

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАТРОНИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)  
специалиста

**О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ В СИСТЕМАХ С  
ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ**

Выполнила студентка  
622 группы  
Селезнева Маргарита Олеговна

---

подпись студента

Научные руководители:  
д.ф.-м.н., проф. Кугушев Е.И.

---

подпись научного руководителя  
к.ф.-м.н., доц. Шахова Т.В.

---

подпись научного руководителя

Москва  
2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Диссипативная система с одной степенью свободы</b>	<b>2</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	2
2.2	Существование периодического решения . . . . .	2
2.3	Гладкая зависимость периода от $\varepsilon$ . . . . .	4
2.4	Поиск периода для частного случая . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Задача о движении тела на вращающейся плоскости</b>	<b>10</b>
3.1	Модель изотропного линейного вязкого трения . . . . .	10
3.1.1	Уравнение движения . . . . .	11
3.1.2	Поиск периодических решений при малых $r$ . . . . .	14
3.2	Численное моделирование движения несвободной треноги на вращающейся плоскости с изотропным вязким трением . . . . .	16
3.3	Модель анизотропного линейного вязкого трения . . . . .	18
3.4	Векторы $\mathbf{e}_i^{(1)}, \mathbf{e}_i^{(2)}$ фиксированы относительно треноги . . . . .	18
3.5	Векторы $\mathbf{e}_i^{(1)}, \mathbf{e}_i^{(2)}$ фиксированы относительно вращающейся плоскости . . . . .	19
3.5.1	Существование предельного цикла . . . . .	21
3.5.2	Поиск периодических решений при малом $r$ . . . . .	23
3.6	Численное моделирование движения несвободного монопода на вращающейся плоскости с анизотропным вязким трением . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>29</b>
	<b>Литература</b>	<b>30</b>

# 1 Введение

Одной из важных задач при изучении систем с трением является разработка методов определения параметров модели трения. Анализ особых режимов движения, характерных для систем трения, может давать информацию о параметрах модели трения. Так, например, в работе [4] коэффициенты сухого и вязкого трения в шарнире маятника определяются по его амплитуде колебаний.

В данной работе рассматриваются системы с вязким трением, в которых возникают устойчивые предельные циклы. Период этих движений зависит от параметров системы, в частности от коэффициентов вязкого трения. Эти системы обобщаются на более широкий класс автономных систем с одной степенью свободы и малым параметром, где функция, задающая правую часть уравнения, имеет некоторые ограничения.

## 2 Диссипативная система с одной степенью свободы

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим автономную систему с одной степенью свободы и малым параметром

$$\ddot{\varphi} = F(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon), \quad (1)$$

функция  $F$  гладкая (минимум класса  $C^4$ ) и периодическая по  $\varphi$ , также для нее выполнены условия

$$F(\varphi, \omega, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{\substack{\dot{\varphi}=\omega, \\ \varepsilon=0}} < 0,$$

без ограничений общности считаем  $\omega > 0$ .

Ограничения на функцию  $F$  возникают из систем с вязким трением, описанных ниже. Докажем утверждения для системы (1).

### 2.2 Существование периодического решения

Согласно лемме Адамара [5] для функции  $F$  верно равенство

$$F(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon) = g_1(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon)(\dot{\varphi} - \omega) + g_2(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon)\varepsilon,$$

по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$g_1(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon) = g_1(\varphi, \dot{\varphi}, 0) + g_3(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon)\varepsilon.$$

В результате,

$$F(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon) = -h(\varphi, \dot{\varphi})(\dot{\varphi} - \omega) + \varepsilon f(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon), \quad \text{где} \\ -h(\varphi, \dot{\varphi}) = g_1(\varphi, \dot{\varphi}, 0), \quad f(\varphi, \dot{\varphi}, 0) = g_3(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon)(\dot{\varphi} - \omega) + g_2(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon).$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\ddot{\varphi} = -h(\varphi, \dot{\varphi})(\dot{\varphi} - \omega) + \varepsilon f(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon). \quad (2)$$

Функция  $f$  ограничена на замкнутом множестве  $[0, 2\pi] \times [\omega - \delta, \omega + \delta]$  и при малых  $\varepsilon$ :  $|f(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon)| < A$ . Также заметим, что при малых  $|\dot{\varphi} - \omega| < \delta$  функция  $h(\varphi, \dot{\varphi}) > c > 0$  в силу  $\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{\substack{\dot{\varphi}=\omega, \\ \varepsilon=0}} < 0$  и ограниченности частных производных функции  $F$ . В физических системах слагаемое  $-h(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi}$  возникает при наличии вязкого трения.

Введем новую переменную  $z = \dot{\varphi}$  и исследуем систему на фазовом цилиндре

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = z, \\ \dot{z} = -h(\varphi, z)(z - \omega) + \varepsilon f(\varphi, z, \varepsilon). \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим на цилиндре полосу  $[0, 2\pi] \times [\omega - \delta_1, \omega + \delta_2]$  в области  $z > 0$ .

**Утверждение 1.** При достаточно малых  $\varepsilon$  в полосе  $[0, 2\pi] \times [\omega - \delta_1, \omega + \delta_2]$  на фазовом цилиндре, где  $0 < \delta_1 < \omega$ , система (3) имеет единственный предельный цикл, причем он устойчив и охватывает цилиндр.

**Доказательство.** Так как  $F(\varphi, \omega, 0) = 0$  и  $F'_z(\varphi, \omega, 0) < 0$ , то  $F(\varphi, \omega - \delta_1, \varepsilon) > 0$  и  $F(\varphi, \omega + \delta_2, \varepsilon) < 0$  при малых  $\varepsilon$  и  $\delta_i$ . Следовательно, вектор фазовой скорости  $(z, \dot{z})$ , где  $\dot{z} = F(\varphi, z, \varepsilon)$ , направлен внутрь области, заключенной между  $z = \omega - \delta_1$  и  $z = \omega + \delta_2$ . Получим условия на  $\delta_i$ , чтобы это было выполнено:

1. на нижней границе  $z = \omega - \delta_1$

$$\dot{z} = -h(\varphi, z)(z - \omega) + \varepsilon f(\varphi, z, \varepsilon) > c\delta_1 - \varepsilon A > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon A}{c} < \delta_1 < \omega;$$

2. на верхней границе  $z = \omega + \delta_2$

$$\dot{z} = -h(\varphi, z)(z - \omega) + \varepsilon f(\varphi, z, \varepsilon) < -c\delta_2 + \varepsilon A < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon A}{c} < \delta_2.$$

При  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  имеем

$$\frac{\varepsilon A}{c} < \delta < \omega. \quad (4)$$

Так как вектор фазовой скорости направлен внутрь полосы, то отрезок  $I = \varphi_0 \times [\omega - \delta, \omega + \delta]$  перейдет в себя при увеличении  $\varphi$  на  $2\pi$  ( $z > \omega - \delta > 0$ ) за время, не превышающее  $\frac{2\pi}{\omega - \delta}$ . По теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий [9] и вследствие отсутствия положений равновесия системы (3) при  $z > 0$  получаем, что отображения  $g : I \rightarrow I$  непрерывно. Тогда по теореме Брауэра отображение  $g$  имеет неподвижную точку, то есть существует периодическое решение, охватывающее цилиндр.

Из  $F'_z(\varphi, \omega, 0) < 0$  следует, что внутри полосы  $[0, 2\pi] \times [\omega - \delta, \omega + \delta]$  при малых  $\varepsilon$  и  $\delta$  дивергенция системы (3) отрицательна:

$$F'_z(\varphi, z, \varepsilon) = -h'_z(\varphi, z)(z - \omega) - h(\varphi, z) + \varepsilon f'_z(\varphi, z, \varepsilon) < 0. \quad (5)$$

Согласно критерию Дюлака для кольцеобразной области [2] внутри полосы  $[0, 2\pi] \times [\omega - \delta, \omega + \delta]$  динамическая система (3) не может иметь более одной замкнутой траектории, охватывающей цилиндр.

Таким образом, при выполнении условий (4), (5) существует единственное периодическое решение в полосе  $[0, 2\pi] \times [\omega - \delta, \omega + \delta]$  на фазовом цилиндре. Найдём такие  $\varepsilon$  и  $\delta$ , для которых эти условия будут выполнены одновременно. Из гладкости функции  $F$  следует, что функции  $h'_z$  и  $f'_z$  ограничены на замкнутом множестве  $[0, 2\pi] \times [\omega - \delta, \omega + \delta]$ :

$$1) |f'_z(\varphi, z, \varepsilon)| < B; \quad 2) |h'_z(\varphi, z)| < D.$$

Следовательно, верно

$$\begin{aligned} F'_z(\varphi, z, \varepsilon) &= -h'_z(\varphi, z)(z - \omega) - h(\varphi, z) + \varepsilon f'_z(\varphi, z, \varepsilon) < D\delta - c + \varepsilon B < 0 \\ \Rightarrow \quad \delta &< \min\left(\frac{c - \varepsilon B}{D}, \omega\right). \end{aligned}$$

В итоге, получаем условия на  $\delta$  и  $\varepsilon$

$$\boxed{\frac{\varepsilon A}{c} < \delta < \min\left(\frac{c - \varepsilon B}{D}, \omega\right).}$$

### 2.3 Гладкая зависимость периода от $\varepsilon$

**Утверждение 2.** Период периодического решения системы (3) — гладкая функция от  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Рассмотрим решение системы (3)

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = z, \\ \dot{z} = -h(\varphi, z)(z - \omega) + \varepsilon f(\varphi, z, \varepsilon) \end{cases}$$

с начальными условиями  $\varphi(0) = 0$ ,  $z(0) = z_0 \in [\omega - \delta, \omega + \delta]$ . Обозначим через  $\tau$  время, за которое  $\varphi$  увеличится на  $2\pi$ . Для периодического решения выполняются граничные условия

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, z_0, \varepsilon) - 2\pi &= 0, \\ z(\tau, z_0, \varepsilon) - z_0 &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Заметим, что при  $\varepsilon = 0$  система (3) имеет периодическое решение с  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  и  $z_0 = \omega$

$$\varphi(t, \omega, 0) = \omega t, \quad z(t, \omega, 0) = \omega.\tag{7}$$

Применим теорему о неявной функции [5] для отображения  $G$ , заданного уравнениями (6), относительно переменных  $(\varepsilon, \underbrace{\tau, z_0}_y)$  в окрестности точки

$(x_0, y_0) = (0, \underbrace{\frac{2\pi}{\omega}}_{y_0}, \omega)$ . Выпишем якобиан отображения  $G$  в точке  $(x_0, y_0)$  относительно переменной  $y$  и найдем элементы, входящие в него:

$$\left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} & \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial z_0} - 1 \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

$$1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \Big|_{(x_0, y_0)} = \omega > 0$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \tau} \Big|_{(x_0, y_0)} = -h(\omega t, \omega)(\omega - \omega) = 0.$$

Для обратимости якобиана  $\left| \frac{\partial G}{\partial y} \right|$  требуется  $\left( \frac{\partial z}{\partial z_0} - 1 \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$ . Выясним, выполняется ли это.

Запишем решение системы (3) в интегральном виде

$$\varphi(t) = \int_0^t z(s) ds,$$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t [-h(\varphi(s), z(s))(z(s) - \omega) + \varepsilon f(\varphi(s), z(s), \varepsilon)] ds.$$

Продифференцируем решение по начальному условию  $z_0$  (решение гладко зависит от начальных условий) и введем обозначения  $u_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}$ ,  $u_z = \frac{\partial z}{\partial z_0}$

$$u_\varphi = \int_0^t u_z ds,$$

$$u_z = 1 + \int_0^t [-h'_\varphi(z - \omega) + \varepsilon f'_\varphi] u_\varphi ds + \int_0^t [-h'_z(z - \omega) - h + \varepsilon f'_z] u_z ds.$$

Дифференцируя  $u_\varphi$ ,  $u_z$  по времени, получим систему уравнений в вариациях

$$\begin{aligned}\frac{du_\varphi}{dt} &= u_z, \\ \frac{du_z}{dt} &= [-h'_\varphi(z - \omega) + \varepsilon f'_\varphi]u_\varphi + [-h'_z(z - \omega) - h + \varepsilon f'_z]u_z\end{aligned}$$

с начальными условиями  $u_\varphi(0) = 0$ ,  $u_z(0) = 1$ .

При  $\varepsilon = 0$  и  $z_0 = \omega$  уравнение на  $u_z = \frac{\partial z}{\partial z_0}$  примет вид

$$\frac{du_z}{dt} = -h(\omega t, \omega)u_z,$$

с учетом  $u_z(0) = 1$  находим

$$u_z(t, \omega, 0) = e^{-\int_0^t h(\omega s, \omega) ds}.$$

Из  $h(\omega s, \omega) > c > 0$  следует

$$u_z(t, \omega, 0) < e^{-ct} \quad \Rightarrow \quad u_z\left(\frac{2\pi}{\omega}, \omega, 0\right) < e^{-\frac{2\pi c}{\omega}} < 1,$$

то есть  $\left.\frac{\partial z}{\partial z_0}\right|_{(x_0, y_0)} \neq 1$  и якобиан  $\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|$  обратим.

Отображение  $G$  гладко зависит от  $(\varepsilon, \tau, z_0)$  в силу гладкости правой части системы (3). Тогда по теореме о неявной функции найдется  $I = I_\varepsilon \times I_\tau \times I_{z_0}$ , где

$$I_\varepsilon = \{\varepsilon : \varepsilon < \hat{\varepsilon}\}, \quad I_\tau = \{\tau : |\tau - 2\pi/\omega| < \hat{\alpha}\}, \quad I_{z_0} = \{z_0 : |z_0 - \omega| < \hat{\delta}\},$$

что для любой точки  $(\varepsilon, \tau, z_0) \in I$  верно

$$\tau = \tau(\varepsilon) \in C^k(I_\varepsilon; I_\tau), \quad z_0 = z_0(\varepsilon) \in C^k(I_\varepsilon; I_{z_0}).$$

Таким образом, период гладко зависит от параметра  $\varepsilon$ .

## 2.4 Поиск периода для частного случая

Рассмотрим уравнение (2), когда  $h(\varphi, \dot{\varphi}) = c = \text{const}$

$$\ddot{\varphi} = -c(\dot{\varphi} - \omega) + \varepsilon f(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon). \quad (8)$$

Ранее было показано, что при малых значениях  $\varepsilon$  в полосе  $[0, 2\pi] \times [\omega - \delta, \omega + \delta]$ ,  $\frac{\varepsilon A}{c} < \delta < \omega$ , существует единственный предельный цикл. Изучим

периодическое движение в новом времени  $\tau = \frac{t}{T(\varepsilon)}$ . В результате такой замены все периодические решения имеют одинаковый период, равный 1. Уравнение (8) в новом времени

$$\varphi'' + cT(\varepsilon)(\varphi' - \omega T(\varepsilon)) - \varepsilon T^2(\varepsilon)f\left(\varphi, \frac{\varphi'}{T(\varepsilon)}, \varepsilon\right) = 0, \quad (9)$$

где  $'$  – это производная по  $\tau$ . Поскольку  $\varphi(t, \varepsilon)$  гладко зависит от  $\varepsilon$  по теореме о гладкой зависимости решения дифференциального уравнения по параметру [9] и  $\varphi(t, 0) = \omega t$ , то ищем периодическое решение уравнения (9) в виде

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = 2\pi\tau + g_1(\tau)\varepsilon + g_2(\tau)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Здесь функции  $g_1(\tau)$ ,  $g_2(\tau)$  – периодические функции с периодом 1. Ранее было доказано, что период является гладкой функцией от параметра  $\varepsilon$  и  $T(0) = \frac{2\pi}{\omega}$ , тогда

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega} + T_1\varepsilon + T_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Найдем коэффициенты  $T_1$  и  $T_2$ . Подставляя решение  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  в уравнение движения (9) и выписывая слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим уравнения для определения функций  $g_i$  и коэффициентов  $T_i$ :

$$g_1'' + \frac{2\pi c}{\omega}(g_1' - \omega T_1) - \frac{4\pi^2}{\omega^2}f(2\pi\tau, \omega, 0) = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} g_2'' + \frac{2\pi c}{\omega}(g_2' - \omega T_2) + T_1 c(g_1' - \omega T_1) - \frac{4\pi}{\omega}T_1 f(2\pi\tau, \omega, 0) - \\ - \frac{4\pi^2}{\omega^2}[f'_\varphi(2\pi\tau, \omega, 0)g_1 + \frac{\omega}{2\pi}f'_z(2\pi\tau, \omega, 0)(g_1' - \omega T_1) + f'_\varepsilon(2\pi\tau, \omega, 0)] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как  $f(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon)$  – периодическая функция по  $\varphi$ , то можем представить

$$f(2\pi\tau, \omega, 0) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \sin 2\pi k\tau + B_k \cos 2\pi k\tau], \quad (12)$$

$$f'_\varphi(2\pi\tau, \omega, 0) = \sum_{k=1}^{\infty}[E_k \sin 2\pi k\tau + F_k \cos 2\pi k\tau], \quad (13)$$

$$f'_z(2\pi\tau, \omega, 0) = H_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[G_k \sin 2\pi k\tau + H_k \cos 2\pi k\tau], \quad (14)$$

$$f'_\varepsilon(2\pi\tau, \omega, 0) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[I_k \sin 2\pi k\tau + J_k \cos 2\pi k\tau]. \quad (15)$$



Тогда уравнение (10) примет вид

$$g_1'' + \frac{2\pi c}{\omega} g_1' = 2\pi c T_1 + \frac{4\pi^2}{\omega^2} B_0 + \frac{4\pi^2}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \sin 2\pi k \tau + B_k \cos 2\pi k \tau]. \quad (16)$$

Решением однородного уравнения для каждой функции  $g_i$  является  $g_i^{\text{одн}} = C_i^1 + C_i^2 \exp\left(-\frac{2\pi c}{\omega} \tau\right)$ . Однако нас интересуют только периодические решения, поэтому однородную часть не будем включать в общее решение. Для функции  $g_1(\tau)$  ищем частное решение в виде

$$g_1^{\text{част}} = g_1^{\text{част1}} + \sum_{k=1}^{\infty} g_1^{(k)},$$

$$g_1^{\text{част1}} = a\tau, \quad g_1^{(k)} = C_k \sin 2\pi k \tau + D_k \cos 2\pi k \tau.$$

Тогда функция  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  примет вид

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = 2\pi\tau + a\tau\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k \sin 2\pi k \tau + D_k \cos 2\pi k \tau] \varepsilon + \dots$$

и будет увеличиваться на  $2\pi$  за период  $\tau = 1$ , когда  $a = 0$ . Следовательно, свободный коэффициент в уравнении (16) равняется нулю и

$$T_1 = -\frac{2\pi B_0}{\omega^2 c}. \quad (17)$$

Находим неизвестные коэффициенты  $C_k$  и  $D_k$  для частного решения  $g_1^{(k)}$

$$C_k = \frac{B_k c - A_k k \omega}{\omega k (\omega^2 k^2 + c^2)}, \quad D_k = -\frac{A_k c + B_k k \omega}{\omega k (\omega^2 k^2 + c^2)}.$$

Покажем, что тригонометрический ряд с коэффициентами  $C_k$  и  $D_k$  является рядом Фурье решения дифференциального уравнения. Обозначим  $f(2\pi\tau, \omega, 0) = f_0(\tau)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} [C_k^2 + D_k^2] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(B_k c - A_k k \omega)^2 + (A_k c + B_k k \omega)^2}{\omega^2 k^2 (\omega^2 k^2 + c^2)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A_k^2 + B_k^2)}{\omega^2 k^2 (\omega^2 k^2 + c^2)} \\ &< \frac{\|f_0(\tau)\|^2}{\omega^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < \frac{\|f_0(\tau)\|^2}{\omega^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\|f_0(\tau)\|^2 \pi^2}{6\omega^4}. \end{aligned}$$

С учетом (12), (13), (14), (15), функций  $g_1(\tau)$  и  $g'_1(\tau) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k[C_k \cos 2\pi k\tau - D_k \sin 2\pi k\tau]$  перепишем уравнение (11)

$$\begin{aligned}
g''_2 + \frac{2\pi c}{\omega} g'_2 = & 2\pi c T_2 + \omega c T_1^2 + \frac{4\pi}{\omega} T_1 B_0 + \frac{4\pi^2}{\omega^2} J_0 - 2\pi T_1 H_0 + \\
& + 2\pi c T_1 \sum_{k=1}^{\infty} k[-C_k \cos 2\pi k\tau + D_k \sin 2\pi k\tau] + \frac{4\pi}{\omega} T_1 \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \sin 2\pi k\tau + B_k \cos 2\pi k\tau] + \\
& + \frac{4\pi^2}{\omega^2} \left( \sum_{l=1}^{\infty} [E_l \sin 2\pi l\tau + F_l \cos 2\pi l\tau] \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} [C_m \sin 2\pi m\tau + D_m \cos 2\pi m\tau] \right) + \\
& + \frac{4\pi^2}{\omega} \left( H_0 + \sum_{l=1}^{\infty} [G_l \sin 2\pi l\tau + H_l \cos 2\pi l\tau] \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} m[C_m \cos 2\pi m\tau - D_m \sin 2\pi m\tau] \right) - \\
& - 2\pi T_1 \sum_{k=1}^{\infty} [G_k \sin 2\pi k\tau + H_k \cos 2\pi k\tau] + \frac{4\pi^2}{\omega^2} [I_k \sin 2\pi k\tau + J_k \cos 2\pi k\tau]. \quad (18)
\end{aligned}$$

Для нахождения коэффициента  $T_2$  необходимо приравнять к нулю свободный коэффициент в уравнении (18). Выделим константы в произведении рядов Фурье

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{l=1}^{\infty} E_l \sin 2\pi l\tau + F_l \cos 2\pi l\tau \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin 2\pi m\tau + D_m \cos 2\pi m\tau \right) = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{\infty} [(F_l C_m - E_l D_m) \sin 2\pi\tau(m-l) + (F_l C_m + E_l D_m) \sin 2\pi\tau(m+l)] + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{\infty} [(E_l C_m + F_l D_m) \cos 2\pi\tau(m-l) + (F_l D_m - E_l C_m) \cos 2\pi\tau(m+l)] = \\
& = \tilde{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{E}_k \sin 2\pi k\tau + \tilde{F}_k \cos 2\pi k\tau], \quad \tilde{F}_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=l} (E_l C_m + F_l D_m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (E_k C_k + F_k D_k). \\
& \left( H_0 + \sum_{l=1}^{\infty} G_l \sin 2\pi l\tau + H_l \cos 2\pi l\tau \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} m[C_m \cos 2\pi m\tau - D_m \sin 2\pi m\tau] \right) = \\
& = H_0 \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} m[C_m \cos 2\pi m\tau - D_m \sin 2\pi m\tau] \right) + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{\infty} m(G_l C_m + H_l D_m) \sin 2\pi\tau(l-m) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{\infty} m[(G_l C_m - H_l D_m) \sin 2\pi\tau(m+l) + (H_l C_m - G_l D_m) \cos 2\pi\tau(l-m)] + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{\infty} m[(H_l C_m + G_l D_m) \cos 2\pi\tau(m+l)] = \tilde{H}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{G}_k \sin 2\pi k\tau + \tilde{H}_k \cos 2\pi k\tau], \\
& \tilde{H}_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=l} m(H_l C_m - G_l D_m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k(H_k C_k - G_k D_k).
\end{aligned}$$

Проверим, что  $|\tilde{F}_0| < \infty$ ,  $|\tilde{H}_0| < \infty$ .

$$\begin{aligned}
2|\tilde{F}_0| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (E_k C_k + F_k D_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k C_k + F_k D_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|E_k C_k| + |F_k D_k|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} (E_k^2 + C_k^2 + F_k^2 + D_k^2) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (C_k^2 + D_k^2)}_{\text{коэф. ряда Фурье } g_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (E_k^2 + F_k^2)}_{\text{коэф. ряда Фурье } f'_\varphi} < \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2|\tilde{H}_0| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} k(H_k C_k - G_k D_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k|H_k C_k - G_k D_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k(|H_k C_k| + |G_k D_k|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} (H_k^2 + k^2 C_k^2 + G_k^2 + k^2 D_k^2) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (C_k^2 + D_k^2)}_{\text{коэф. ряда Фурье } g'_1/2\pi} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (G_k^2 + H_k^2)}_{\text{коэф. ряда Фурье } f'_z - H_0} < \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, свободный коэффициент в уравнении (18)

$$2\pi c T_2 + \omega c T_1^2 + \frac{4\pi}{\omega} T_1 B_0 + \frac{4\pi^2}{\omega^2} J_0 - 2\pi T_1 H_0 + \frac{4\pi^2}{\omega^2} \tilde{F}_0 + \frac{4\pi^2}{\omega} \tilde{H}_0 = 0.$$

С учетом (17) находим

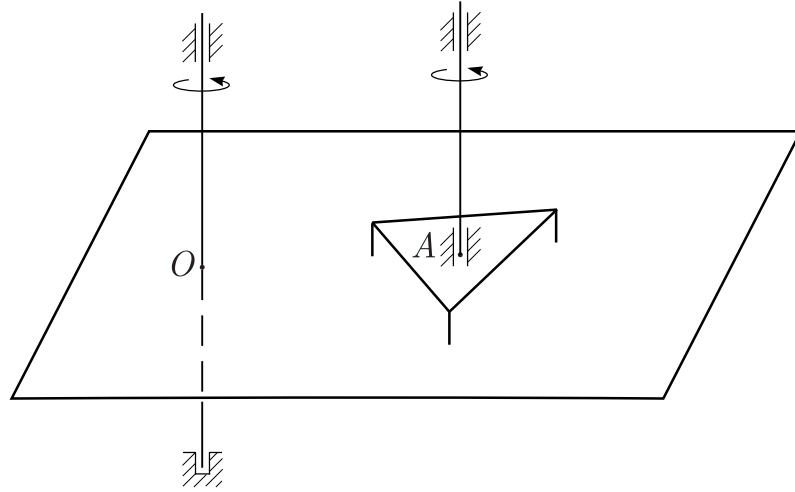
$$T_2 = \frac{2\pi[B_0^2 - \omega B_0 H_0 - \omega c(J_0 + \tilde{F}_0 + \omega \tilde{H}_0)]}{\omega^3 c^2}.$$

## 3 Задача о движении тела на вращающейся плоскости

### 3.1 Модель изотропного линейного вязкого трения

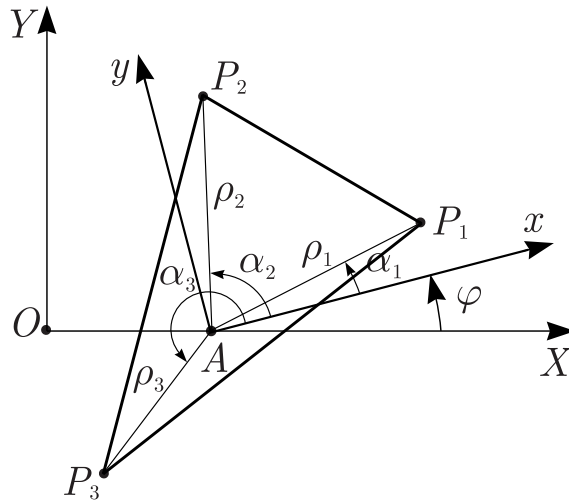
Рассматривается тренога — твердое тело, опирающееся в трех точках  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  на горизонтальную плоскость, которая вращается с постоянной угловой скоростью величины  $\omega$  вокруг неподвижной вертикальной оси. Со стороны вращающейся плоскости на каждую точку опоры треноги действуют силы линейно вязкого трения  $\mathbf{F}_i = -c\mathbf{v}_i^{\text{отн}}$ , где  $c$  — коэффициент вязкого трения,  $\mathbf{v}_i^{\text{отн}}$  — скорость точки  $P_i$  относительно вращающейся плоскости. Движение треноги ограничено тем, что она может свободно, без трения, вращаться вокруг некоторой вертикальной оси, положение которой фиксировано как в абсолютном пространстве, так и в системе координат, связанной с треногой.

Задача заключается в определении коэффициента линейного вязкого трения по характеристикам движения треноги.



### 3.1.1 Уравнение движения

Введем неподвижную систему координат  $OXYZ$  так, что плоскость  $OXY$  геометрически совпадает с вращающейся плоскостью, ось  $OZ$  является осью вращения плоскости, а ось  $OX$  проходит через точку  $A$ , которая есть проекция на плоскость  $OXY$  некоторой точки, лежащей на оси вращения треноги. Обозначим через  $r$  расстояние между осями вращения плоскости и треноги ( $|\overrightarrow{OA}| = r$ ). Свяжем с телом подвижную систему координат  $Axyz$ . Ось  $Az$  направлена по оси вращения треноги, оси  $Ax$  и  $Ay$  лежат в плоскости  $OXY$ .



Введем геометрические параметры треноги. Обозначим через  $\rho_i$  расстояние между точками  $A$  и  $P_i$ . Также введем  $\alpha_i$  — угол между осью  $Ax$  и радиус-вектором  $\overrightarrow{AP_i}$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{AP_i}$  в осях  $Axyz$  представляется в виде

$$\overrightarrow{AP_i} = \rho_i(\cos \alpha_i \mathbf{e}_x + \sin \alpha_i \mathbf{e}_y). \quad (19)$$

Положение треноги задается углом поворота  $\varphi$  вокруг ее оси вращения. Угловая скорость треноги равна  $\boldsymbol{\omega}_{\text{тр}} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z$ .

Запишем уравнение движения треноги, используя теорему об изменении кинетического момента системы относительно точки  $A$  в проекции на ось  $Az$ :

$$\left( \frac{d\mathbf{K}_A}{dt}, \mathbf{e}_z \right) = (\mathbf{M}_A, \mathbf{e}_z), \quad (20)$$

где  $\mathbf{K}_A$  — кинетический момент треноги относительно точки  $A$ ,  $\mathbf{M}_A$  — момент внешних сил, действующих на точки треноги, относительно точки  $A$ . Орт  $\mathbf{e}_z$  неподвижен в абсолютном пространстве, поэтому уравнение (20) удобнее переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K}_A, \mathbf{e}_z) = (\mathbf{M}_A, \mathbf{e}_z). \quad (21)$$

Так как угловая скорость треноги направлена по оси  $Az$ , то  $(\mathbf{K}_A, \mathbf{e}_z) = I\dot{\varphi}$ , где  $I$  — момент инерции треноги относительно оси  $Az$ .

В точках контакта треноги действуют силы вязкого трения  $\mathbf{F}_i = -c\mathbf{v}_i^{\text{отн}}$  и нормальные реакции  $\mathbf{N}_i = N_i\mathbf{e}_z$ . Также на треногу действуют реакции со стороны неподвижной оси  $Az$ . Будем считать, что эти силы приводятся к результирующим  $\mathbf{R}_C$  и  $\mathbf{R}_B$ , где  $C$  и  $B$  — некоторые точки на оси вращения треноги  $Az$ . Тренога находится в поле силы тяжести, поэтому на центр масс  $S$  действует сила тяжести  $m\mathbf{g}$ . Таким образом, суммарный момент внешних сил относительно точки  $A$  равен

$$\mathbf{M}_A = \overrightarrow{AS} \times m\mathbf{g} + \overrightarrow{AP_i} \times \mathbf{F}_i + \overrightarrow{AP_i} \times \mathbf{N}_i + \overrightarrow{AB} \times \mathbf{R}_B + \overrightarrow{AC} \times \mathbf{R}_C.$$

Тогда уравнение движения треноги имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^3 (\overrightarrow{AP_i} \times \mathbf{F}_i, \mathbf{e}_z). \quad (22)$$

Вычислим составляющие моментов сил трения относительно оси  $Az$ . Найдем скорости точек  $P_i$  относительно вращающейся плоскости с помощью теоремы сложения скоростей  $\mathbf{v}_i^{\text{абс}} = \mathbf{v}_i^{\text{пер}} + \mathbf{v}_i^{\text{отн}}$ . Для переносных скоростей точек треноги  $P_i$  верна формула Эйлера

$$\mathbf{v}_i^{\text{пер}} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}, \quad (23)$$

где  $v_O \equiv 0$ . Используя (19) и соотношения

$$\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_i}, \quad \overrightarrow{OA} = r\mathbf{e}_X = r(\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y),$$

для каждой точки  $P_i$  получаем ее переносную скорость

$$\mathbf{v}_i^{\text{пер}} = \omega(r \sin \varphi - \rho_i \sin \alpha_i) \mathbf{e}_x + \omega(r \cos \varphi + \rho_i \cos \alpha_i) \mathbf{e}_y. \quad (24)$$

Для абсолютных скоростей точек  $P_i$  по формуле Эйлера имеем

$$\mathbf{v}_i^{\text{абс}} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{\text{тр}} \times \overrightarrow{AP_i} = \dot{\varphi} \rho_i (\cos \alpha_i \mathbf{e}_y - \sin \alpha_i \mathbf{e}_x). \quad (25)$$

Таким образом, с помощью соотношений (24) и (25) находим скорости точек  $P_i$  относительно вращающейся плоскости:

$$\mathbf{v}_i^{\text{отн}} = ((\omega - \dot{\varphi}) \rho_i \sin \alpha_i - \omega r \sin \varphi) \mathbf{e}_x + ((\dot{\varphi} - \omega) \rho_i \cos \alpha_i - \omega r \cos \varphi) \mathbf{e}_y. \quad (26)$$

Тогда

$$\overrightarrow{AP_i} \times \mathbf{F}_i = \overrightarrow{AP_i} \times (-c \mathbf{v}_i^{\text{отн}}) = c(\rho_i^2(\omega - \dot{\varphi}) + \omega r \rho_i \cos(\varphi + \alpha_i)) \mathbf{e}_z. \quad (27)$$

В итоге, получаем уравнение движения треноги

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} + c(\dot{\varphi} - \omega)(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) + \\ + (\rho_1 \sin \alpha_1 + \rho_2 \sin \alpha_2 + \rho_3 \sin \alpha_3) \sin \varphi \omega r c - \\ - (\rho_1 \cos \alpha_1 + \rho_2 \cos \alpha_2 + \rho_3 \cos \alpha_3) \cos \varphi \omega r c = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Запишем уравнение движения треноги более компактно, используя формулу вспомогательного угла

$$\begin{aligned} A \sin \varphi - B \cos \varphi &= \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \varphi - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \varphi \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\varphi - \beta), \end{aligned}$$

где

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \beta, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \beta.$$

В уравнении (28)

$$\begin{aligned} A &= \rho_1 \sin \alpha_1 + \rho_2 \sin \alpha_2 + \rho_3 \sin \alpha_3, \\ B &= \rho_1 \cos \alpha_1 + \rho_2 \cos \alpha_2 + \rho_3 \cos \alpha_3. \end{aligned}$$

Тогда уравнение движения треноги примет вид

$$I\ddot{\varphi} + c(\dot{\varphi} - \omega)(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) + \omega r c \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\varphi - \beta) = 0. \quad (29)$$

Перейдем от угла  $\varphi$  к  $\varphi - \beta$  и перепишем уравнение (29) в виде

$$\ddot{\varphi} + ac(\dot{\varphi} - \omega) + \omega r c b \sin \varphi = 0. \quad (30)$$

Здесь

$$a = \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}{I}, \quad a > 0,$$

$$b = \frac{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + 2\rho_1\rho_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + 2\rho_2\rho_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}}{I}.$$

Коэффициент  $b$  может обращаться в нуль, например, когда ножки треноги образуют равносторонний треугольник, и ось вращения треноги проходит через пересечение медиан этого треугольника.

Данное уравнение по форме совпадает с уравнением движения маятника Фроуда с вязким трением [8]. Напомним, что маятник Фроуда — физический маятник, ось которого насажена на вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью, и между муфтой маятника и валом возникает момент сил трения.

Положения равновесия системы определяются из уравнения

$$rb \sin \varphi - a = 0,$$

здесь не присутствует коэффициент вязкого трения  $c$ , поэтому дальнейшее исследование положений равновесия нас не интересует.

При  $a > rb$  особых точек нет, но существует единственный устойчивый предельный цикл. Доказательство этого факта приведено в [1].

### 3.1.2 Поиск периодических решений при малых $r$

Переходим к случаю, когда выполнено неравенство  $a > rb$ . При  $r = 0$ , т.е. оси вращения плоскости и треноги совпадают, уравнение движения треноги примет вид

$$\ddot{\varphi} + ac(\dot{\varphi} - \omega) = 0.$$

Частным решением данного уравнения является периодическое решение  $\varphi(t) = \omega t$  с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Периодическое движение представляет собой равномерное вращение треноги с угловой скоростью, равной угловой скорости плоскости.

Рассмотрим случай, когда  $r$  мало. Положим  $r = \varepsilon \frac{a}{b}$ , где  $\varepsilon$  — безразмерный параметр и  $\varepsilon \ll 1$ . Получим уравнение движения с малым параметром

$$\ddot{\varphi} + ac(\dot{\varphi} - \omega) + \varepsilon \omega ac \sin \varphi = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) является уравнением вида (2) с функциями  $h(\varphi, \dot{\varphi}) = ac$  и  $f(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon) = -\omega ac \sin \varphi$ . Положений равновесий нет и есть одно периодическое решение с периодом  $T(\varepsilon)$ . Запишем уравнение движения треноги в

новом времени  $\tau = \frac{t}{T(\varepsilon)}$

$$\varphi'' + acT(\varepsilon)(\varphi' - T(\varepsilon)\omega) + \varepsilon\omega acT^2(\varepsilon) \sin \varphi = 0, \quad (32)$$

где  $'$  – это производная по  $\tau$ . Поскольку  $\varphi(t, \varepsilon)$ ,  $T(\varepsilon)$  гладко зависят от  $\varepsilon$  и  $\varphi(t, 0) = \omega t$ ,  $T(0) = \frac{2\pi}{\omega}$ , то ищем периодическое решение уравнения (32) и его период в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \varepsilon) &= 2\pi\tau + g_1(\tau)\varepsilon + g_2(\tau)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \omega T(\varepsilon) &= s(\varepsilon) = 2\pi + s_1\varepsilon + s_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Подставляя решение  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  в уравнение движения (32) и выписывая слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим уравнения для определения функций  $g_i$  и коэффициентов  $s_i$ :

$$g_1'' + 2\pi k(g_1' - s_1) + 4\pi^2 k \sin 2\pi\tau = 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} g_2'' + k[2\pi(g_2' - s_2) + s_1(g_1' - s_1)] + \\ + 4\pi k s_1 \sin 2\pi\tau + 4\pi^2 k g_1 \cos 2\pi\tau = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $k = \frac{ac}{\omega}$ .

Решение однородного уравнения  $g_i^{\text{одн}} = C_i^1 + C_i^2 \exp(-2\pi k\tau)$  не включаем в общее решение, так как ищем только периодические решения. Для функции  $g_1(\tau)$  ищем частное решение в виде

$$\begin{aligned} g_1^{\text{част}} &= g_1^{\text{част1}} + g_1^{\text{част2}}, \\ g_1^{\text{част1}} &= A_1\tau, \\ g_1^{\text{част2}} &= B_1 \sin 2\pi\tau + D_1 \cos 2\pi\tau. \end{aligned}$$

Из условия периодичности функции  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  следует, что  $A_1 = 0$ . Следовательно,  $s_1 = 0$ , и остается одно частное решение  $B_1 \sin 2\pi\tau + D_1 \cos 2\pi\tau$ . После нахождения неизвестных коэффициентов  $B_1$ ,  $D_1$ , получаем

$$g_1(\tau) = \frac{k}{1 + k^2} (\sin 2\pi\tau + k \cos 2\pi\tau).$$

С учетом  $s_1 = 0$ , найденной функции  $g_1(\tau)$  уравнение (34) примет вид

$$\begin{aligned} g_2'' + 2\pi k g_2' &= 2\pi k s_2 - \frac{2\pi^2 k^3}{1 + k^2} - \frac{2\pi^2 k^2}{1 + k^2} \sin 4\pi\tau - \\ &- \frac{2\pi^2 k^3}{1 + k^2} \cos 4\pi\tau. \end{aligned} \quad (35)$$



Для периодичности функции  $\varphi(\tau, \varepsilon)$ , аналогично уравнению (33), приравняем к нулю свободный коэффициент в уравнении (35)

$$g_2'' + 2\pi k g_2' = -\frac{2\pi^2 k^2}{1+k^2} \sin 4\pi\tau - \frac{2\pi^2 k^3}{1+k^2} \cos 4\pi\tau,$$

находим

$$s_2 = \frac{\pi k^2}{1+k^2}$$

и частное решение

$$g_2(\tau) = \frac{k^2}{4(1+k^2)(4+k^2)} ((2-k^2) \sin 4\pi\tau + 3k \cos 4\pi\tau).$$

Таким образом, получены коэффициенты разложения функций  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  и  $T(\varepsilon)$  с точностью до малых второго порядка включительно. В новом времени

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \varepsilon) = & 2\pi\tau + \frac{k}{1+k^2} [\sin 2\pi\tau + k \cos 2\pi\tau] \varepsilon + \\ & + \frac{k^2}{4(1+k^2)(4+k^2)} [(2-k^2) \sin 4\pi\tau + 3k \cos 4\pi\tau] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Вернемся к старому времени

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) = & \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} + \frac{k}{1+k^2} \left[ \sin \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} + k \cos \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} \right] \varepsilon + \\ & + \frac{k^2}{4(1+k^2)(4+k^2)} \left[ (2-k^2) \sin \frac{4\pi t}{T(\varepsilon)} + 3k \cos \frac{4\pi t}{T(\varepsilon)} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

С точностью до малых второго порядка период имеет вид

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega} + T_2 \varepsilon^2, \quad T_2 = \frac{\pi a^2 c^2}{\omega(\omega^2 + a^2 c^2)}.$$

Отсюда находим зависимость коэффициента вязкого трения  $c$  от  $T_2$

$$c = \sqrt{\frac{\omega^3 T_2}{a^2(\pi - \omega T_2)}}. \quad (36)$$

### 3.2 Численное моделирование движения несвободной треноги на вращающейся плоскости с изотропным вязким трением

С помощью численного моделирования проверим, достаточно ли ограничиться приближением периода до второго порядка и воспользоваться зависимостью (36) для отыскания коэффициента трения. Задача заключается

в построении параболы наилучшего приближения вида  $s(\varepsilon) = 2\pi + s_2\varepsilon^2$  по экспериментальным точкам и в сравнении результата с теоретической параболой  $s(\varepsilon) = 2\pi + \frac{\pi k^2}{1 + k^2}\varepsilon^2$ .

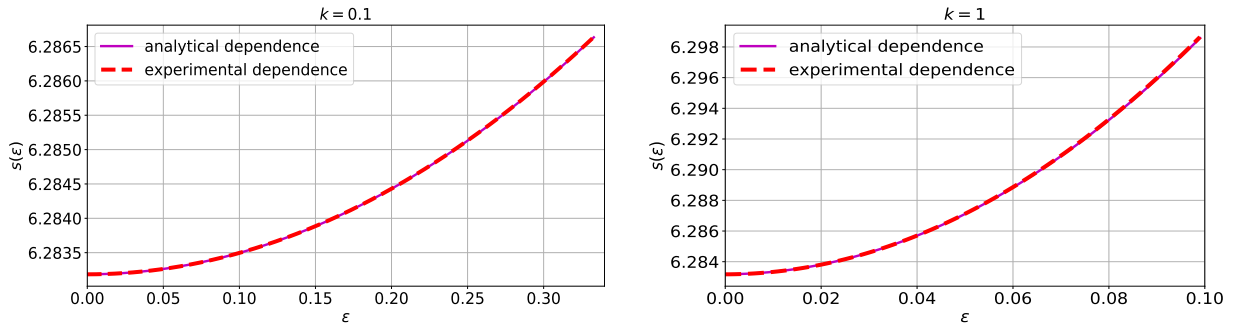
Для получения этой зависимости находим периодическое решение, интегрируя обезразмеренное уравнение движения, и определяем его период при фиксированном  $\varepsilon$ . Обезразмеренное уравнение движения имеет вид

$$\varphi'' + k(\varphi' - 1) + \varepsilon k \sin \varphi = 0,$$

где  $'$  - это производная по безразмерному времени  $\tilde{\tau} = \omega t$ . Данное уравнение сводится к системе первого порядка, для интегрирования которой используется метод Рунге-Кутты 8-го порядка в схеме Дормана-Принса.

Опишем алгоритм нахождения периода. Сначала ищется момент времени, когда движение переходит в стационарный режим, то есть начиная с этого момента для некоторого  $\varphi_0$  выполнено  $|\dot{\varphi}(\varphi_0 + 2\pi) - \dot{\varphi}(\varphi_0)| < \delta_1$ , где  $\delta_1 = 10^{-11}$ . Далее вычисляется время движения треноги за текущий и следующий поворот на угол  $2\pi$ , и период периодического решения находится, когда модуль разности этих значений удовлетворяет условию:  $|t_{i+1} - t_i| < \delta_2$ , где  $t_i$  — время движения треноги за  $i$ -й поворот на угол  $2\pi$ ,  $\delta_2 = 10^{-11}$ .

Ниже приведены графики зависимости  $s(\varepsilon)$  при  $k = 0.1$  и  $k = 1$ . Фиолетовым цветом нарисована аналитическая кривая, красным — экспериментальная.



Графики показывают, что экспериментальные данные достаточно точно укладываются на аналитически найденную кривую. Так, в приведенных примерах при  $k = 0.1$  ошибка в определении коэффициента трения составила 0.06%, при  $k = 1$  — 0.4%. В силу зависимости  $k = \frac{ac}{\omega}$  делаем вывод, что чем быстрее вращается плоскость, тем точнее определяется коэффициент трения. Причем при  $k = 0.1$  было выбрано  $\varepsilon < 1/3$ , а при  $k = 1$  —  $\varepsilon < 0.1$ .

### 3.3 Модель анизотропного линейного вязкого трения

Со стороны вращающейся плоскости на каждую точку опоры  $P_i$  треноги действует сила линейного анизотропного вязкого трения

$$\mathbf{F}_i = -c_1 v_i^{(1)} \mathbf{e}_i^{(1)} - c_2 v_i^{(2)} \mathbf{e}_i^{(2)}, \quad (37)$$

где  $c_1, c_2$  – коэффициенты вязкого трения, векторы  $\mathbf{e}_i^{(1)}, \mathbf{e}_i^{(2)}$  – единичные ортогональные векторы, фиксированные относительно треноги или относительно вращающейся плоскости,  $v_i^{(1)} = (\mathbf{v}_i^{\text{отн}}, \mathbf{e}_i^{(1)})$ ,  $v_i^{(2)} = (\mathbf{v}_i^{\text{отн}}, \mathbf{e}_i^{(2)})$ ,  $\mathbf{v}_i^{\text{отн}}$  – скорость точки  $P_i$  относительно вращающейся плоскости.

### 3.4 Векторы $\mathbf{e}_i^{(1)}, \mathbf{e}_i^{(2)}$ фиксированы относительно треноги

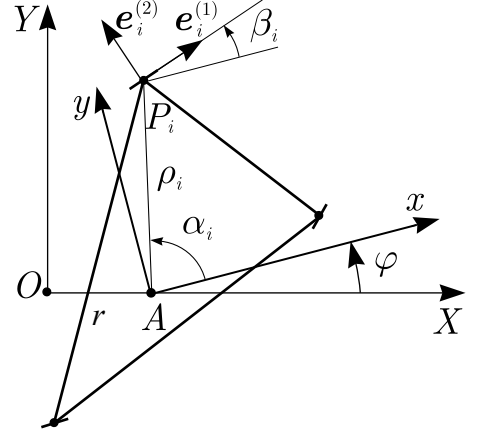
Рассмотрим случай, когда ножка треноги типа конька Чаплыгина. Введем  $\beta_i$  – угол между осью  $Ax$  и ортом  $\mathbf{e}_i^{(1)}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^{(1)} &= \cos \beta_i \mathbf{e}_x + \sin \beta_i \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_i^{(2)} &= -\sin \beta_i \mathbf{e}_x + \cos \beta_i \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (38)$$

Получим уравнение движения треноги. Используя (19), (37) и (38) найдем проекции моментов сил трения относительно оси  $Az$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AP_i} \times \mathbf{F}_i, \mathbf{e}_z) &= -\rho_i c_1 v_i^{(1)} \sin(\beta_i - \alpha_i) - \\ &\quad - \rho_i c_2 v_i^{(2)} \cos(\beta_i - \alpha_i). \end{aligned} \quad (39)$$



$v_i^{(1)}, v_i^{(2)}$  вычислим с помощью (26) и (38)

$$\begin{aligned} v_i^{(1)} &= (\dot{\varphi} - \omega) \rho_i \sin(\beta_i - \alpha_i) - \omega r \sin(\varphi + \beta_i) \\ v_i^{(2)} &= (\dot{\varphi} - \omega) \rho_i \cos(\beta_i - \alpha_i) - \omega r \cos(\varphi + \beta_i). \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя выражение (39) в (22), находим уравнение движения треноги

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} &= \sum_{i=1}^3 (-\rho_i^2 (c_1 \sin^2(\alpha_i - \beta_i) + c_2 \cos^2(\alpha_i - \beta_i)) (\dot{\varphi} - \omega) + \\ &\quad + \omega r \rho_i (c_1 \sin(\beta_i - \alpha_i) \sin(\varphi + \beta_i) + c_2 \cos(\beta_i - \alpha_i) \cos(\varphi + \beta_i))). \end{aligned}$$

При  $\beta_i = \alpha_i$  ( $\mathbf{e}_i^{(1)} \parallel \overrightarrow{AP_i}$ ) уравнение движения примет вид

$$I\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^3 (-\rho_i^2 c_2 (\dot{\varphi} - \omega) + \omega r \rho_i c_2 \cos(\varphi + \beta_i)).$$

Применяя формулу вспомогательного угла, использованную ранее для уравнения (28), и переходя от угла  $\varphi$  к углу  $\varphi - \beta$ , где угол  $\beta$  определяется из тех же условий, что и в (29), приведем уравнение движения к виду

$$\ddot{\varphi} + ac_2(\dot{\varphi} - \omega) + \omega r c_2 b \sin \varphi = 0, \quad (40)$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  такие же как в уравнении (30).

При  $\beta_i = \alpha_i + \frac{\pi}{2}$  ( $\mathbf{e}_i^{(1)} \perp \overrightarrow{AP_i}$ ) имеем

$$I\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^3 (-\rho_i^2 c_1 (\dot{\varphi} - \omega) + \omega r \rho_i c_1 \sin(\varphi + \beta_i)).$$

Прделав те же преобразования, что и при  $\beta_i = \alpha_i$ , получаем

$$\ddot{\varphi} + ac_1(\dot{\varphi} - \omega) + \omega r c_1 b \sin \varphi = 0. \quad (41)$$

Уравнения (40), (41) совпадают с уравнением движения треноги (30) в изотропной модели трения. Следовательно, нахождение коэффициентов трения  $c_1$ ,  $c_2$  сводится к случаю нахождения коэффициента трения  $c$  в изотропной модели трения.

### 3.5 Векторы $\mathbf{e}_i^{(1)}$ , $\mathbf{e}_i^{(2)}$ фиксированы относительно вращающейся плоскости

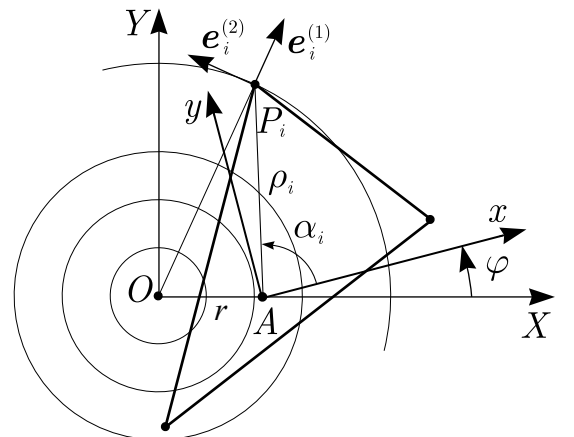
На плоскости есть «борозды» в виде концентрических окружностей с началом в точке  $O$ , и  $\mathbf{e}_i^{(1)} \parallel \overrightarrow{OP_i}$ , а  $\mathbf{e}_i^{(2)} \perp \overrightarrow{OP_i}$ . Пусть  $\psi_i$  – угол, образованный неподвижной осью  $OX$  и вектором  $\overrightarrow{OP_i}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^{(1)} &= \cos \psi_i \mathbf{e}_X + \sin \psi_i \mathbf{e}_Y, \\ \mathbf{e}_i^{(2)} &= -\sin \psi_i \mathbf{e}_X + \cos \psi_i \mathbf{e}_Y. \end{aligned} \quad (42)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP_i} &= \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OA}, \\ \overrightarrow{OP_i} &= d_i \mathbf{e}_i^{(1)}, \quad \overrightarrow{OA} = r \mathbf{e}_X, \end{aligned}$$



где  $d_i = |\overrightarrow{OP_i}|$ , выпишем проекции моментов сил трения относительно оси  $Az$

$$(\overrightarrow{AP_i} \times \mathbf{F}_i, \mathbf{e}_z) = c_1 v_i^{(1)} r \sin \psi_i + c_2 v_i^{(2)} r \cos \psi_i - c_2 v_i^{(2)} d_i. \quad (43)$$

С помощью выражений

$$\mathbf{v}_i^{\text{пер}} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i} = \omega d_i \mathbf{e}_i^{(2)}, \quad \mathbf{v}_i^{\text{абс}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{тр}} \times \overrightarrow{AP_i} = \dot{\varphi} d_i \mathbf{e}_i^{(2)} - \dot{\varphi} r \mathbf{e}_Y$$

находим скорости точек  $P_i$  относительно вращающейся плоскости

$$\mathbf{v}_i^{\text{отн}} = \mathbf{v}_i^{\text{абс}} - \mathbf{v}_i^{\text{пер}} = (\dot{\varphi} - \omega) d_i \mathbf{e}_i^{(2)} - \dot{\varphi} r \mathbf{e}_Y.$$

С учетом (42) имеем

$$v_i^{(1)} = -\dot{\varphi} r \sin \psi_i, \quad v_i^{(2)} = (\dot{\varphi} - \omega) d_i - \dot{\varphi} r \cos \psi_i. \quad (44)$$

Применяя теорему косинусов для сторон  $\rho_i$  и  $d_i$  в треугольнике  $OP_iA$ , получим выражение для  $\cos \psi_i$  и стороны  $d_i$ :

$$\cos \psi_i = \frac{r^2 + d_i^2 - \rho_i^2}{2rd_i}, \quad d_i^2 = r^2 + \rho_i^2 + 2r\rho_i \cos(\varphi + \alpha_i). \quad (45)$$

Подставляя соотношения (44), (45) в (43), имеем

$$(\overrightarrow{AP_i} \times \mathbf{F}_i, \mathbf{e}_z) = -\rho_i^2 c_2 (\dot{\varphi} - \omega) + \omega r \rho_i c_2 \cos(\varphi + \alpha_i) - \frac{(c_1 - c_2) r^2 \rho_i^2 \sin^2(\varphi + \alpha_i)}{r^2 + \rho_i^2 + 2r\rho_i \cos(\varphi + \alpha_i)} \dot{\varphi}.$$

Следовательно, уравнение движения треноги

$$I\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^3 \left( -\rho_i^2 c_2 (\dot{\varphi} - \omega) + \omega r \rho_i c_2 \cos(\varphi + \alpha_i) - \frac{(c_1 - c_2) r^2 \rho_i^2 \sin^2(\varphi + \alpha_i)}{r^2 + \rho_i^2 + 2r\rho_i \cos(\varphi + \alpha_i)} \dot{\varphi} \right).$$

В случае одной точки опоры ( $\rho_i = \rho$ ), будем называть конструкцию моноподом. Уравнение движения монопода приводится к виду

$$\ddot{\varphi} + a c_2 (\dot{\varphi} - \omega) + \omega r \frac{a}{\rho} c_2 \sin \varphi + \frac{a(c_1 - c_2) r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} \dot{\varphi} = 0, \quad (46)$$

где  $a = \frac{\rho^2}{I}$ .

### 3.5.1 Существование предельного цикла

Положения равновесия системы (46) определяются из условия:

$$\sin \varphi = \frac{\rho}{r} \quad \text{при} \quad \rho \leq r.$$

При  $\rho > r$  существует единственный устойчивый предельный цикл.

Докажем этот факт. Введем новую переменную  $z = \dot{\varphi}$  и изучим систему (46) на фазовом цилиндре

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = z, \\ \dot{z} = -ac_2(z - \omega) - \omega rc_2 \frac{a}{\rho} \sin \varphi - \frac{a(c_1 - c_2)r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} z. \end{cases} \quad (47)$$

Периодическим решениям системы соответствуют замкнутые траектории на цилиндре.

Обозначим правые части уравнений системы (47) через  $\Phi(\varphi, z)$  и  $F(\varphi, z)$ . Тогда на всем фазовом цилиндре с учетом  $a > 0$  и  $c_1, c_2 > 0$  выполняется

$$\begin{aligned} \Phi'_\varphi + F'_z &= -ac_2 - \frac{a(c_1 - c_2)r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} = \\ &= -ac_2 \left( 1 - \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} \right) - \frac{ac_1 r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} = \\ &= -\frac{ac_2(r \sin \varphi - \rho)^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} - \frac{ac_1 r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} < 0. \end{aligned}$$

Поэтому по критерию Бендиксона [1] динамическая система (47) не имеет на фазовом цилиндре замкнутых траекторий, не охватывающих цилиндр, и по критерию Дюлака для кольцеобразной области [2] система может иметь не более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр. Если предельный цикл существует, он устойчив, так как его характеристический показатель отрицательный:  $h = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi'_\varphi(\varphi(t), z(t)) + F'_z(\varphi(t), z(t)) dt < 0$ , где  $T$  – период периодического движения (доказательство приведено в [1]).

Заметим, что система не может иметь замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр и пересекающих линию  $z = 0$ . В самом деле, если предположить существование такой замкнутой траектории, то при переходе через ось  $z = 0$  изменится знак  $\dot{\varphi}$  ( $\dot{\varphi} = z$ ). Поэтому существует такой интервал  $\varphi' < \varphi < \varphi''$ , в котором рассматриваемая замкнутая траектория не проходит, а, значит, не охватывает цилиндр. Как было отмечено выше, такой траектории динамическая система (47) не имеет. Следовательно, замкнутые фазовые траектории, охватывающие цилиндр, лежат только или целиком в

области  $z < 0$ , или целиком в области  $z > 0$ . Покажем, что замкнутая траектория лежит целиком на верхней половине цилиндра (в области  $z > 0$ ).

Исключим  $t$  из системы уравнений (47)

$$\frac{1}{2} \frac{dz^2}{d\varphi} = -ac_2(z - \omega) - \omega rc_2 \frac{a}{\rho} \sin \varphi - \frac{a(c_1 - c_2)r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} z.$$

и проинтегрируем данное уравнение по замкнутой траектории  $z = z_0(\varphi)$ , охватывающей цилиндр (предполагаем, что такая траектория существует), в пределах от  $\varphi_0$  до  $\varphi_0 + 2\pi$ . С учетом  $z_0(\varphi + 2\pi) = z_0(\varphi)$  получим

$$0 = 2\pi\omega ac_2 - ac_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{z_0(\varphi)(r \sin \varphi - \rho)^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} d\varphi - ac_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{z_0(\varphi)r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} d\varphi.$$

Для предельного цикла, охватывающего цилиндр и лежащего целиком в области  $z < 0$ , выполнение этого равенства невозможно в силу условия  $\omega > 0$ . Таким образом, если предельный цикл, охватывающий цилиндр, существует, то он лежит целиком в области  $z > 0$ .

Перейдем к доказательству существования периодического решения  $z(\varphi)$ . Для этого достаточно отыскать два частных решения  $z_1(\varphi)$  и  $z_2(\varphi)$ , удовлетворяющих условиям:

$$z_1(\varphi) \leq z_1(\varphi + 2\pi), \quad (48)$$

$$z_2(\varphi) \geq z_2(\varphi + 2\pi) \quad (49)$$

при каких-нибудь  $\varphi$ . Перепишем второе уравнение из системы (47)

$$\dot{z} = ac_2\omega \left(1 - \frac{r}{\rho} \sin \varphi\right) - \frac{ac_2(r \sin \varphi - \rho)^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} z - \frac{ac_1 r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi} z. \quad (50)$$

Найдем область, в которой  $\dot{z} > 0$ . Это неравенство должно выполняться для любого угла  $\varphi$ , следовательно, из (50) получаем

$$ac_2\omega \left(1 - \frac{r}{\rho}\right) - \frac{ac_2(r + \rho)^2}{(r - \rho)^2} z - \frac{ac_1 r^2}{(r - \rho)^2} z > 0.$$

Тогда

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\dot{z}}{z} > 0 \quad \text{в области} \quad 0 < z < \omega \frac{\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^3}{\frac{c_1 r^2}{c_2 \rho^2} + \left(1 + \frac{r}{\rho}\right)^2} = \omega_1.$$

Итак, любое решение  $z_1(\varphi)$ , для которого при некотором  $\varphi_0$  выполнено  $0 < z_1(\varphi_0) < \omega_1$ , удовлетворяет условию (48), так как  $z_1(\varphi_0 - 2\pi) \leq z_1(\varphi_0)$ .

Предъявим область, в которой  $\dot{z} < 0$ . Используя (50), находим

$$ac_2\omega \left(1 + \frac{r}{\rho}\right) - ac_2 \frac{(r - \rho)^2}{(r + \rho)^2} z < 0.$$

Получаем

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\dot{z}}{z} < 0 \quad \text{в области} \quad z > \omega \frac{\left(1 + \frac{r}{\rho}\right)^3}{\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^2} = \omega_2.$$

Таким образом, всякое решение  $z_2(\varphi)$ , для которого при некотором  $\varphi_0$  выполнено  $z_2(\varphi_0) > \omega_2$ , соответствует условию (49), так как  $z_2(\varphi_0) \leq z_2(\varphi_0 - 2\pi)$ .

Так как в рассматриваемом случае особых точек нет, то между двумя решениями  $z_1$  и  $z_2$  в силу непрерывной зависимости от начальных условий должно существовать периодическое решение  $z_0(\varphi + 2\pi) = z_0(\varphi)$ .

### 3.5.2 Поиск периодических решений при малом $r$

При  $r = 0$  уравнение движения монопода примет вид

$$\ddot{\varphi} + ac_2(\dot{\varphi} - \omega) = 0$$

и его частным решением является периодическое решение  $\varphi(t) = \omega t$  с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Перейдем к случаю, когда  $r$  мало:  $r = \varepsilon\rho$ . В таком случае имеем уравнение движения с малым параметром

$$\ddot{\varphi} + ac_2(\dot{\varphi} - \omega) + \varepsilon\omega ac_2 \sin \varphi + \frac{a(c_1 - c_2)\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - 2\varepsilon \sin \varphi + \varepsilon^2} \dot{\varphi} = 0. \quad (51)$$

Уравнение (51) относится к уравнению вида (2) с функциями  $h(\varphi, \dot{\varphi}) = ac_2$  и  $f(\varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon) = -\omega ac_2 \sin \varphi - \frac{a(c_1 - c_2)\varepsilon \cos^2 \varphi}{1 - 2\varepsilon \sin \varphi + \varepsilon^2} \dot{\varphi}$ . На фазовом цилиндре внутри полосы  $[0, 2\pi] \times [\omega_1, \omega_2]$  существует одно периодическое решение с периодом  $T(\varepsilon)$ . Найдем связь между периодом периодического решения и коэффициентами вязкого трения  $c_1$  и  $c_2$ , проделывая те же действия, что и в случае изотропной модели трения.



Запишем уравнение движения монопода в новом времени  $\tau = \frac{t}{T(\varepsilon)}$

$$\varphi'' + ac_2 T(\varepsilon)(\varphi' - T(\varepsilon)\omega) + \varepsilon\omega ac_2 T^2(\varepsilon) \sin \varphi + \frac{a(c_1 - c_2)\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - 2\varepsilon \sin \varphi + \varepsilon^2} T(\varepsilon)\varphi' = 0. \quad (52)$$

С учетом  $\varphi(t, 0) = \omega t$ ,  $T(0) = \frac{2\pi}{\omega}$  ищем периодическое решение уравнения (52) в виде

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = 2\pi\tau + g_1(\tau)\varepsilon + g_2(\tau)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

а  $\omega T(\varepsilon)$  в виде

$$\omega T(\varepsilon) = s(\varepsilon) = 2\pi + s_1\varepsilon + s_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Функции  $g_1(\tau)$ ,  $g_2(\tau)$  — периодические функции с периодом 1. Подставляя разложения  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  и  $T(\varepsilon)$  в уравнение движения (52), получим уравнения для определения функций  $g_i$  и коэффициентов  $s_i$ :

$$g_1'' + 2\pi k_2(g_1' - s_1) + 4\pi^2 k_2 \sin 2\pi\tau = 0, \quad (53)$$

$$g_2'' + k_2 [2\pi(g_2' - s_2) + s_1(g_1' - s_1)] + 4\pi k_2 s_1 \sin 2\pi\tau + 4\pi^2 k_2 g_1 \cos 2\pi\tau + 4\pi^2 (k_1 - k_2) \cos^2 2\pi\tau = 0, \quad (54)$$

где  $k_1 = \frac{ac_1}{\omega}$ ,  $k_2 = \frac{ac_2}{\omega}$ .

Как и в случае изотропной модели трения находим частные периодические решения уравнений (53) и (54). Из условия периодичности функции  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  следует, что свободный коэффициент в уравнении (53) должен равняться нулю, следовательно,  $s_1 = 0$ . Тогда частным решением уравнения (53) будет

$$g_1(\tau) = \frac{k_2}{1 + k_2^2} (\sin 2\pi\tau + k_2 \cos 2\pi\tau).$$

С учетом  $s_1 = 0$  и найденной функции  $g_1(\tau)$  уравнение для функции  $g_2(\tau)$ :

$$g_2'' + 2\pi k_2 g_2' = 2\pi k_2 s_2 - \frac{2\pi^2 k_2^3}{1 + k_2^2} - \frac{2\pi^2 k_2^2}{1 + k_2^2} \sin 4\pi\tau - \frac{2\pi^2 k_2^3}{1 + k_2^2} \cos 4\pi\tau - 2\pi^2 (k_1 - k_2) - 2\pi^2 (k_1 - k_2) \cos 4\pi\tau. \quad (55)$$

Для периодичности функция  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  необходимо в уравнении (55) положить свободный коэффициент равным нулю:

$$g_2'' + 2\pi k_2 g_2' = -\frac{2\pi^2 k_2^2}{1 + k_2^2} \sin 4\pi\tau - \frac{2\pi^2}{1 + k_2^2} [k_1(1 + k_2^2) - k_2] \cos 4\pi\tau.$$

Отсюда находим

$$s_2 = \pi \left( \frac{k_2^2}{1 + k_2^2} + \frac{k_1 - k_2}{k_2} \right)$$

и частное решение для  $g_2(\tau)$

$$g_2(\tau) = \frac{k_2(3k_2 - k_1(1 + k_2^2))}{4(1 + k_2^2)(4 + k_2^2)} \sin 4\pi\tau + \frac{k_2(k_2^2 - 2) + 2k_1(1 + k_2^2)}{4(1 + k_2^2)(4 + k_2^2)} \cos 4\pi\tau.$$

Таким образом, найдены коэффициенты разложения функций  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  и  $T(\varepsilon)$  с точностью до малых второго порядка включительно. В новом времени

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \varepsilon) = & 2\pi\tau + \frac{k_2}{1 + k_2^2} [\sin 2\pi\tau + k_2 \cos 2\pi\tau] \varepsilon + \\ & + \left[ \frac{k_2(3k_2 - k_1(1 + k_2^2))}{4(1 + k_2^2)(4 + k_2^2)} \sin 4\pi\tau + \frac{k_2(k_2^2 - 2) + 2k_1(1 + k_2^2)}{4(1 + k_2^2)(4 + k_2^2)} \cos 4\pi\tau \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

в старом времени

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) = & \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} + \frac{k_2}{1 + k_2^2} \left[ \sin \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} + k_2 \cos \frac{2\pi t}{T(\varepsilon)} \right] \varepsilon + \\ & + \left[ \frac{k_2(3k_2 - k_1(1 + k_2^2))}{4(1 + k_2^2)(4 + k_2^2)} \sin \frac{4\pi t}{T(\varepsilon)} + \frac{k_2(k_2^2 - 2) + 2k_1(1 + k_2^2)}{4(1 + k_2^2)(4 + k_2^2)} \cos \frac{4\pi t}{T(\varepsilon)} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

С точностью до малых второго порядка период имеет вид

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega} + T_2 \varepsilon^2, \quad T_2 = \frac{\pi}{\omega} \left( \frac{a^2 c_2^2}{\omega^2 + a^2 c_2^2} + \frac{c_1 - c_2}{c_2} \right). \quad (56)$$

### 3.6 Численное моделирование движения несвободного монопода на вращающейся плоскости с анизотропным вязким трением

Численное моделирование проводится с целью выявить, можно ли использовать полученную зависимость

$$\frac{s_2(x)}{\pi} = \frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{1 + c_2^2 x} = \delta - \frac{1}{1 + k_2^2}, \quad x = \left( \frac{a}{\omega} \right)^2$$

для нахождения коэффициентов  $c_1, c_2$ . Задача заключается в нахождении гиперболы наилучшего приближения вида

$$f(x) = B - \frac{1}{1 + Ax}$$

по экспериментальным точкам и в сравнении с теоретической гиперболой.

Обезразмеренное уравнение движения монопода имеет вид

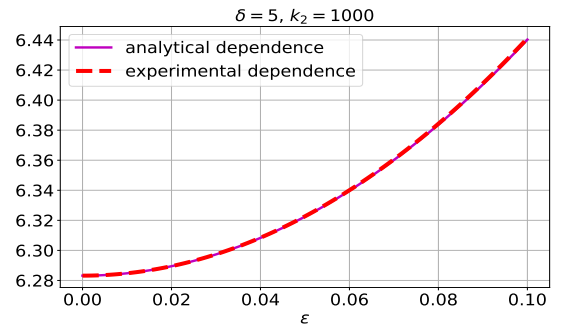
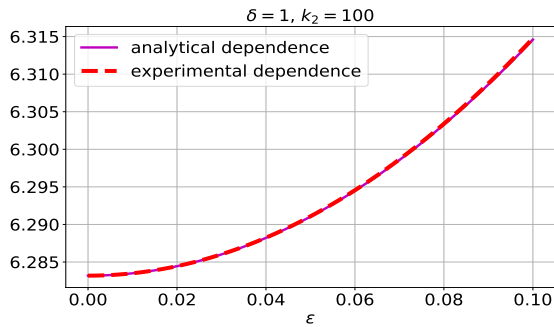
$$\varphi'' + k_2(\varphi' - 1) + \varepsilon k_2 \sin \varphi + \frac{(\delta - 1)k_2 \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - 2\varepsilon \sin \varphi + \varepsilon^2} \varphi' = 0,$$

где  $'$  - это производная по безразмерному времени  $\tilde{\tau} = \omega t$ .

Данное уравнение приводится к системе первого порядка и интегрируется с помощью метода Рунге-Кутты 8-го порядка в схеме Дормана-Принса. В программе фиксируется параметр  $\delta$ , интегрирование происходит внутри двойного цикла: во внешнем цикле меняется параметр  $k_2 \in [100, 1000]$ , во внутреннем – меняется значение параметра  $\varepsilon \in [0, 0.1]$ .

При фиксированном  $\varepsilon$  находится период периодического решения, алгоритм его поиска совпадает с алгоритмом в изотропной модели трения. В результате внутри цикла по  $\varepsilon$  вычисляется коэффициент  $s_2$  с помощью метода наименьших квадратов для параболы наилучшего приближения вида  $s(\varepsilon) = 2\pi + s_2 \varepsilon^2$ . В итоге, программа выдает набор значений  $s_2$  при разных  $k_2$ .

Ниже приведены графики зависимости  $s(\varepsilon)$  при  $\delta = 1, k_2 = 100$ ;  $\delta = 5, k_2 = 1000$ ;  $\delta = 0.2, k_2 = 500$ . Фиолетовым цветом нарисована аналитическая кривая, красным – экспериментальная. В первом случае ошибка в определении коэффициента  $s_2$  составляет 0.5338%, во втором – 0.5336%, в третьем – 0.5252%.



Программа реализует определенные действия в эксперименте. При фиксированной величине угловой скорости горизонтальной плоскости меняют расстояние между осями вращения плоскости и монопода (в программе это соответствует внутреннему циклу по  $\varepsilon$ ). При каждом фиксированном расстоянии измеряют период периодического движения, так как предельный цикл единственный и устойчив, то через некоторое время при любых начальных условиях движение станет стационарным. В результате имеется набор значений расстояния  $r$  и периода  $T$ , по формулам  $\varepsilon = \frac{r}{\rho}$  и  $s = \omega T$  вычисляют набор точек  $\varepsilon$  и  $s$  и находят коэффициент  $s_2$ . Таким образом,

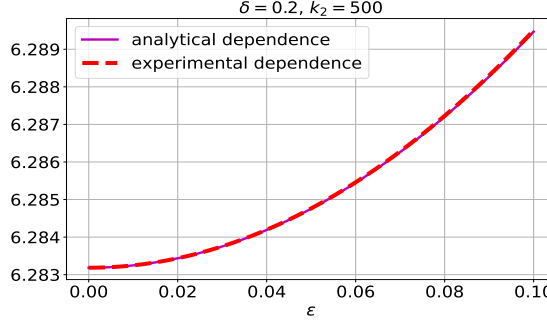
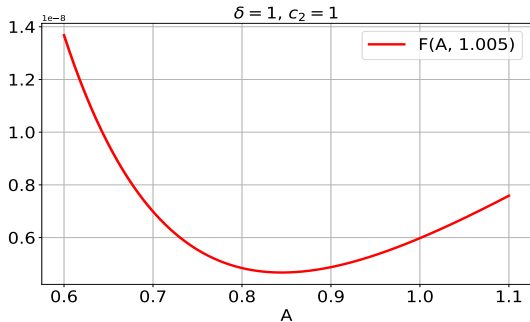


Рис. 1: Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей  $s(\varepsilon)$

изменение величины угловой скорости в эксперименте, что соответствует в программе внешнему циклу по  $k_2$ , приводит к набору значений  $s_2$ .

Набор точек  $(x_i, s_{2i}/\pi)$  приближается гиперболой  $f(x)$  с помощью метода наименьших квадратов  $F(A, B) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{s_{2i}}{\pi} - \left( B - \frac{1}{1 + Ax_i} \right) \right)^2$ , реализованный на основе встроенной функции `minimize` из модуля `scipy.optimize`. Для этой функции необходимо задать хорошее начальное приближение, которое требуется найти. Заметим, что асимптотически  $\frac{s_2(x)}{\pi} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \delta$ , в эксперименте это соответствует маленькой величине угловой скорости и подходит в качестве начального приближения для  $B$ . Взяв в качестве  $B$  значение  $\frac{s_{2i}}{\pi}$ , полученное при самом большом  $x_i$  из экспериментального набора, найдем в каких пределах лежит минимум функции  $F(A, s_{2i}/\pi)$  относительно переменной  $A = c_2^2$  и примем это в качестве начального приближения. Ниже приведены графики функции  $F(A, 1.005)$  при  $c_2 = 1$  и  $\delta = 1$ ,  $F(A, 5.027)$  при  $c_2 = 2$  и  $\delta = 5$ ,  $F(A, 0.201)$  при  $c_2 = 10$  и  $\delta = 0.2$ .



Таким образом, в первом случае минимум функции лежит на отрезке  $[0.8, 0.9]$ , во втором – на отрезке  $[3, 5]$ , что близко к истинным значениям  $c_2^2$ , в третьем – на отрезке  $[82.5, 85]$ . С такими начальными условиями для  $\delta = 1$  и  $c_2 = 1$  ошибка в их определении составила 0.5322%, 2.4933%, для

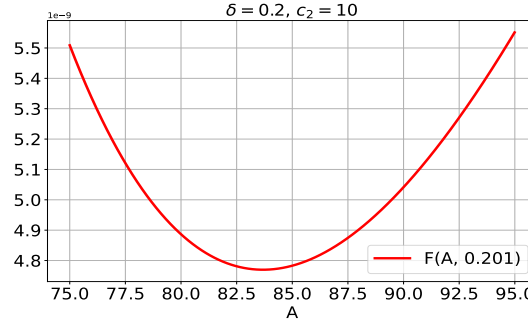


Рис. 2: Графики зависимости  $F(A, B)$  при фиксированном  $B$

$\delta = 5$  и  $c_2 = 2 - 0.5334\%$ ,  $0.2108\%$ , для  $\delta = 0.2$  и  $c_2 = 10 - 0.5258\%$ ,  $3.0526\%$  соответственно. Сравнение гипербол приведено ниже: во втором случае коэффициент  $\delta$  определен с меньшей точностью, поэтому асимптотика хуже.

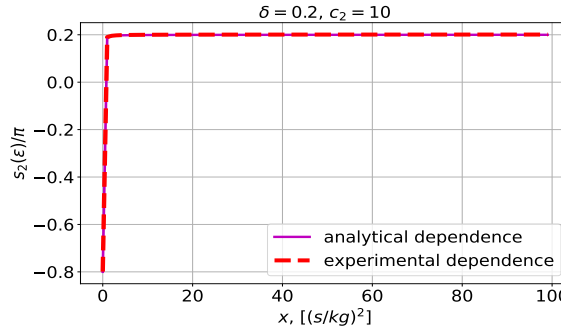
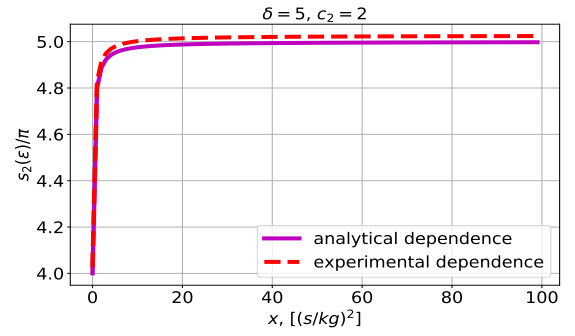
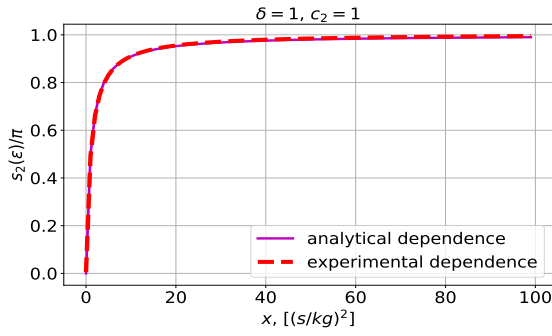


Рис. 3: Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей  $\frac{s_2(x)}{\pi}$

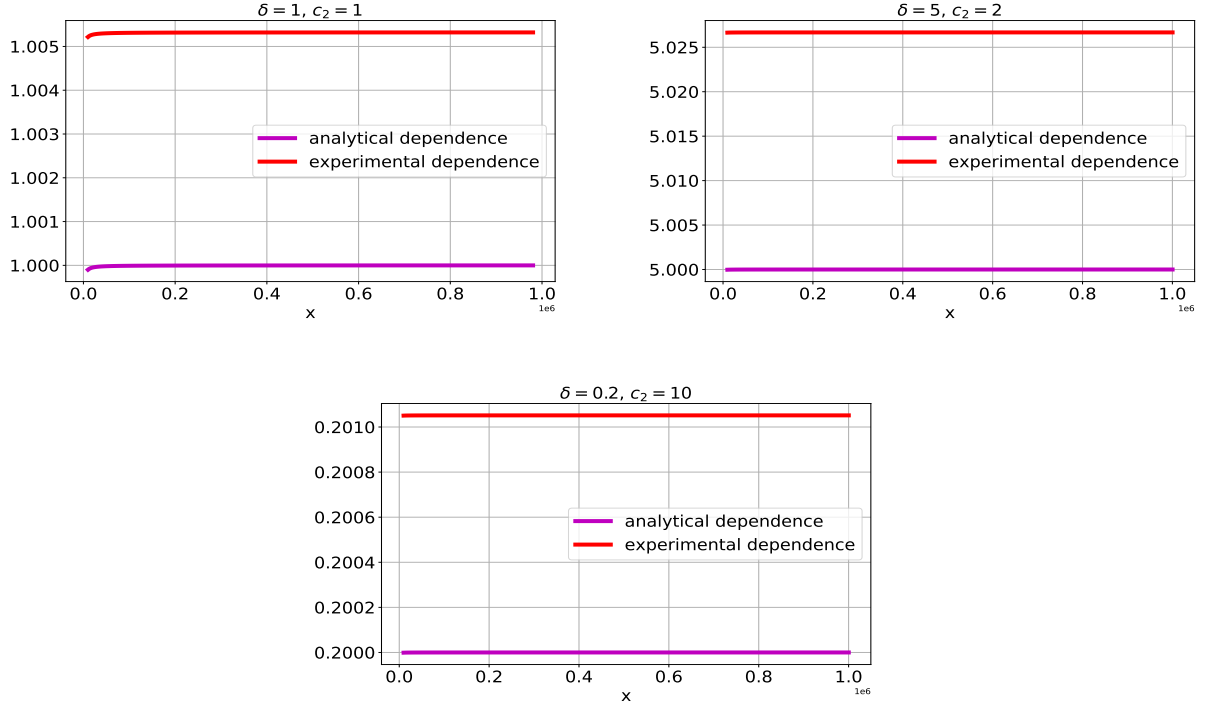


Рис. 4: Сравнение асимптотики теоретической и экспериментальной зависимостей  $\frac{s_2(x)}{\pi}$

## 4 Вывод

В рассматриваемых системах с вязким трением доказано существование единственного периодического решения при малых значениях параметра  $\varepsilon$ . Показана гладкая зависимость периода этого периодического решения от параметра  $\varepsilon$ . Для частного случая  $h(\varphi, \dot{\varphi}) = c$  найдены два первых коэффициента разложения периода по параметру  $\varepsilon$ .

В задаче о движении тела (треноги, монопода), опирающегося на вращающуюся плоскость с вязким трением, найдена зависимость периода периодического движения от расстояния между осями вращения плоскости и тела, когда это расстояние достаточно мало, и получена приближенная формула, связывающая период и коэффициенты трения в изотропном и анизотропном случаях.

Численное моделирование показало, что аналитически найденная зависимость периода может быть использована для определения параметров модели вязкого трения.

## Список литературы

- [1] *А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физматлит, 1959. 918 с.
- [2] *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
- [3] *С. В. Болотин, А. В. Карапетян, Е. И. Кугушев, Д. В. Трещев* Теоретическая механика. М.: Издат. центр “Академия”, 2010. 432 с.
- [4] *Васюкова О. Э., Климина Л. А.* Моделирование автоколебаний управляемого физического маятника с учетом зависимости момента трения от нормальной реакции в шарнире // Нелинейная динам. 2018. Т. 14, № 1. С. 33–44.
- [5] *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС 1997. — XIV+554 с.
- [6] *Кугушев Е. И., Попова Т. В., Селезнева М. О.* О движении несвободной треноги, опирающейся на вращающуюся плоскость с вязким трением // Проблемы механики и управления: Материалы Международной конференции. 2018, С. 201–204.
- [7] *Кугушев Е. И., Попова Т. В., Селезнева М. О.* Численный анализ движения несвободной треноги на вращающейся плоскости с вязким трением // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. 2019. Т. 1: Общая и прикладная механика. С. 107–109.
- [8] *Стрелков С. П.* Маятник Фроуда // Журн. технической физики. 1933. Т. 3. Вып. 4. С. 563–573.
- [9] *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2007. — 240 с.