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-\mathrm{b} + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Тогда: $\mathbf{x_1 = -1; x_2 = 5/3}$

1.2.2 Из уравнения (1) выражаем x_1: $x_1 = \sqrt{1 + \frac{2}{3}x_2}$ и подставляем в уравнение (2):

$$-2 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{3}x_2} + 2 \cdot x_2 - 2 = 0$$

Откуда $\mathbf{x_1 = 0; x_2 = 8/3}$

Количество стационарных точек равно 2: $\mathbf{M_1(-1; 0)}$, $\mathbf{M_2(5/3; -8/3)}$

2. Найдем матрицу Гессе

2.1.Для нахождения матрицы Гессе, необходимо взять частные производные второго порядка функции f(x) по каждой переменной:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = 6 \cdot x_1$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = -2$$

2.2. Вычислим значение частных производных второго порядка в стационарных точках $M(x_0; y_0)$.

2.2.1Вычисляем значения для точки $M_1(-1; 0)$ Вычисляем значения для точки $M_1(-1;0)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}(-1; 0) = -6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(-1; 0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}(-1; 0) = -2$$

Строим матрицу Гессе: $H = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Найдем определитель, использовав разложение по 1-му столбцу:

$\Delta = ((-6)*2-(-2)*(-2)) = -16 = -16$

$D_1 = a_{11} < 0$, $D_2 = -16 < 0$

В точке $M_1(-1; 0)$ матрица Гессе отрицательно определена.

2.2.2.Вычисляем значения для точки $M_2(5/3; 8/3)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) = 10$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) = 2$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) = -2$

Строим матрицу Гессе: H = $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Найдем определитель, использовав разложение по 1-му столбцу:

Δ = (10*2-(-2)*(-2)) = 16

$D_1 = a_{11} > 0$, $D_2 = 16 > 0$

В точке M_2(5/3;8/3) матрица Гессе положительно определена. **Точка x_2= (5/3; 8/3) является точкой локального минимума.**

Задача 2.2.

Проверьте, что функция $f = \ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$ удовлетворяет уравнению: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{2}.$

РЕШЕНИЕ:

Подставим функцию f в уравнение:

$$x_1 \frac{\partial(\ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}))}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial(\ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}))}{\partial x_2} = \frac{1}{2}$$

Находим дифференциал первого слагаемого:

$$\frac{\partial(\ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}))}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

Находим дифференциал второго слагаемого:

$$\frac{\partial(\ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}))}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

Подставим в уравнение и домножим на 2 обе части:

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1} \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2} \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = 1$$

Приведем к общему знаменателю. Для этого первое слагаемое домножим на $\sqrt{x_2} \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$, а второе – на $\sqrt{x_1} \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$:

$$\frac{x_1 \cdot (x_2 + \sqrt{x_1 \cdot x_2}) + x_2 \cdot (x_1 + \sqrt{x_1 \cdot x_2})}{(x_1 + \sqrt{x_1 \cdot x_2})(x_2 + \sqrt{x_1 \cdot x_2})} = 1$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1\sqrt{x_1 \cdot x_2} + x_1 \cdot x_2 + x_2\sqrt{x_1 \cdot x_2} - x_1 \cdot x_2 - x_1\sqrt{x_1 \cdot x_2} - x_2\sqrt{x_1 \cdot x_2} - x_1 \cdot x_2 = 0$$

0 = 0 — верно

Задача 2.3.

Предположим, задана функция f: $R^3 \to R^2$:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, xyz)^T.$$

Найдите матрицу Якоби J_f функции f, и её численное значение в точке v = $(1, 2, 3)^T$.

РЕШЕНИЕ:

Матрица Якоби функций с несколькими переменными - это матрица всех ее частных производных 1-го порядка:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} & \frac{\partial F_y}{\partial z} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

У нас частные производные 1-го порядка функции f по переменным x, y и z равны:

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & yz \\ 1 & xz \\ 1 & xy \end{bmatrix}$$

Теперь найдем численное значение матрицы Якоби функции f в точке v = $(1, 2, 3)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$:

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & yz \\ 1 & xz \\ 1 & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2*3 \\ 1 & 1*3 \\ 1 & 1*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрица Якоби функции f в точке v = $(1, 2, 3)^T$ равна:

$$\mathbf{J = [\partial f/\partial x(v), \partial f/\partial y(v), \partial f/\partial z(v)] = [[1, 6], [1, 3], [1, 2]]}$$

Задача 2.4.

(Куб евклидовой нормы). Найти первый и второй дифференциалы df(x) и $d^2f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{3}\|x\|_2^3, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

РЕШЕНИЕ:

1) Преобразуем выражение, пользуясь формулой евклидовой нормы:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \|x\|_2^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{3}{2}}$$

2) Находим первый дифференциал df(x):

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Применим правило дифференцирования сложной функции df(x) = v'(u)*du(x), где

$$u(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$v(u) = \frac{1}{3} \cdot u(x)^{\frac{3}{2}}$$

$$v'(u) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{u(x)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{d(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}{dx} = 2 \cdot x_1 \cdot dx_1 + 2 \cdot x_2 \cdot dx_2 + \dots + 2 \cdot x_n \cdot dx_n$$

$$df(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot (x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + \dots + x_n \cdot dx_n)$$

$$\boldsymbol{df(x) = \|x\|_2(x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + \dots + x_n \cdot dx_n)}$$

3) Находим второй дифференциал $d^2f(x)$:

$$\frac{d^2f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot (x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + \dots + x_n \cdot dx_n)\right)$$

Так как $(p \cdot g)' = p' \cdot g + p \cdot g'$

Обозначим $p = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$; $g = x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + \cdots + x_n \cdot dx_n$
Тогда

$$\frac{d^2 f(x)}{dx} = $$
$$= \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right)' \cdot (x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + \cdots + x_n \cdot dx_n) + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot (x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + \cdots + x_n \cdot dx_n)'$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot x_1^2 \cdot (dx_1)^2 + x_2^2 \cdot (dx_2)^2 + \cdots + x_n^2 \cdot (dx_n)^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot dx_1 \cdot dx_2 + \cdots + x_1 \cdot x_n \cdot dx_1 \cdot dx_n + x_2 \cdot x_n \cdot dx_1 \cdot dx_n + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx} = \|x\|_2 \cdot x_1^2 \cdot (dx_1)^2 + x_2^2 \cdot (dx_2)^2 + \cdots + x_n^2 \cdot (dx_n)^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot dx_1 \cdot dx_2 + \cdots + x_1 \cdot x_n \cdot dx_1 \cdot dx_n + x_2 \cdot x_n \cdot dx_1 \cdot dx_n + \|\boldsymbol{dx}\|_2^2$$

Задача 2.5.

(Евклидова норма). Найти первый и второй дифференциалы df(x) и d^2f(x), а также градиент ∇f(x) и гессиан ∇^2f(x) функции: $f(x) = \|x\|_2, x \in R^n \setminus \{0\}$

РЕШЕНИЕ:

1) Преобразуем выражение, пользуясь формулой евклидовой нормы:

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}$$

2) Находим первый дифференциал df(x):

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right)$; df(x)=f′(x)dx

Дифференцируя по отдельности каждую из компонент внутри квадратного корня, получаем:

$$df(x) = \frac{2 \cdot x_1}{2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot dx_1 + \frac{2 \cdot x_2}{2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{2 \cdot x_n}{2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot dx_n$$

$$= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot dx_1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot dx_n =$$

$$= \frac{x_1}{\|x\|_2} \cdot \boldsymbol{dx_1} + \frac{x_2}{\|x\|_2} \cdot \boldsymbol{dx_2} + \cdots + \frac{x_n}{\|x\|_2} \cdot \boldsymbol{dx_n} \qquad (3)$$

3) Находим второй дифференциал d^2f(x):

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d\left(\frac{x_1}{\|x\|_2} \cdot dx_1 + \frac{x_2}{\|x\|_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{x_n}{\|x\|_2} \cdot dx_n\right)$$

Учитывая, что dx_i и dx_j независимы для любых i ≠ j, получаем:

$$d^2 f(x) = \frac{dx_1}{\|x\|_2} \cdot \frac{dx_1}{dx_1} + \frac{dx_2}{\|x\|_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_2} + \cdots + \frac{dx_n}{\|x\|_2} \cdot \frac{dx_n}{dx_n} = \frac{(dx_1)^2}{\|x\|_2} + \frac{(dx_2)^2}{\|x\|_2} + \cdots + \frac{(dx_n)^2}{\|x\|_2} =$$

$$\frac{(dx_1)^2+(dx_2)^2+\cdots+(dx_n)^2}{\|x\|_2} = \frac{\|\boldsymbol{dx}\|_2^2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$$

$$\boldsymbol{d^2 f(x)} = \frac{\|\boldsymbol{dx}\|_2^2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$$

4) Находим градиент ∇f(x) функции, вычислив частные производные функции по каждой из компонент:

$\nabla \mathrm{f(x)} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}$ из (3):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{1}{\|x\|_2} \cdot \frac{x_1}{\|x\|_2} = \frac{x_1}{\|x\|_2^2}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{\|x\|_2} \cdot \frac{x_2}{\|x\|_2} = \frac{x_2}{\|x\|_2^2}$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = \frac{1}{\|x\|_2} \cdot \frac{x_n}{\|x\|_2} = \frac{x_n}{\|x\|_2^2}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\nabla \mathrm{f}(\mathrm{x})} = \frac{x_1}{\|x\|_2^2}, \frac{x_2}{\|x\|_2^2}, \dots \frac{x_n}{\|x\|_2^2} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2}$$

5) Находим гессиан$\nabla^2 f(x)$ функции f(x), вычислив частные производные градиента по каждой из компонент:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{cases} \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)}{\partial x_2}, \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)}{\partial x_n}, \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)}{\partial x_n} \end{cases}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{x_i}{\|x\|_2^2}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial(x_i)}{\partial x_j\,\|x\|_2^2}$$

Если i ≠ j, то $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$=0, и $\frac{\partial(x_i)}{\partial x_j} = 0$

Если i = j, то $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ = 1, и $\frac{\partial(x_i)}{\partial x_j}$ = 1.

Таким образом, $\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial(x_i)}{\partial x_j\,\|x\|_2^2}$

$$\frac{\boldsymbol{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)}}{\boldsymbol{\partial x_j}} = \frac{\mathbf{1}}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2} \cdot \delta_{\boldsymbol{ij}}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Тогда $\boldsymbol{\nabla^2 f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\|x\|_2^2} \cdot \boldsymbol{I}$

где I - единичная матрица размерности n.