Арунова Маргарита БПМИ2011

K – поле $\rightsquigarrow R = K[x_1, \ldots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$
$M = \{ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} \mid a \in K \setminus \{0\}, k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ – множество всех одночленов R
$M_0 = \{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} \mid k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ – множество всех одночленов R с единичным коэффициентом
$f \in R \setminus \{0\} \rightsquigarrow M(f)$ – все одночлены входящие в f

Определение. Множество F называется *системой Грёбнера*, если $\forall g \in R$ остаток многочлена g относительно F определён однозначно, то есть не зависит от приводящей к нему цепочки элементарных редукций.

Теорема (критерий Бухбергера)**.** Для системы $F \in R \setminus \{0\}$ следующие условия эквивалентны:
(а) F – система Грёбнера
(б) $\forall f_1, f_2 \in F$ верно $S(f_1, f_2) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$
Следствие. Если существуют $f_1, f_2 \in F$, такие что $S(f_1, f_2) \overset{F}{\rightsquigarrow} r \neq 0$ (где r – остаток), то F не система Грёбнера.

Определение. Множество $F \subseteq R \setminus \{0\}$ называется *базисом Грёбнера* идеала I, если
(а) $I = (F)$
(б) F – система Грёбнера
Определение. Базис Грёбнера F в $I \lhd R$ называется *минимальным редуцированным* если
(а) $\forall f_1, f_2 \in F,\ f_1 \neq f_2$ верно, что $\forall m \in M(f_1) :\ m \not\vdots\, L(f_2)$
(б) все старшие коэффициенты равны 1

Теорема. $F \subseteq I \setminus \{0\} \Rightarrow$ следующие условия эквиваленты:
(а) F – базис Грёбнера в I
(б) $\forall g \in I$ выполняется $g \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$
(в) $\forall g \in I$ существует $f \in F :\ L(g) \,\vdots\, L(f)$
Замечание. Базисы Грёбнера часто определяются последним условием.

Следствие. F – базис Грёбнера в $I \Rightarrow$
(а) $\forall g \in I$ всякая цепочка элементарных редукций относительно F приводит к 0
(б) $\forall g \in R$ верно $g \in I \Leftrightarrow$ остаток от g относительно F равен 0

Лемма. Не существует бесконечных цепочек одночленов $m_1, m_2, \ldots$, где $m_i \not\vdots\, m_j$ для всех $i > j$.
Теорема (теорема Гильберта о базисе идеала)**.** $\forall I \lhd R$ существует $f_1, \ldots, f_n \in I$, что $I = (f_1, \ldots, f_n)$.

Задание 1. Выясните принадлежит ли идеалу $I = (x^2y+2z^2, y^2-yz)$ кольца $\mathbb{R}[x,y,z]$ многочлены $g_1 = x^3z^3 + 3xyz^3$ и $g_2 = x^3y^2z + 2xy^2z^2$.

1. Найдем в I базис Грёбнера, используя алгоритм Бухбергера. Вычислим S-полином f_1 и f_2: НОК$(L(f_1), L(f_2)) = x^2y^2$, тогда $S(f_1, f_2) = y \cdot f_1 + x^2 \cdot f_2 = 2yz^2 + x^2yz \xrightarrow{-z \cdot f_1} 2yz^2 - 2z^3$. Полученный многочлен нередуцируем относительно f_1, f_2, поэтому по алгоритму Бухбергера добавим в рассматриваемую систему $f_3 = yz^2 - z^3$.

   Посчитаем $S(f_1, f_3)$: НОК$(L(f_1), L(f_2)) = x^2yz^2$, тогда $S(f_1, f_3) = z_2 \cdot f_1 - x^2 \cdot f_2 = 2z^4 + x^2z^3$. Полученный многочлен нередуцируем относительно $F = \{f_1, f_2, f_3\}$, поэтому добавляем в F многочлен $f_4 = x^2z^3 + 2z^4$.

   Найдём $S(f_2, f_3) = z^2 \cdot f_2 - y \cdot f_3 = -yz^3 + yz^3 = 0$.
   Проверим для f_2 и f_4: заметим, что старшие члены f_2 и f_4 взаимно просты, это означает, что их S-полином редуцируется к нулю относительно f_2 и f_4.

   Осталось проверить для f_3 и f_4. Редуцируем полином $S(f_3, f_4) = x^2z \cdot f_3 - y \cdot f_4 = -x^2z^4 - 2yz^4 \xrightarrow{x \cdot f_4} -x^2z^4 - 2yz^4 + x^2z^4 + 2z^5 = -2yz^4 + 2z^5 \xrightarrow{2z^2 \cdot f_3} -2yz^4 + 2z^5 + 2yz^4 - 2z^5 = 0$.

   Таким образом, по алгоритму Бухбергера, получаем что система $\{f_1, f_2, f_3, f_3\}$ – базис Грёбнера идеала I. Полученный базис: $\{x^2y + 2z^2,\ y^2 - yz,\ yz^2 - z^3,\ x^2z^3 + 2z^4\}$.

2. Чтобы выяснить, принадлежат ли g_1 и g_2 идеалу, нужно найти их остаток относительно найденного базиса. Если этот остаток равен нулю, что многочлен принадлежит описанному идеалу.

   Проведём редукцию g_1 над F и проверим его остаток относительно этой системы:
   $$x^3z^3 + 3xyz^3 \xrightarrow{-x \cdot f_4} x^3z^3 + 3xyz^3 - x^3z^3 - 2xz^4 = 3xyz^3 - 2xz^4 \xrightarrow{-3xz \cdot f_3}$$
   $$\xrightarrow{-3xz \cdot f_3} 3xyz^3 - 2xz^4 - 3xyz^3 + 3xz^4 = \boxed{xz^4}$$

   Полученный многочлен нередуцируем относительно F: он не делится на старший член каждого из многочленов из F. Таким образом, после редукции g_1 получаем ненулевой остаток $\Rightarrow g_1 \notin I$.

   Проведём редукцию g_2 над F и проверим его остаток относительно этой системы:
   $$x^3y^2z + 2xy^2z^2 \xrightarrow{-xyz \cdot f_1} x^3y^2z + 2xy^2z^2 - x^3y^2z - 2xyz^3 = 2xy^2z^2 - 2xyz^3 \xrightarrow{-2xy \cdot f_3}$$
   $$\xrightarrow{-2xy \cdot f_3} 2xy^2z^2 - 2xyz^3 - 2xy^2z^2 + 2xyz^3 = \boxed{0}$$

   Получен остаток равны нулю. Значит g_2 принадлежит описанному идеалу.

Ответ: искомый базис: $\{x^2y + 2z^2,\ y^2 - yz,\ yz^2 - z^3,\ x^2z^3 + 2z^4\}$; многочлены $g_1 \notin I$ и $g_2 \in I$

Задание 2. Найдите минимальный редуцированный базис Грёбнера в идеале

$$(xy + 2yz, x - y^2, yz^2 - y) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$$

относительно лексикографического порядка, задаваемого условием $z > x > y$.

1. Построим произвольный базис Грёбнера в I, а затем преобразуем его в минимально редуцируемый. Построение будем выполнять с помощью алгоритма Бухбергера.

   Пусть $f_1 = 2zy + xy$, $f_2 = x - y^2$, $f_3 = z^2y - y$ (здесь одночлены упорядочены в соответствии с условием задачи). Проверим редуцируемость к нулю f_1 и f_2: заметим, что их старшие члены взаимно просты, значит $S(f_1, f_2) \overset{f_1,f_2}{\rightsquigarrow} 0$. Аналогичная ситуация и с f_2, f_3: их старшие члены взаимно просты, поэтому $S(f_2, f_3) \overset{f_2,f_3}{\rightsquigarrow} 0$.

   Вычислим $S(f_1, f_3) = z \cdot f_1 - 2 \cdot f_3 = zxy - 2y \xrightarrow{-\frac{1}{2}x \cdot f_1} zxy - 2y - zxy - \frac{1}{2}x^2y = -\frac{1}{2}x^2y - 2y \xrightarrow{\frac{1}{2}xy \cdot f_2}$ $-\frac{1}{2}x^2y - 2y + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^3 = -\frac{1}{2}xy^3 - 2y \xrightarrow{\frac{1}{2}y^3 \cdot f_2} -\frac{1}{2}xy^3 - 2y + \frac{1}{2}xy^3 - \frac{1}{2}y^5 = -\frac{1}{2}y^5 - 2y$. Полученный многочлен нередуцируем в $\{f_1, f_2, f_3\}$, а значит, он является остатком. Добавим его в F, обозначив $f_4 = y^5 + 4y$.

   Проверим, что $S(f_1, f_4) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$, $S(f_2, f_4) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$ и $S(f_3, f_4) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$. Для $S(f_2, f_4)$ описанное выполняется, так как старшие члены f_2 и f_4 взаимно просты, то есть $S(f_2, f_4) \overset{f_2,f_4}{\rightsquigarrow} 0$.

   Вычислим S-полином f_1 и f_4. Имеем:

   $$\begin{aligned} S(f_1, f_4) = {} & y^4 \cdot f_1 - 2z \cdot f_4 = xy^5 - 8zy \xrightarrow{4 \cdot f_1} xy^5 - 8zy + 8zy + 4xy = xy^5 + 4xy \xrightarrow{-y^5 \cdot f_4} \\ & \xrightarrow{-y^5 \cdot f_4} xy^5 + 4xy - xy^5 - y^7 = 4xy - y^7 \xrightarrow{-4y \cdot f_2} \\ & \xrightarrow{-4y \cdot f_2} 4xy - y^7 - 4xy - 4y^3 = -y^7 - 4y^3 \xrightarrow{y^2 \cdot f_4} 0 \end{aligned}$$

   Вычислим S-полином f_3 и f_4. Имеем:

   $$S(f_3, f_4) = y^4 \cdot f_3 - z^2 \cdot f_4 = -y^5 - 4z^2y \xrightarrow{4 \cdot f_3} -y^5 - 4z^2y + 4z^2y - 4y = -y^5 - 4y \xrightarrow{f_4} 0$$

   Таким образом, получаем $F = \{2zy + xy, x - y^2, z^2y - y, y^5 + 4y\}$ – базис Грёбнера описанного идеала.

2. По найденному базису построим минимальный редуцированный. Для этого сначала избавимся от многочленов $f \in F$, таких что $\exists g \in F : L(f) \vdots L(g)$, так как если $f_1, \ldots, f_n$ – базис Грёбнера идеала I и $L(f_1) \vdots L(f_i)$, $i \neq 1$, то $f_2, \ldots, f_n$ также является базисом Грёбнера идеала I.

   Старший член многочлена f_3 делится на старший член f_1, поэтому его можно убрать из рассматриваемого базиса. У многочленов f_1, f_2, f_4 старший член не делится на старший член каждого из оставшихся многочлена базиса.

   Одночлены многочленов в МРБГ не должны делиться на старший член других многочлена этого базиса. Для многочлена f_1 это условие не выполняется: его одночлен xy делится на $L(f_2)$. Выполним редукцию: $f_1 \xrightarrow{-y \cdot f_2} 2zy + y^3$. Для остальных многочленов условие соблюдено.

3. Таким образом получаем новую систему $F^{'} = \{2zy + y^3, x - y^2, y^5 + 4y\}$, которая также базис Грёбнера в рассматриваемом идеале по построению. Чтобы этот базис стал минимально редуцированным осталось сделать все старшие коэффициенты равными 1.

   Получаем, $F = \{zy + \frac{1}{2}y^3, x - y^2, y^5 + 4y\}$ – искомый минимально редуцированный базис идеала.

Ответ: $F = \{zy + \frac{1}{2}y^3, x - y^2, y^5 + 4y\}$

Задание 3. Дан идеал $I = (x^2y + 2xz + z^2, y^2z - 2z) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$. Найдите порождающую систему для идеала $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ кольца $\mathbb{R}[x, y]$ и порождающую систему идеала $I \cap \mathbb{R}[x, z]$ кольца $\mathbb{R}[x, z]$.

1. Пусть $I \lhd R$ и F – базис Грёбнера в I. Рассмотрим $R_k = R[x_{k+1}, \dots, x_n]$. Известно, что тогда $I \cap R_k$ – идеал в R_k и $F \cap R_k$ – базис Грёбнера в $I \cap R_k$.

   Отсюда становится ясно, как найти базис для идеала $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ кольца $\mathbb{R}[x, y]$ и идеала $I \cap \mathbb{R}[x, z]$ кольца $\mathbb{R}[x, z]$.

2. Чтобы найти базис для $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ введём лексикографический порядок так, чтобы переменные x и y были последним, то есть порядок следующий: $z > x > y$. Тогда базис для $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ – это $F \cap \mathbb{R}[x, y]$, где F – базис Грёбнера идеала I в $\mathbb{R}[z, x, y]$ при заданном упорядочивании. Найдём базис Грёбнера с помощью алгоритма Бухбергера.

   – Обозначим $f_1 = z^2 + 2zx + x^2y$ и $f_2 = zy^2 - 2z$. Проредуцируем $S(f_1, f_2)$:

   $$\begin{aligned} S(f_1, f_2) = {} & y^2 \cdot f_1 - z \cdot f_2 = 2z^2 + 2zxy^2 + x^2y^3 \xrightarrow{-2\cdot f_1} \\ & \xrightarrow{-2\cdot f_1} 2z^2 + 2zxy^2 + x^2y^3 - 2z^2 - 4zx - 2x^2y = 2zxy^2 + x^2y^3 - 4zx - 2x^2y \xrightarrow{-2x\cdot f_2} \\ & \xrightarrow{-2x\cdot f_2} 2zxy^2 + x^2y^3 - 4zx - 2x^2y - 2zxy^2 + 4zx = x^2y^3 - 2x^2y \end{aligned}$$

   Полученный полином нередуцируем относительно $\{f_1, f_2\}$, поэтому добавим $f_3 = x^2y^3 - 2x^2y$ в базис.

   – Полиномы $S(f_1, f_3)$ и $S(f_2, f_3)$ редуцируются к нулю относительно $\{f_1, f_2, f_3\}$, так как старшие члены у f_1 и f_2 взаимнопросты со старшем членом f_3.

   – Таким образом, базис Грёбнера для I в $\mathbb{R}[z, x, y]$ – это $\{z^2 + 2zx + x^2y,\ zy^2 - 2z,\ x^2y^3 - 2x^2y\}$.

   Для получения базиса $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ осталось пересечь F с $\mathbb{R}[x, y]$, то есть взять многочлены из F, зависящие только от x и y. Итог: $I \cap \mathbb{R}[x, y] = (x^2y^3 - 2x^2y)$.

3. Аналогично найдём базис для $I \cap \mathbb{R}[x, z]$. Введём следующий порядок: $y > z > x$. Найдём базис Грёбнера с помощью алгоритма Бухбергера.

   – Обозначим $f_1 = yx^2 + 2xz + z^2$ и $f_2 = y^2z - 2z$. Проредуцируем $S(f_1, f_2)$:

   $$S(f_1, f_2) = yz \cdot f_1 - x^2 \cdot f_2 = 2yxz^2 + yz^3 + 2x^2z$$

   Полученный полином нередуцируем относительно $\{f_1, f_2\}$, поэтому добавим в базис многочлен $f_3 = yz^3 + 2yxz^2 + 2x^2z$ в базис.

   – Проредуцируем $S(f_1, f_3)$ и $S(f_2, f_3)$:

   $$\begin{aligned} S(f_1, f_3) = {} & z^3 \cdot f_1 - x^2 \cdot f_3 = 2xz^2 + z^5 - 2x^3yz^2 + 2x^4z \longrightarrow \\ & \longrightarrow 4xz^4 + z^5 - 2x^4z + 4x^2z^3 \end{aligned}$$

   $f_4 = z^5 + 4xz^4 - 2x^4z + 4x^2z^3$

   $$\begin{aligned} S(f_2, f_3) = {} & z^2 \cdot f_2 - y \cdot f_3 = -2z^3 - 2xy^2z^2 - 2x^2yz \longrightarrow \\ & \longrightarrow -2z^3 - 2xy^2z^2 - 2x^2yz + 2xy^2z^2 - 4xz^2 = -2z^3 - 2x^2yz - 4xz^2 \longrightarrow \\ & \longrightarrow -2z^3 - 2x^2yz - 4xz^2 + 2z^3 + 2x^2yz + 4xz^2 = 0 \end{aligned}$$

– $S(f_1, f_4) \rightsquigarrow 0$, так как старшие члены взаимно просты.

$$\begin{aligned} S(f_2, f_4) = {} & z^4 \cdot f_2 - y^2 \cdot f_4 = -2z^5 - 4xy^2z^4 + 2x^4y^2z - 4x^2y^2z^3 \longrightarrow \\ & \longrightarrow -2z^5 + 2x^4y^2z + 4x^2y^2z^3 + 8x^3yz^2 \longrightarrow \\ & \longrightarrow -2z^5 + 2x^4y^2z + 8x^3yz^2 + 8x^2z^3 \longrightarrow \\ & \longrightarrow -2z^5 + 8x^3yz^2 + 8x^2z^3 + 4x^4z \longrightarrow \\ & \longrightarrow -2z^5 + 4x^4z - 8x^2z^3 - 8xz^4 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f_3, f_4) = {} & z^2 \cdot f_3 - y \cdot f_4 = -2xyz^4 + 2x^2z^3 + 2x^4yz - 4x^2yz^3 \longrightarrow \\ & \longrightarrow 2x^2z^3 + 2x^4yz + 4x^3z^2 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Получаем следующий базис при заданном упорядочивании:

$$F = \{yx^2 + 2xz + z^2, y^2z - 2z, yz^3 + 2yxz^2 + 2x^2z, z^5 + 4xz^4 - 2x^4z + 4x^2z^3\}$$

Нетрудно найти пересечение. Это многочлен от переменных x и z, то есть идеал является $I \cap \mathbb{R}[x, z] = (z^5 + 4xz^4 - 2x^4z + 4x^2z^3)$

Ответ: $(x^2y^3 - 2x^2y)$, $(z^5 + 4xz^4 - 2x^4z + 4x^2z^3)$

Задание 4. Найдите конечный базис Грёбнера (относительно стандартного лексикографического порядка, задаваемого условием $x > y > z$) для идеала I кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$, где

$$I = \{f \in \mathbb{R}[x, y, z] \mid f(a, a-1, a^2+a) = 0 \text{ для всех } a \in \mathbb{R}\}$$

1. Рассмотрим следующие многочлены: $f_1 = x - y - 1$, $f_2 = y^2 + 3y - z + 2$. Они принадлежат идеалу, так как для любого $a \in \mathbb{R}$ значение от этих многочленов в точке $(a, a-1, a^2+a)$ равно нулю.

2. Покажем, что $F = \{f_1, f_2\}$ – базис Грёбнера некоторого идеала. Заметим, что старшие члены f_1 и f_2 взаимно просты, значит, их S-полином редуцируется к нулю относительно F. Получаем, что F – система Грёбнера, это означает, что F – базис Грёбнера идеала $J = (f_1, f_2) = (F)$.

3. Покажем, что $I \equiv J$. Ясно, что $J \subseteq I$, так как любая комбинация многочленов из идеала I, является многочленом из I, а порождающая система в J – это $f_1, f_2 \in I$.

   Покажем, что для всякого $f \in I$ выполнено $f \in J$. Проредуцируем f относительно F. Пусть r – остаток f относительно F. Этот остаток также лежит в I, так как

   $$r = \underset{\in I}{f} - \underbrace{m_1 f_1 - m_2 f_2}_{\in I}$$

   Значит $r(a, a-1, a^2+a) = 0$ для всех $a \in \mathbb{R}$. Так как r остаток, то он либо полностью зависит от z, если $L(r) = z^k$, либо зависит от y и z, если $L(r) = yz^k$. Последний случай сразу же отпадает, так как для любого x из $f(x, a-1, a^2-a) = 0$ следует, что f кратно f_2.

   Если r зависит только от z, то этот многочлен можно рассматривать только в $\mathbb{R}[z]$. Так как $r(a^2+a) = 0$ для всех $a \in R$, многочлен r конечной степени имеет бесконечно много корней, но такое может быть только при $r \equiv 0$.

4. Таким образом, $I = J$ и порождается F.

Ответ: $(x - y - 1,\ y^2 + 3y - z + 2)$