Арунова Маргарита БПМИ2011

K – поле $\rightsquigarrow K[x]$ – кольцо многочленов от переменной x
$K[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in K\}$

Для каждого ненулевого многочлена $f \in K[x]$ определена его *степень* $\deg f = \{n \mid a_n \neq 0\}$. Полагаем, что $\deg 0 = -\infty$.
Свойства степеней многочлена:
(а) $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$
(б) $\deg(f + g) \leqslant \max\{\deg f,\ \deg g\}$

Обратимые элементы в $K[x]$ – ненулевые константы, то есть элементы в $K[x] \setminus \{0\}$. Делителей нуля в $K[x]$ нет.

Определение. $f, g \in K[x],\ g \neq 0 \Rightarrow$ говорят, что f делится g (или g делит f), если $\exists h \in K[x]$, такой что $f = g \cdot h$.

Теорема (деление с остатком в кольце $K[x]$)**.** Для любых двух многочленов $f, g \in K[x],\ g \neq 0$, существуют единственные многочлены $q, r \in K[x]$, для которых $f = q \cdot g + r$ и либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$.

Определение. Наибольший общий делитель многочленов $f, g \in K[x]$ – это многочлен $h \in K[x]$ со следующими свойствами:
(а) $f \,\vdots\, g$ и $g \,\vdots\, f$
(б) h имеет наибольшую возможную степень
Замечание. НОД(f, g) существует, если $(f, g) \neq (0, 0)$, и определён однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу.

Теорема. Пусть $(f, g) \neq (0, 0)$, тогда:
(а) $\exists$ НОД$(f, g) = h$
(б) $\exists u, v \in K[x]$, такие что $h = uf + vg$

Определение. Многочлен $h \in K[x]$ называется *неприводимым*, если $\deg h > 0$ и h нельзя представить в виде $h = h_1 \cdot h_2$, где $\deg h_1 < \deg h$ и $\deg h_2 < \deg h$. Иначе h называется *приводимым.*
Замечание. Верны следующие утверждения:
(а) $h \in K[x],\ \deg h = 1 \Rightarrow h$ – неприводим
(б) $h \in K[x],\ \deg h > 1$ и h – неприводим $\Rightarrow h$ не имеет коней в K
(в) $h \in K[x],\ \deg h \in \{2, 3\} \Rightarrow h$ – неприводим $\Leftrightarrow h$ не имеет корней в K

Лемма. h – неприводим и делит $g_1 \cdot \ldots \cdot g_k$ для некоторых $g_1, \ldots, g_k \in K[x] \Rightarrow$ существует i, такое что h делит g_i.

Теорема (факториальность кольца $K[x]$)**.** Пусть $f \in K[x]$ и $\deg f \geqslant 1$. Тогда

(а) существует разложение $f = h_1 \cdot \ldots \cdot h_k$, где все $h_i \in K[x]$ – неприводимые

(б) это разложение единственно с точностью до перестановки множителей и пропорциональности, точнее, если $f = h_1' \cdot \ldots \cdot h_m'$ – другое такое разложение, то $m = k$ и после подходящей перестановки множителей имеем $h_i' = C_i h$, где $C_i \in K \setminus \{0\}$

Замечание. Кольцо $K[x_1, \ldots, x_n]$ при $n \geqslant 2$ тоже факториально.

Определение. Кольцо R без делителей нуля называется *кольцом главных идеалов (КГИ)*, если все идеалы в R – главные.

Предложение. $K[x]$ является КГИ.

Пусть $h = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ многочлен $\deg h = n > 0$. Множество (h) – главный идеал $K[x]$. Рассмотрим фактор кольцо $F = K[x]/(h)$. Элементы этого кольца $\bar{f} = f + (h) \in F$, причём $\bar{f} = \bar{0} \Leftrightarrow f \vdots h$.

Предложение. F является полем $\Leftrightarrow h$ – неприводим.

Рассмотрим отображение $K \to F$, $\alpha \to \bar{\alpha}$. Это отображение инъективно $\Rightarrow K$ отождествляется с подполем в $F \Rightarrow F$ становится векторным пространством над K.

Предложение. Элементы $\bar{1}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{n-1}$ образуют базис в F над K. В частности, $\dim_K F = n$.

Пусть теперь F – поле (то есть h – неприводим). Поле $K \subseteq F \Rightarrow$ можно считать, что $h \in F[x]$.

Предложение. Элемент $\bar{x}$ является корнем многочлена h над полем F. В частности, h имеет корни в F.

Замечание. Говорят, что поле F получается из K *присоединением корня* неприводимого многочлена.

Утверждение. Пусть число $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ – корень многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$, тогда $a_n \vdots q$ и $a_0 \vdots p$.

Задание 1. Найдите наибольший общий делитель многочленов $f, g \in K[x]$, а также его линейное выражение через f и g в следующих случаях:

(а) $K = \mathbb{R},\ f = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1,\ g = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2$

(б) $K = \mathbb{Z}_5,\ f = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 1,\ g = 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

1. Наибольший общий делитель многочленов находится с помощью прямого хода алгоритма Евклида, а его линейное выражение через эти многочлены с помощью обратного хода алгоритма Евклида.

2. Найдем НОД многочленов и его линейное представление через эти многочлены для первого случая.

$$\begin{array}{r|l} x^5 + x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x - 1 & 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2 \\ \cline{2-2} x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x & \frac{1}{3}x + \frac{5}{9} \\ \hline \frac{5}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\ \frac{5}{3}x^4 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{9}x - \frac{10}{9} & \\ \hline \underbrace{-\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}}_{r_1} & \end{array}$$

$$f = g \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right) + r_1$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2 & -\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} \\ \cline{2-2} 3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x & -\frac{27}{2}x + \frac{9}{4} \\ \hline -\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x - 2 & \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \\ \hline \underbrace{-\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}}_{r_2} & \end{array}$$

$$g = r_1 \cdot \left(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}\right) + r_2$$

$$\begin{array}{r|l} -\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} & -\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4} \\ \cline{2-2} -\frac{2}{9}x^3 + 0x^2 - \frac{2}{9}x & \frac{8}{81}x - \frac{4}{9} \\ \hline -\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{9} & \\ -\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{9} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Получаем, что r_2 – это последний ненулевой остаток в алгоритме $\Rightarrow$ НОД$(f, g) = r_2 = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$. Линейно выразим его через многочлены f и g:

$$r_2 = g - r_1 \cdot \left(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}\right) = g - \underbrace{\left(f - g \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right)\right)}_{=r_1} \cdot \left(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}\right) =$$

$$= f \cdot \left(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}\right) + g \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right)\left(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}\right)\right) = \boxed{f \cdot \left(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}\right) + g \cdot \left(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{9}{4}\right)}$$

3. Аналогично найдем НОД многочленов и его выражение через эти многочлены для второго случая.

   Заметим, что в этом пункте поле уже $K = \mathbb{Z}^5$, поэтому все получаемые в процессе алгоритма числа будем брать по модулю 5.

$$
\begin{array}{cr|l}
 & x^5+3x^4+4x^3+3x^2+1 & 3x^3+2x^2+3x+2 \\ \cline{3-3}
- & x^5+4x^4+\ \ x^3+4x^2 & 2x^2+3x+4 \\ \cline{2-2}
 & 4x^4+3x^3+4x^2+0x+1 & \\
- & 4x^4+\ \ x^3+4x^2+\ \ x & \\ \cline{2-2}
 & 2x^3+0x^2+4x+1 & \\
- & 2x^3+3x^2+2x+3 & \\ \cline{2-2}
 & \underbrace{2x^2+2x+3}_{r_1} &
\end{array}
$$

$$f = g \cdot (2x^2+3x+4) + r_1$$

$$
\begin{array}{cr|l}
 & 3x^3+2x^2+3x+2 & 2x^2+2x+3 \\ \cline{3-3}
- & 3x^3+3x^2+2x & 4x+2 \\ \cline{2-2}
 & 4x^2+\ \ x+2 & \\
- & 4x^2+4x+1 & \\ \cline{2-2}
 & \underbrace{2x+1}_{r_2} &
\end{array}
$$

$$g = r_1 \cdot (4x+2) + r_2$$

$$
\begin{array}{cr|l}
 & 2x^2+2x+3 & 2x+1 \\ \cline{3-3}
- & 2x^2+\ \ x & x+3 \\ \cline{2-2}
 & x+3 & \\
- & x+3 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

   Получаем, что r_2 – это последний ненулевой остаток в алгоритме $\Rightarrow$ НОД$(f,g) = r_2 = 2x+1$. Линейно выразим его через многочлены f и g:

$$
\begin{aligned}
r_2 = g - r_1 \cdot (4x+2) = g - &\underbrace{(f - g\cdot(2x^2+3x+4))\cdot(4x+2)}_{=r_1} = \\
&= -f\cdot(4x+2) + g\cdot(1+(2x^2+3x+4)\cdot(4x+2)) = \\
&= -f\cdot(4x+2) + g\cdot(8x^3+16x^2+22x+9) = \\
&= \boxed{f\cdot(x+3) + g\cdot(3x^3+x^2+2x+4)}
\end{aligned}
$$

4. Заметим, что в первом случае можно было получить более «красивый» вид НОД, поделив итоговый многочлен на $-\frac{9}{4}$. Тогда НОД будет выглядеть, как x^2+1, а его представление будет просто умножено на $-\frac{4}{9}$. По определению НОД – эти два вида одно и то же.

Ответ: (а) $\text{НОД}(f,g) = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$

$-\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4} = f\cdot\left(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}\right) + g\cdot\left(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{9}{4}\right)$

(б) $\text{НОД}(f,g) = 2x+1$

$2x+1 = f\cdot(x+3) + g\cdot(3x^3+x^2+2x+4)$

Задание 2. Разложите многочлен f в произведение неприводимых в кольце $K[x]$ в следующих случаях:

(а) $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},\ f = x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 12$

(б) $K = \mathbb{Z}_7,\ f = x^5 + 5x^4 + x^3 + 6x^2 + 6$

1. Разложим первый многочлен на произведение неприводимых в $\mathbb{R}[x]$:

$$\begin{gathered} f = x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 12 = x^3(x^2+3) - 4(x^2+3) = (x^3-4)(x^2+3) = \\ = \left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+3\right) \end{gathered}$$

В разложении получены многочлены первой и второй степени. Многочлен первой степени неприводим. Многочлены второй степени в найденном разложении также неприводимы: они не имеют корней в $\mathbb{R}$, а это равносильно тому, что они неприводимы над $\mathbb{R}$.

$$\begin{gathered} D_1 = 2\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2} = -6\sqrt[3]{2} < 0 \Rightarrow \text{у } x^2 + \sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{2} \text{ нет корней в } \mathbb{R} \\ D_2 = -12 < 0 \Rightarrow \text{у } x^2 + 3 \text{ нет корней в } \mathbb{R} \end{gathered}$$

2. Разложим этот же многочлен уже над полем $\mathbb{C}$:

$$\begin{gathered} f = x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 12 = x^3(x^2+3) - 4(x^2+3) = (x^3-4)(x^2+3) = \\ = \left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+3\right) \end{gathered}$$

Многочлен второй степени приводим над $K \Leftrightarrow$ он имеет корни в K. Найдем корни многочленов второй степени в полученном разложении:

$$\begin{gathered} x^2 + \sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{2} = 0 \Rightarrow D = 2\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2} = -6\sqrt[3]{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\sqrt[3]{4} \pm i\sqrt{6}\sqrt[6]{2}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \\ x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} = \pm\, i\sqrt{3} \end{gathered}$$

Получаем, что в $\mathbb{C}$ описанный многочлен разлагается в произведение следующих неприводимых многочленов (они неприводимы, так как их степень равна 1):

$$\begin{gathered} f = x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 12 = \left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+3\right) = \\ = \left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x + \tfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(x + \tfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(x + i\sqrt{3}\right)\left(x - i\sqrt{3}\right) \end{gathered}$$

3. Разложим второй многочлен на произведение неприводимых в $\mathbb{Z}_7[x]$. Заметим, что число 3 – корень многочлена f. Действительно, $f(3) = 243 + 405 + 27 + 54 + 6 = 735 = 105 \cdot 7 = 0$. Поделим многочлен f на одночлен $x - 3$:

$$\begin{array}{r|l} -\;\; x^5 + 5x^4 + x^3 + 6x^2 + 6 & x - 3 \\ \cline{2-2} x^5 - 3x^4 & x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 5 \\ \cline{1-1} -\;\; x^4 + x^3 + 6x^2 + 6 & \\ x^4 - 3x^3 & \\ \cline{1-1} -\;\; 4x^3 + 6x^2 + 6 & \\ 4x^3 + 2x^2 & \\ \cline{1-1} \dots & \end{array} \qquad \begin{array}{r|} \dots \\ \hline -\;\; 4x^2 + 0x + 6 \\ 4x^2 + 2x \\ \hline -\;\; 5x + 6 \\ 5x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Получаем, что $f = (x-3)(x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 5) = (x+4)(x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 5)$.

Число 5 также корень рассматриваемого многочлена: $f(5) = 2\cdot(625+125+100+20+5) = 2\cdot125\cdot7$. Поделим многочлен $x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 5$ на одночлен $x - 5$. Этот многочлен делится на $x - 5$, так как многочлены $x - 3$ и $x - 5$ взаимнопросты, а $f \vdots (x - 5)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 5 \\ x^4 + 2x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x - 5 \\ \hline x^3 + 6x^2 + 6x + 6 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} 6x^3 + 4x^2 + 4x + 5 \\ 6x^3 + 5x^2 \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} 6x^2 + 4x + 5 \\ 6x^2 + 5x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} 6x + 5 \\ 6x + 5 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $f = (x - 3)(x - 5)(x^3 + 6x^2 + 6x + 6) = (x + 4)(x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x + 6)$. Нетрудно увидеть, что 3 – корень $x^3 + 6x^2 + 6x + 6$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 6x + 6 \\ x^3 + 4x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline x^2 + 2x + 5 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} 2x^2 + 6x + 6 \\ 2x^2 + x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} 5x + 6 \\ 5x + 6 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Многочлен $g = x^2 + 2x + 5$ – неприводим над $\mathbb{Z}_7$, так как не имеет корней в $\mathbb{Z}_7$:

$$
\begin{aligned}
g(0) &= 0^2 + 2\cdot0 + 5 = 5 \\
g(1) &= 1^2 + 2\cdot1 + 5 = 8 \\
g(2) &= 2^2 + 2\cdot2 + 5 = 13 \\
g(3) &= 3^2 + 2\cdot3 + 5 = 20 \\
g(4) &= 4^2 + 2\cdot4 + 5 = 29 \\
g(5) &= 5^2 + 2\cdot5 + 5 = 40 \\
g(6) &= 6^2 + 2\cdot6 + 5 = 53
\end{aligned}
$$

Все полученные значения не кратны 7, то есть при каждом $\alpha \in \mathbb{Z}_7$ многочлен g от этого числа не обращается в 0. Таким образом, $f = (x + 2)(x + 4)(x + 4)(x^2 + 2x + 5)$ – искомое разложение на неприводимые многочлены.

Ответ: (а) $f = \left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2 + 3\right)$ в $\mathbb{R}[x]$

$f = \left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(x + \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(x + i\sqrt{3}\right)\left(x - i\sqrt{3}\right)$ в $\mathbb{C}[x]$

(б) $f = (x + 2)(x + 4)(x + 4)(x^2 + 2x + 5)$ в $\mathbb{Z}_7[x]$

Задание 3. Рассмотрим факторкольцо $F = \mathbb{Q}[z]/(z^3 - z^2 - 1)$ и обозначим через α класс элемента z в нём. Докажите, что F является полем, и представьте в нём элемент $\frac{5\alpha^2-10\alpha+6}{\alpha^2-\alpha-2} \in F$ в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f \leqslant 2$.

1. Докажем, что F – поле. Известно, что $F = K[x]/(h)$ – поле $\Leftrightarrow$ h – неприводим, поэтому достаточно доказать, что $z^3 - z^2 - 1$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

   Единственные возможные рациональные корни $\frac{p}{q}$ многочлена $z^3 - z^2 - 1$ – это ± 1, так как p и q должны быть делителями единицы. Проверим, что ± 1 не являются корнями $z^3 - z^2 - 1$:
$$(z^3 - z^2 - 1)(1) = -1 \neq 0$$
$$(z^3 - z^2 - 1)(-1) = -3 \neq 0$$
   Таким образом, $z^3 - z^2 - 1$ – многочлен степени 3, не имеющий корней $\Leftrightarrow$ $z^3 - z^2 - 1$ – неприводим $\Leftrightarrow$ F – поле.

2. Класс элемента $f \in \mathbb{Q}[z]$ в F – это $\bar{f} = f + (z^3 - z^2 - 1) = r + (z^3 - z^2 - 1)$, где r – остаток деления f на $z^3 - z^2 - 1$. Все остатки по модулю $z^3 - z^2 - 1$ имеют вид $a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{Q}$. Тогда получаем, что факторкольцо F отождествляется с $\{b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0\}$ – многочленами от α степени не выше 2.

   В описанном факторкольце выполняется соотношение $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + 1$, которое воспринимается как формула понижения степени.

3. Элемент $\frac{5\alpha^2-10\alpha+6}{\alpha^2-\alpha-2} \in F$ существует, в силу того, что F – поле, и $\alpha^2 - \alpha - 2 \neq \bar{0}$. Он представляется в виде многочлена $A\alpha^2 + B\alpha + C$, так как $F = \{b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0\}$, значит
$$\frac{5\alpha^2 - 10\alpha + 6}{\alpha^2 - \alpha - 2} = A\alpha^2 + B\alpha + C \text{ для некоторых } A, B, C \in \mathbb{Q}$$
   Обе части равенства домножим на $\alpha^2 - \alpha - 2$, получим
$$5\alpha^2 - 10\alpha + 6 = (A\alpha^2 + B\alpha + C)(\alpha^2 - \alpha - 2) =$$
$$= A\alpha^4 + (-A + B)\alpha^3 + (-2A - B + C)\alpha^2 + (-2B - C)\alpha - 2C$$
   Используя формулу понижения степени, получим
$$A\alpha^4 + (-A + B)\alpha^3 + (-2A - B + C)\alpha^2 + (-2B - C)\alpha - 2C =$$
$$= A\alpha(\alpha^2 + 1) + (-A + B)(\alpha^2 + 1) + (-2A - B + C)\alpha^2 + (-2B - C)\alpha - 2C =$$
$$= A\alpha^3 + (-3A + C)\alpha^2 + (A - 2B - C)\alpha + (-A + B - 2C) =$$
$$= A(\alpha^2 + 1) + (-3A + C)\alpha^2 + (A - 2B - C)\alpha + (-A + B - 2C) =$$
$$= (-2A + C)\alpha^2 + (A - 2B - C)\alpha + (B - 2C)$$
   Так как два многочлена равны тогда и только тогда, когда у них совпадают коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем систему
$$\begin{cases} -2A + C = 5 \\ A - 2B - C = -10 \\ B - 2C = 6 \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -1 & -15 \\ 1 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -9 & 9 \\ 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Получаем, что $\frac{5\alpha^2-10\alpha+6}{\alpha^2-\alpha-2} = -3\alpha^2 + 4\alpha - 1$

Ответ: $-3\alpha^2 + 4\alpha - 1$

Задание 4. Пусть K – поле и $h \in K[x]$ – многочлен положительной степени. Докажите, что всякий ненулевой необратимый элемент факторкольца $K[x]/(h)$ является делителем нуля.

1. Элемент $f + (h) \in K[x]/(h)$ – делитель нуля $\Leftrightarrow$ существует такой ненулевой $g + (h) \in K[x]/(h)$, то есть $g \not\vdots\, h$, что $(f + (h))(g + (h)) = fg + (h) = 0 + (h)$, что равносильно $fg \,\vdots\, 0$.

2. Пусть $f + (h)$ – ненулевой необратимый элемент в $K[x]/(h) \Rightarrow f \not\vdots\, h$.
   Рассмотрим два случая: НОД$(f, h) = 1$ и НОД$(f, h) \neq 1$.

3. НОД$(f, h) = 1$, тогда существуют такие $u, v \in K[x]$, что $uf + vh = 1$. Значит, верны следующие равенства для элементов факторкольца:
   $$1 + (h) = uf + vh + (h) = (uf + (h)) + (vh + (h)) = (uf + (h)) + (0 + (h)) = uf + (h)$$
   Последний элемент факторкольца представляется в виде $uf + (h) = (u + (h))(f + (h))$. Получаем, что $1 + (h) = (u + (h))(f + (h))$, то есть элемент $f + (h)$ обратим в $K[x]/(h)$ – противоречие.

4. НОД$(f, h) \neq 1$, тогда возьмём многочлены $g, l \in K[x]$, такие что многочлены $h = g \cdot$ НОД(f, h) и $f = l \cdot$ НОД(f, h). Рассмотрим элемент $g + (h)$ в факторкольце. Заметим, что $g \neq 0$ и $g \not\vdots\, h$, так как иначе при $g = 0$ многочлен $h = 0 \Rightarrow \deg h < 0$ – противоречие, а при $g \,\vdots\, h$ следует, что НОД$(f, h) = 1$ – противоречие.
   Из $g \not\vdots\, h$ получаем, что $g + (h) \neq 0$. Рассмотрим произведение $f + (h)$ и $g + (h)$:
   $$(f + (h))(g + (h)) = fg + (h) = l \cdot \text{НОД}(f, h) \cdot g + (h) = lh + (h) = 0 + (h)$$
   Таким образом, $f + (h)$ – делитель нуля по определению.

5. Получаем, что всякий ненулевой необратимый элемент факторкольца $K[x]/(h)$ является делителем нуля.