



## PAPER ENTREGA FINAL MCOC

Sofía Castro  
mscastro@miuandes.cl  
Margarita Förster  
mforster@miuandes.cl  
Joaquín Muñoz  
jimunoz@miuandes.cl  
Fernanda Ordoñez  
fordonez@miuandes.cl

**RESUMEN:** En este trabajo se calculó la altura normal y la altura crítica de un canal trapezoidal con las siguientes características: tres metros y medio de ancho, pendiente 0.0014, coeficiente de Manning ( $n$ ) 0.012 y caudal de 10,827 [m<sup>3</sup>/s]. Para lograr lo anterior, se utilizó la ecuación de Manning, ecuación de Energía específica, y el método iterativo Newton-Raphson obteniendo una altura normal 1.56894 [m], altura crítica 0.99178 [m] y un número de Froude 0.9998, verificando que el resultado obtenido está correcto.

**PALABRAS CLAVE:** Altura crítica, Altura Normal, Newton-Raphson, canal trapezoidal.

## 1 INTRODUCCIÓN

A continuación se detalla el cálculo de la altura crítica a través del método Newton-Raphson.

## 2 FORMATO

### 2.1 ALTURA NORMAL

Para calcular la altura normal del canal trapezoidal, se utilizó la ecuación de Manning:

$$V = \frac{k}{n} R^{2/3} S_0^{1/2} \quad (1)$$

El caudal se obtuvo de la ecuación:

$$Q = v \cdot A \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de la ecuación (1) y (2) obtenemos:

$$Q = \frac{k}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2} \quad (3)$$

Por lo tanto, la ecuación a resolver para obtener la altura normal será:

$$f(y_n) = V - \frac{k}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2} - Q = 0 \quad (4)$$

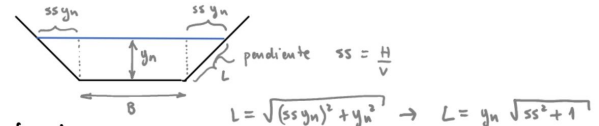


Figura 1. Canal trapezoidal (Moreno, 2018).

De la Fig. 1 obtenemos el área del canal:

$$A = B y_n + s \sqrt{y_n} \quad (5)$$

$$P = B + 2 y_n \sqrt{ss^2 + 1} \quad (6)$$

Derivando la ecuación (5) y (6):

$$\frac{\partial A}{\partial y} = B + 2 ss y_n \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 \sqrt{(ss^2 + 1)} \quad (8)$$

$$f'(y_n) = \frac{5}{3} P^{-2/3} A^{-2/3} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{2}{3} A^{-5/3} P^{-5/3} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (9)$$

### 2.2 ALTURA CRÍTICA

Para calcular la altura crítica del canal trapezoidal, se procedió a utilizar la ecuación de Energía específica:

$$E = y + \frac{v^2}{2g} \quad (10)$$

Introduciendo la ecuación (2) en la (9) se obtiene:

$$E = y + \frac{Q^2}{2A^3g} \quad (11)$$

en donde el área está en función de y:

$$A = f(y) \quad (12)$$

La altura crítica  $y_c$  se obtiene cuando la energía específica es mínima, por lo que hay que derivar la ecuación (11):

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \quad (13)$$

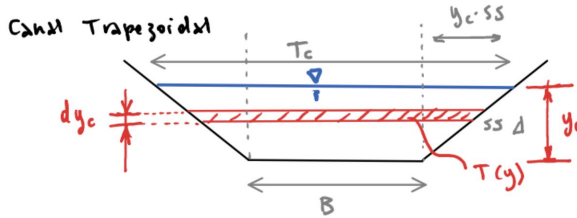


Figura 2. Canal trapezoidal (Moreno, 2018).

De la Fig. 2 se determinó la distancia de la superficie en función del área crítica y de la altura crítica:

$$T_c = \frac{\partial A_c}{\partial y_c} \quad (14)$$

La ecuación (14) se reemplazó en la (11) para dejar la derivada de la ecuación de Energía específica en función de la  $T_c$ :

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 1 - \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{T_c}{A^3} \quad (15)$$

Reordenando la ecuación (15), se obtiene la ecuación a usar para el algoritmo Newton-Raphson:

$$f(y_c) = \frac{A^3}{T_c} - \frac{Q^2}{g} \quad (16)$$

## 2.3 ALTURA DE AGUA EN FLUJO GRADUALMENTE VARIADO UTILIZANDO MÉTODO ESTÁNDAR

Se utiliza la Ecuación de Bernoulli (17) para encontrar una expresión para obtener la altura de agua:

$$H = z - \frac{p}{\gamma} + \frac{qV^2}{2g} \quad (17)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de correlación.

En canales abiertos, la presión es hidrostática es):

$$P = y \cdot \gamma \quad (18)$$

Por lo tanto, reemplazando la ecuación (2) y (18) en (17), se obtiene (19):

$$H = z + y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (19)$$

Entre dos secciones de río o canal se cumple que:

$$H_1 = H_2 + h_L \quad (20)$$

Y el promedio entre las secciones es:

$$S_{f1} = \frac{1}{2}(S_{f1} + S_{f2}) \Delta x \quad (21)$$

Reemplazando (21) en (20):

$$H_2 - H_1 + \frac{1}{2}\Delta x(S_{f1} + S_{f2}) = 0 \quad (22)$$

La ecuación (22) es la función utilizada en el Método Estándar para obtener la altura de agua en un flujo gradualmente variado.

## 2.4 ECUACIÓN DE SAINT VENANT

La ecuación de Saint Venant se puede derivar de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2g} + y \right) = (S_0 - S_f) \quad (24)$$

Reordenando (23) y (24), tenemos:

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2g} \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (25)$$

Las ecuaciones de Onda Cinemática son (23) y:

$$S_f = S_0 \quad (26)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior, se ocupa la ecuación de Manning (4), y despejando el área A obtenemos:

$$A = \left( \frac{nP^{2/3}}{C_m S_0^{1/2}} \right) Q^{3/5} = \alpha Q^\beta \quad (27)$$

donde

$$\alpha = \left( \frac{nP^{2/3}}{C_m S_0^{1/2}} \right)^\beta ; \text{ y } \beta = \frac{3}{5} \quad (28)$$

Se necesita discretizar el espacio. Entonces:

$$\Delta x = \frac{L}{N-1} \quad (29)$$

donde la estabilidad y precisión del modelo dependen del valor N.

Discretizando las ecuaciones (i indica espacio, k indica tiempo), se obtiene:

$$\frac{A_i^{k+1} - A_i^k}{\Delta t} + \frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}}{\Delta x} = 0 \quad (30)$$

Como condiciones iniciales, se asume flujo uniforme y permanente antes de que ingrese el caudal latente. Por lo tanto, conocemos Q, A y V iniciales ( $t = 0$ )

Para calcular los siguientes caudales, se utiliza la siguiente expresión:

$$Q_{i+1}^{k+1} = Q_i^{k+1} - \frac{\Delta}{\Delta x} (A_i^{k+1} - A_i^k) \quad (31)$$

Y para calcular los  $A_{i+1}^{k+1}$  e  $y_{i+1}^{k+1}$ , se ocupan las ecuaciones (27) y (28). Pero como A y P dependen de y, y es una dependencia no lineal, se utiliza Newton Raphson.

### 3 RESULTADOS

Con lo mencionado anteriormente, se crearon dos códigos en Python, uno para la altura normal y otro para la altura crítica. De esto obtuvimos los siguientes resultados:

- $y_n = 1.56894$  [m]
- $y_c = 0.99178$  [m]
- $Fr = 0.9998$  [m]

### 4 CONCLUSIONES

A modo de conclusión, se puede ver que los resultados obtenidos son correctos. En primer lugar, para que un canal se encuentre en régimen crítico su número de Froude debe ser uno. En nuestro caso, al calcular este con la altura crítica nos da un valor muy cercano a uno, esto se debe a la tolerancia de diseño, así comprobando que el resultado es correcto.

### 5 REFERENCIAS

[1] ENTREGA 1

[https://github.com/MargaritaForster/MCOC\\_Proyect\\_3/blob/master/Proyecto3%20Entrega%201.py](https://github.com/MargaritaForster/MCOC_Proyect_3/blob/master/Proyecto3%20Entrega%201.py)

[2] ENTREGA 2

[https://github.com/MargaritaForster/MCOC\\_Proyect\\_3/blob/master/Proyecto3%20Entrega%202.py](https://github.com/MargaritaForster/MCOC_Proyect_3/blob/master/Proyecto3%20Entrega%202.py)

Figura 1.

Moreno, P., 2018. *Saf.* [En línea]

Available at:

<https://www.dropbox.com/s/sbej1oe4dcvurk6/ynormal%20y%20newton%20raphson%20alg.pdf?dl=0>

[Último acceso: 30 Octubre 2018].

Figura 2.

Moreno, P., 2018. *Saf.* [En línea]

Available at:

<https://www.dropbox.com/s/9g7itnpz7xuss7t/ynormal%20e%20ycritico.pdf?dl=0>

[Último acceso: 30 Octubre 2018].

[3] ENTREGA 4

[https://github.com/MargaritaForster/MCOC\\_Proyect\\_3/blob/master/Entrega4.py](https://github.com/MargaritaForster/MCOC_Proyect_3/blob/master/Entrega4.py)