Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
Departamento de Matemática
Ano Letivo 2022/2023

Relatório

Trabalho realizado por
Margarida Biscaia

Métodos de Otimização em Finanças
Mestrado em Matemática

Consideremos o problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x^T Q x \\ \text{sujeito a} & \mu^T x \geq r \\ & x \in X \end{array} \tag{1}$$

com $r \geq 0$ e $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \wedge x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$.

Consideremos ainda $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mu^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Nota: A simplificação de resultados foi feita através da calculadora, do WolframAlpha e do Symbolab. Os endereços dos resultados encontram-se nas referências.

1. Temos o problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq r \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

Para obter o problema reduzido eliminando a variável x_3, consideremos a igualdade

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

Substituindo em (2) vamos obter o **problema reduzido**

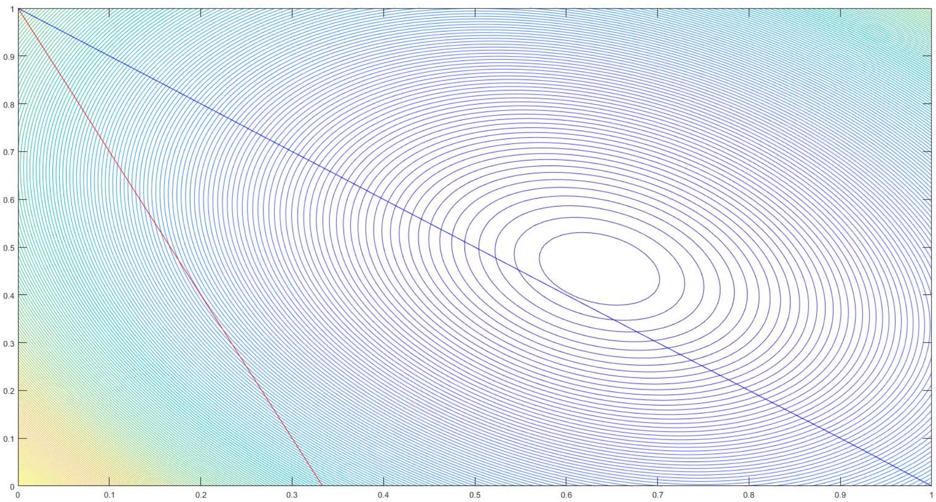
$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 4x_2 + 3 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + x_2 \leq 4 - r \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{3}$$

Cálculos auxiliares: [1], [2], [3]

2. Para $r = 3$ o problema reduzido (3) fica

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 4x_2 + 3 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

(a) Resolvi este exercício no ficheiro Matlab **Ex2a.m**. Na figura seguinte estão representadas as curvas de nível da função objetivo do problema (4) (denotada por f) e a região admissível (região do primeiro quadrante que está abaixo da reta vermelha).



(b) Seja

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 4x_2 + 3$$

O minimizante da função objetivo obtém-se calculando $\nabla f(x) = 0$, isto é, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 6 = 0 \\ \\ 2x_1 + 6x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{11} \\ \\ x_2 = \dfrac{5}{11} \end{cases}$$

Cálculos auxiliares: [4]

Obtivemos $x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\dfrac{7}{11}, \dfrac{5}{11}\right)$, e portanto $x_3^* = -\dfrac{1}{11}$. Esta solução não pertence à região admissível pois

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{11} + \frac{5}{11} = \frac{12}{11} > 1\ .$$

Por observação do gráfico, concluímos que a solução ótima deverá pertencer à reta vermelha, isto é, a restrição correspondente à reta vermelha será ativa. Assim, temos

$$3x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - 3x_1$$

Substituindo em (4) vamos obter um novo problema reduzido

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & 25x_1^2 - 10x_1 + 2 \\ \text{sujeito a} & 0 \leq x_1 \leq \dfrac{1}{3} \end{array} \tag{5}$$

Cálculos auxiliares: [5]

Seja

$$g(x_1) = 25x_1^2 - 10x_1 + 2$$

O minimizante da função objetivo obtém-se calculando

$$g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 50x_1 - 10 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{5} \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

Como $g''(x_1) = 50 > 0$ então $x_1^* = \dfrac{1}{5}$ é a solução ótima e obtemos $x_2^* = \dfrac{2}{5}$, $x_3^* = \dfrac{2}{5}$.

Assim, para $r = 3$ a **solução ótima** é

$$x^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

3. Para determinar a solução ótima $x^*(r)$ comecemos por calcular a carteira de risco mínimo resolvendo o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Analogamente à pergunta 1 calculamos o problema reduzido associado e obtemos

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 4x_2 + 3 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Vimos que nesta região admissível $\nabla f(x)$ não se anula. Ignorando a reta vermelha na figura obtida em 2(a), concluímos que a solução ótima deverá pertencer à reta azul, isto é, a restrição correspondente à reta azul será ativa. Assim, temos

$$x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - x_1$$

Substituindo em (7) vamos obter um novo problema reduzido

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 5x_1^2 - 6x_1 + 2 \\ \text{sujeito a} \quad & 0 \leq x_1 \leq 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Cálculos auxiliares: [6]

Seja

$$h(x_1) = 5x_1^2 - 6x_1 + 2$$

O minimizante da função objetivo obtém-se calculando

$$h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 10x_1 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{5} \in [0,1]$$

Como $h''(x_1) = 10 > 0$ então $x_1^* = \frac{3}{5}$ ótima e obtemos $x_2^* = \frac{2}{5}$, $x_3^* = 0$.

Assim, a **carteira de risco mínimo** é

$$x_{min} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) ,$$

com **retorno mínimo** associado

$$r_{min} = \mu^T x_{min} = \frac{3}{5} + 3 \times \frac{2}{5} + 0 = \frac{9}{5} .$$

Temos

$$r_{max} = \max_{i=1,2,3} \{\mu_i\} = 4 ,$$

com carteira associada

$$x_{max} = (0, 0, 1) .$$

Para $r > r_{max} = 4$, o problema não tem solução.

Para $r < r_{min} = \frac{9}{5}$, a solução é sempre $x^*(r) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$.

Analisemos para $r \in [r_{min}, r_{max}] = \left[\frac{9}{5}\ , 4\right]$. Ora, por observação do gráfico obtido em 2(a), podemos concluir que neste intervalo (dentro da região admissível) as curvas de nível atingem primeiro a reta vermelha do que a azul. Deste modo, a restrição correspondente à reta vermelha deverá ser ativa. Assim, temos

$$3x_1 + x_2 = 4 - r \Leftrightarrow x_2 = 4 - 3x_1 - r$$

Substituindo no problema (3) vamos obter um novo problema reduzido

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 25x_1^2 - 58x_1 + 16rx_1 - 20r + 3r^2 + 35 \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq \dfrac{3-r}{2} \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_1 \leq \dfrac{4-r}{3} \end{array} \tag{9}$$

Cálculos auxiliares: [7]

Seja

$$w(x_1) = 25x_1^2 - 58x_1 + 16rx_1 - 20r + 3r^2 + 35$$

O minimizante da função objetivo é obtido calculando

$$w'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 50x_1 + 16r - 58 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{29-8r}{25}$$

Como $w''(x_1) = 50 > 0$, $x_1 = \dfrac{29-8r}{25}$ é solução ótima se for admissível, isto é, se

(i) $\dfrac{29-8r}{25} \geq 0 \Leftrightarrow r \leq \dfrac{29}{8}$ (correspondente à restrição $x_1 \geq 0$)

(ii) $\dfrac{29-8r}{25} \geq \dfrac{3-r}{2} \Leftrightarrow r \geq \dfrac{17}{9}$ (correspondente à restrição $x_1 \geq \dfrac{3-r}{2}$)

(iii) $\dfrac{29-8r}{25} \leq \dfrac{4-r}{3} \Leftrightarrow r \leq 13$ (correspondente à restrição $x_1 \leq \dfrac{4-r}{3}$, e é redundante)

Assim, temos para $r \in \left[\dfrac{17}{9}, \dfrac{29}{8}\right]$, $x^*(r) = \left(\dfrac{29-8r}{25}, \dfrac{13-r}{25}, \dfrac{9r-17}{25}\right)$.

Para $r \in \left]\dfrac{29}{8}, 4\right]$, a restrição $x_1 \geq 0$ deverá ser ativa. Assim, $x^*(r) = (0, 4-r, r-3)$.

Para $r \in \left[\dfrac{9}{5}, \dfrac{17}{9}\right[$, a restrição $x_1 \geq \dfrac{3-r}{2}$ deverá ser ativa. Assim, $x^*(r) = \left(\dfrac{3-r}{2}, \dfrac{r-1}{2}, 0\right)$.

Cálculos auxiliares: [8], [9], [10], [11]

Então, para $r \geq 0$, a **solução ótima** é dada por

$$x^*(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{5}, 0\right), \; 0 \leq r < \dfrac{9}{5} \\[2ex] \left(\dfrac{3-r}{2}, \dfrac{r-1}{2}, 0\right), \; \dfrac{9}{5} \leq r < \dfrac{17}{9} \\[2ex] \left(\dfrac{29-8r}{25}, \dfrac{13-r}{25}, \dfrac{9r-17}{25}\right), \; \dfrac{17}{9} \leq r \leq \dfrac{29}{8} \\[2ex] (0, 4-r, r-3), \; \dfrac{29}{8} < r \leq 4 \\[2ex] \text{impossível}, \; r > 4 \end{cases}$$

Para representar graficamente a solução, utilizei o ficheiro Matlab **Ex3.m**. Para isso, tive em conta os seguintes resultados:

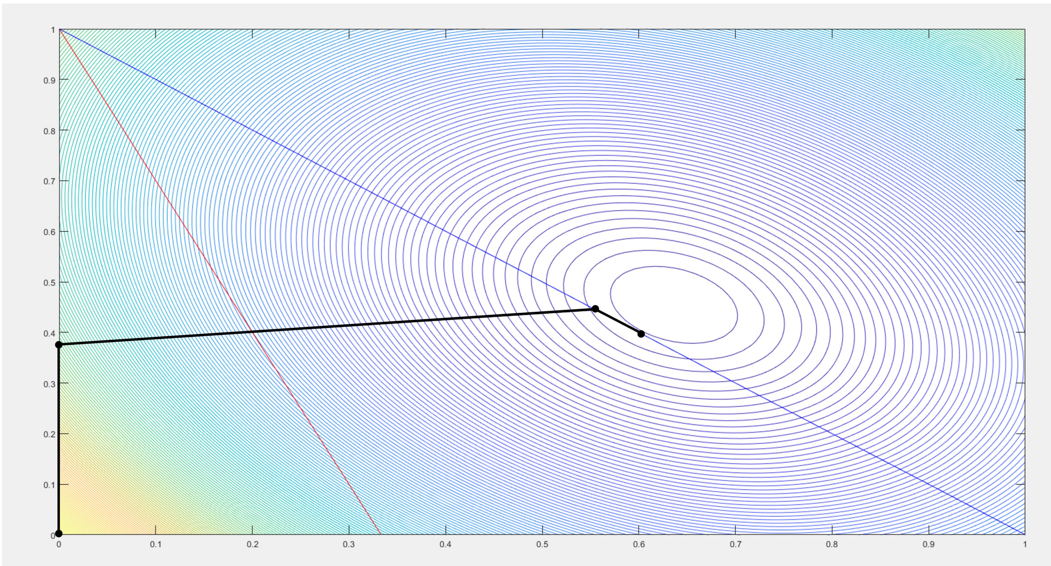
$$r = \frac{9}{5} \Rightarrow x = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$r = \frac{17}{9} \Rightarrow x = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

$$r = \frac{29}{8} \Rightarrow x = \left(0, \frac{3}{8}\right)$$

$$r = 4 \Rightarrow x = (0, 0)$$

A figura seguinte representa a solução $x^*(r)$ em função de $r \geq 0$, estando os pontos referidos acima realçados a preto, assim como as retas que os ligam.



Nota: Realcei a reta entre os pontos (0,0) e $\left(0, \frac{3}{8}\right)$ no PowerPoint para uma melhor interpretação da figura.

4. Temos

$$\sigma(r) = \sqrt{x^*(r)^T Q x^*(r)} \, ,$$

para $r \in [r_{min}, r_{max}] = \left[\frac{9}{5}, 4\right]$.

Como calculado em 3, neste intervalo tem-se

$$x^*(r) = \begin{cases} \left(\frac{3-r}{2}, \frac{r-1}{2}, 0\right), & \frac{9}{5} \leq r < \frac{17}{9} \\ \left(\frac{29-8r}{25}, \frac{13-r}{25}, \frac{9r-17}{25}\right), & \frac{17}{9} \leq r \leq \frac{29}{8} \\ (0, 4-r, r-3), & \frac{29}{8} < r \leq 4 \end{cases}$$

(1) Para $r \in \left[\frac{9}{5}, \frac{17}{9}\right[$, tem-se

$$x^*(r)^T Q x^*(r) = \frac{5r^2 - 18r + 17}{4}$$

(2) Para $r \in \left[\frac{17}{9}, \frac{29}{8}\right]$, tem-se

$$x^*(r)^T Q x^*(r) = \frac{11r^2 - 36r + 34}{25}$$

(3) Para $r \in \left]\frac{29}{8}, 4\right]$, tem-se

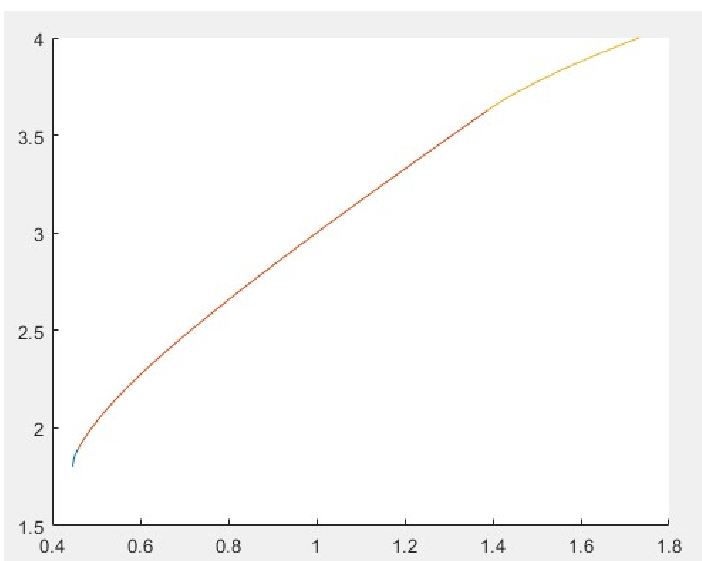
$$x^*(r)^T Q x^*(r) = 3r^2 - 20r + 35$$

Cálculos auxiliares: [12], [13], [14]
Assim, a fronteira de eficiência é dada por

$$\text{FE} = \left\{(\sigma(r), r) : r \in \left[\frac{9}{5}, 4\right]\right\} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\sqrt{5r^2 - 18r + 17}, r\right), \ r \in \left[\frac{9}{5}, \frac{17}{9}\right[\\ \left(\frac{1}{5}\sqrt{11r^2 - 36r + 34}, r\right), \ r \in \left[\frac{17}{9}, \frac{29}{8}\right] \\ \left(\sqrt{3r^2 - 20r + 35}, r\right), \ r \in \left]\frac{29}{8}, 4\right] \end{cases}$$

Para representar graficamente este conjunto, utilizei o ficheiro Matlab **Ex4.m**. Na figura seguinte está então representada a fronteira de eficiência, que indica a relação entre o retorno e o risco da solução ótima $x^*(r)$.



5. Queremos resolver o problema

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \frac{\mu^T x - r_f}{\sqrt{x^T Q x}} \equiv h(x) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in X \end{aligned} \tag{10}$$

Este problema não é um problema de otimização convexa, uma vez que a função objetivo não é côncava. Ora,

$$\mu^T x - r_f = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - r_f) x_i = x^T(\mu - r_f e) \equiv \frac{1}{k}, k > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k x^T (\mu - r_f e) = 1$$

Fazendo a mudança de variável

$$y = kx \Leftrightarrow x = \frac{y}{k}$$

a função objetivo fica equivalente a

$$\frac{1/k}{\sqrt{x^T Q x}} = \frac{1}{k\sqrt{x^T Q x}} = \frac{1}{\sqrt{(kx)^T Q (xk)}} = \frac{1}{\sqrt{y^T Q y}}$$

Mas

$$\max \frac{1}{\sqrt{y^T Q y}} \Leftrightarrow \min \sqrt{y^T Q y} \Leftrightarrow \min y^T Q y$$

pelo que o problema (10) é equivalente ao problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & y^T Q y \\ \text{sujeito a} \quad & \frac{y}{k} \in X, \ k > 0 \\ & (\mu - r_f e)^T y = 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Queremos então resolver

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & y_1^2 - 2y_1 y_2 + 2y_2^2 + 2y_2 y_3 + 3y_3^2 \\ \text{sujeito a} \quad & 0.75 y_1 + 2.75 y_2 + 3.75 y_3 = 1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = k \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Para obter o problema reduzido eliminando a variável y_3, consideremos a igualdade

$$0.75 y_1 + 2.75 y_2 + 3.75 y_3 = 1 \Leftrightarrow y_3 = \frac{1 - 0.75 y_1 - 2.75 y_2}{3.75}$$

Substituindo em (12) vamos obter o problema reduzido

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \frac{28}{25}y_1^2 + \frac{161}{75}y_2^2 - \frac{8}{25}y_1 - \frac{16}{25}y_2 - \frac{38}{25}y_1y_2 + \frac{16}{75} \\
\text{sujeito a} \quad & y_1 + y_2 + \frac{1 - 0.75y_1 - 2.75y_2}{3.75} = k \\
& 0.75y_1 + 2.75y_2 \leq 1 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Cálculos auxiliares: [15]

Seja

$$f(y_1, y_2) = \frac{28}{25}y_1^2 + \frac{161}{75}y_2^2 - \frac{8}{25}y_1 - \frac{16}{25}y_2 - \frac{38}{25}y_1y_2 + \frac{16}{75}$$

O minimizante da função objetivo obtém-se calculando $\nabla f(y) = 0$, isto é, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{56}{25}y_1 - \dfrac{38}{25}y_2 - \dfrac{8}{25} = 0 \\ \\ -\dfrac{38}{25}y_1 + \dfrac{322}{75}y_2 - \dfrac{16}{25} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{44}{137} \geq 0 \\ \\ y_2 = \dfrac{36}{137} \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares: [16], [17]

Esta solução é admissível relativamente à segunda restrição, pois

$$0.75 \times \frac{44}{137} + 2.75 \times \frac{36}{137} = \frac{33}{137} + \frac{99}{137} = \frac{132}{137} < 1$$

Como $\forall (y_1, y_2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}\right]^2 = \frac{56}{25} \times \frac{322}{75} - \left[-\frac{38}{25}\right]^2 = \frac{548}{75} > 0$$

então $y_1^* = \dfrac{44}{137}$ e $y_2^* = \dfrac{36}{137}$ ótimas e tem-se

$$y_3^* = \frac{1 - 0.75 \times \frac{44}{137} - 2.75 \times \frac{36}{137}}{3.75} = \frac{4}{411}$$

Assim, vem

$$k^* = \frac{44}{137} + \frac{36}{137} + \frac{4}{411} = \frac{244}{411}$$

Retomando a mudança de variável $y = kx$, vem

$$x_s = \left(\frac{y_1^*}{k^*}, \frac{y_2^*}{k^*}, \frac{y_3^*}{k^*}\right) = \left(\frac{33}{61}, \frac{27}{61}, \frac{1}{61}\right)$$

Obtivemos então a solução ótima x_s do rácio de Sharpe.

Calculemos o risco, $\sigma(r)$, e o retorno, $\mu^T x_s$, associados a esta solução. Ora,

$$\sigma(r) = \sqrt{x_s^T Q x_s} = \frac{\sqrt{822}}{61}$$

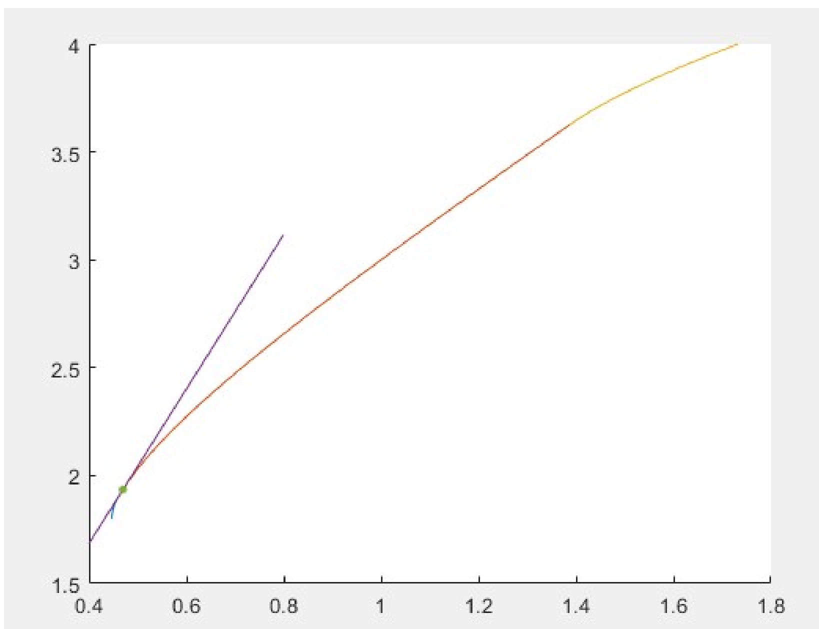
$$E(r) = \mu^T x_s = \frac{33}{61} + 3 \times \frac{27}{61} + 4 \times \frac{1}{61} = \frac{118}{61}$$

Cálculos auxiliares: [18]

Calculemos por fim o declive da reta tangente à fronteira de eficiência na figura obtida em 4, isto é, o rácio de Sharpe, dado por

$$h(x_s) = \frac{\mu^T x_s - r_f}{\sqrt{x_s^T Q x_s}} = \frac{\sqrt{822}}{8}$$

Para obter a representação gráfica da solução usei o ficheiro Matlab **Ex5.m**. Na figura seguinte está representado, com um ponto verde, o ponto da fronteira de eficiência correspondente à solução x_s encontrada, considerando uma taxa isenta de risco $r_f = 0.25$



Referências

[1] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+Power%5Bx%2C2%5D-2xy%2B2Power%5By%2C2%5D%2B2y%5C%2840%291-x-y%5C%2841%29%2B3Power%5B%5C%2840%291-x-y%5C%2841%29%2C2%5D

[2] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+x%2B3y%2B4%5C%2840%291-x-y%5C%2841%29+%3E%3Dr

[3] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+1-x-y+%3E%3D0

[4] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=D%5B4Power%5Bx%2C2%5D%2B3Power%5By%2C2%5D%2B2xy-6x-4y%2B3%2Cx%5D%3D0+and+D%5B4Power%5Bx%2C2%5D%2B3Power%5By%2C2%5D%2B2xy-6x-4y%2B3%2Cy%5D%3D0

[5] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+4Power%5Bx%2C2%5D%2B3Power%5B%5C%2840%291-3x%5C%2841%29%2C2%5D%2B2x%5C%2840%291-3x%5C%2841%29-6x-4%5C%2840%291-3x%5C%2841%29%2B3

[6] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+4Power%5Bx%2C2%5D%2B3Power%5B%5C%2840%291-x%5C%2841%29%2C2%5D%2B2x%5C%2840%291-x%5C%2841%29-6x-4%5C%2840%291-x%5C%2841%29%2B3

[7] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+4Power%5Bx%2C2%5D%2B3Power%5B4-3x-r%2C2%5D%2B2x%5C%2840%294-3x-r%5C%2841%29-6x-4%5C%2840%294-3x-r%5C%2841%29%2B3+and+x%2B4-r-3x%3C%3D1+and+4-3x-r%3E%3D0

[8] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+Divide%5B29-8r%2C25%5D%3E%3DDivide%5B3-r%2C2%5D

[9] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+Divide%5B29-8r%2C25%5D%3C%3DDivide%5B4-r%2C3%5D

[10] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+4-r-3*Divide%5B29-8r%2C25%5D

[11] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+4-r-3*Divide%5B3-r%2C2%5D

[12] https://pt.symbolab.com/solver/step-by-step/%5Cbegin%7Bpmatrix%7D%5Cfrac%7B3-r%7D%7B2%7D%26%5Cfrac%7Br-1%7D%7B2%7D%260%5Cend%7Bpmatrix%7D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D1%26-1%260%5C%5C%20-1%262%261%5C%5C%200%261%263%5Cend%7Bpmatrix%7D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D%5Cfrac%7B3-r%7D%7B2%7D%5C%5C%20%5Cfrac%7Br-1%7D%7B2%7D%5C%5C%200%5Cend%7Bpmatrix%7D?or=input

[13] https://pt.symbolab.com/solver/step-by-step/%5Cbegin%7Bpmatrix%7D%5Cfrac%7B29-8r%7D%7B25%7D%26%5Cfrac%7B13-r%7D%7B25%7D%26%5Cfrac%7B9r-17%7D%7B25%7D%5Cend%7Bpmatrix%7D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D1%26-1%260%5C%5C%20%20-1%262%261%5C%5C%20%200%261%263%5Cend%7Bpmatrix%7D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D%5Cfrac%7B29-8r%7D%7B25%7D%5C%5C%20%20%5Cfrac%7B13-r%7D%7B25%7D%5C%5C%20%20%5Cfrac%7B9r-17%7D%7B25%7D%5Cend%7Bpmatrix%7D?or=input

[14] https://pt.symbolab.com/solver/step-by-step/%5Cbegin%7Bpmatrix%7D0%264-r%26r-3%5Cend%7Bpmatrix%7D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D1%26-1%260%5C%5C%20%20%20%20-1%262%261%5C%5C%20%20%20%200%261%263%5Cend%7Bpmatrix%7D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D0%5C%5C%20%20%20%204-r%5C%5C%20%20%20r-3%5Cend%7Bpmatrix%7D?or=input

[15] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=simplify+Power%5Bx%2C2%5D-2xy%2B2Power%5By%2C2%5D%2B2y%5C%2840%29Divide%5B1-0.75x-2.75y%2C3.75%5D%5C%2841%29%2B3Power%5B%5C%2840%29Divide%5B1-0.75x-2.75y%2C3.75%5D%5C%2841%29%2C2%5D

[16] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=partial+derivatives+0.213333+-+0.32+x+%2B+1.12+Power%5Bx%2C2%5D+-+0.64+y+-+1.52+x+y+%2B+2.14667+Power%5By%2C2%5D

[17] https://www.wolframalpha.com/input?key=&i2d=true&i=-0.32+%2B+2.24+x+-+1.52+y+%3D+0+and+-0.64+-+1.52+x+%2B+4.29334+y%3D0

[18] https://pt.symbolab.com/solver/step-by-step/%5Cbegin%7Bpmatrix%7D%5Cfrac%7B33%7D%7B61%7D%26%5Cfrac%7B27%7D%7B61%7D%26%5Cfrac%7B1%7D%7B61%7D%5Cend%7Bpmatrix%7D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D1%26-1%260%5C%5C%20%20%20%20%20-1%262%261%5C%5C%20%20%20%20%200%261%263%5Cend%7Bpmatrix%7D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D%5Cfrac%7B33%7D%7B61%7D%5C%5C%20%20%20%20%20%5Cfrac%7B27%7D%7B61%7D%5C%5C%20%5Cfrac%7B1%7D%7B61%7D%5Cend%7Bpmatrix%7D?or=input