Seeds: Random effect logistic regression

Lacoste-Badie Romane, Touzé Margaux & Loisel Camille

• <u>Présentation des données</u>

Pour ce projet, les données proviennent de la Table 3 de Crowder (1978). Elles concernent la proportion de graines ayant germé sur chacune des parcelles étudiées, réparties selon le type de graine et de racine. En effet, nous nous intéressons à des graines Bean et Cucumber pour des racines de type *O. aegyptiaco 75* et *O. aegyptiaco 73*. Les valeurs sont les suivantes :

	seed O. aegyptiaco 75						*seed O. aegyptiaco 73*				
	Bean			Cucumber			Bean			Cucumber	
r	n	r/n	r	n	r/n	r	n	r/n	r	n	r/n
10	39	0.26	5	6	0.83	8	16	0.50	3	12	0.25
23	62	0.37	53	74	0.72	10	30	0.33	22	41	0.54
23	81	0.28	55	72	0.76	8	28	0.29	15	30	0.50
26	51	0.51	32	51	0.63	23	45	0.51	32	51	0.63
17	39	0.44	46	79	0.58	0	4	0.00	3	7	0.43
			10	13	0.77						

<u>Figure 1</u> : Données Seeds

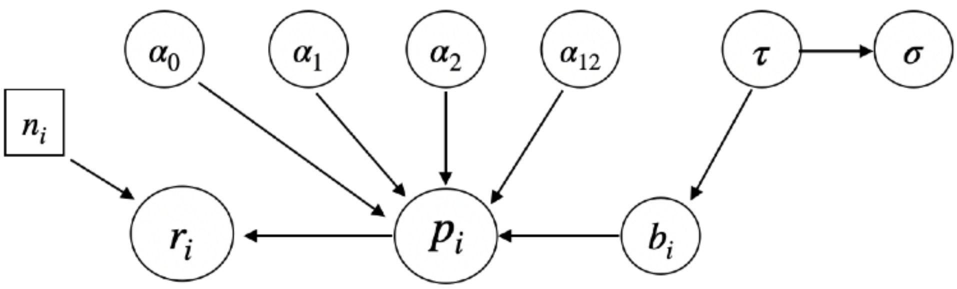
où r_i et n_i correspondent respectivement au nombre de graines qui ont germé et au nombre total de graines plantées sur la parcelle i.

Notons p_i la probabilité qu'une graine germe sur la parcelle i. On suppose ensuite :

$$r_i \sim Binomial(p_i, n_i)$$
$$logit(p_i) = \alpha_0 + \alpha_1 . x_{1i} + \alpha_2 . x_{2i} + \alpha_{12} . x_{1i} . x_{2i} + b_i$$
$$b_i \sim \mathcal{N}(0,\tau)$$

où x_{1i} et x_{2i} correspondent au type de graine et de racine de la parcelle i, avec un terme d'interaction $\alpha_{12} . x_{1i} . x_{2i}$. De plus, les paramètres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$ et τ suivent des lois a priori indépendantes et non-informatives.

Ainsi, on obtient le modèle suivant :



<u>Figure 2</u> : Modèle Seeds

• <u>Justification du modèle</u>

Tout d'abord, le choix d'une loi binomiale pour r_i parait naturel car il correspond au nombre de graines germées sur la parcelle i. Pour le calculer, on regarde bien le nombre de succès (la graine a germé) sur le nombre total n_i de graines plantées, sachant p_i, la probabilité qu'une graine germe.

Ensuite, pour p_i, on effectue une régression logistique avec les variables x_{1i}, x_{2i}, $x_{1i}\,.\,x_{2i}$ et une constante afin de se ramener à des probabilités entre 0 et 1. On ajoute également un bruit b_i, propre à chaque parcelle i.

• <u>Calculs mathématiques</u>

L'objectif de cette partie est de calculer les lois conditionnelles de $\tau, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$ et b_i.

Comme $\tau = \dfrac{1}{\sigma^2}$ où $\tau \sim Gamma(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = \beta = 0.001$ et $b_i \sim \mathcal{N}(0,\tau)$, on a :

$$\begin{aligned}
\pi(\tau\,|\,\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, b_i, r_i) \quad &\alpha \quad \pi(\tau)\,.\,\pi(b_i\,|\,\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, r_i, \tau) \\
&\alpha \quad \tau^{\alpha-1}\,.\,exp(-\beta\tau)\,.\,\tau^{\frac{I}{2}}\,.\,exp\left(-\frac{1}{2}\tau\sum_{i=1}^{I} b_i^2\right) \\
&\alpha \quad \tau^{\alpha+\frac{I}{2}-1}\,.\,exp\left(-\tau\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^{I} b_i^2}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

, où $I = 21$.

Ainsi, on obtient :

$$\tau \sim Gamma\left(\alpha + \frac{I}{2}; \beta + \frac{\sum_{i=1}^{I} b_i^2}{2}\right) \text{ avec } \alpha = \beta = 0.001.$$

De plus, comme $r_i \sim Binomial(p_i, n_i)$ et $\alpha_0 \sim \mathcal{N}(0{,}10^6)$, on a :

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha_0\,|\,\tau, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, b_i, r_i) \quad &\alpha \quad \pi(\alpha_0)\,.\,\pi(r_i\,|\,\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, b_i, \tau) \\
&\alpha \quad exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{2.10^6}\right).\prod_{i=1}^{I} p_i^{r_i}\,.\,(1-p_i)^{n_i - r_i}
\end{aligned}$$

Les paramètres α_1, α_2 et α_{12} suivent la même loi normale que α_0. Par conséquent, le calcul de leur loi conditionnelle est le même.

Enfin, pour b_i on obtient :

$$\begin{aligned}
\pi(b_i\,|\,\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \tau, r_i) \quad &\alpha \quad \pi(b_i\,|\,\tau)\,.\,\pi(r_i\,|\,\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, b_i, \tau) \\
&\alpha \quad exp\left(-\frac{\tau}{2}\,.\,b_i^2\right).\prod_{i=1}^{I} p_i^{r_i}\,.\,(1-p_i)^{n_i - r_i}
\end{aligned}$$

• <u>Analyse des résultats</u>

	α_0	α_1	α_2	α_{12}	τ
Mean	-0.52	0.07	1.30	-0.78	$9.25.10^1$
Sd	0.15	0.25	0.24	0.37	$6.28.10^2$
Median	-0.54	0.09	1.30	-0.79	$1.50.10^1$
Quantile 2.5%	-0.81	-0.45	0.78	-1.42	3.19
Quantile 97.5%	-0.21	0.55	1.73	0.06	$2.65.10^2$

<u>Figure 3</u> : Estimation finale des paramètres

Les estimations des b_i sont visibles dans le Rmd joint à cette présentation. Ils sont globalement tous très proches de 0. Nous en concluons qu'il n'y a pas d'effet direct de la parcelle sur la probabilité de germination.

La constante α_0 vaut environ -0.53. Le coefficient α_1 est très proche de 0 donc la variable x_{1i}, i.e le type de racine (*O. aegyptiaco 75* et *O. aegyptiaco 73*), influence très peu la probabilité de germination. En revanche, le coefficient α_2, associé au type de graine (Bean ou Cucumber), vaut 1.30. Le type Cucumber étant codé en 1, la probabilité de germination pour une graine Cucumber est plus élevée que pour une graine Bean. Enfin, le coefficient α_{12} vaut -0.78, ce qui signifie que la probabilité de germination baisse lorsque la graine plantée est de type Cucumber et que la racine est de type *O. aegyptiaco 73*.

En résumé, nous recommandons de planter des graines Cucumber avec un type de racine *O. aegyptiaco 75,* pour avoir plus de chances de germination.