Арунова Маргарита БПМИ2011

K – поле $\rightsquigarrow R = K[x_1, \ldots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$
$M = \{ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} \mid a \in K \setminus \{0\}, k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ – множество всех одночленов R
$M_0 = \{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} \mid k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ – множество всех одночленов R с единичным коэффициентом
$f \in R \setminus \{0\} \rightsquigarrow M(f)$ – все одночлены входящие в f

Определение. Лексикографический порядок на множестве M : $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} > bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$, если существует i, такое что $k_1 = l_1,\ k_2 = l_2,\ \ldots,\ k_{i-1} = l_{i-1}$ и $k_i > l_i$.
Замечание. Верны следующие утверждения:
(а) $m_1, m_2, m_3 \in M$ и $m_1 > m_2,\ m_2 > m_3 \Rightarrow m_1 > m_3$
(б) $m_1, m_2, m \in M$ и $m_1 > m_2 \Rightarrow m_1 m > m_2 m$
Лемма. Не существует бесконечно убывающих цепочек $m_1 > m_2 > \ldots$, где $m_i \in M$ при $\forall i \in \mathbb{N}$.

Определение. Старший член многочлена $f \in R \setminus \{0\}$ – это наибольший в лексикографическом порядке одночлен из $M(f)$.
Обозначение: $L(f)$.
Лемма (о старшем члене)**.** $f, g \in R \setminus \{0\} \Rightarrow L(f \cdot g) = L(f) \cdot L(g)$.

Пусть $f, g \in R \setminus \{0\}$ и g содержит одночлен m, такой что $m \vdots L(f) \Rightarrow m = m' \cdot L(f)$, где $m' \in M$. Элементарная редукция: $g \rightsquigarrow g - m'f$ (обозначение: $g \xrightarrow{f} g' = g - m'f$). В результате в многочлене g многочлен m заменяется суммой нескольких меньших одночленов.
Рассмотрим систему $F \subseteq R \setminus \{0\}$.
Определение. Многочлен g *редуцируется* к g' при помощи системы F, если существует цепочка элементарных редукций $g \xrightarrow{f_1} g_1 \xrightarrow{f_2} g_2 \xrightarrow{f_3} \ldots \xrightarrow{f_k} g_k = g',\ f_i \in F$.
Обозначение: $g \rightsquigarrow g'$.
Определение. Многочлен g *нередуцируем* относительно F, если $\forall m \in M(g)$ и $\forall f \in F$ выполнено $m \not\vdots\, L(f)$.

Лемма. $G \subseteq R \setminus \{0\} \Rightarrow$ всякая последовательность элементарных редукций относительно F за конечное число шагов приводит к нередуцируемому многочлену.
Определение. Если $g \overset{F}{\rightsquigarrow} r$ и r – нередуцируем, то r называется *остатком* многочлена g относительно системы F.
Замечание. Вообще говоря, остаток определён неоднозначно.

Определение. Множество F называется *системой Грёбнера*, если $\forall g \in R$ остаток многочлена g относительно F определён однозначно, то есть не зависит от приводящей к нему цепочки элементарных редукций.

Предложение. Следующие условия эквивалентны:

(а) F – система Грёбнера

(б) $\forall g \in R$ обладает следующим свойством: если $g \xrightarrow{f_1} g_1$ и $g \xrightarrow{f_2} g_2$ для некоторых $f_1, f_2 \in F$, то существует $g^{'} \in R$, такой что $g_1 \xrightarrow{F} g^{'}$ и $g_2 \xrightarrow{F} g^{'}$

Утверждение. Для всяких $g_1, g_2 \in R$ и системы $F \subseteq R$ верно следующее:

(а) $g_1 \overset{F}{\rightsquigarrow} g_2 \Rightarrow \forall m \in M: \, mg_1 \overset{F}{\rightsquigarrow} mg_2$

(б) $g_1 - g_2 \overset{F}{\rightsquigarrow} 0 \Rightarrow \exists g: \, g_1 \overset{F}{\rightsquigarrow} g$ и $g_2 \overset{F}{\rightsquigarrow} g$

Пусть $f_1, f_2 \in R \backslash \{0\}$ и НОК$(f_1, f_2) = m$. Рассмотрим одночлены $m_1, m_2 \in M$, такие что выполнено $m = m_1 \cdot L(f_1) = m_2 \cdot L(f_2)$.

Определение. Многочлен $S(f_1, f_2) = m_1 f_2 - m_2 f_2$ называется *S-многочленом* (*S-полиномом*) многочленов f_1 и f_2.

Замечание. $S(f_1, f_2) = -S(f_1, f_2)$.

Теорема (критерий Бухбергера)**.** Для системы $F \in R \setminus \{0\}$ следующие условия эквивалентны:

(а) F – система Грёбнера

(б) $\forall f_1, f_2 \in F$ верно $S(f_1, f_2) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$

Следствие. Если существуют $f_1, f_2 \in F$, такие что $S(f_1, f_2) \overset{F}{\rightsquigarrow} r \neq 0$ (где r – остаток), то F не система Грёбнера.

Задание 1. Какие значения может принимать длина убывающей (в лексикографическом порядке) цепочки одночленов от переменных x_1, x_2, x_3, начинающийся с одночлена $x_1^3x_2^2x_3$ и заканчивающийся одночленом $x_1^3x_2x_3^2$.

1. Докажем, что цепочка может быть любой длины большей или равной двум. Цепочка единичной и нулевой длины не может быть получена, так как по условию в ней обязательно должны быть одночлены $x_1^3x_2^2x_3$ и $x_1^3x_2x_3^2$, а их уже две штуки.

   Получаем, что минимальная длина цепочки – два. Она достигается для $x_1^3x_2^2x_3 > x_1^3x_2x_3^2$.

2. Для каждого натурального $n > 2$ покажем, как получить цепочку длины n. Заметим, что для любого натурального $k > 2$ верно $x_1^3x_2^2x_3 > x_1^3x_2x_3^k > x_1^3x_2x_3^2$. Из последнего равенства становится понятно, как построить цепочку требуемой длины:

$$x_1^3x_2^2x_3 > x_1^3x_2x_3^n > x_1^3x_2x_3^{n-1} > \ldots > x_1^3x_2x_3^3 > x_1^3x_2x_3^2$$

   Одночленов вида $x_1^3x_2x_3^k$ в цепочке $n-1$ штука, а других видов – одна штука. Таким образом, в цепочке $n-1+1=n$ одночленов, то есть длина цепочки n.

   Также заметим, что для каждого $n > 2$ построенная цепочка не единственная возможная цепочка длины n. Например, первый после $x_1^3x_2^2x_3$ одночлен в цепочке можно заменить на $x_1^3x_2^2$.

Ответ: $n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N}$

Задание 2. Найдите остаток многочлена g относительно системы $\{f\}$, где
$$g = x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2 \qquad\qquad f = x_2^4x_3 - 2x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2$$

1. Описанная система $F = \{f\}$ – система Грёбнера, так как для любых двух многочленов $f_1, f_2 \in F$ их S-полином равен $S(f_1, f_2) = S(f, f) = 0$. Из последнего следует, что остаток многочлена g относительно системы $\{f\}$ определён однозначно в независимости от цепочки элементарных редукций.

2. Проделаем следующие элементарные редукции:
$$\begin{aligned}
& x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^4x_3 + x_2^4x_3^5 \xrightarrow{-x_1\cdot f} \\
\xrightarrow{-x_1\cdot f}\ & x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^4x_3 + x_2^4x_3^5 - (x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^4x_3) = \\
=\ & 2x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^4x_3 + x_2^4x_3^5 \xrightarrow{-x_2^2x_3\cdot f} \\
\xrightarrow{-x_2^2x_3\cdot f}\ & 2x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^4x_3 + x_2^4x_3^5 - (x_1x_2^4x_3 - 2x_1x_2^3x_3^3 + x_2^6x_3^2) = \\
=\ & 2x_1^2x_2x_3^2 + 2x_1x_2^3x_3^3 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 \xrightarrow{-2x_2x_3^3\cdot f} \\
\xrightarrow{-2x_2x_3^3\cdot f}\ & 2x_1^2x_2x_3^2 + 2x_1x_2^3x_3^3 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 - (2x_1x_2^3x_3^3 - 4x_1x_2^2x_3^5 + 2x_2^5x_3^4) = \\
=\ & 2x_1^2x_2x_3^2 + 4x_1x_2^2x_3^5 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 \xrightarrow{-4x_3^5\cdot f} \\
\xrightarrow{-4x_3^5\cdot f}\ & 2x_1^2x_2x_3^2 + 4x_1x_2^2x_3^5 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 - (4x_1x_2^2x_3^5 - 8x_1x_2x_3^7 + 4x_2^4x_3^6) = \\
=\ & \boxed{2x_1^2x_2x_3^2 + 8x_1x_2x_3^7 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 - 4x_2^4x_3^6}
\end{aligned}$$

3. Полученный многочлен нередуцируем относительно $\{f\}$, так как каждый его одночлен не делится на старший член f, который равен $L(f) = x_1x_2^2$. Получаем, что найденный многочлен – искомый остаток.

Ответ: $2x_1^2x_2x_3^2 + 8x_1x_2x_3^7 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 - 4x_2^4x_3^6$

Задание 3. Выясните, является ли множество $\{f_1, f_2, f_3\}$ системой Грёбнера, где

$$f_1 = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2 \qquad f_2 = 4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4 \qquad f_3 = x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3$$

1. Воспользуемся критерием Бухбергера и с его помощью проверим, является ли описанное множество $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ системой Грёбнера. Другими словами: надо проверить, что S-полином любых $f_i, f_j \in F$ редуцируется к 0 относительно F.

2. Проверим редуцируемость к нулю полинома $S(f_1, f_2)$. Для этого найдём наименьшее общее кратное старших членов: $m = \text{НОК}(L(f_1), L(f_2)) = 4x_1x_2x_3^2$.

$$\begin{array}{c} m = L(f_1)\cdot 2x_3^2 \\ m = L(f_2)\cdot\ x_2 \end{array} \Rightarrow S(f_1, f_2) = 4x_1x_2x_3^2 + 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - (4x_1x_2x_3^2 + x_2^2x_3^3 - 4x_2)$$

Получаем: $S(f_1, f_2) = 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2$. Выполним следующие элементарные редукции:

$$\begin{aligned} & 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2 \xrightarrow{-2x_3\cdot f_2} \\ \xrightarrow{-2x_3\cdot f_2}\ & 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2 - (8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - 8x_3) = \\ =\ & -x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3 \xrightarrow{f_3} -x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3 + (x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = 0 \end{aligned}$$

Найденный полином редуцируется относительно F к нулю: $S(f_1, f_2) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$.

3. Проверим редуцируемость к нулю полинома $S(f_1, f_3)$. Для этого найдём наименьшее общее кратное старших членов: $m = \text{НОК}(L(f_1), L(f_3)) = 2x_1x_2^2x_3^3$.

$$\begin{array}{c} m = L(f_1)\cdot x_2x_3^3 \\ m = L(f_3)\cdot 2x_1 \end{array} \Rightarrow S(f_1, f_3) = 2x_1x_2^2x_3^3 + 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - (2x_1x_2^2x_3^3 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3)$$

Получаем: $S(f_1, f_2) = 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3$. Выполним следующие элементарные редукции:

$$\begin{aligned} & 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 \xrightarrow{-x_2x_3^2\cdot f_2} \\ \xrightarrow{-x_2x_3^2\cdot f_2}\ & 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - (4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - 4x_2x_3^2) = \\ =\ & 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2 \xrightarrow{-4\cdot f_1} 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2 - (8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2) = 0 \end{aligned}$$

Найденный полином редуцируется относительно F к нулю: $S(f_1, f_3) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$.

4. Проверим редуцируемость к нулю полинома $S(f_2, f_3)$. Для этого найдём наименьшее общее кратное старших членов: $m = \text{НОК}(L(f_2), L(f_3)) = 4x_1x_2^2x_3^3$.

$$\begin{array}{c} m = L(f_2)\cdot x_2^2x_3 \\ m = L(f_3)\cdot 4x_1 \end{array} \Rightarrow S(f_2, f_3) = 4x_1x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 - (4x_1x_2^2x_3^3 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3)$$

Получаем: $S(f_2, f_3) = x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3$. Выполним следующие элементарные редукции:

$$\begin{aligned} & x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3 \xrightarrow{-8\cdot f_1} \\ \xrightarrow{-8\cdot f_1}\ & x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3 - (16x_1x_2 + 32x_1x_3 + 8x_2x_3^2) = \\ =\ & x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 - 8x_2x_3^2 \xrightarrow{-x_2x_3\cdot f_3} x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 - 8x_2x_3^2 - (x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 - 8x_2x_3^2) = 0 \end{aligned}$$

Найденный полином редуцируется относительно F к нулю: $S(f_2, f_3) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$.

5. Другие S-полиномы также редуцируются к нулю:

$$S(f_2, f_1) = -S(f_1, f_2) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0 \qquad S(f_3, f_1) = -S(f_1, f_3) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0 \qquad S(f_3, f_2) = -S(f_2, f_3) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$$
$$S(f_1, f_1) = 0 \overset{F}{\rightsquigarrow} 0 \qquad S(f_2, f_2) = 0 \overset{F}{\rightsquigarrow} 0 \qquad S(f_3, f_3) = 0 \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$$

   Получаем, что для любых $f_i, f_j \in F$ их S-полином редуцируется к нулю относительно F.

6. Таким образом, по критерию Бухбергера: F – система Грёбнера.

Ответ: является системой Грёбнера

Задание 4. Докажите, что множество $F \subseteq K[x] \setminus \{0\}$ является системой Грёбнера тогда и только тогда, когда существует такой многочлен $f \in F$, который делит любой многочлен из F.

1. Докажем, что если $F = \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq K[x] \setminus \{0\}$ – система Грёбнера, то существует $f \in F$, который делит любой многочлен из F.

   Система F – система Грёбнера, значит, для разных цепочек элементарных редукций остаток многочлена относительно F определён однозначно, а также $S(f,g) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$ для всех f и g в F.

   – Пусть $f \in F$ – многочлен в F с минимальной степенью, то есть степени остальных многочленов в F больше либо равны $\deg f$.
   – Покажем, что других многочленов $\deg f$ с точностью до умножения на константу в F быть не может. Пусть $g \in F$ – другой многочлен $\deg g = \deg f$ и $f \neq C \cdot g$, тогда рассмотрим $S(f,g) = C_1 f - C_2 g$ (старшие члены f и g равны с точностью до умножения на константу).
   – Степень S меньше $\deg f$ (при определённых C_1, C_2 старшие члены f и g сокращаются), то есть S нередуцируем относительно F, так как всякий одночлен S не делится на старший член любого многочлена из F. Но $S(f,g) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$, значит, $S = 0$ и $f = C \cdot g$ – противоречие.
   – Рассмотрим S-полином многочленов f и $g \in F$. Пусть $\deg f = m$ и $\deg g = n$. Так как у f минимальная степень, а рассматриваемые многочлены – многочлены от одной переменной, получаем $\text{НОК}(L(f), L(g)) = L(g)$ и $S(f,g) = x^{n-m} f - g$.

     Проведём элементарную редукцию над рассматриваемым S-полиномом $x^{n-m} f - g$. Каждую редукцию будем проводить только с помощью многочлена f. Он имеет минимальную степень, поэтому может быть применён на любом этапе редукции.
   – В результате редукции получим остаток деления многочлена $S(f,g)$ на f. Так как этот остаток не зависит от цепочки редукций и $S(f,g) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$, получаем, что $S(f,g) \,\vdots\, f$.

     Последнее верно в силу $S(f,g) \xrightarrow{m_1 \cdot f} S'(f,g) \xrightarrow{m_2 \cdot f} \ldots \xrightarrow{m_k \cdot f} 0$, то есть следующая сумма равна нулю: $x^{n-m} f - g + m_1 f + m_2 f \ldots + m_k f = 0$. Каждое преобразование не меняет остаток деления $S(f,g)$ на f, а этот остаток равен 0.
   – Также взяв остатки от обеих частей описанного равенства относительно многочлена f получим: $x^{n-m} f - g + m_1 f + m_2 f \ldots + m_k f \underset{f}{\equiv} -g \underset{f}{\equiv} 0$. То есть g делится на f.

2. Докажем в другую сторону. Если в системе F существует многочлен, делящий любой многочлен рассматриваемой системы, то S-полином каждых $f_1, f_2 \in F$ делится на f:

   $$S(f_1, f_2) = \underbrace{m_1 f_1}_{\text{делится на } f} - \underbrace{m_2 f_2}_{\text{делится на } f}$$

   Так как S-полином каждых двух многочленов делится на f, для любых $f_1, f_2 \in F$ существует $g \in K[x] \setminus \{0\}$, такой что $S(f_1, f_2) = g \cdot f$. Значит $S(f_1, f_2) \xrightarrow{-g \cdot f} 0$, то есть редуцируется к нулю относительно системы F.

   По критерию Бухбергера: F – система Грёбнера.