PLOC - Trabalho 2

Margarida Biscaia

Tempo de trabalho: 48h

2. A resolução do exercício 2 envolve três ficheiros matlab: **FF.m** (onde implementei o algoritmo de Ford-Fulkerson), **BFS.m** (disponibilizado pelo professor) e **Path.m** (onde implementei uma função que dado o vetor v calculado pelo BFS devolve o caminho correspondente).

3. Dados n^2 pontos ligados numa grelha $n \times n$, m deles são escolhidos. O problema da fuga pede para verificar, dada uma instância destas, se é possível ligar todos os pontos à fronteira da grelha por caminhos que não se intersetem em nenhum vértice.

(a) Seja G um grafo com n^2 vértices sendo as arestas as linhas da grelha. Cada aresta tem capacidade 1 e é bidirecional (sendo assim representada apenas por uma linha).

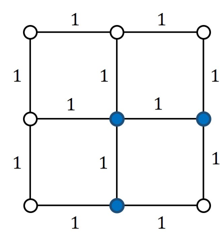


Figura 1: Exemplo para n=3, m=3

Acrescentemos um vértice s (source) e um vértice t (sink). O vértice s terá arestas direcionas para cada um dos m pontos escolhidos, com início em s, e com capacidade 1. O vértice t terá arestas direcionadas para todos os pontos da fronteira, com fim em t, e com capacidade 1.

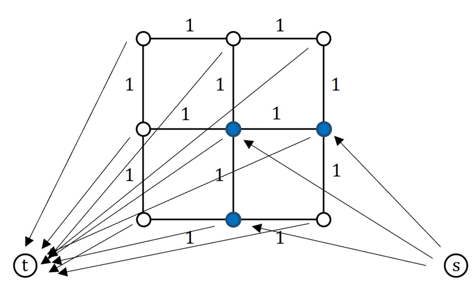


Figura 2: Exemplo para n=3, m=3

Temos agora um problema de fluxo de custo máximo que pode ser resolvido pelo algoritmo de Ford-Fulkerson. Neste caso, o problema de fuga tem solução se o fluxo máximo for igual a m, isto porque:

i) pelo FF, o fluxo é {0,1} em cada aresta.

ii) a existência de fluxo numa aresta entre s e um dos m pontos (designemos por p) implica a existência de um caminho entre esse ponto p e um ponto da fronteira, pois o fluxo de $s-p$ sai por uma aresta $p-v$ que por sua vez sai por uma aresta $v-u$. Ora este caminho vai terminar em $f-t$, onde f é um ponto de fronteira da grelha, por construção.

iii) se dois caminhos utilizassem a mesma aresta excedia-se a capacidade da mesma.

Falta ainda garantir que não há interseções de caminhos num mesmo vértice. Ora, cada vértice tem um determinado número de arestas que entram e que saem. Vamos então dividir cada vértice em dois, sendo que um terá as arestas que entram e o outro as que saem. Entre estes dois vértices inserimos uma aresta com capacidade 1. Assim, o fluxo que entra no primeiro vértice é igual ao fluxo na aresta entre os dois vértices e igual ao fluxo no segundo vértice.

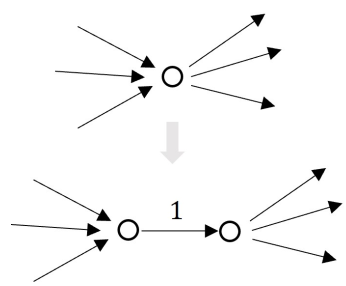


Figura 3: Exemplo da duplicação do vértice

Transformámos assim um problema de fuga num problema de fluxo de custo máximo.

(b) Seja Adj a matriz de adjacência da grelha inicial, isto é, a matriz de adjacência de um grafo G com n^2 vértices, sendo as arestas as linhas da grelha. Esta matriz será naturalmente simétrica, com diagonal 0. No ficheiro **AdjGrid.m** implementei uma função que dado um n devolve a matriz de adjacência de uma grelha nxn. Se numerarmos os vértices de 1 a n^2 de forma ascendente por linhas, torna-se fácil escrever esta matriz.

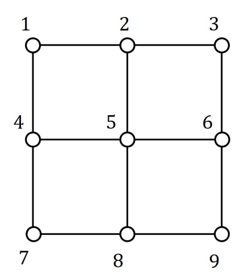
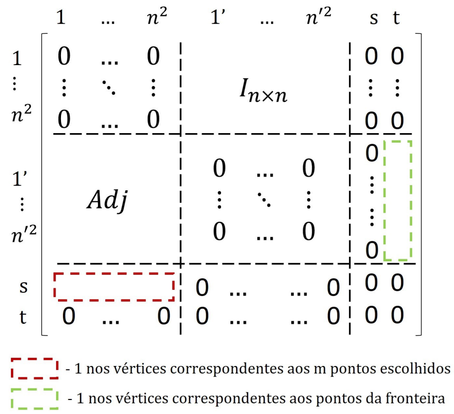


Figura 4: Exemplo de numeração dos vértices

Tendo em conta a reformulação do problema de fuga num problema de fluxo de custo máximo, vista na alínea anterior, a matriz A de adjacência deste novo grafo será uma matriz $(2n^2+2)\times(2n^2+2)$ por blocos da seguinte forma



Para determinar os pontos da fronteira, implementei uma função que dado um n devolve um vetor com os vértices da fronteira, numerados como referido anteriormente, no ficheiro **FronteiraGrid.m**.

Estamos assim em condições de aplicar o algoritmo de Ford-Fulkerson, tendo em conta que neste caso a matriz dos custos coincide com a matriz A. O ficheiro **Ex3b.m** tem a resolução para este problema. Ora, testando então para $n = 10$ e $m \in \{5, 10, 15, 30\}$ obtive os seguintes resultados:

```
Para os m pontos seguintes
     2    44    61    80    95

o fluxo máximo é
     5

Resposta positiva!
```

Figura 5: Resultado para m=5

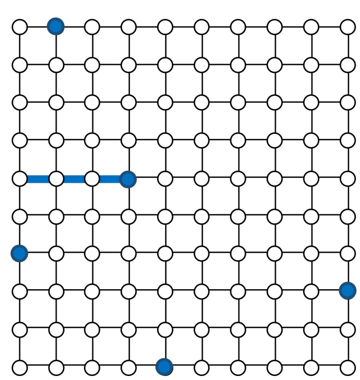


Figura 6: Instância correspondente para m=5

Pelo que para $m = 5$ temos uma **resposta positiva**.

```
Para os m pontos seguintes
    13    15    29    34    38    43    48    57    77    89

o fluxo máximo é
    10

Resposta positiva!
```

Figura 7: Resultado para m=10

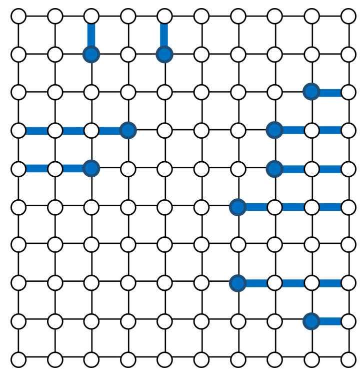


Figura 8: Instância correspondente para m=10

Pelo que para $m = 10$ temos uma **resposta positiva**.

```
Para os m pontos seguintes
  Columns 1 through 10

     3    10    14    15    19    22    27    31    40    43

  Columns 11 through 20

    45    46    49    51    53    55    56    60    69    71

  Columns 21 through 30

    72    73    77    80    84    88    89    90    97    99

o fluxo máximo é
    29

Resposta negativa!
```

Figura 9: Resultado para m=30

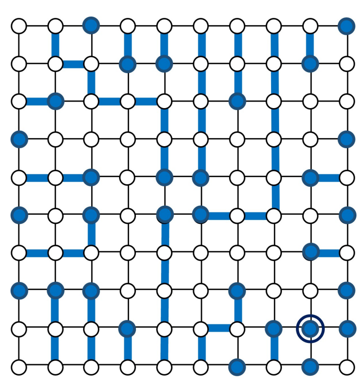


Figura 10: Instância correspondente para m=30

Pelo que para $m = 30$ temos uma **resposta negativa**.

```
Para os m pontos seguintes
  Columns 1 through 10

     3     6     9    11    13    14    15    22    26    27

  Columns 11 through 20

    31    34    39    41    48    50    52    53    54    55

  Columns 21 through 30

    57    61    62    64    66    73    77    78    81    88

  Columns 31 through 35

    89    90    94    97    98

o fluxo máximo é
    29

Resposta negativa!
```

Figura 11: Resultado para m=35

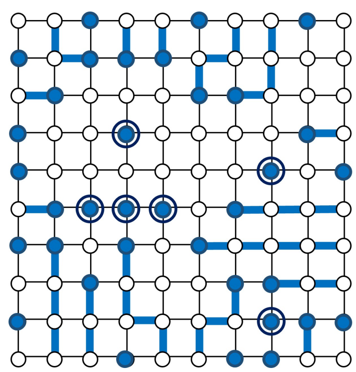


Figura 12: Instância correspondente para m=35

Pelo que para $m = 35$ temos uma **resposta negativa**.

Observação: A existência de uma resposta positiva para um determinado m não implica que não haja respostas negativas para o mesmo m. Depende da escolha dos pontos.