Equação de Black Scholes

Margarida Biscaia Caleiras[*]

Universidade de Coimbra, Portugal

Resumo

A equação de Black-Scholes é um dos conceitos mais importantes em matemática financeira. Esta equação estima os valores teóricos das opções, tendo em conta o impacto do tempo e outros fatores de risco.

Numa primeira parte deste trabalho, apresenta-se a equação para as opções call e put Europeias e demonstra-se que, utilizando uma mudança de variável adequada, é possível escrevê-la na forma difusiva, com as respetivas condições iniciais e condições de fronteira.

Numa segunda parte, é explorada a solução computacional relacionando-se os resultados obtidos com os resultados da matemática financeira.

1 Conceitos teóricos de matemática financeira: opções

Uma opção é um contrato entre duas partes (comprador e vendedor) sobre a negociação de um ativo num determinado tempo futuro. O vendedor fixa os termos do contrato e vende a opção. O comprador adquire a opção pagando o preço de mercado, designado *premium*, e decide o que fazer de acordo com os direitos garantidos pelo contrato. A decisão depende da situação do mercado e do tipo de opção. Na data de maturidade T, que fixa um tempo no futuro, os direitos do comprador terminam e para datas $t > T$ a opção não tem valor. Existem dois tipos básicos de opções: *call* e *put*. A opção **call** dá ao comprador o direito de comprar o ativo subjacente a um determinado preço K na data T. A opção **put** dá ao comprador o direito de vender o ativo subjacente a um determinado preço K na data T. Nem todas as opções podem ser exercidas em qualquer tempo $t \leq T$. Para as *opções Europeias* o exercício é apenas permitido até à data T. Neste trabalho vamos considerar apenas opções Europeias.

O valor V da opção depende do preço por ação do ativo subjacente, que é designado por S. S designa *stocks*, que são os exemplos predominantes dos ativos subjacentes. A variação do preço do ativo S no tempo t é denotado por S_t. O valor da opção também depende de t pelo que designamos esta dependência por $V(S,t)$. O valor $V_C(S,T)$ de uma opção *call* na data T é dado por

$$V_C(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{quando } S_T \leq K \\ S_T - K & \text{quando } S_T > K \end{cases} = (S_T - K)_+.$$

O valor $V_P(S,T)$ de uma opção *put* na data T é dado por

$$V_P(S,T) = \begin{cases} K - S_T & \text{quando } S_T < K \\ 0 & \text{quando } S_T \geq K \end{cases} = (K - S_T)_+.$$

Designamos estas funções por funções payoff.
Temos então as seguintes notações:

t - tempo corrente, $0 \leq t \leq T$
T - data de maturidade
r - taxa de juro livre de risco
S, S_t - preço atual por ação
σ - volatilidade anual
K - preço de exercício
$V(S,t)$ - valor de uma opção no tempo t e para o preço do ativo subjacente S

O objetivo é calcular $V(S,t)$ para valores fixos de K, T, r, σ.

[*]Email: `uc2019217343@student.uc.pt`

2 Equação de Black-Scholes

Se quisermos calcular o valor justo para uma opção $V(S,t)$ necessitamos de um modelo matemático. O modelo mais conhecido é o modelo de Black, Merton e Scholes que é representado pela equação de Black-Scholes, sugerida em 1973.

Definição 2.1: A **equação de Black-Scholes** é uma equação diferencial para a função $V(S,t)$ da forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.1}$$

onde σ é o parâmetro da volatilidade e r a taxa de juro. As constantes r e σ são constantes para $0 \leq t \leq T$.

Para além da equação (2.1), temos uma **condição final** em $t = T$ dada por

$$V(S,T) = g(S) \tag{2.2}$$

onde g denota a função payoff, $V_C(S,T) = (S_T - K)_+$ se a opção é *call* e $V_P(S,T) = (K - S_T)_+$ se a opção é *put*.

A condição final imposta é suficiente para resolver unicamente a equação de Black-Scholes. No entanto, é possível definir as seguintes **condições de fronteira**, para $S \to 0^+$ e $S \to +\infty$:

$$\lim_{S\to 0^+} V_C(S,t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{S\to +\infty} S - V_C(S,t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0 \tag{2.3}$$

quando temos uma opção *call*, e

$$\lim_{S\to 0^+} V_P(S,t) + S = Ke^{-r(T-t)} \quad \text{e} \quad \lim_{S\to +\infty} V_P(S,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{2.4}$$

quando temos uma opção *put*.

Nota: No caso das opções call e para S suficientemente grande considera-se a condição de fronteira quando $S \to +\infty$ da forma $V_C(S,t) = S - Ke^{-r\tau}$.

2.1 Transformação da equação de Black-Scholes numa equação de difusão

Consideremos a equação de Black-Scholes para o caso das opções europeias do tipo *call*, sendo que para as opções do tipo *put* obtemos resultados análogos. Temos então

$$\frac{\partial V_C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V_C}{\partial S} - rV_C = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad S > 0. \tag{2.1.1}$$

A **condição final** em $t = T$ é dada por

$$V_C(S,T) = (S_T - K)_+$$

e as **condições de fronteira** para $S \to 0^+$ e $S \to +\infty$ são

$$\lim_{S\to 0^+} V_C(S,t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{S\to +\infty} S - V_C(S,t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0$$

Comecemos por tornar constantes os coeficientes que dependem da variável S, considerando

$$t = T - \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\tau, \quad S = Ke^x, \quad V_C(S,t) = Kv(x,\tau).$$

Pela *chain rule* e usando $x = \log(S/K)$ temos

$$\frac{\partial V_C}{\partial t} = \frac{K}{-\frac{2}{\sigma^2}}\frac{\partial v}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial V_C}{\partial S} = K\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dS} = K\frac{1/K}{S/K}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2} = -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{1}{S} = \frac{K}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Substituindo em (2.1.1) vem

$$\frac{K}{-\frac{2}{\sigma^2}}\frac{\partial v}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot\frac{K}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+rS\cdot\frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}-rKv=0$$

Multiplicando por $(-2/\sigma^2)/K$ e simplificando os termos obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2r}{\sigma^2}v=0$$

isto é,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{2r}{\sigma^2}v \tag{2.1.2}$$

A condição final ($t=T$) passa assim a ser uma **condição inicial** (pois $t=T\Rightarrow\tau=0$):

$$Kv(x,0)=\max\{S-K,0\}\Rightarrow v(x,0)=\max\{e^x-1,0\}$$

As **condições de fronteira** (quando $S\to 0^+$ e $S\to+\infty$) correspondem agora a $x\to-\infty$ e $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}v(x,\tau)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}e^x-v(x,\tau)=e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau},\quad \tau\geq 0$$

Vamos considerar em (2.1.2) a mudança de variável

$$v(x,\tau)=e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

para parâmetros reais α e β especificamente escolhidos mais à frente. Pela *chain rule* obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}=e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}&=\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\\&=e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha^2 u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\end{aligned}$$

Substituindo em (2.1.2) e simplificando o termo $e^{\alpha x+\beta\tau}$ vem

$$\beta u+\frac{\partial u}{\partial \tau}=\alpha^2 u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\left(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{2r}{\sigma^2}u \tag{2.1.3}$$

Para anularmos os termos em $\frac{\partial u}{\partial x}$ e u consideremos

$$\begin{aligned}2\alpha+\frac{2r}{\sigma^2}-1&=0\\ \alpha^2+\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\alpha-\frac{2r}{\sigma^2}&=\beta\end{aligned}$$

que tem solução única

$$\alpha=-\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right),\quad \beta=-\frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2$$

Assim, (2.1.3) fica

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pelo que escrevemos a equação de Black-Scholes na forma difusiva.

A **condição inicial** passa a ser

$$e^{\alpha x}u(x,0)=\max\{e^{x}-1,0\}$$

pelo que

$$u(x,0)=\max\{e^{(1-\alpha)x}-e^{-\alpha x},0\}=\max\{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)x}-e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)x},0\}$$

e as **condições de fronteira** ficam

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)x-\frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2\tau}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{x}-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)x-\frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2\tau}=e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau}, \quad \tau\geq 0$$

3 Solução numérica da equação

Na equação de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

vamos agora considerar a mudança de variável

$$\tau=T-t\Rightarrow\partial t=-\partial\tau.$$

Substituindo vem

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}-\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}-rS\frac{\partial V}{\partial S}+rV=0 \tag{2.2.1}$$

Analogamente aos resultados anteriores, as condições finais passam a ser iniciais e temos

Opção Call	**Opção Put**
condições iniciais	condições iniciais
$V_C(S,0)=\max\{S-K,0\}$	$V_P(S,0)=\max\{K-S,0\}$
condições de fronteira	condições de fronteira
$\begin{cases}V_C(0,\tau)=0\\ V_C(S,\tau)=S-Ke^{-r\tau}, \quad S\to+\infty\end{cases}$	$\begin{cases}V_C(0,\tau)=Ke^{-r\tau}\\ V_C(S,\tau)=0, \quad S\to+\infty\end{cases}$

3.1 Método de Euler Explícito

Vamos então resolver o problema através do método das diferenças finitas. Começamos por definir uma malha $Q_h^{\Delta t}\subset[0,S_{\max}]\times[0,T]$, onde $h=S_{\max}/(N+1)$ e $\Delta t=T/M$ por

$$Q_h^{\Delta t}:=\{(x_i,t^j)\,:\,x_i=ih\,,\,i=0,...,N+1\,;\,t^j=jT\,,\,j=0,...,M\}\,.$$

Discretizando a equação (2.2.1) através do método de Euler explícito obtemos, para $1\leq i\leq N$, $0\leq j\leq M-1$,

$$\frac{V_i^{j+1}-V_i^j}{\Delta t}-\frac{1}{2}\sigma^2(S_i)^2\frac{V_{i+1}^j-2V_i^j+V_{i-1}^j}{h^2}-rS_i\frac{V_{i+1}^j-V_{i-1}^j}{2h}+rV_i^j=0.$$

Rearranjando os termos obtemos

$$V_i^{j+1}=(1-r\Delta t)V_i^j+\Delta t\left(\frac{1}{2}\sigma^2(S_i)^2\frac{V_{i+1}^j-2V_i^j+V_{i-1}^j}{h^2}+rS_i\frac{V_{i+1}^j-V_{i-1}^j}{2h}\right)$$

A solução exata para as opções do tipo call e put é dada por

$$V_C(S,t)=S\Phi(d_1)-K\Phi(d_2)e^{-r(T-t)}, \quad V_P(S,t)=Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)-S\Phi(-d_1)$$

onde Φ representa a função de distribuição da normal de média 0 e desvio padrão 1 e

$$d_1=\frac{\log(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2=\frac{\log(S/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Obtivemos os resultados das Figuras 1 e 2 e através do ficheiro matlab **explicito.m**.

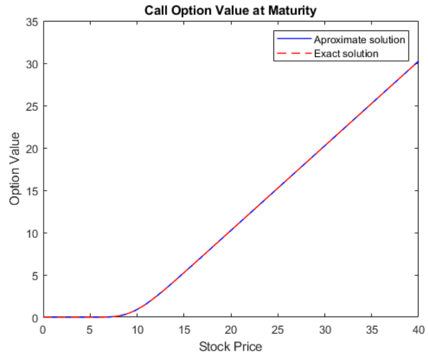

Fig. 1: Opção Call Europeia. $T = 0.25,\ K = 10,\ r = 0.1,\ \sigma = 0.4,\ M = 2000,\ N = 200.$

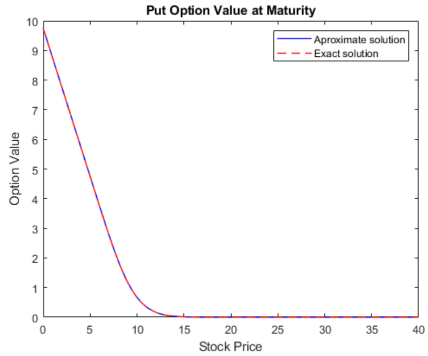

Fig. 2: Opção Put Europeia. $T = 0.25,\ K = 10,\ r = 0.1,\ \sigma = 0.4,\ M = 2000,\ N = 200.$

Como podemos observar, em ambos os casos o gráfico da solução exata coincide com o gráfico da solução aproximada.

Obtivemos também as seguintes representações da solução (Figuras 3 e 4).

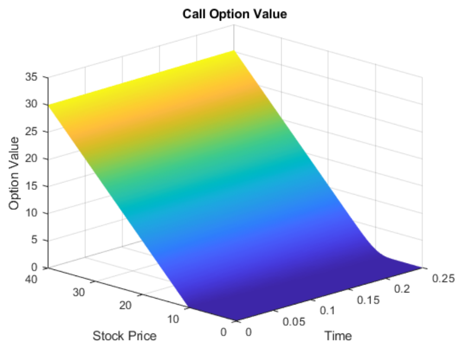

Fig. 3: Opção Call Europeia. $T = 0.25,\ K = 10,\ r = 0.1,\ \sigma = 0.4,\ M = 2000,\ N = 200.$

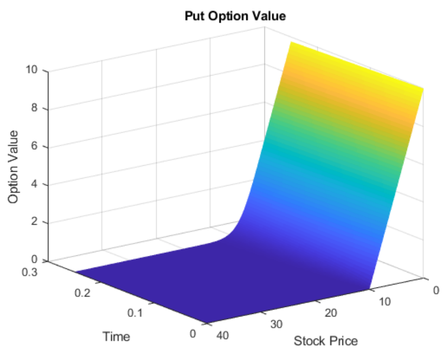

Fig. 4: Opção Put Europeia. $T = 0.25,\ K = 10,\ r = 0.1,\ \sigma = 0.4,\ M = 2000,\ N = 200.$

Referências

[1] Sousa, Ercília, *Apontamentos de Matemática Financeira*, Coimbra, 2020/2021

[2] Dura, Gina & Mosneagu, Ana-Maria, *Numerical Approximation of Black-Scholes equation*, 2010 https://downloads.dxfeed.com/specifications/dxLibOptions/Mosneagu.pdf