

Отчёт по лабораторной работе №5

Математическое моделирование

Модель хищник-жертва. Вариант №38

Щербак Маргарита Романовна, НПИбд-02-21

2024

Содержание

Цель работы	4
Теоретическое введение	5
Выполнение лабораторной работы	6
Задание. Вариант 38	6
Julia	6
OpenModelica	12
Анализ и сравнение результатов	17
Выводы	18
Список литературы	19

Список иллюстраций

1	график зависимости численности хищников от численности жертв . . .	9
2	график изменения численности хищников и численности жертв со временем	10
3	стационарное состояние	12
4	код в OpenModelica	13
5	параметры симуляции	14
6	график зависимости численности хищников от численности жертв . . .	15
7	график изменения численности хищников и численности жертв со временем	15
8	стационарное состояние	16

Цель работы

Рассмотреть простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник - жертва» — модель Лотки-Вольтерры. С помощью рассмотренного примера научиться решать задачи такого типа.

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник - жертва» — модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв и хищников зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории);
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

Данная модель описывается следующим уравнением:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = cy(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

где x - число хищников; y - число жертв; a, d - коэффициенты смертности; b, c - коэффициенты прироста популяции.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}$, $y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет [Lotka_Volterra].

Выполнение лабораторной работы

Задание. Вариант 38

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.7x(t) + 0.06x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.6y(t) - 0.07x(t)y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при начальных условиях: $x_0 = 8$, $y_0 = 15$. Найти стационарное состояние системы.

Julia

Julia – это высокоуровневый язык программирования с динамической типизацией, созданный для эффективных математических вычислений и написания программ общего назначения [@julialang]. Для решения дифференциального уравнения, описанного в постановке задачи лабораторной работы, можно использовать библиотеку DifferentialEquations. Для построения графиков можно воспользоваться библиотекой Plots.

Код реализует модель хищник-жертва и строит графики, иллюстрирующие изменение численности хищников и жертв со временем.

```
using Plots
using DifferentialEquations
```

```

# начальные условия
x0 = 8
y0 = 15

a = 0.7 # коэффициент естественной смертности хищников
b = 0.06 # коэффициент естественного прироста жертв
c = 0.6 # коэффициент увеличения числа хищников
d = 0.07 # коэффициент смертности жертв

function f(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 200.0)
prob = ODEProblem(f, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi=300,
    legend=false)

plot!(

```

```

plt,
Y,
X,
color=:blue)

# зависимость числ-ти хищников от числ-ти жертв в виде фазового портрета
savefig(plt, "lab05_1.png")

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:red)

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:green)

# изменение численности хищников и жертв
savefig(plt2, "lab05_2.png")

```

График зависимости численности хищников от численности жертв в виде фазового

портрета представлен на рис.1, а график изменения численности хищников и жертв со временем представлен на рис.2.

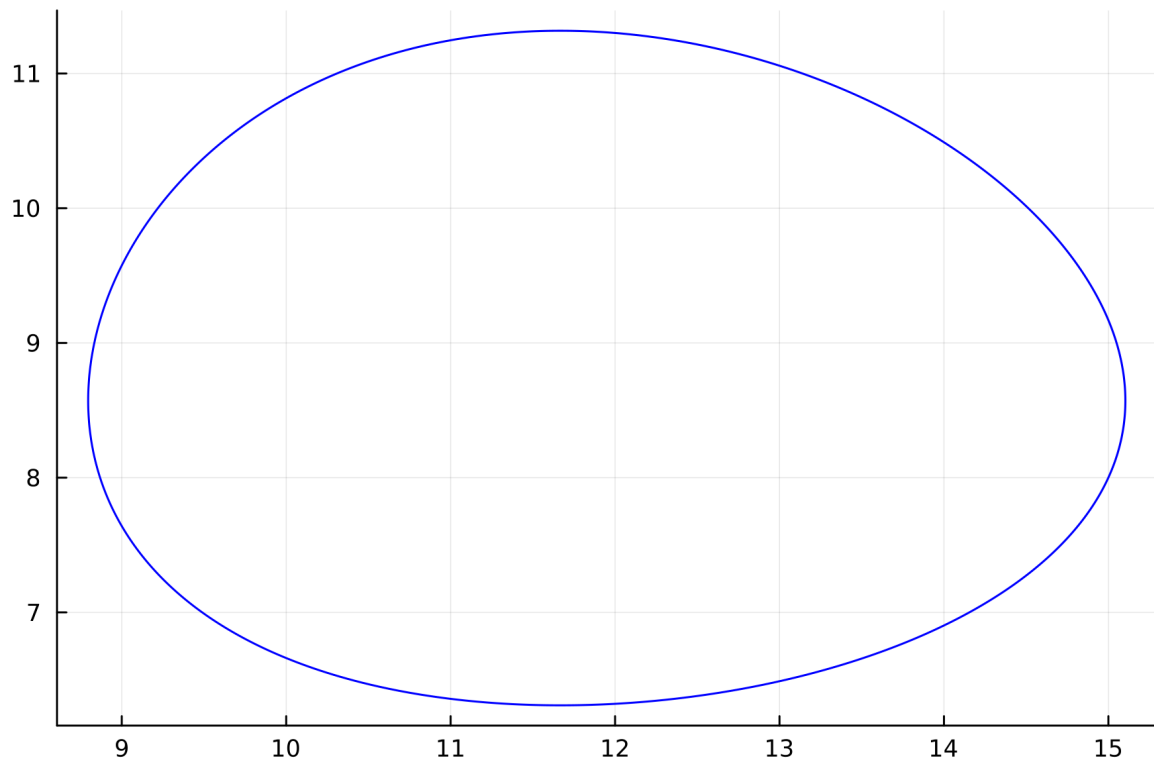


Рис. 1: график зависимости численности хищников от численности жертв

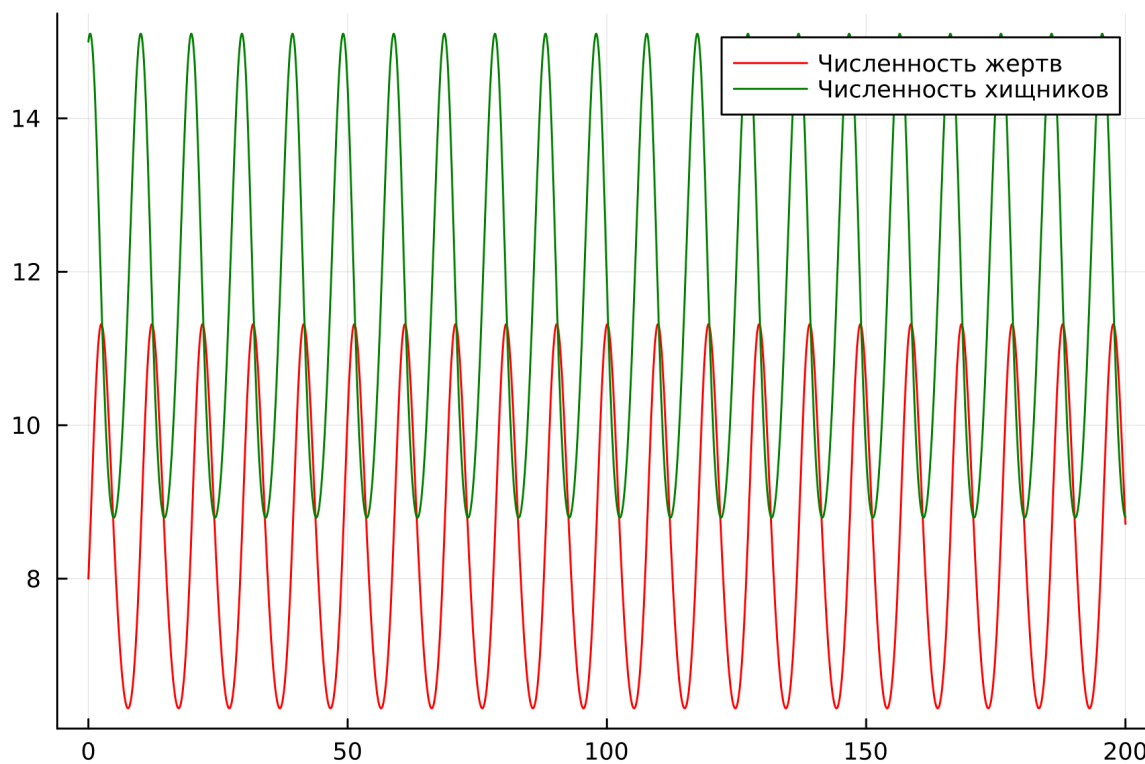


Рис. 2: график изменения численности хищников и численности жертв со временем

График стационарного состояния представлен на рис.3.

using Plots

using DifferentialEquations

$a = 0.7$ # коэффициент естественной смертности хищников

$b = 0.06$ # коэффициент естественного прироста жертв

$c = 0.6$ # коэффициент увеличения числа хищников

$d = 0.07$ # коэффициент смертности жертв

$x_0 = c / d$

$y_0 = a / b$

```

function f(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

```

```

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 200.0)
prob = ODEProblem(f, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

```

```

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

```

```

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:red)

```

```

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,

```

```
label="Численность хищников",  
color=:green)
```

```
savefig(plt2, "lab05_3.png")
```

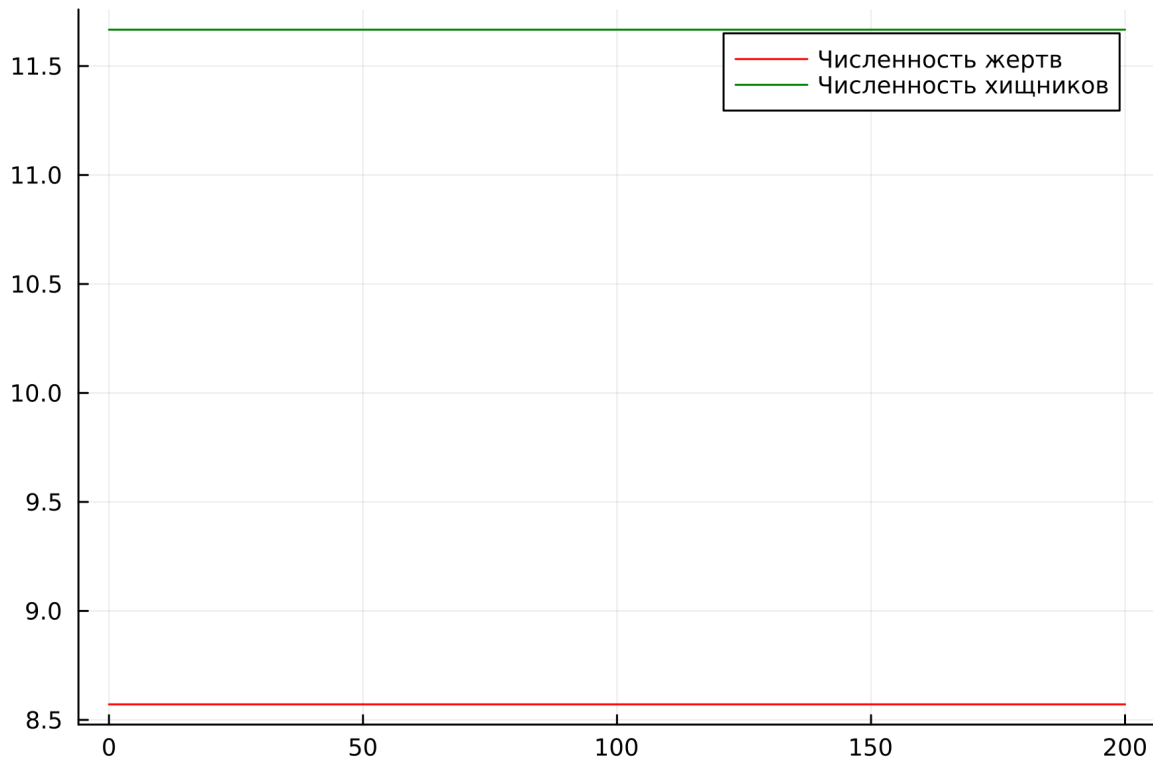
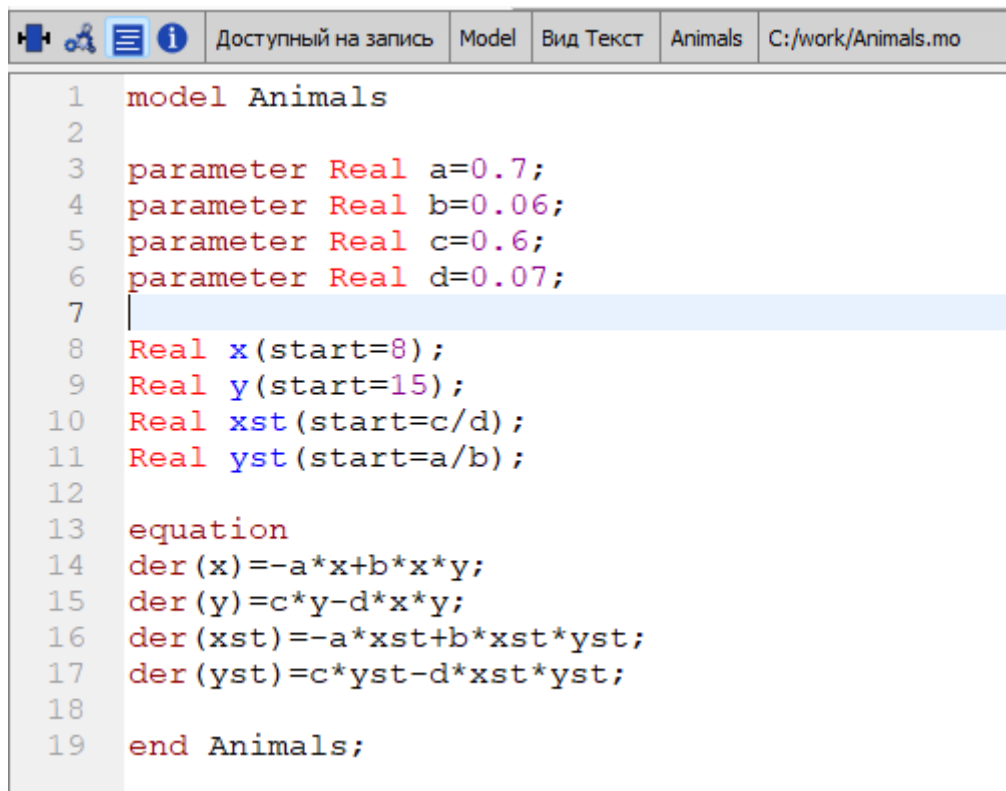


Рис. 3: стационарное состояние

OpenModelica

OpenModelica – это свободное программное обеспечение для моделирования и анализа сложных динамических систем, основанное на языке Modelica. OpenModelica приближается по функциональности к таким инструментам, как Matlab Simulink и Scilab xCos, но обладает более удобным представлением системы уравнений [[@modelica](#)]. Написала код в OpenModelica (рис.4).



```
1 model Animals
2
3 parameter Real a=0.7;
4 parameter Real b=0.06;
5 parameter Real c=0.6;
6 parameter Real d=0.07;
7
8 Real x(start=8);
9 Real y(start=15);
10 Real xst(start=c/d);
11 Real yst(start=a/b);
12
13 equation
14 der(x)=-a*x+b*x*y;
15 der(y)=c*y-d*x*y;
16 der(xst)=-a*xst+b*xst*yst;
17 der(yst)=c*yst-d*xst*yst;
18
19 end Animals;
```

Рис. 4: код в OpenModelica

Настроила параметры симуляции (рис.5).

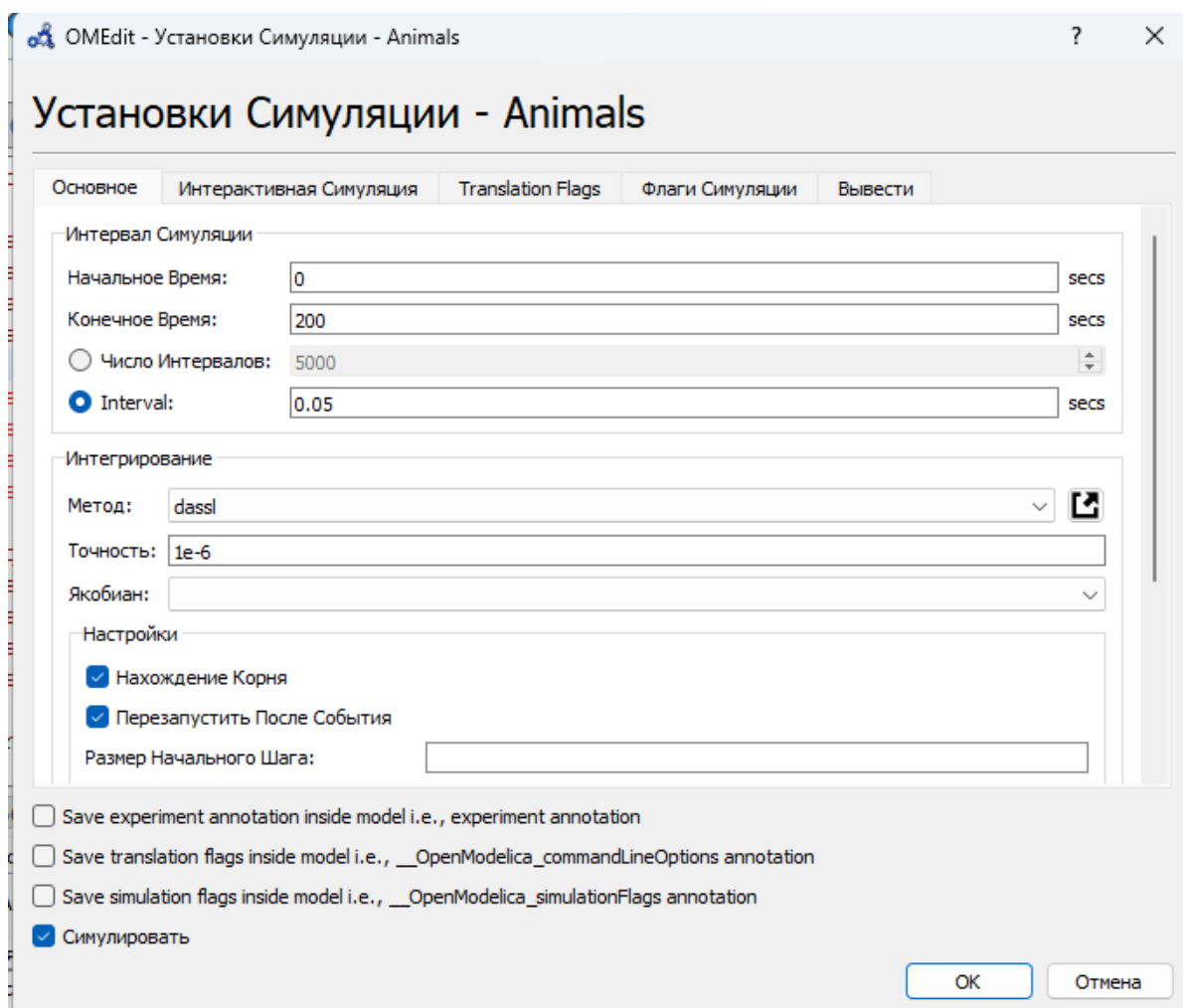


Рис. 5: параметры симуляции

Получила график зависимости численности хищников от численности жертв, график изменения численности хищников и численности жертв со временем и нашла стационарное состояние системы (рис.6 - рис.8).

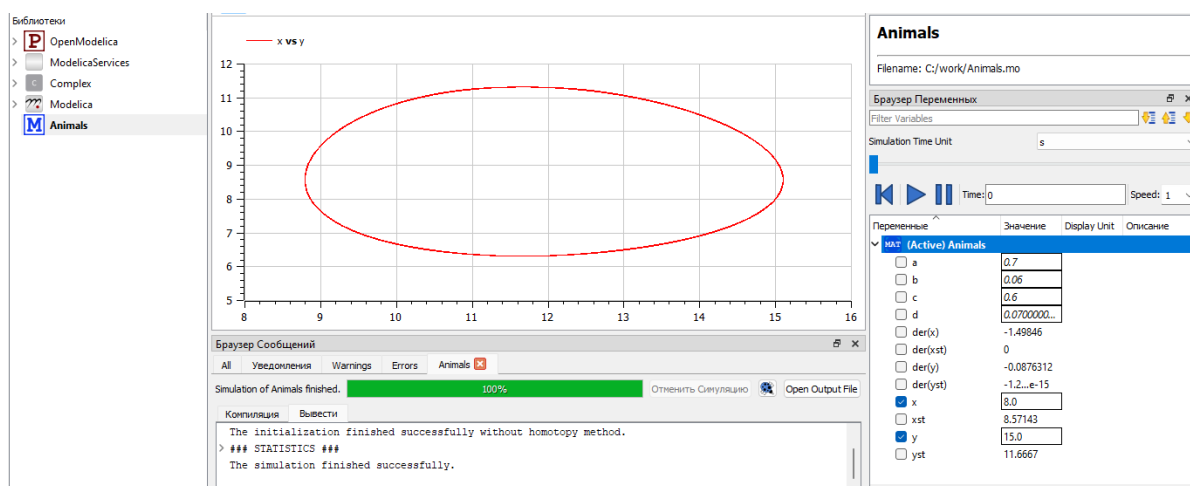


Рис. 6: график зависимости численности хищников от численности жертв

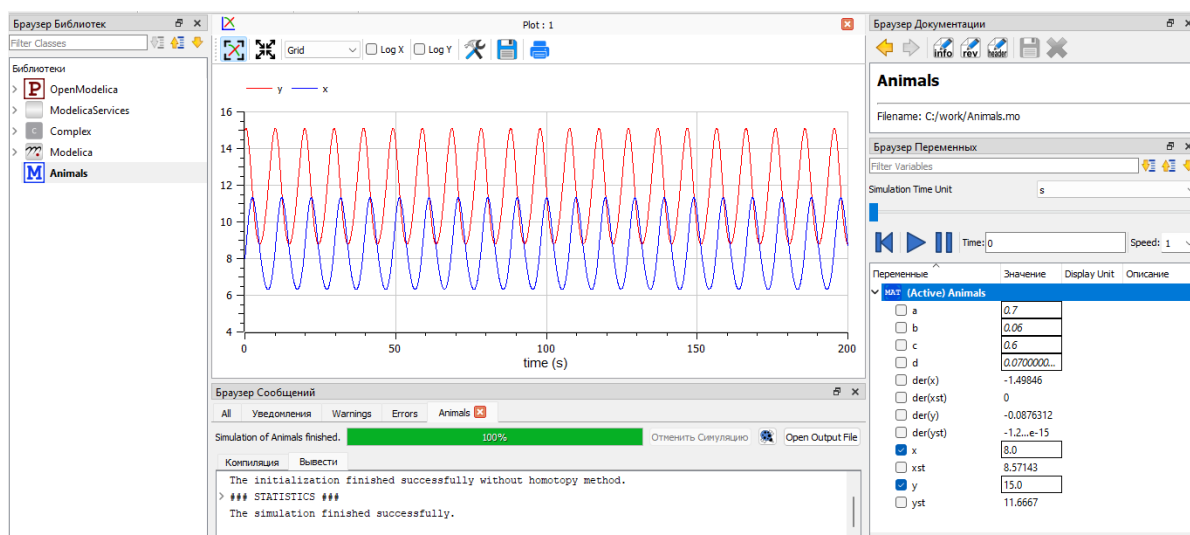


Рис. 7: график изменения численности хищников и численности жертв со временем



Рис. 8: стационарное состояние

Анализ и сравнение результатов

В результате работы я построила график зависимости численности хищников от численности жертв, график изменения численности хищников и численности жертв со временем, а также стационарное состояние на языках Julia и Modelica. Графики схожи.

Выводы

Таким образом, в ходе ЛР№5 я рассмотрела простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник - жертва» — модель Лотки-Вольтерры. С помощью рассмотренного примера научилась решать задачи такого типа.

Список литературы

1. The Lotka-Volterra model [Электронный ресурс]. Lotka_Volterra, 2023. URL: https://math-it.petrus.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/Lotka_Volterra.pdf.
2. Julia 1.10 Documentation [Электронный ресурс]. JuliaLang, 2023. URL: <https://docs.julialang.org/en/v1/>.
3. OpenModelica User's Guide [Электронный ресурс]. Open Source Modelica Consortium, 2024. URL: <https://openmodelica.org/doc/OpenModelicaUsersGuide/latest/>.