HW#1
Due date: March 15, 2023
Authors: Margarida Biscaia (100%); Ana Carina Carvalho (100%); Renata Pereira (100%)

1. Temos $V_h = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ com

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [0, x_i) \cup (x_{i+1}, 1]. \end{cases}$$

Queremos provar que V_h é um subespaço de $H_0^1(0,1)$ de dimensão N, isto é, provar

i. V_h subespaço de $L_2(0,1)$

ii. $V_h \subseteq H_0^1(0,1)$

iii. $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ base de V_h

i. V_h subespaço de $L_2(0,1)$ se $\forall u, v \in V_h : (\alpha u + \beta v) \in V_h$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Ora,

$$u \in V_h \Rightarrow \exists u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R} : u = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i(x)$$

$$v \in V_h \Rightarrow \exists v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{N} v_i \phi_i(x)$$

Então, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i(x) + \beta \sum_{i=1}^{N} v_i \phi_i(x) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(\alpha u_i + \beta v_i)}_{\in \mathbb{R}} \phi_i(x) \ ,$$

pelo que $(\alpha u + \beta v) \in V_h$ e provamos que V_h é subespaço de $L_2(0,1)$.

ii. $V_h \subseteq H_0^1(0,1)$ se

a. $\forall u \in V_h \Rightarrow u \in L_2(0,1)$, isto é, $\displaystyle\int_0^1 u^2(x)dx < +\infty$. De facto, temos

$$\int_0^1 u^2(x)dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i(x)\right)\left(\sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x)\right) dx =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{N} u_i u_j \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

Ora, para $i, j = 1, \dots, n$, $\displaystyle\int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x)dx$ só toma valores não nulos quando $j = i-1$, $j = i$ e $j = i+1$. Assim, temos

$$\int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)dx + \int_0^1 \phi_i^2(x)dx + \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)dx$$

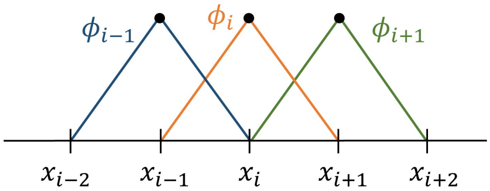

Figura 1: Hat functions

$$(1) \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{x_i - x}{h}\right)dx \underset{IBP}{=}$$

$$= \left[\frac{1}{h}\frac{(x-x_{i-1})^2}{2}\frac{x_i-x}{h}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h}\frac{(x-x_{i-1})^2}{2}\frac{1}{h}dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2h^2}\left[\frac{(x-x_{i-1})^3}{3}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{1}{2h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{h}{6}$$

$$(2) \int_0^1 \phi_i^2(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\frac{(x-x_{i-1})^3}{3}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{h^2}\left[\frac{(x_{i+1}-x)^3}{3}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= \frac{1}{3h^2}h^3 + \frac{1}{3h^2}h^3 = \frac{2h}{3}$$

$$(3) \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)\left(\frac{x-x_i}{h}\right)dx \underset{IBP}{=}$$

$$= \left[\frac{1}{h}\frac{(x-x_i)^2}{2}\frac{x_{i+1}-x}{h}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h}\frac{(x-x_i)^2}{2}\frac{1}{h}dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2h^2}\left[\frac{(x-x_i)^3}{3}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{2h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{h}{6}$$

Assim, vem

$$\int_0^1 u^2(x)dx = \sum_{i=1}^N u_i u_{i-1}\int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)dx + \sum_{i=1}^N u_i^2 \int_0^1 \phi_i^2(x)dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^N u_i u_{i+1}\int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)dx =$$
$$= \frac{h}{6}\sum_{i=1}^N u_i u_{i-1} + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^N u_i^2 + \frac{h}{6}\sum_{i=1}^N u_i u_{i+1} < +\infty$$

b. $\forall u \in V_h, \exists w \in L_2(0,1)$ tal que $\forall v \in H_0^1(0,1)$ temos

$$\int_0^1 w(x)v(x)dx = -\int_0^1 u(x)v'(x)dx.$$

Ora, $v \in H_0^1(0,1) \Rightarrow v(0) = v(1) = 0$. Temos,

$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^N u_i\phi_i(x).v'(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \phi_i(x).v'(x)dx \underset{IBP}{=} \sum_{i=1}^N u_i \left[(\phi_i(x)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \phi_i'(x)v(x)dx\right] =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{i=1}^N u_i\phi_i'(x).v(x)dx = -\int_0^1 w(x)v(x)dx,$$

com

$$w(x) = \sum_{i=1}^N u_i\phi_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\sum_{i=1}^N u_i, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\dfrac{1}{h}\displaystyle\sum_{i=1}^N u_i, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [0, x_i) \cup (x_{i+1}, 1]. \end{cases}$$

$w \in L_2(0,1)$? De facto,

$$\int_0^1 w^2(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 dx = \frac{2}{h}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 < +\infty,$$

pelo que $w \in L_2(0,1)$.

iii. Queremos provar $\phi_1, \ldots, \phi_N$ linearmente independentes $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j(x) = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$.

Fixemos $x \in (0,1)$. Sem perda de generalidade, suponhamos $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Se $x = x_i$ temos $\phi_i(x) = 1$ e $\phi_j(x) = 0,\ \forall j \neq i$. Assim, vem

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j = 0 \Rightarrow \alpha_i \phi_i(x) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0.$$

Analogamente para $x = x_{i+1}$.

Se $x \in (x_i, x_{i+1})$ então temos $\phi_i(x) \neq 0, \phi_{i+1}(x) \neq 0$ e $\phi_j(x) = 0,\ \forall j \neq i, i+1$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j(x) = 0 \Rightarrow \alpha_i \phi_i(x) + \alpha_{i+1}\phi_{i+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i \frac{x_{i+1} - x}{h} + \alpha_{i+1} \frac{x - x_i}{h} = 0.$$

Derivando ambos os termos em ordem a x obtemos

$$-\frac{\alpha_i}{h} + \frac{\alpha_{i+1}}{h} = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha_{i+1}$$

Então vem

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j(x) = 0 \Rightarrow \alpha_i \phi_i(x) + \alpha_i \phi_{i+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i \left(\frac{x_{i+1} - x + x - x_i}{h}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0.$$

Assim, podemos concluir que V_h é um subespaço de $H_0^1(0,1)$ de dimensão N.

2. (a) Temos

$$u''(x) \approx D_h^2 u(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{j=-2}^{2} c_j u(x + jh)$$

onde c_j são os coeficientes que queremos determinar.

Para garantir que a aproximação é de pelo menos ordem 4 temos de garantir que

$$D_h^2 u(x) - u''(x) = \mathcal{O}(h^4)$$

Substituindo a aproximação e usando a definição de $D_h^2 u(x)$, temos:

$$\frac{1}{h^2} \sum_{j=-2}^{2} c_j u(x + jh) - u''(x) = \mathcal{O}(h^4) \tag{1}$$

Pela fórmula de Taylor temos

$$u(x + jh) = u(x) + jhu'(x) + \frac{j^2}{2} h^2 u''(x) + \frac{j^3}{6} h^3 u'''(x) + \frac{j^4}{24} h^4 u^{(4)}(\xi)$$

Substituindo em (1) vem

$$\frac{1}{h^2} \sum_{j=-2}^{2} c_j \left[u(x) + ju'(x)h + \frac{j^2}{2} u''(x)h^2 + \frac{j^3}{6} u'''(x)h^3 + \frac{j^4}{24} u^{(4)}(\xi)h^4\right] - u''(x) = \mathcal{O}(h^4)$$

Para determinar os coeficientes devemos igualar os termos de cada $u^{(i)}(x)$ a zero, exceto para $u''(x)$, que deve ser igual a 1. Assim, queremos resolver o sistema de equações

$$\sum_{j=-2}^{2} c_j = 0 \Leftrightarrow c_{-2} + c_{-1} + c_0 + c_1 + c_2 = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{j=-2}^{2} jc_j = 0 \Leftrightarrow -2c_{-2} - c_{-1} + c_1 + 2c_2 = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{j=-2}^{2} \frac{j^2}{2} c_j = 1 \Leftrightarrow 2c_{-2} + \frac{1}{2}c_{-1} + \frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = 1 \tag{4}$$

$$\sum_{j=-2}^{2} \frac{j^3}{6} c_j = 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{6}c_{-2} - \frac{1}{6}c_{-1} + \frac{1}{6}c_1 + \frac{8}{6}c_2 = 0 \tag{5}$$

$$\sum_{j=-2}^{2} \frac{j^4}{24} c_j = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{24}c_{-2} + \frac{1}{24}c_{-1} + \frac{1}{24}c_1 + \frac{16}{24}c_2 = 0 \tag{6}$$

Queremos $c_{-j} = c_j$ para todo j, logo $c_{-1} = c_1$ e $c_{-2} = c_2$. (Notemos que se não definíssemos esta condição à-priori chegaríamos à mesma conclusão). Assim, as equações (3) e (5) são redundantes. Ficamos então com um sistema de 3 equações:

$$\begin{cases} 2c_2 + 2c_1 + c_0 = 0 \\ 4c_2 + c_1 = 1 \\ \frac{4}{3}c_2 + \frac{1}{12}c_1 = 0 \end{cases}$$

que tem solução

$$c_{-2} = c_2 = -\frac{1}{12}, \quad c_{-1} = c_1 = \frac{4}{3}, \quad c_0 = -\frac{5}{2}.$$

Assim, obtemos a expressão

$$u''(x) \approx D_h^2 u(x) = \frac{1}{h^2}\left[-\frac{1}{12}u(x-2h) + \frac{4}{3}u(x-h) - \frac{5}{2}u(x) + \frac{4}{3}u(x+h) - \frac{1}{12}u(x+2h)\right]$$

(b) Pelo método das diferenças finitas temos o algoritmo:

1. Definir a grelha. Seja $h = 1 \setminus (N+1)$. Definimos

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh) : i, j = 1, \dots, N\}$$

$$\bar{\Omega}_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh) : i, j = 0, \dots, N+1\}$$

$$\partial\Omega_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$$

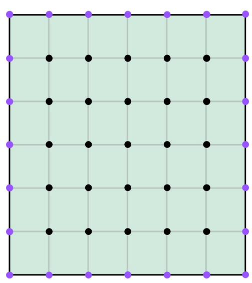

Figura 2: Exemplo de grelha

2. Escrever a equação na grelha.

$$\begin{aligned} &-\Delta u(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \\ &u(x_i, y_j) = 0, \quad i = 0 \vee i = N+1 \vee j = 0 \vee j = N+1. \end{aligned}$$

3. Discretizar. Considerando $u(x_i, y_j) = u_{ij}$ e

$$\begin{aligned}
\Delta_h u_{ij} &= D_x^+ D_x^- u_{ij} + D_y^+ D_y^- u_{ij} = \\
&= \frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{12}u_{i-2,j} + \frac{4}{3}u_{i-1,j} - \frac{5}{2}u_{i,j} + \frac{4}{3}u_{i+1,j} - \frac{1}{12}u_{i+2,j}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{12}u_{i,j-2} + \frac{4}{3}u_{i,j-1} - \frac{5}{2}u_{i,j} + \frac{4}{3}u_{i,j+1} - \frac{1}{12}u_{i,j+2}\right) = \\
&= \Delta u_{ij} + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&-\Delta_h u_{ij} = f(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^4) \\
&u_{ij} = 0, \quad i = 0 \vee i = N+1 \vee j = 0 \vee j = N+1.
\end{aligned}$$

4. Eliminar o erro de truncatura e obter o sistema linear. Seja $U_{ij} \approx u_{ij}, i, j = 1, \ldots, N$, tal que

$$\begin{aligned}
&-\Delta_h U_{ij} = f(x_i, y_j) \\
&U_{ij} = 0, \quad i = 0 \vee i = N+1 \vee j = 0 \vee j = N+1.
\end{aligned}$$

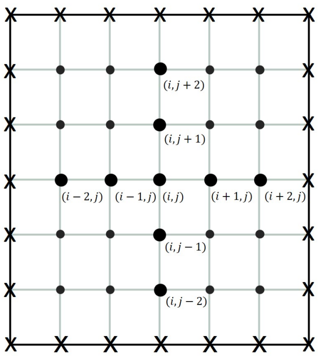

Figura 3: 9-point diference stencil.

Este esquema não é prático pois requer armazenar e manipular todos os coeficientes para cada ponto da grelha, o que se torna computacionalmente pesado para grelhas de grandes dimensões.

3. (a) Ficheiro Matlab **MDF.m**, para implementar o Método das Diferenças Finitas, e **Ex3a.m**, para calcular a solução.

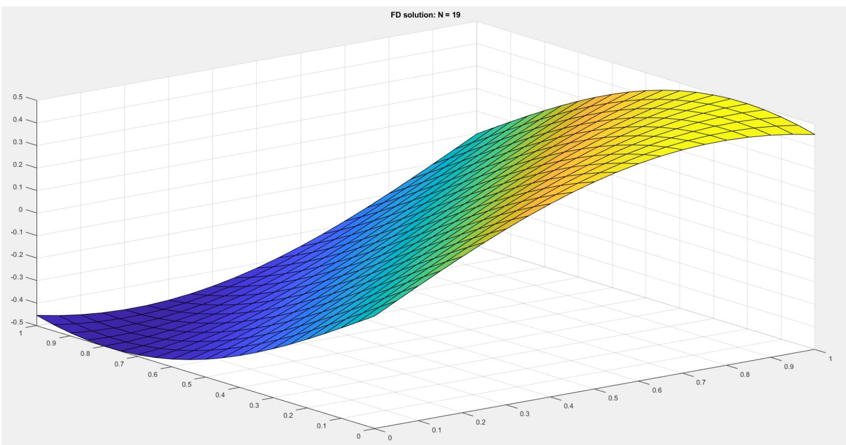

Figura 4: Solução para $h = 0.05$

(b) Ficheiro Matlab **Ex3b.m**.

h	Erro
0.10000	0.000093559982371
0.05000	0.000023559505547
0.02500	0.000005899282702

Figura 5: Erro para $h = 0.1, 0.05, 0.025$

Pelos resultados obtidos para os três valores de h $(0.1, 0.05, 0.025)$, podemos observar que o erro diminui à medida que h diminui, o que sugere convergência. Assim, podemos concluir que a solução obtida pelo Método das Diferenças Finitas converge para a solução exata da equação de Poisson quando a malha é refinada.

(c) Pelo ficheiro Matlab **Ex3c.m**, concluímos que a ordem de convergência do método das diferenças finitas é aproximadamente 2.

h	Erro
0.10000	0.000093559982371
0.05000	0.000023559505547
0.02500	0.000005899282702
Ordem de Convergência	1.997698e+00

Figura 6: Ordem de convergência do método das diferenças finitas