Отчёт по лабораторной работе №6 Математическое моделирование

Задача об эпидемии. Вариант №38

Щербак Маргарита Романовна, НПИбд-02-21

2024

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Рассмотреть простейшую модель эпидемии. С помощью рассмотренного примера научиться решать задачи такого типа.

Теоретическое введение

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа – это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей [@epidemiological_models].

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{, если } I(t) > I^* \\ 0 & \text{, если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, то есть:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{, если } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{, если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Выполнение лабораторной работы

Задание. Вариант 38

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 12700$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 170$, а число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 57$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1) если $I(0) \leq I^*$
2) если $I(0) > I^*$

Julia

Julia – это высокоуровневый язык программирования с динамической типизацией, созданный для эффективных математических вычислений и написания программ общего назначения [@julialang]. Для решения дифференциального уравнения, описанного в постановке задачи лабораторной работы, можно использовать библиотеку DifferentialEquations. Для построения графиков можно воспользоваться библиотекой Plots.

Код моделирует распространение инфекции на острове с помощью модели SIR (восприимчивые — S, инфицированные — I, иммунные — R) для случая $I(0) \leq I^*$. На графике видно, что все больные изолированы и не заражают здоровых (рис.1).

```
#I0 <= I*

using Plots
using DifferentialEquations

N = 12700 # все проживающие на острове
I0 = 170 # заболевшие
R0 = 57 # с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # восприимчивые к болезни, но пока здоровые
alpha = 0.01 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.02 # коэффициент выздоровления

function f(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = 0
    du[2] = -beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 800.0)
prob = ODEProblem(f, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
```

```
plt = plot(
  dpi = 600,
  legend = :topright)
plot!(
  plt,
  T,
  S,
  label = "восприимчивые к болезни, но пока здоровые",
  color = :green)
plot!(
  plt,
  T,
  I,
  label = "заболевшие ",
  color = :red)
plot!(
  plt,
  T,
  R,
  label = "с иммунитетом",
  color = :blue)

savefig(plt, "lab6_1.png")
```

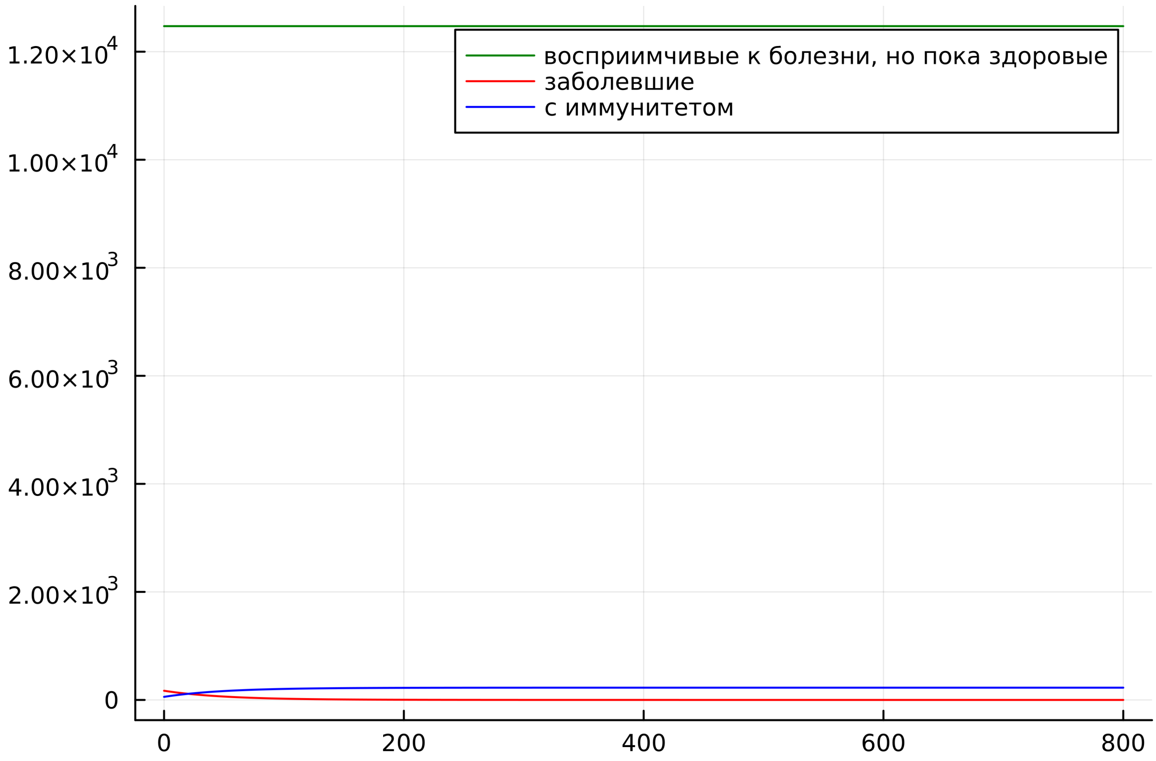


Рис. 1: динамика численности каждой группы для 1 случая

Код моделирует распространение инфекции на острове с помощью модели SIR для случая $I(0) > I^*$. На графике видно, что инфицированные способны заражать восприимчивых к болезни. Количество здоровых, но восприимчивых к болезни особей (S) со временем уменьшается и идет прирост здоровых с иммунитетом к болезни (R). Количество инфицированных распространителей (I) вначале увеличивается, затем уменьшается по мере роста здоровых с иммунитетом к болезни (R) (рис.2).

```
#I0 > I*

using Plots
using DifferentialEquations

N = 12700 # все проживающие на острове
```

```
I0 = 170 # заболевшие
R0 = 57 # с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # восприимчивые к болезни, но пока здоровые
alpha = 0.01 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.02 # коэффициент выздоровления

function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = -alpha*u[1]
    du[2] = alpha*u[1] - beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 800.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
  dpi=600,
  legend=:right)

plot!(
  plt,
```

```
  T,
  S,
  label = "восприимчивые к болезни, но пока здоровые",
  color = :green)
plot!(
  plt,
  T,
  I,
  label = "заболевшие ",
  color = :red)
plot!(
  plt,
  T,
  R,
  label = "с иммунитетом",
  color = :blue)


savefig(plt, "lab6_2.png")
```

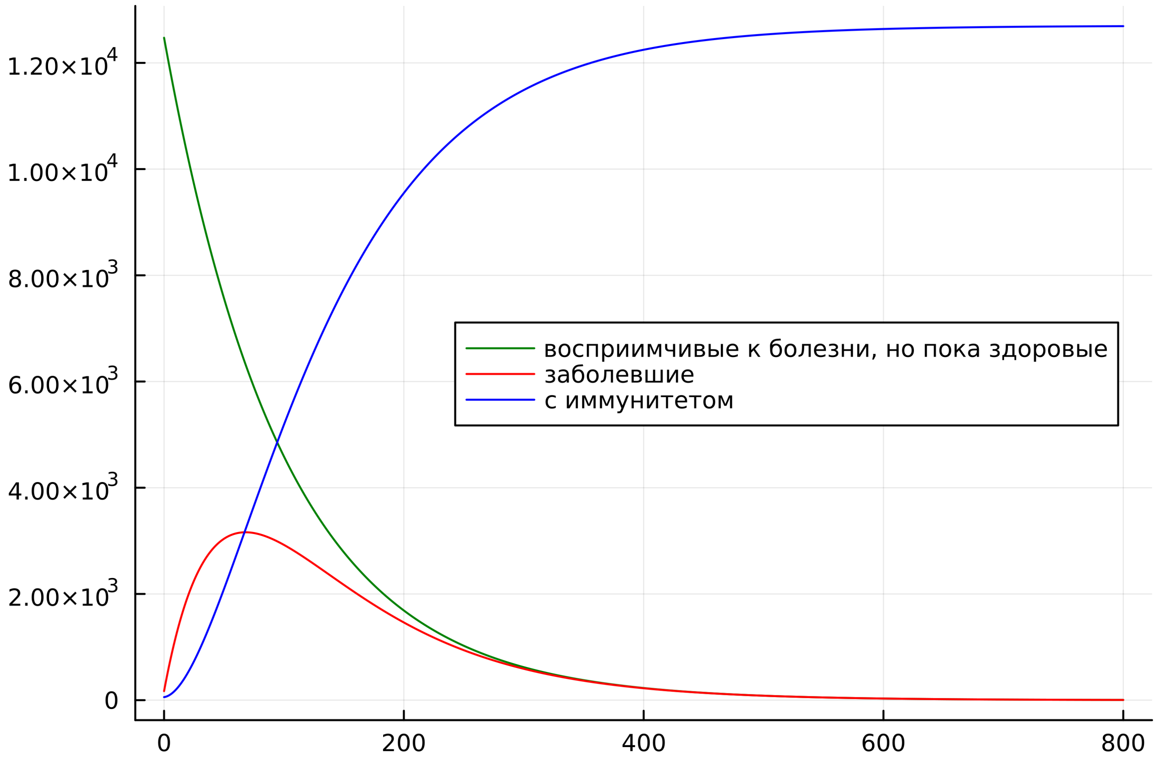
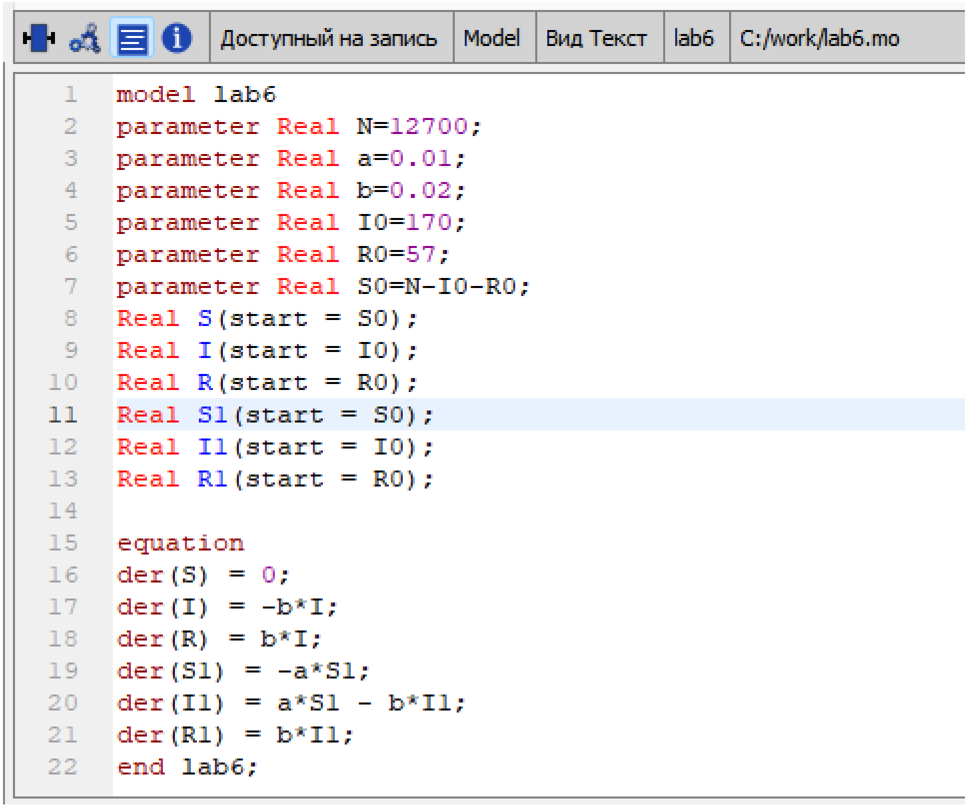


Рис. 2: динамика численности каждой группы для 2 случая

OpenModelica

OpenModelica – это свободное программное обеспечение для моделирования и анализа сложных динамических систем, основанное на языке Modelica. OpenModelica приближается по функциональности к таким инструментам, как Matlab Simulink и Scilab xCos, но обладает более удобным представлением системы уравнений [@modelica]. Написала код в OpenModelica (рис.3).




```
model lab6
parameter Real N=12700;
parameter Real a=0.01;
parameter Real b=0.02;
parameter Real I0=170;
parameter Real R0=57;
parameter Real S0=N-I0-R0;
Real S(start = S0);
Real I(start = I0);
Real R(start = R0);
Real S1(start = S0);
Real I1(start = I0);
Real R1(start = R0);

equation
der(S) = 0;
der(I) = -b*I;
der(R) = b*I;
der(S1) = -a*S1;
der(I1) = a*S1 - b*I1;
der(R1) = b*I1;
end lab6;
```

Рис. 3: код в OpenModelica

Код описывает модель распространения инфекции на острове с помощью модели SIR (восприимчивые - S, инфицированные - I, иммунные - R) для 1 случая $I(0) \leq I^*$ и для 2 случая $I(0) > I^*$(рис.4).

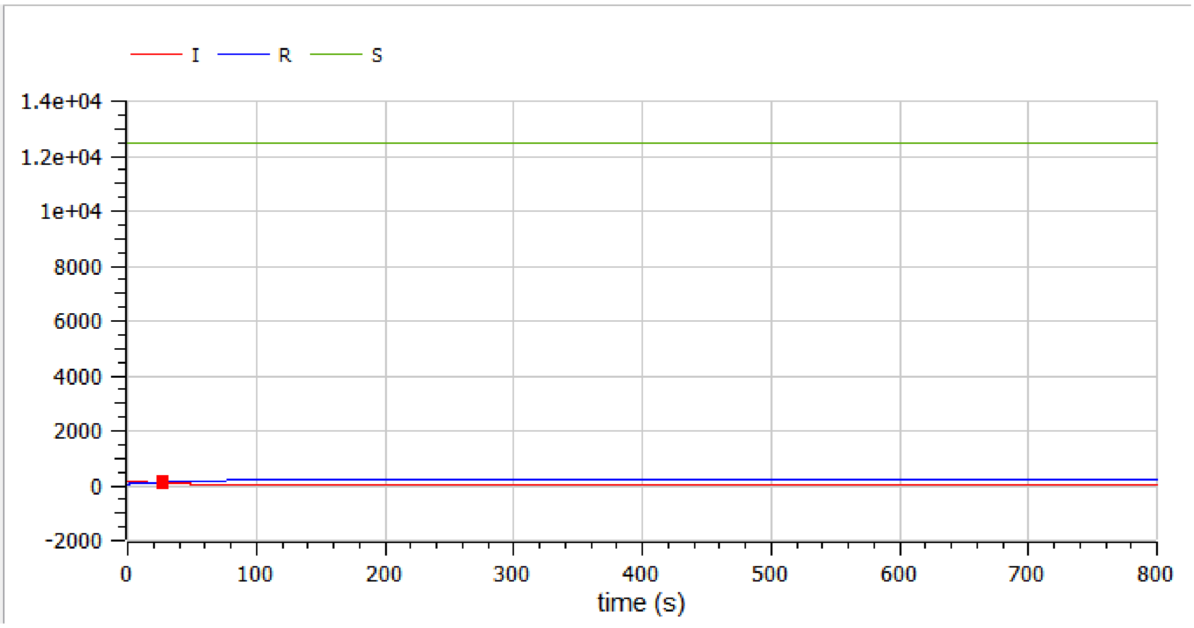


Рис. 4: динамика численности каждой группы для 1 случая

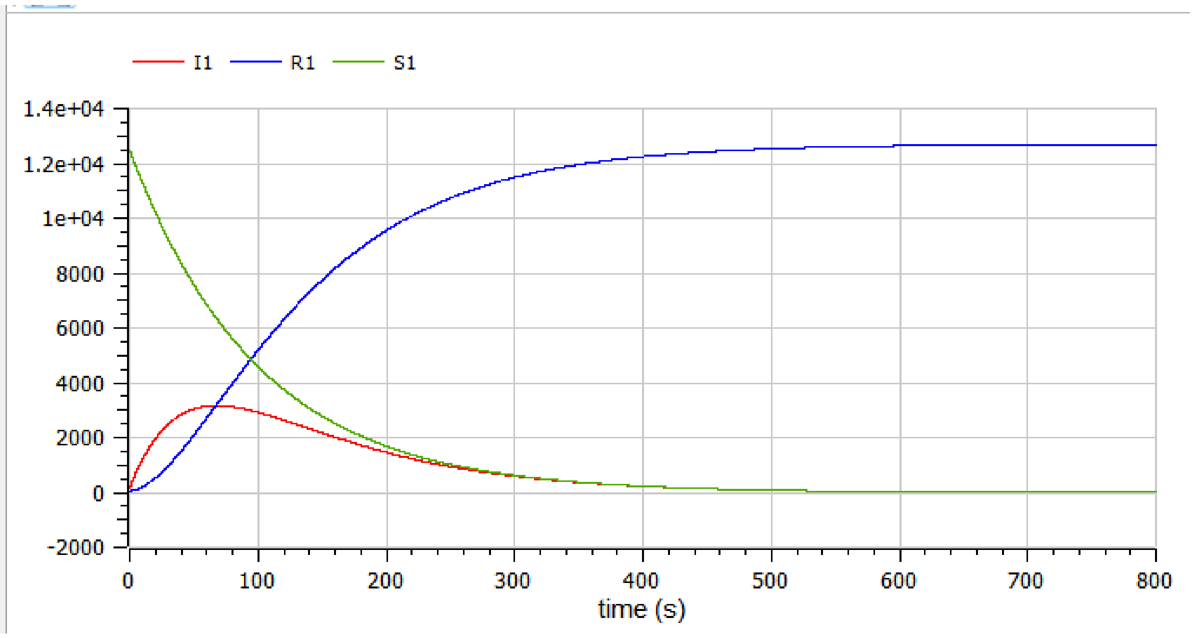


Рис. 5: динамика численности каждой группы для 2 случая

Анализ и сравнение результатов

В результате работы я построила графики зависимости численности особей трех групп S, I, R для случаев, когда больные изолированы и когда они могут заражать особей группы S. Графики на двух языках одинаковые. В первом случае на графике видно, что все больные изолированы и не заражают здоровых, а во втором случае видно, что инфицированные передают болезнь восприимчивым. В начале количество восприимчивых уменьшается, а затем растет количество иммунных к болезни. Количество инфицированных сначала растет, а затем уменьшается по мере роста иммунитета к болезни.

Выводы

Таким образом, в ходе ЛР№6 я рассмотрела простейшую модель эпидемии. С помощью рассмотренного примера научилась решать задачи такого типа.