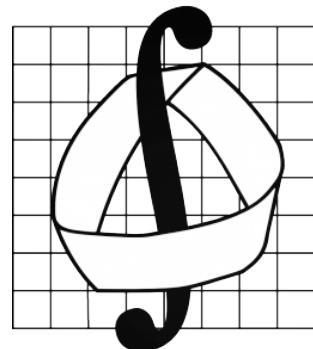


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет  
Кафедра теоретической механики и мекатроники



Отчет по практикуму на ЭВМ

Задача №13

Преподаватель: Самохин А.С.

Работу выполнила

студентка 422 группы

Селезнева М.О.

Москва, 2019

# Содержание

<b>1. Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2. Аналитическое решение</b>	<b>3</b>
2.1. Линейный случай . . . . .	3
2.2. Нелинейный случай . . . . .	4
<b>3. Явный линейный случай</b>	<b>4</b>
3.1. Аппроксимация . . . . .	4
3.2. Дифференциальное приближение . . . . .	4
3.3. Устойчивость . . . . .	5
3.4. Оценка точности разностных решений . . . . .	6
<b>4. Явный нелинейный случай</b>	<b>7</b>
4.1. Аппроксимация . . . . .	7
4.2. Оценка точности разностных решений . . . . .	8
<b>5. Неявный случай</b>	<b>10</b>
5.1. Аппроксимация . . . . .	10
5.2. Линейный случай . . . . .	10
5.2.1. Дифференциальное приближение . . . . .	11
5.2.2. Устойчивость . . . . .	12
5.2.3. Оценка точности разностных решений . . . . .	13
<b>6. Нелинейный случай</b>	<b>16</b>
6.0.1. Оценка точности разностных решений . . . . .	16
<b>7. Графики</b>	<b>18</b>

# 1. Постановка задачи

Для решения уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$  в области

$Q_T = \{(t, x) | 0 < t \leq 1, -2 \leq x \leq 2\}$  используются разностные схемы:

$$1) \quad v_t + \frac{1}{2}(1 - sign(F'_v(v))F(v)_x + \frac{1}{2}(1 + sign(F'_v(v))F(v)_{\bar{x}} = 0 \text{ -- явная};$$

$$2) \quad v_t + (F(\hat{v}))_{\dot{x}} = \frac{\omega}{8} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n) \text{ -- неявная, где } \omega = 0; 1.$$

Рассматриваются 2 возможных случая:

$$1) \quad F(v) = -\frac{1}{2}v \text{ (линейный);}$$

$$2) \quad F(v) = -\frac{1}{2}v^2 \text{ (нелинейный).}$$

И граничными условиями на прямой  $t = 0$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

# 2. Аналитическое решение

## 2.1. Линейный случай

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Используя метод характеристик, находим:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq -\frac{1}{2}t \\ 0, & x > -\frac{1}{2}t. \end{cases}$$

## 2.2. Нелинейный случай

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Согласно [2] решением является

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq -t \\ -\frac{x}{t}, & t < x < 0 \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

## 3. Явный линейный случай

Схема имеет вид

$$\begin{aligned} v_t - \frac{1}{2}v_x &= 0, \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{2h} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3.1. Аппроксимация

Обозначим  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $v = v_m^n$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = v'$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} &= \\ = \frac{v + \tau\dot{v} + O(\tau^2) - v}{\tau} + a \frac{v + hv' + O(h^2) - v}{h} &= \dot{v} + av' + O(\tau + h) = O(\tau + h). \end{aligned}$$

Таким образом, разностная схема (3) аппроксимирует уравнение (1) с первым порядком аппроксимации.

### 3.2. Дифференциальное приближение

$$\frac{v + \tau\dot{v} + \frac{\tau^2}{2}\ddot{v} + \frac{\tau^3}{6}\ddot{\ddot{v}} - v + O(\tau^4)}{\tau} + a \frac{v + hv' + \frac{h^2}{2}v'' + \frac{h^3}{6}v''' - v + O(h^4)}{h} = 0$$

$$\dot{v} + av' = -\frac{\tau}{2}\ddot{v} - \frac{\tau^2}{6}\ddot{v} - a\frac{h}{2}v'' - a\frac{h^2}{6}v''' + O(\tau^3 + h^3)$$

Заменим производные по времени, входящие в погрешность аппроксимации, на производные по пространственной переменной с требуемой точностью:

$$\ddot{v} + a\dot{v}' = -\frac{\tau}{2}\ddot{v} - \frac{\tau^2}{6}\ddot{v} - a\frac{h}{2}\dot{v}'' - a\frac{h^2}{6}\dot{v}''' + O(\tau^3 + h^3)$$

$$\dot{v}' + av'' = -\frac{\tau}{2}\ddot{v}' - \frac{\tau^2}{6}\ddot{v}' - a\frac{h}{2}v''' - a\frac{h^2}{6}v'''' + O(\tau^3 + h^3)$$

Умножая второе уравнение на  $(-a)$  и прибавляя первое, получим

$$\ddot{v} = a^2v'' - \frac{\tau}{2}\ddot{v} + a\frac{\tau}{2}\ddot{v}' - a\frac{h}{2}\dot{v}'' + a^2\frac{h}{2}v''' + O(\tau^2 + h^2)$$

Аналогично получаем

$$\begin{cases} \ddot{v} = -a^3v''' + O(\tau + h) \\ \dot{v}'' = -av''' + O(\tau + h) \\ \ddot{v}' = a^2v'''' + O(\tau + h) \end{cases}$$

В итоге, получаем

$$\dot{v} + av' = -\frac{ah}{2}(1 + \nu)v'' - \frac{ah^2}{6}(2\nu^2 + 3\nu + 1)v'''' + O(\tau^3 + h^3),$$

где  $\nu = \frac{a\tau}{h}$ ,  $a = -\frac{1}{2}$ .

### 3.3. Устойчивость

Проверим устойчивость схемы, сделав замену  $v_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$ :

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi} - \lambda^n e^{im\varphi}}{\tau} - \frac{\lambda^n e^{i(m+1)\varphi} - \lambda^n e^{im\varphi}}{2h} = 0$$

Сокращаем на  $\lambda^n e^{im\varphi}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - \frac{e^{i\varphi} - 1}{2h} = 0;$$

и находим

$$\lambda = 1 + \frac{\tau}{2h}(e^{i\varphi} - 1)$$

Уравнение для  $\lambda$  в зависимости от угла  $\varphi$  описывает на комплексной плоскости окружность с центром в точке  $(1 - \frac{\tau}{2h}, 0)$  и радиусом  $\frac{\tau}{2h}$ . Необходимое условие устойчивости будет выполнено, если эта окружность целиком лежит внутри единичной окружности с центром в начале координат, то есть  $\tau \leq 2h$ .

### 3.4. Оценка точности разностных решений

Для сравнения двух сеточных функций используем следующие нормы:

$$\Delta(v)_{C_h} = \|v - u\|_{C_h} = \max_{x_i \in \omega_i} |v_i - u_i|; \quad \Delta(v)_{L_{1,h}} = \|v - u\|_{L_{1,h}} = h \sum_{x_i \in \omega_i} |v_i - u_i|$$

. Тогда относительная погрешность разностного решения  $v$ , вычисленная в норме  $\|\cdot\|_\alpha$ :

$$\delta(v)_{C_h} = \frac{\|v - u\|_{C_h}}{\|v\|_{C_h}}; \quad \delta(v)_{L_{1,h}} = \frac{\|v - u\|_{L_{1,h}}}{\|v\|_{L_{1,h}}}$$

Таблица 1: Нормы погрешности расчетов

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
0.100	0.100	$3.770e - 01$	$1.230e - 01$	$3.770e - 01$	$2.051e - 01$
0.01	0.100	$4.360e - 01$	$1.710e - 01$	$4.360e - 01$	$1.069e - 01$
0.001	0.100	$4.401e - 01$	$1.750e - 01$	$4.401e - 01$	$1.094e - 01$
0.1	0.01	$4.529e + 08$	$1.743e + 07$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.01	0.01	$4.602e - 01$	$3.980e - 02$	$4.602e - 01$	$2.635e - 02$
0.001	0.01	$4.797e - 01$	$5.490e - 02$	$4.797e - 01$	$3.636e - 02$
0.1	0.001	$1.125e + 19$	$4.522e + 16$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.01	0.001	$1.069e + 94$	$1.328e + 92$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.001	0.001	$4.874e - 01$	$1.261e - 02$	$4.874e - 01$	$8.403e - 03$

Решения  $v^k$  вычисляются на сетках с шагами

$$\tau_k = \frac{\tau}{2^k}, \quad h_k = \frac{h}{2^k}.$$

Для  $k = 1, 2, 3, 4$  и  $v^k = u$  вычислим  $\Delta(v, v^k)_\alpha = \|v - v^k\|_\alpha$  и  $\delta(v, v^k)_\alpha = \frac{\|v - v^k\|_\alpha}{\|v\|_\alpha}$ .

Таблица 2: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.1, h = 0.1$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$1.252e - 01$	$4.194e - 02$	$1.252e - 01$	$2.621e - 02$
$v^2$	$2.429e - 01$	$6.912e - 02$	$2.429e - 01$	$4.320e - 02$
$v^3$	$3.305e - 01$	$8.570e - 02$	$3.30497e - 01$	$5.356e - 02$
$v^4$	$3.700e - 01$	$9.336e - 02$	$3.700e - 01$	$5.835e - 02$
$u$	$3.770e - 01$	$1.230e - 01$	$3.770e - 01$	$2.051e - 01$

Таблица 3: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.01, h = 0.01$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$9.765e - 02$	$1.185e - 02$	$9.765e - 02$	$7.850e - 03$
$v^2$	$1.836e - 01$	$2.016e - 02$	$1.836e - 01$	$1.335e - 02$
$v^3$	$2.604e - 01$	$2.596e - 02$	$2.604e - 01$	$1.719e - 02$
$v^4$	$3.246e - 01$	$2.998e - 02$	$3.246e - 01$	$1.985e - 02$
$u$	$4.602e - 01$	$3.980e - 02$	$4.602e - 01$	$2.635e - 02$

## 4. Явный нелинейный случай

### 4.1. Апроксимация

Обозначим через  $F(v_m^n) = -\frac{1}{2}v_m^{n,2} = g_m^n$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{(1 + sign(v_m^n))}{2} \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h} + \frac{(1 - sign(v_m^n))}{2} \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h} = 0.$$

Получаем три разных шаблона в зависимости от знака  $v_m^n$ :

1) при  $sign(v_m^n) = 1$  имеем

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h} = 0$$

Далее  $g = g_m^n$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x} = g'$ .

Раскладывая в ряд, находим

$$\frac{v + \tau \dot{v} + O(\tau^2) - v}{\tau} + \frac{g + hg' + O(h^2) - g}{h} = \dot{v} + g' + O(\tau + h) = O(\tau + h).$$

2) при  $sign(v_m^n) = -1$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h} = 0$$

$$\frac{v + \tau \dot{v} + O(\tau^2) - v}{\tau} - \frac{g - (g - hg' + O(h^2))}{h} = \dot{v} + g' + O(\tau + h) = O(\tau + h).$$

3) при  $sign(v_m^n) = 0$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{v + \tau \dot{v} + O(\tau^2) - v}{\tau} + \\ & + \frac{g + g'h + \frac{g''h^2}{2} + \frac{g'''h^3}{6} + O(h^4) - (g - g'h + \frac{g''h^2}{2} - \frac{g'''h^3}{6} + O(h^4))}{2h} = \\ & = \dot{v} + g' + O(\tau + h^2) = O(\tau + h^2). \end{aligned}$$

## 4.2. Оценка точности разностных решений

Таблица 4: Нормы погрешности расчетов

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
0.100	0.100	$3.750e - 01$	$2.150e - 01$	$3.750e - 01$	$1.228e - 01$
0.01	0.100	$4.875e - 01$	$3.767e - 01$	$4.877e - 01$	$2.037e - 01$
0.001	0.100	$4.988e - 01$	$3.920e - 01$	$4.990e - 01$	$2.106e - 01$

0.1	0.01	<i>inf</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
0.01	0.01	$3.750e - 01$	$1.524e - 01$	$3.750e - 01$	$9.228e - 02$
0.001	0.01	$4.875e - 01$	$2.628e - 01$	$4.875e - 01$	$1.503e - 01$
0.1	0.001	<i>inf</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
0.01	0.001	<i>inf</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
0.001	0.001	$3.750e - 01$	$1.423e - 01$	$3.750e - 01$	$8.670e - 02$

Решения  $v^k$  вычисляются на сетках с шагами

$$\tau_k = \frac{\tau}{2^k}, \quad h_k = \frac{h}{2^k}.$$

Для  $k = 1, 2, 3, 4$  и  $v^k = u$  вычислим  $\Delta(v, v^k)_\alpha = \|v - v^k\|_\alpha$  и  $\delta(v, v^k)_\alpha = \frac{\|v - v^k\|_\alpha}{\|v\|_\alpha}$ .

Таблица 5: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.1, h = 0.1$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$1.784e - 01$	$3.223e - 02$	$1.784e - 01$	$1.840e - 02$
$v^2$	$1.936e - 01$	$4.379e - 02$	$1.936e - 01$	$2.500e - 02$
$v^3$	$1.936e - 01$	$5.677e - 02$	$1.936e - 01$	$3.241e - 02$
$v^4$	$3.129e - 01$	$7.883e - 02$	$3.129e - 01$	$4.500e - 02$
$u$	$3.750e - 01$	$2.150e - 01$	$3.750e - 01$	$1.228e - 01$

Таблица 6: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.01, h = 0.01$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$1.6815e - 01$	$5.174e - 03$	$1.681e - 01$	$3.132e - 03$
$v^2$	$1.736e - 01$	$7.929e - 03$	$1.736e - 01$	$4.800e - 03$
$v^3$	$2.946e - 01$	$1.095e - 02$	$2.946e - 01$	$6.626e - 03$
$v^4$	$3.324e - 01$	$1.199e - 02$	$3.324e - 01$	$7.257e - 03$
$u$	$3.750e - 01$	$1.524e - 01$	$3.750e - 01$	$9.228e - 02$

## 5. Неявный случай

С учетом  $F(v_m^n) = g_m^n$  схема примет вид

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{g_{m+1}^{n+1} - g_{m-1}^{n+1}}{2h} = \frac{\omega}{8} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n).$$

### 5.1. Аппроксимация

Раскладываем в ряд левую часть

$$\begin{aligned} & \frac{v + \tau \dot{v} + \frac{\ddot{v}\tau^2}{2} + \frac{\ddot{v}\tau^3}{6} + O(\tau^4) - v}{\tau} + \\ & + \frac{g + g'h + \dot{g}\tau + \frac{g''h^2}{2} + \frac{\ddot{g}\tau^2}{2} + \dot{g}'h\tau + \frac{g'''h^3}{6} + \frac{\dot{g}''\tau h^2}{2} + \frac{\ddot{g}'\tau^2 h}{2} + \frac{\ddot{v}\tau^3}{6} + O((\tau + h)^4)}{2h} \\ & - \frac{g - g'h + \dot{g}\tau + \frac{g''h^2}{2} + \frac{\ddot{g}\tau^2}{2} - \dot{g}'h\tau - \frac{g'''h^3}{6} + \frac{\dot{g}''\tau h^2}{2} - \frac{\ddot{g}'\tau^2 h}{2} + \frac{\ddot{v}\tau^3}{6} + O((\tau + h)^4)}{2h} = \\ & = \dot{v} + g' + \frac{\ddot{v}\tau}{2} + \dot{g}'\tau + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau + h^2). \end{aligned}$$

Раскладываем в ряд правую часть

$$\begin{aligned} & v + 2v'h + 2v''h^2 + \frac{4v'''h^3}{3} + \frac{2v''''h^4}{3} + O(h^5) - \\ & - 4 \left( v + v'h + \frac{v''h^2}{2} + \frac{v'''h^3}{6} + \frac{v''''h^4}{24} + O(h^5) \right) + 6v - \\ & - 4 \left( v - v'h + \frac{v''h^2}{2} - \frac{v'''h^3}{6} + \frac{v''''h^4}{24} + O(h^5) \right) + \\ & + v - 2v'h + 2v''h^2 - \frac{4v'''h^3}{3} + \frac{2v''''h^4}{3} + O(h^5) = \\ & = v''''h^4 + O(h^5). \end{aligned}$$

В итоге, получаем аппроксимацию порядка  $O(\tau + h^2)$ .

### 5.2. Линейный случай

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{2h} = \frac{\omega}{8} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n).$$

### 5.2.1. Дифференциальное приближение

Используя предыдущие выкладки с учетом  $g = av$ , где  $a = -\frac{1}{2}$  выписываем слагаемые с точностью до  $O(\tau^3 + \tau h^2 + h^3)$

$$\ddot{v} + \frac{\ddot{v}\tau}{2} + \frac{\ddot{v}\tau^2}{6} + a \left( v' + \dot{g}'\tau + \frac{g'''h^2}{6} + \frac{\ddot{g}'\tau^2}{2} \right) + O(\tau^3 + \tau h^2 + h^3) = 0$$

Правая часть уравнения входит в  $O(\tau^3 + \tau h^2 + h^3)$ .

Тогда

$$\dot{v} + av' = -\frac{\ddot{v}\tau}{2} - \frac{\ddot{v}\tau^2}{6} - a\dot{v}'\tau - a\frac{v'''h^2}{6} - a\frac{\ddot{v}'\tau^2}{2} + O(\tau^3 + \tau h^2 + h^3)$$

Заменим производные по времени, входящие в погрешность аппроксимации, производными по пространственной переменной:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + a\dot{v}' &= -\frac{\ddot{v}\tau}{2} - \frac{\ddot{v}\tau^2}{6} - a\ddot{v}'\tau - a\frac{\dot{v}'''h^2}{6} - a\frac{\ddot{v}'\tau^2}{2} + O(\tau^3 + \tau h^2 + h^3) \\ \dot{v}' + av'' &= -\frac{\ddot{v}'\tau}{2} - \frac{\ddot{v}'\tau^2}{6} - a\dot{v}''\tau - a\frac{v''''h^2}{6} - a\frac{\ddot{v}''\tau^2}{2} + O(\tau^3 + \tau h^2 + h^3) \end{aligned}$$

Умножая второе уравнение на  $(-a)$  и прибавляя первое, получим

$$\ddot{v} = a^2v'' - \frac{\ddot{v}\tau}{2} - a\frac{\ddot{v}'\tau}{2} + a^2\dot{v}''\tau + O(\tau^2 + h^2)$$

Из второго уравнения следует

$$\begin{aligned} \dot{v}' &= -av'' - \frac{\ddot{v}'\tau}{2} - a\dot{v}''\tau + O(\tau^2 + h^2) \\ \dot{v}'' &= -av''' + O(\tau + h^2), \quad \ddot{v}' = a^2v''' + O(\tau + h^2), \quad \ddot{v} = -a^3v''' + O(\tau + h^2) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= a^2v'' - a^3v''' + O(\tau^2 + h^2) \\ \dot{v}' &= -av'' + a^2\frac{v'''h^2}{2} + O(\tau^2 + h^2) \end{aligned}$$

В итоге, получаем

$$\dot{v} + av' = a^2\frac{v''\tau}{2} - a^3\frac{v'''h^2}{3} - a\frac{v'''h^2}{6} + O(\tau^3 + \tau h^2 + h^3)$$

### 5.2.2. Устойчивость

Делаем замену  $v_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi} - \lambda^n e^{im\varphi}}{\tau} - \frac{\lambda^{n+1}e^{i(m+1)\varphi} - \lambda^{n+1}e^{i(m-1)\varphi}}{4h} = \\ & = \frac{\omega}{8} \left( \lambda^n e^{i(m+2)\varphi} - 4\lambda^n e^{i(m+1)\varphi} + 6\lambda^n e^{im\varphi} - 4\lambda^n e^{i(m-1)\varphi} + \lambda^n e^{i(m-2)\varphi} \right) \end{aligned}$$

Сокращаем на  $\lambda^n e^{im\varphi}$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - \frac{\lambda e^{i\varphi} - \lambda e^{-i\varphi}}{4h} = \frac{\omega}{8} (e^{2i\varphi} - 4e^{i\varphi} + 6 - 4e^{-i\varphi} + e^{-2i\varphi})$$

или

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - \frac{\lambda i \sin \varphi}{2h} = \frac{\omega}{4} (\cos 2\varphi + 3 - 4 \cos \varphi)$$

Тогда

$$\lambda = \frac{1 + \frac{\omega\tau}{4} (\cos 2\varphi + 3 - 4 \cos \varphi)}{1 - i \frac{\tau}{2h} \sin \varphi}$$

При  $\omega = 0$

$$\lambda = \frac{1}{1 - i \frac{\tau}{2h} \sin \varphi} \Rightarrow |\lambda| \leq 1 \quad \forall \tau, h$$

Следовательно, выполнен спектральный признак устойчивости.

При  $\omega \neq 0$

$$\lambda = \frac{1 + \frac{\omega\tau}{2} (\cos \varphi - 1)^2}{1 - i \frac{\tau}{2h} \sin \varphi}$$

При  $\varphi = \pi$  числитель достигает наибольшего значения, а знаменатель по модулю достигает наименьшего значения:

$$\lambda = 1 + 2\omega\tau, \quad \omega > 0, \quad \tau > 0$$

Получаем, что схема неустойчива.

### 5.2.3. Оценка точности разностных решений

Таблица 7: Нормы погрешности расчетов при  $\omega = 0$

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
0.100	0.100	$4.878e - 01$	$2.131e - 01$	$4.878e - 01$	$1.263e - 01$
0.01	0.100	$5.183e - 01$	$2.458e - 01$	$5.183e - 01$	$1.385e - 01$
0.001	0.100	$5.275e - 01$	$2.548e - 01$	$5.275e - 01$	$1.424e - 01$
0.1	0.01	$5.304e - 01$	$1.301e - 01$	$5.304e - 01$	$8.585e - 02$
0.01	0.01	$4.991e - 01$	$4.532e - 02$	$4.991e - 01$	$2.991e - 02$
0.001	0.01	$5.736e - 01$	$5.683e - 02$	$5.736e - 01$	$3.669e - 02$
0.1	0.001	$5.408e - 01$	$1.256e - 01$	$5.408e - 01$	$8.366e - 02$
0.01	0.001	$5.096e - 01$	$4.036e - 02$	$5.096e - 01$	$2.688e - 02$
0.001	0.001	$4.999 - 01$	$1.312e - 02$	$4.999e - 01$	$8.737e - 03$

Рассмотрим дополнительный случай  $\omega = 0.1$

Таблица 8: Нормы погрешности расчетов при  $\omega = 0.1$

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
0.100	0.100	$6.367e - 01$	$4.853e - 01$	$6.367e - 01$	$2.477e - 01$
0.01	0.100	$4.097e + 06$	$4.143e + 06$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.001	0.100	$4.668e + 81$	$1.133e + 81$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.1	0.01	$5.304e - 01$	$1.560e - 01$	$5.304e - 01$	$1.013e - 01$
0.01	0.01	$2.576e + 06$	$4.141e + 05$	$1.000e + 00$	$9.999e - 01$
0.001	0.01	$2.332e + 77$	$7.590e + 76$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.1	0.001	$5.408e - 01$	$1.282e - 01$	$5.408e - 01$	$8.524e - 02$
0.01	0.001	$3.307e + 05$	$4.141e + 04$	$1.000e + 00$	$9.999e - 01$
0.001	0.001	$1.484e + 77$	$7.590e + 75$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$

Таблица 9: Нормы погрешности расчетов при  $\omega = 1$

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
0.100	0.100	$4.027e + 03$	$2.953e + 03$	$1.000e + 00$	$9.995e - 01$
0.01	0.100	$4.913e + 49$	$7.658e + 48$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.001	0.100	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
0.1	0.01	$7.673e + 02$	$2.954e + 02$	$1.000e + 00$	$9.953e - 01$
0.01	0.01	$1.077e + 46$	$2.577e + 45$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.001	0.01	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
0.1	0.001	$7.779e + 01$	$2.965e + 01$	$1.000e + 00$	$9.557e - 01$
0.01	0.001	$2.038e + 45$	$2.577e + 44$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$
0.001	0.001	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>

Решения  $v^k$  вычисляются на сетках с шагами

$$\tau_k = \frac{\tau}{2^k}, \quad h_k = \frac{h}{2^k}.$$

Для  $k = 1, 2, 3, 4$  и  $v^k = u$  вычислим  $\Delta(v, v^k)_\alpha = \|v - v^k\|_\alpha$  и  $\delta(v, v^k)_\alpha = \frac{\|v - v^k\|_\alpha}{\|v\|_\alpha}$ .

Таблица 10: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.1$ ,  $h = 0.1$  при  $\omega = 0$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$2.678e - 01$	$1.512e - 01$	$2.678e - 01$	$8.965e - 02$
$v^2$	$3.927e - 01$	$4.510e - 01$	$3.927e - 01$	$2.674e - 01$
$v^3$	$4.677e - 01$	$5.163e - 01$	$4.677e - 01$	$3.061e - 01$
$v^4$	$6.415e - 01$	$5.506e - 01$	$6.414e - 01$	$3.265e - 01$
$u$	$4.878e - 01$	$2.131e - 01$	$4.878e - 01$	$1.263e - 01$

Таблица 11: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.01$  при  $\omega = 0$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$1.391e - 01$	$1.841e - 02$	$1.391e - 01$	$1.215e - 02$
$v^2$	$3.207e - 01$	$3.304e - 01$	$3.207e - 01$	$2.181e - 01$
$v^3$	$3.226e - 01$	$3.542e - 01$	$3.226e - 01$	$2.337e - 01$
$v^4$	$6.415e - 01$	$3.609e - 01$	$6.415e - 01$	$2.381e - 01$
$u$	$4.991e - 01$	$4.532e - 02$	$4.991e - 01$	$2.991e - 02$

Таблица 12: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.1$ ,  $h = 0.1$  при  $\omega = 0.1$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$5.128e + 143$	$1.896e + 143$	$5.128e + 143$	$9.677e + 142$
$v^2$	$5.155e + 143$	$2.096e + 143$	$5.155e + 143$	$1.070e + 143$
$v^3$	$5.153e + 143$	$2.197e + 143$	$5.153e + 143$	$1.121e + 143$
$v^4$	$5.153e + 143$	$2.240e + 143$	$5.153e + 143$	$1.143e + 143$
$u$	$6.367e - 01$	$4.853e - 01$	$6.367e - 01$	$2.477e - 01$

Таблица 13: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.01$  при  $\omega = 0.1$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$5.128e + 143$	$1.896e + 143$	$5.128e + 143$	$9.677e + 142$
$v^2$	$5.155e + 143$	$2.096e + 143$	$5.155e + 143$	$1.070e + 143$
$v^3$	$5.153e + 143$	$2.197e + 143$	$5.153e + 143$	$1.121e + 143$
$v^4$	$5.153e + 143$	$2.240e + 143$	$5.153e + 143$	$1.143e + 143$
$u$	$6.367e - 01$	$4.853e - 01$	$6.367e - 01$	$2.477e - 01$

Таблица 14: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.1$ ,  $h = 0.1$  при  $\omega = 1$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$3.087e + 150$	$4.565e + 149$	$7.664e + 146$	$1.545e + 146$
$v^2$	$1.683e + 158$	$1.922e + 157$	$4.178e + 154$	$6.507e + 153$
$v^3$	$1.420e + 174$	$1.438e + 173$	$3.527e + 170$	$4.868e + 169$
$v^4$	$2.863e + 206$	$2.863e + 205$	$7.108e + 202$	$9.692e + 201$
$u$	$4.027e + 03$	$2.953e + 03$	$1.000e + 00$	$9.995e - 01$

Таблица 15: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.01$  при  $\omega = 1$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$4.891e + 222$	$8.997e + 220$	$4.540e + 176$	$3.491e + 175$
$v^2$	$1.341e + 304$	$1.668e + 302$	$1.245e + 258$	$6.472e + 256$
$v^3$	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
$v^4$	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
$u$	$1.077e + 46$	$2.577e + 45$	$1.000e + 00$	$1.000e + 00$

## 6. Нелинейный случай

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{(v_{m+1}^{n+1})^2 - (v_{m-1}^{n+1})^2}{2h} = \frac{\omega}{8} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n).$$

### 6.0.1. Оценка точности разностных решений

Таблица 16: Нормы погрешности расчетов при  $\omega = 0$

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
0.100	0.100	$5.556e - 01$	$3.534e - 01$	$5.567e - 01$	$1.924e - 01$
0.01	0.100	$5.654e - 01$	$3.067e - 01$	$5.654e - 01$	$1.672e - 01$
0.001	0.100	$5.659e - 01$	$3.025e - 01$	$5.659e - 01$	$1.650e - 01$
0.1	0.01	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
0.01	0.01	$6.092e - 01$	$2.707e - 01$	$6.092e - 01$	$1.539e - 01$
0.001	0.01	$6.769e - 01$	$2.588e - 01$	$6.769e - 01$	$1.470e - 01$
0.1	0.001	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
0.01	0.001	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
0.001	0.001	$4.999 - 01$	$1.312e - 02$	$4.999e - 01$	$8.737e - 03$

Таблица 17: Нормы погрешности расчетов при  $\omega = 1$

$\tau$	$h$	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_{1,h}}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_{1,h}}$
0.100	0.100	nan	nan	nan	nan
0.01	0.100	nan	nan	nan	nan
0.001	0.100	nan	nan	nan	nan
0.1	0.01	inf	nan	nan	nan
0.01	0.01	nan	nan	nan	nan
0.001	0.01	nan	nan	nan	nan
0.1	0.001	inf	nan	nan	nan
0.01	0.001	inf	nan	nan	nan
0.001	0.001	nan	nan	nan	nan

Решения  $v^k$  вычисляются на сетках с шагами

$$\tau_k = \frac{\tau}{2^k}, \quad h_k = \frac{h}{2^k}.$$

Для  $k = 1, 2, 3, 4$  и  $v^k = u$  вычислим  $\Delta(v, v^k)_\alpha = \|v - v^k\|_\alpha$  и  $\delta(v, v^k)_\alpha = \frac{\|v - v^k\|_\alpha}{\|v\|_\alpha}$ .

Таблица 18: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.1$ ,  $h = 0.1$  при  $\omega = 0$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$4.657e - 01$	$3.504e - 01$	$4.666e - 01$	$1.907e - 01$
$v^2$	$5.541e - 01$	$4.374e - 01$	$5.552e - 01$	$2.381e - 01$
$v^3$	$5.556e - 01$	$4.637e - 01$	$5.567e - 01$	$2.524e - 01$
$v^4$	$5.556e - 01$	$4.639e - 01$	$5.567e - 01$	$2.525e - 01$
$u$	$5.556e - 01$	$3.534e - 01$	$5.567e - 01$	$1.924e - 01$

Таблица 19: Оценки погрешности на сетке  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.01$  при  $\omega = 0$

	$\Delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\Delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$	$\delta(v, \cdot)_{C_h}$	$\delta(v, \cdot)_{L_{1,h}}$
$v^1$	$6.092e - 01$	$3.095e - 01$	$6.092e - 01$	$1.759e - 01$
$v^2$	$6.092e - 01$	$4.038e - 01$	$6.092e - 01$	$2.295e - 01$
$v^3$	$6.092e - 01$	$4.533e - 01$	$6.0924e - 01$	$2.577e - 01$
$v^4$	$6.0924e - 01$	$4.757e - 01$	$6.092e - 01$	$2.704e - 01$
$u$	$6.092e - 01$	$2.707e - 01$	$6.092e - 01$	$1.539e - 01$

## 7. Графики

$u$ — аналитическое решение,  $v$ —численное решение.

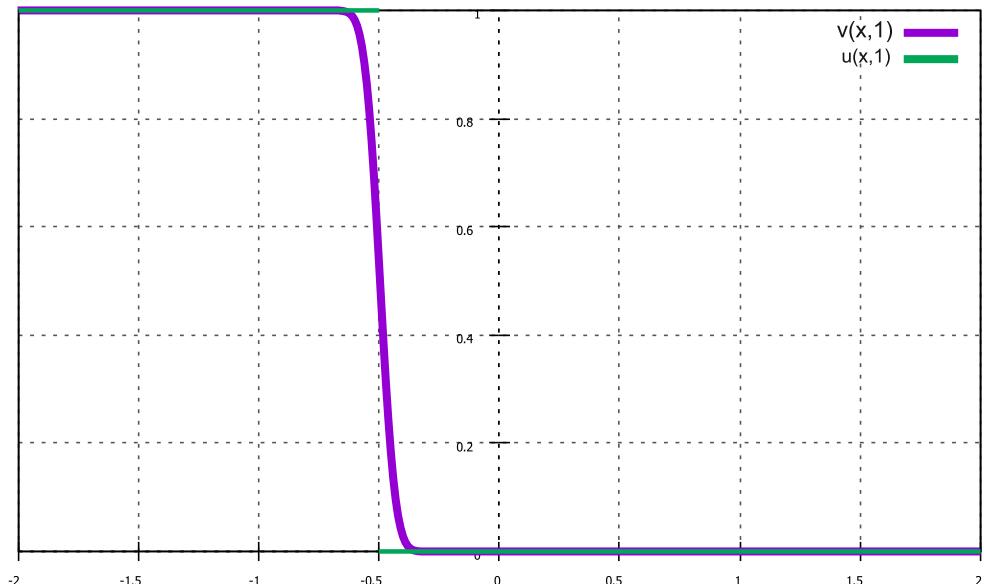


Рис. 1. явный линейный случай при  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.01$

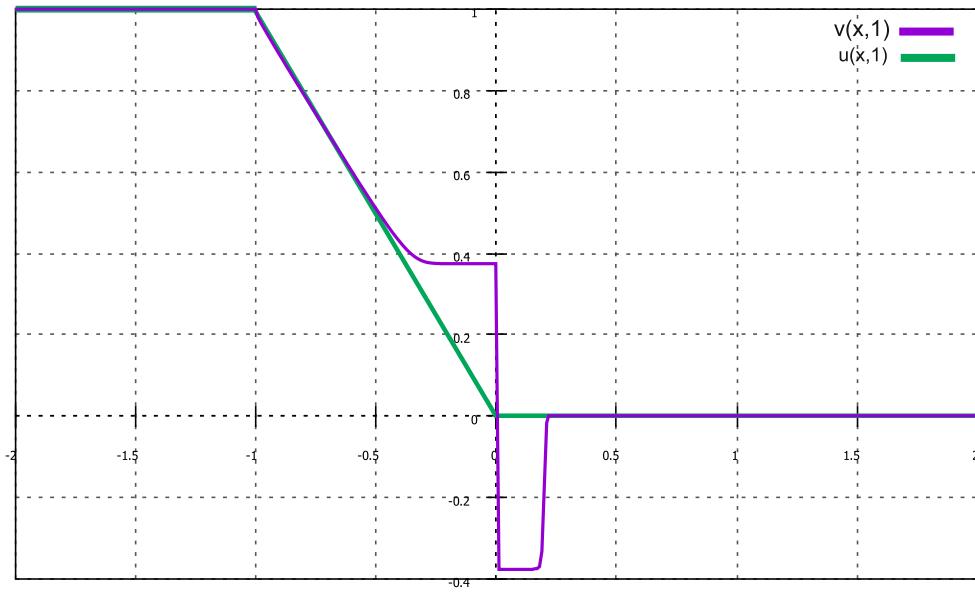


Рис. 2. явный нелинейный случай при  $\tau = 0.01, h = 0.01$

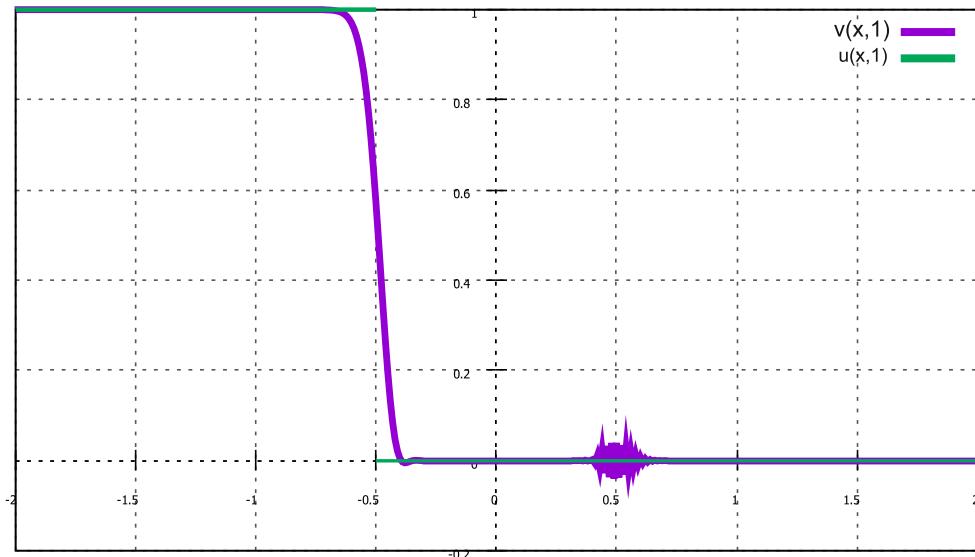


Рис. 3. неявный линейный случай при  $\tau = 0.01, h = 0.01, \omega = 0$

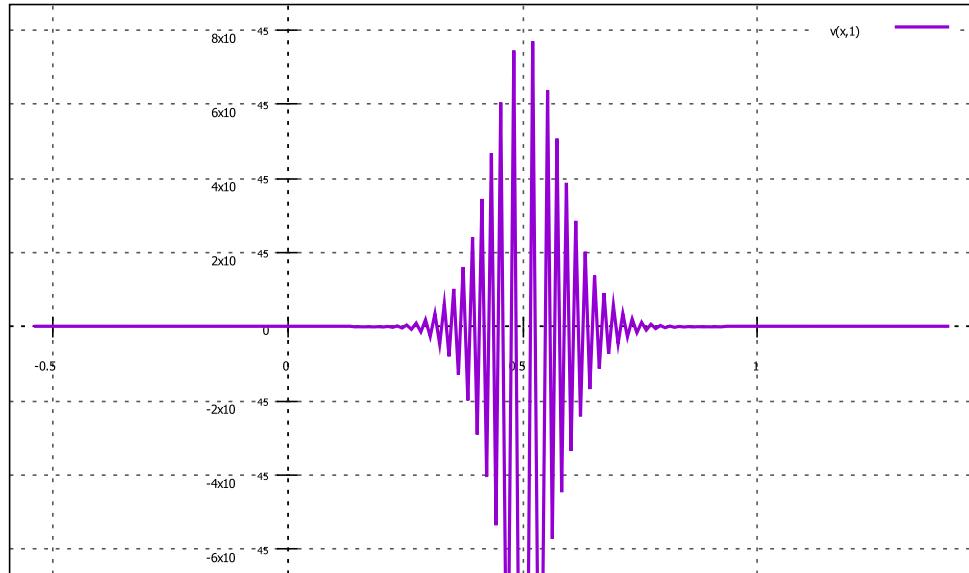


Рис. 4. неявный линейный случай при  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.01$ ,  $\omega = 1$

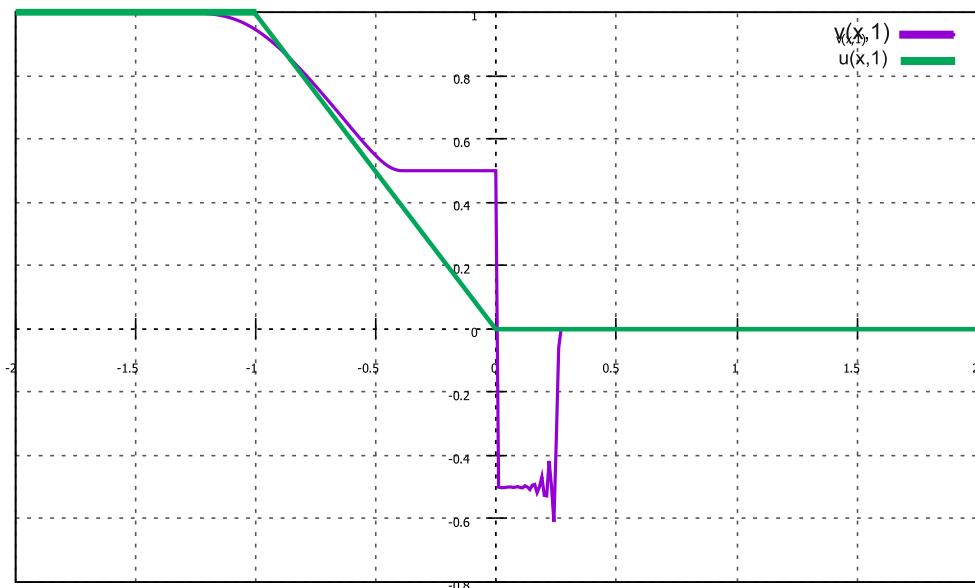


Рис. 5. неявный нелинейный случай при  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.01$ ,  $\omega = 0$

График неявного нелинейного случая при  $\omega = 1$  не представлен, так как метод Ньютона расходится.

## Список литературы

- [1] *K. Ю. Богачев* Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. Москва, 1998.
- [2] *A. Ю. Горицкий, С. Н. Круэжков, Г. А. Чечкин* Уравнения с частными производными первого порядка (Учебное пособие). М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999, 96 с.
- [3] *Popov*