Travaux pratiques sous python, à télécharger !

Introduction pratique à la corrélation d'images numérique (DIC)

Master DMS – Cours Identification

Pierre Margerit

pierre.margerit@polytechnique.edu

École des Ponts ParisTech

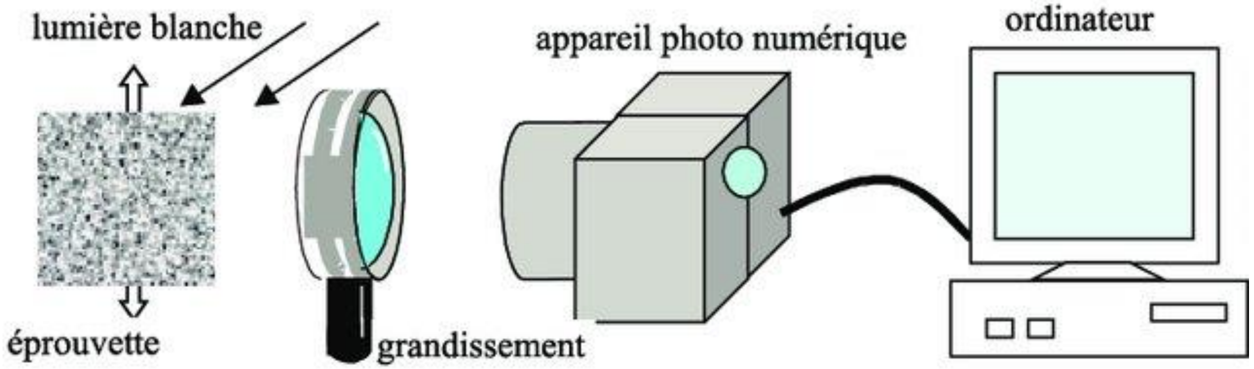
Corrélation d'images numérique

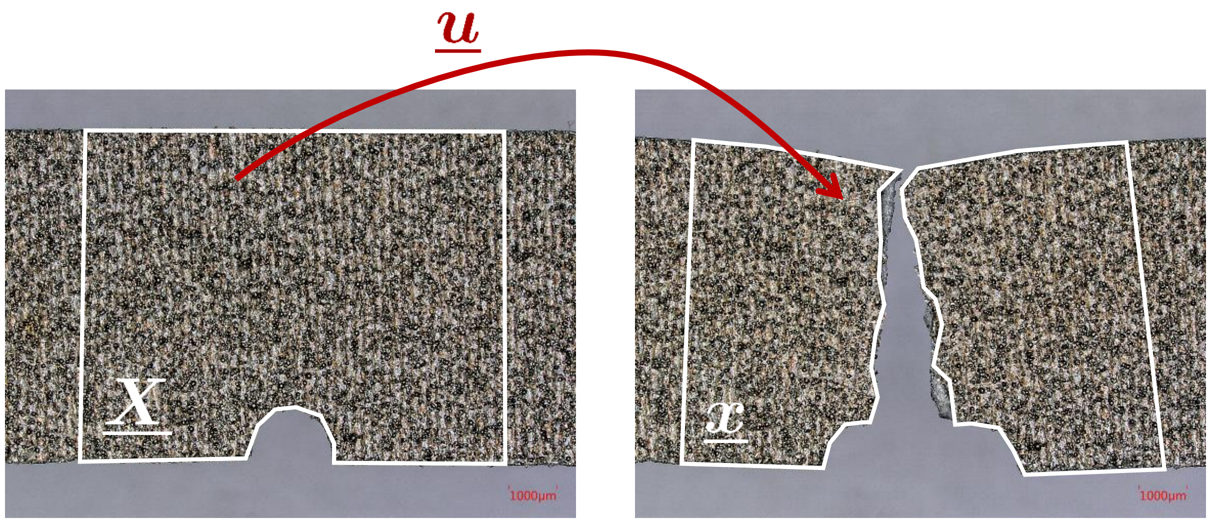
- Obtention de **champs cinématiques** à partir de l'analyse d'une série d'**images**

mesures distribuées

déplacements déformations

données d'entrée



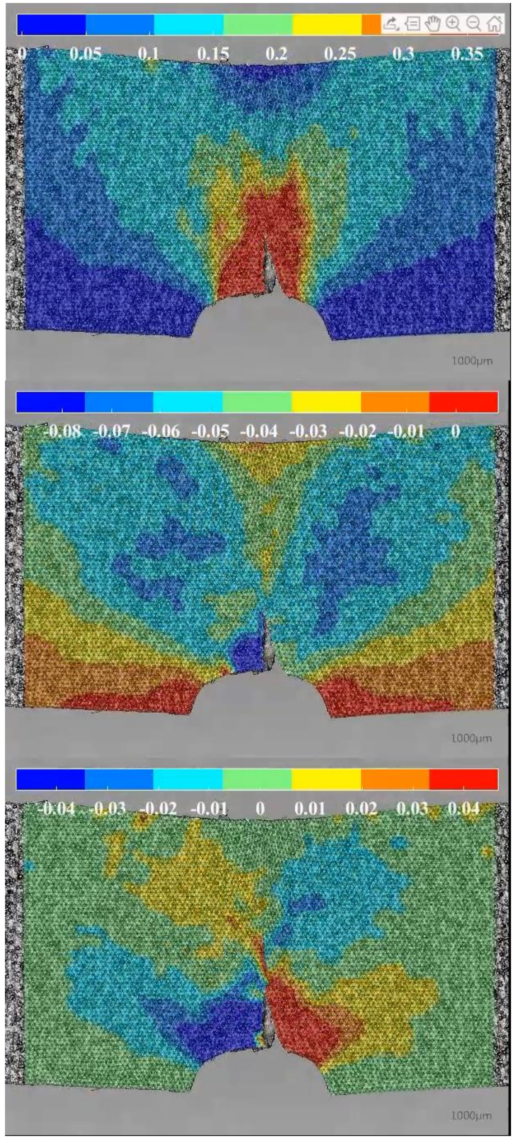


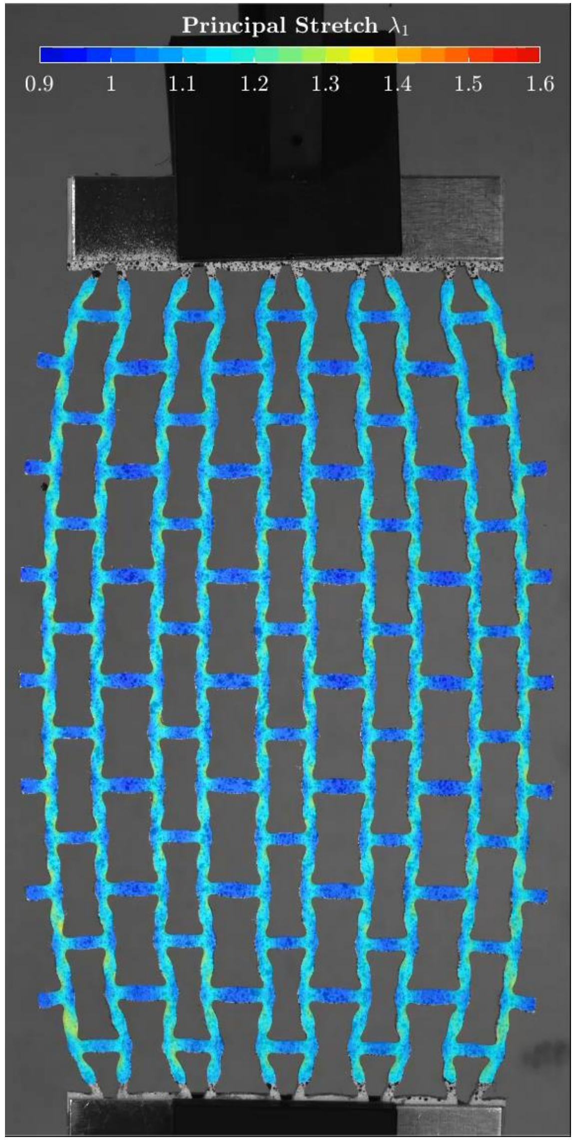
- Identification de **configurations** $\underline{x}(t)$

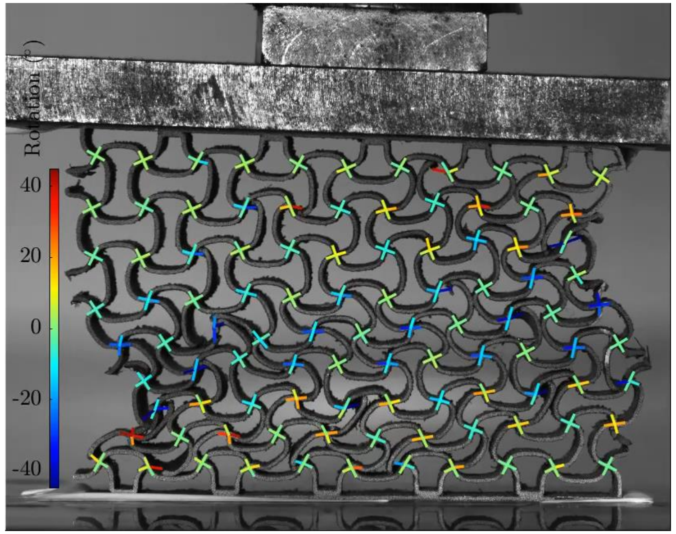
- Informations **riches** sur le **comportement** de la structure sollicitée

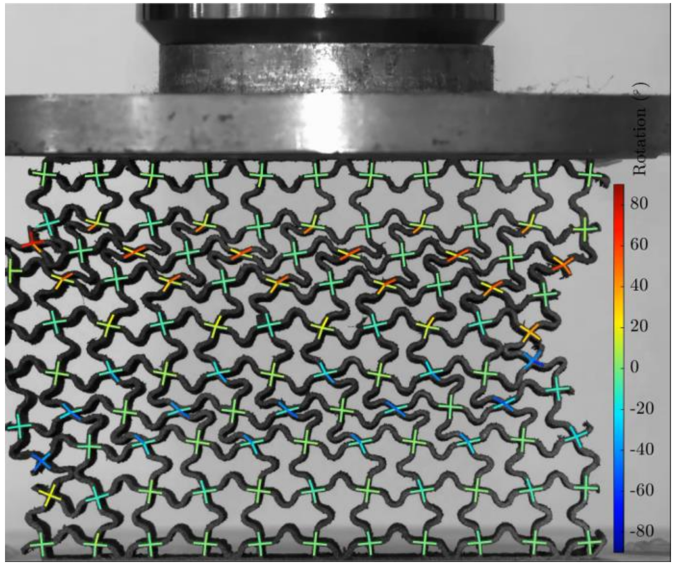
Corrélation d'images numérique

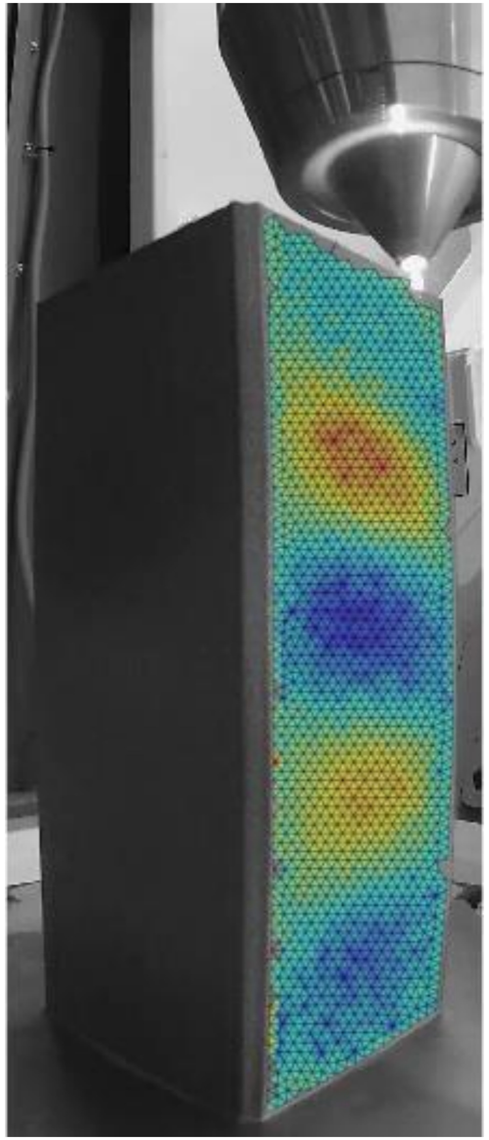
École des Ponts ParisTech







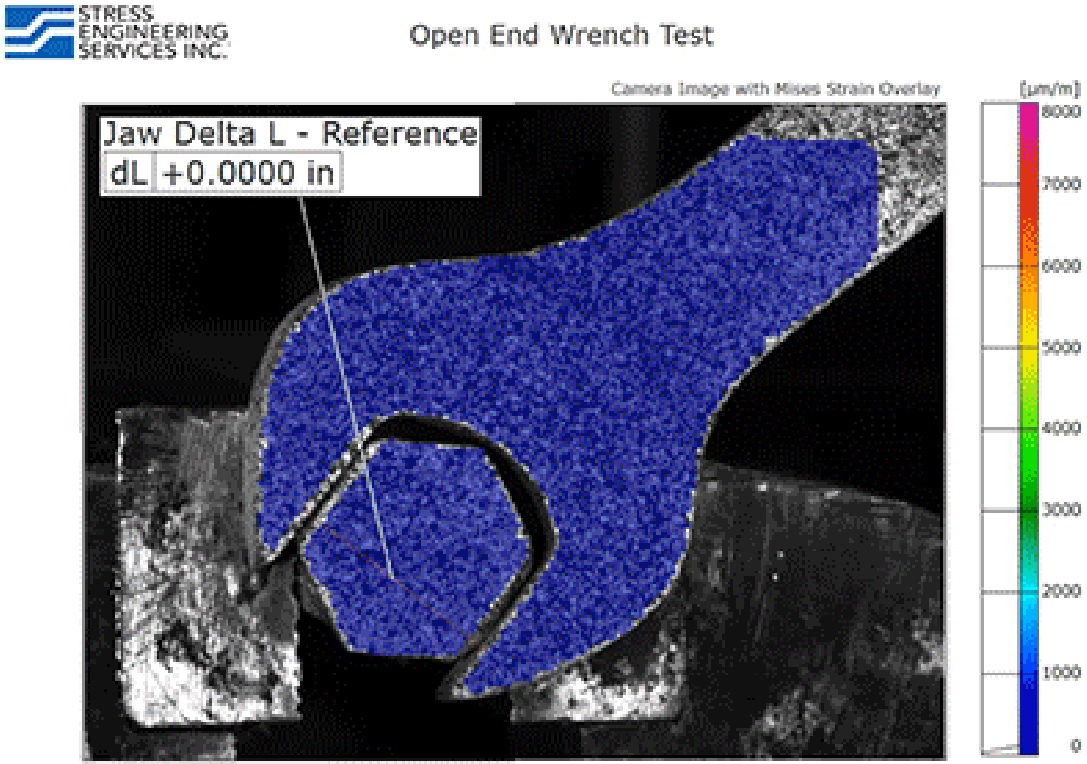




Programme du TP

Objectif: mise en pratique des concepts vus en cours dans le cadre de la CIN

- **Définition** du problème
- Méthode de **résolution**
- **Applications** de base
  - 1D, translation uniforme
  - 1D, transformation affine
  - 2D, translation uniforme
  - 2D, transformation bilinéaire
- Applications **avancées**
  - 2D, maillage EF
  - **Régularisation** type Tikhonov
  - Identification sous **contraintes**



Définition du problème de DIC

- **Données**:
  - Images de *référence* ***I*** et *actuelle* ***i***
  - Configuration de référence $\underline{\boldsymbol{X}}$
  - Domaine d'intérêt Ω
- **Inconnue**: configuration *actuelle* $\underline{\boldsymbol{x}}$
- **Equation** de *conservation des couleurs*:

$$i(\underline{\boldsymbol{x}}) \overset{\underline{\boldsymbol{x}}\in\Omega}{=} I(\underline{\boldsymbol{X}}) + \boxed{\Delta i(\underline{\boldsymbol{x}})}$$

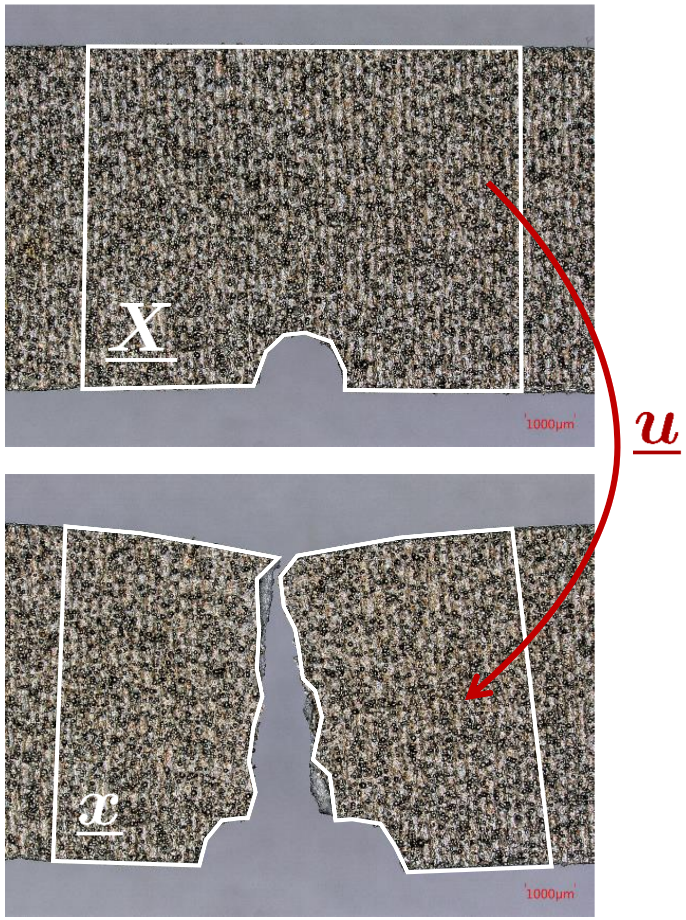
Perturbation: bruit, erreur systématique

- **Procédure**: minimisation d'une *fonction distance*

$$J(\underline{\boldsymbol{x}}) = \int_{\Omega} \left[i(\underline{\boldsymbol{x}}) - I(\underline{\boldsymbol{X}}) \right]^2 \mathrm{d}\Omega$$

- **Paramétrage**: $\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ avec $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underline{\underline{\boldsymbol{N}}}(\underline{\boldsymbol{X}}) \cdot \boxed{[\mathbf{u}]}$

Paramètres à identifier



Algorithme de Gauss-Newton - itération

- Fonction à minimiser

$$J(\underline{\boldsymbol{x}}) = \int_{\Omega} \left[i(\underline{\boldsymbol{x}}) - I(\underline{\boldsymbol{X}}) \right]^2 \mathrm{d}\Omega$$

- Développement au **second ordre**

jacobien

Héssienne

$$J(\underline{\boldsymbol{x}} + \delta \underline{\boldsymbol{x}}) = J(\underline{\boldsymbol{x}}) + \boxed{\frac{\partial J(\underline{\boldsymbol{x}})}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2} \boxed{\frac{\partial^2 J(\underline{\boldsymbol{x}})}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}^2}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{x}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{x}} + \mathcal{O}\left(\| \delta \underline{\boldsymbol{x}} \|^3 \right)$$

- Stationnarité

$$\delta \underline{\boldsymbol{x}} = - \left[\boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\underline{\boldsymbol{x}})} \right]^{-1} \cdot \boxed{\underline{\boldsymbol{j}}(\underline{\boldsymbol{x}})}$$

itération

- Mise à jour $\boxed{\underline{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \underline{\boldsymbol{x}}_k + \delta \underline{\boldsymbol{x}}}$ tant que $\boxed{\| \delta \underline{\boldsymbol{x}} \| > \epsilon}$ Critère de convergence

Algorithme de Gauss-Newton – j,H

- Fonction à minimiser

$$J(\underline{\boldsymbol{x}}) = \int_{\Omega} \left[i(\underline{\boldsymbol{x}}) - I(\underline{\boldsymbol{X}})\right]^2 \mathrm{d}\Omega$$

- Jacobien

gradient de l'image

$$\underline{\boldsymbol{j}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial J(\underline{\boldsymbol{x}})}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}} = 2 \int_{\Omega} \boxed{\underline{\boldsymbol{\nabla}} i(\underline{\boldsymbol{x}})} \cdot \Big(i(\underline{\boldsymbol{x}}) - I(\underline{\boldsymbol{X}})\Big) \mathrm{d}\Omega$$

- Héssienne

Gauss-Newton modifié

$$\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial^2 J(\underline{\boldsymbol{x}})}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}^2} = 2 \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\nabla}} i(\underline{\boldsymbol{x}}) \otimes \underline{\boldsymbol{\nabla}} i(\underline{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\Omega + \cancel{2 \int_{\Omega} \boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}^2 i(\underline{\boldsymbol{x}})} \cdot \Big(i(\underline{\boldsymbol{x}}) - I(\underline{\boldsymbol{X}})\Big) \mathrm{d}\Omega}$$

second gradient

Algorithme de Gauss-Newton - discrétisation

- Intégrale sur $\underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ -> somme sur $[\mathbf{x}] = {}^\top[\mathbf{x}_1 \, \mathbf{x}_2 \, \dots \, \mathbf{x}_N]$

- Résidu $[\mathbf{r}] = i([\mathbf{x}]) - I([\mathbf{X}])$

$$J([\mathbf{x}]) = \sum_n \Big[i(\mathbf{x}_n) - I(\mathbf{X}_n) \Big]^2 = {}^\top[\mathbf{r}] \cdot [\mathbf{r}]$$

- Jacobien

$$[\mathbf{j}] = \frac{\partial \, {}^\top[\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{x}]} \cdot [\mathbf{r}] \quad \text{avec} \quad \frac{\partial [\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{x}]} = \underline{\boldsymbol{\nabla}} i([\mathbf{x}])$$

- Héssienne

$$[\mathbf{H}] = \frac{\partial \, {}^\top[\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{x}]} \cdot \frac{\partial [\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{x}]} = {}^\top\underline{\boldsymbol{\nabla}} i([\mathbf{x}]) \cdot \underline{\boldsymbol{\nabla}} i([\mathbf{x}])$$

Algorithme de Gauss-Newton - paramétrisation

- Paramétrisation de la configuration avec $[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \dots\, \mathbf{u}_{\boxed{P}}]$

P < N :
réduction
du problème

$$[\mathbf{x}] = [\mathbf{X}] + \underbrace{\boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{N}}}}}_{\text{fonctions de forme}}([\mathbf{X}]) \cdot [\mathbf{u}]$$

- Résidu $\underbrace{\boxed{[\mathbf{r}]}}_{(N\times 1)} = i([\mathbf{x}]) - I([\mathbf{X}])$

- Jacobien

$$\underbrace{\boxed{[\mathbf{j}]}}_{(P\times 1)} = \frac{\partial^\top [\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{u}]} \cdot [\mathbf{r}] \qquad \text{avec} \qquad \underbrace{\boxed{\frac{\partial [\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{u}]}}}_{(N\times P)} = \frac{\partial [\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{x}]} \cdot \frac{\partial [\mathbf{x}]}{\partial [\mathbf{u}]} = \underline{\boldsymbol{\nabla}} i([\mathbf{x}]) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{N}}}([\mathbf{x}])$$

- Héssienne

$$\underbrace{\boxed{[\mathbf{H}]}}_{(P\times P)} = \frac{\partial^\top [\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{u}]} \cdot \frac{\partial [\mathbf{r}]}{\partial [\mathbf{u}]} = {}^\top\underline{\underline{\boldsymbol{N}}}([\mathbf{x}]) \cdot {}^\top\underline{\boldsymbol{\nabla}} i([\mathbf{x}]) \cdot \underline{\boldsymbol{\nabla}} i([\mathbf{x}]) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{N}}}([\mathbf{x}])$$

Application: 1D | translation uniforme

Identification du décalage d'une gaussienne

❑**Données:**

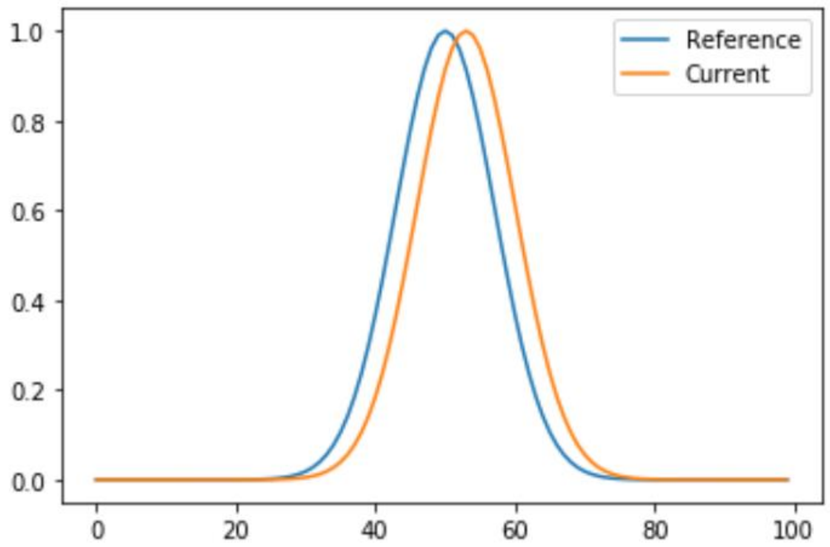
- Signal de *référence* ***S*** et *actuel* ***s***
- Configuration de référence $[X] = {}^{\top}[X_1\ X_2\ \ldots\ X_N]$

❑**Inconnue:** configuration *actuelle* $[x]$

❑**Fonction à minimiser:**

$$J([x]) = \|s([x]) - S([X])\|^2$$

❑**Paramétrage:** $[x] = [X] + u$ avec $u \in \mathbb{R}$



Application: 1D | translation uniforme

- Fonction à minimiser

$$J(u) = \|s([X]+u) - S([X])\|^2 = {}^{\top}[r]\cdot[r]$$

- Résidu

$$\boxed{[r]} = s(\boxed{[X]+u}) - S([X])$$

(N×1) interpolation

- Jacobien

$$\boxed{[j]} = \frac{\partial\,{}^{\top}[r]}{\partial u}\cdot[r] = {}^{\top}[\boxed{s'}([X]+u)]\cdot[r]$$

(1×1)

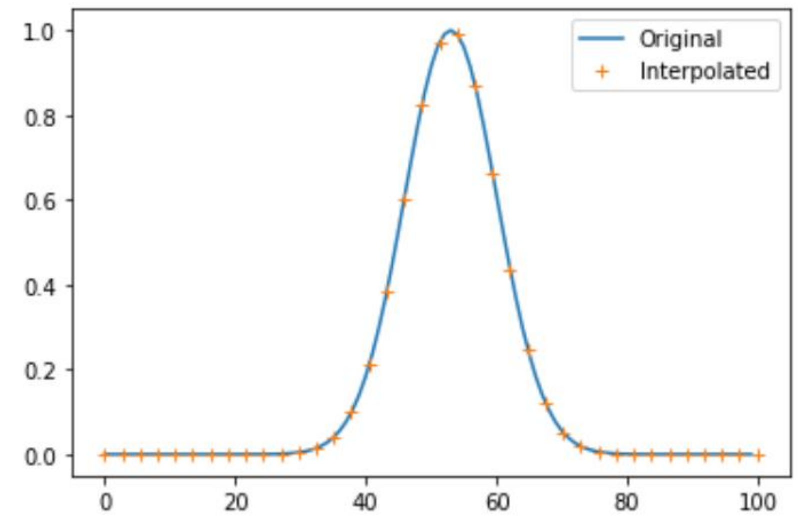
différences finies

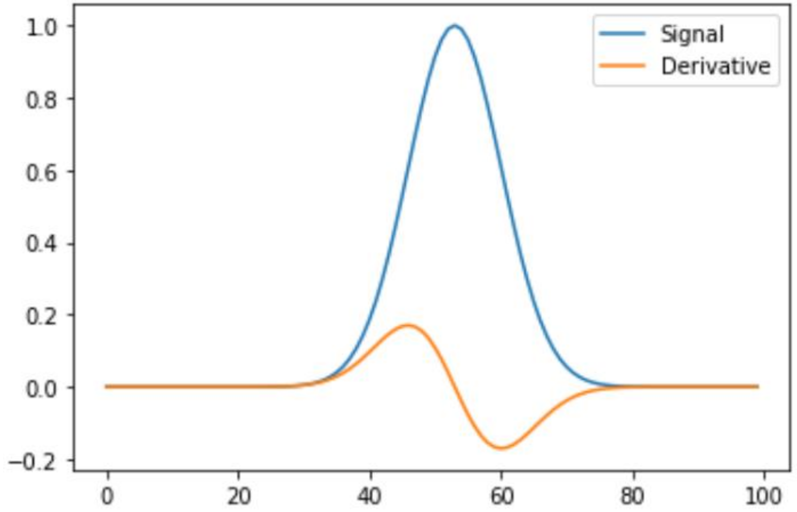
2 s'(x) = s(x+dx) - s(x-dx)

- Héssienne

$$\boxed{[H]} = \frac{\partial\,{}^{\top}[r]}{\partial u}\cdot\frac{\partial[r]}{\partial u} = {}^{\top}[s'([X]+u)]\cdot[s'([X]+u)]$$

(1×1)



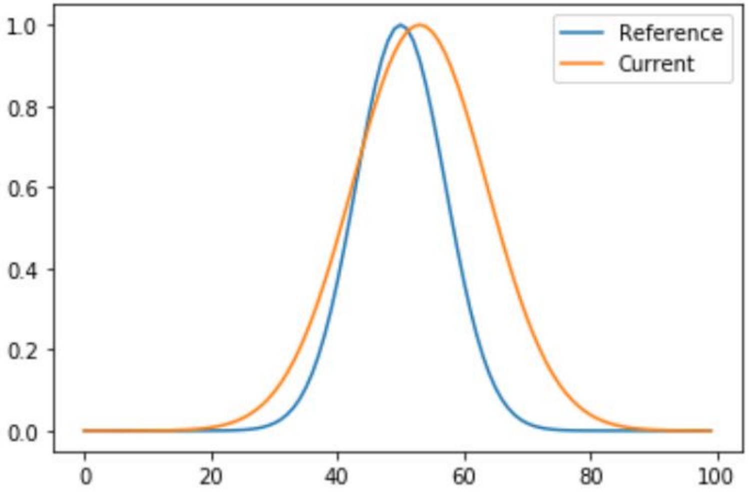


Application: 1D | transformation affine

Identification du décalage et de l'étirement d'une gaussienne

❑**Données:**

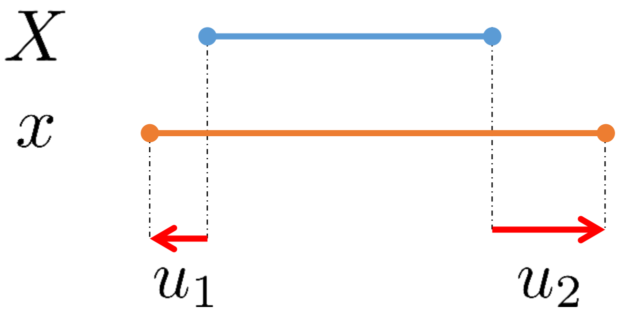
- Signal de *référence* ***S*** et *actuel* ***s***
- Configuration de référence $[X] = {}^{\top}[X_1 \; X_2 \; \ldots \; X_N]$



❑**Inconnue:** configuration *actuelle* $[x]$

❑**Fonction à minimiser:**

$$J([x]) = \|s([x]) - S([X])\|^2$$



❑**Paramétrage:** $[x] = [X] + \dfrac{u_1}{L}(L - [X]) + \dfrac{u_2}{L}[X]$ avec $[u] = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$

Application: 1D | transformation affine

- Paramétrage choisi:

$$[x] = [X] + \frac{u_1}{L}(L - [X]) + \frac{u_2}{L}[X]$$

- Résidu

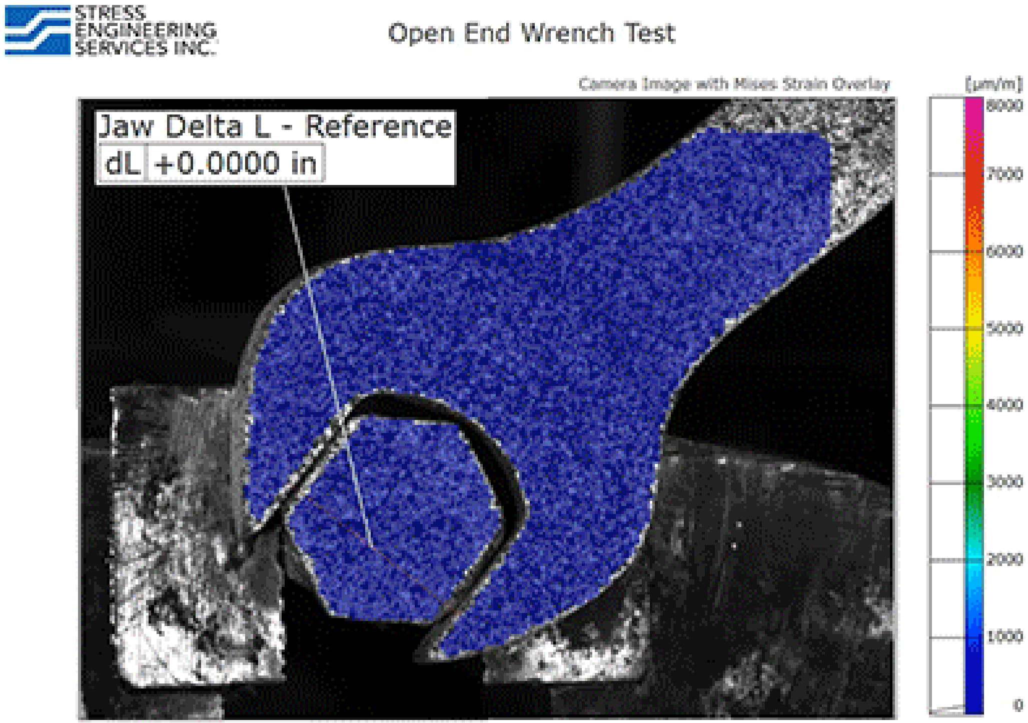
$$\underset{(N\times 1)}{\boxed{[r]}} = s([x]) - S([X])$$

- Jacobien

$$\underset{(2\times 1)}{\boxed{[j]}} = \frac{\partial^\top [r]}{\partial [u]} \cdot [r] = \dots$$

- Héssienne

$$\underset{(2\times 2)}{\boxed{[H]}} = \frac{\partial^\top [r]}{\partial [u]} \cdot \frac{\partial [r]}{\partial [u]} = \dots$$

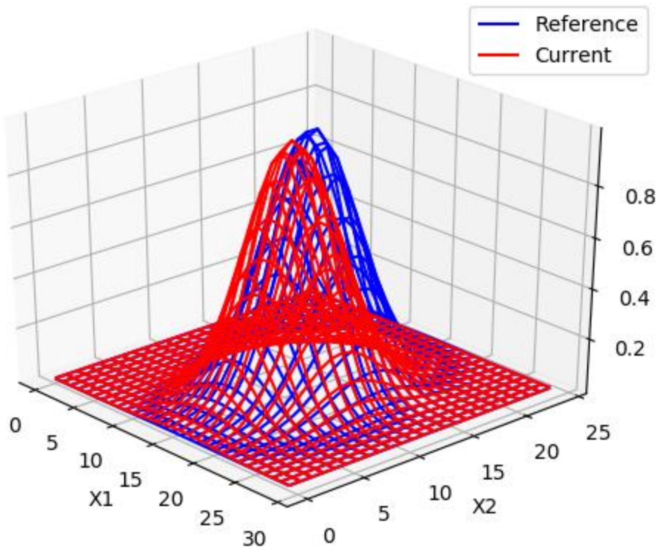


À vous de jouer !

Application: 2D | translation uniforme

- Fonction à minimiser, avec $[\mathbf{x}] = [\mathbf{X}] + \underline{\boldsymbol{u}}$ et $\underline{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^2$

$$J(\underline{\boldsymbol{u}}) = \|\underbrace{i}_{\text{image actuelle}}([\mathbf{x}] + \underline{\boldsymbol{u}}) - \underbrace{I}_{\text{image de référence}}([\mathbf{X}])\|^2 = {}^{\top}[\mathbf{r}] \cdot [\mathbf{r}]$$



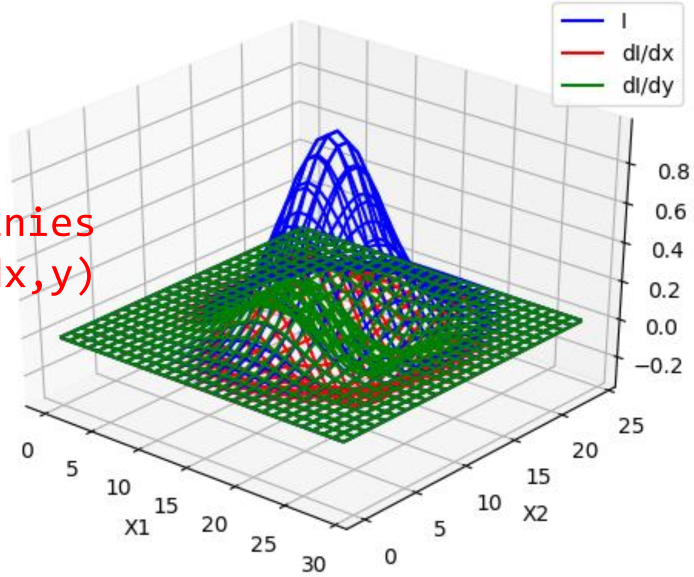
- Résidu

$$\underbrace{[\mathbf{r}]}_{(N\times1)} = i(\underbrace{[\mathbf{X}] + \underline{\boldsymbol{u}}}_{\text{interpolation 2D}}) - I([\mathbf{X}])$$

- Jacobien

$$\underbrace{[\mathbf{j}]}_{(2\times1)} = {}^{\top}\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial\underline{\boldsymbol{u}}} \cdot [\mathbf{r}] \quad \text{avec} \quad \frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial\underline{\boldsymbol{u}}} = \left.\frac{\partial i}{\partial\underline{\boldsymbol{u}}}\right|_{[\mathbf{X}]+\underline{\boldsymbol{u}}} = \underbrace{\boldsymbol{\nabla} i}_{\text{différences finies}}([\mathbf{x}])$$

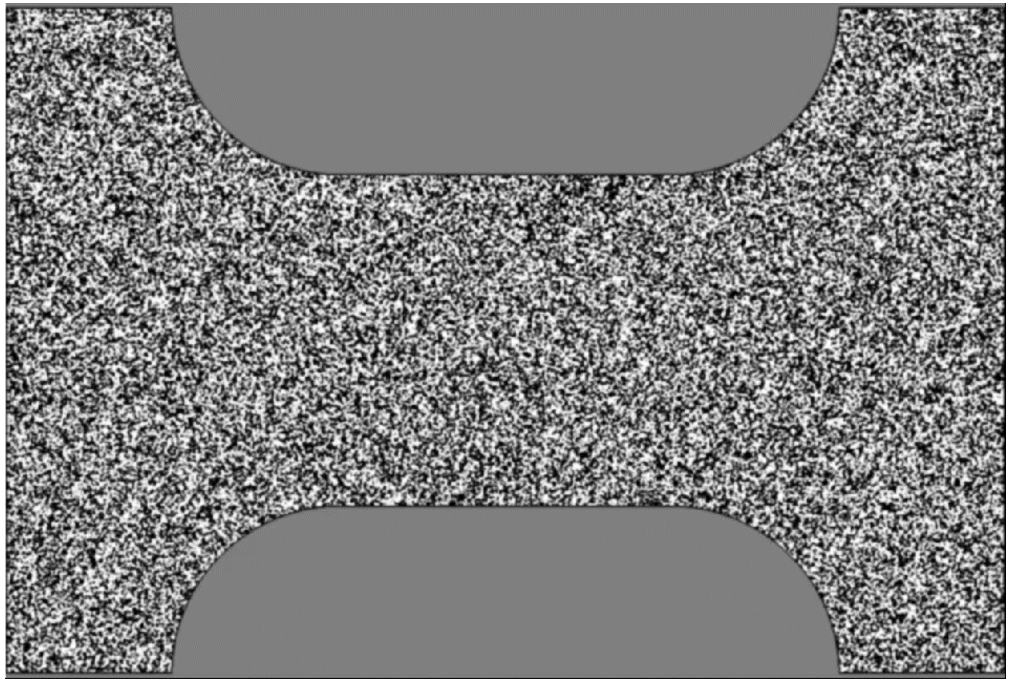
2 ds_dx(x,y) = s(x+dx,y) - s(x-dx,y)



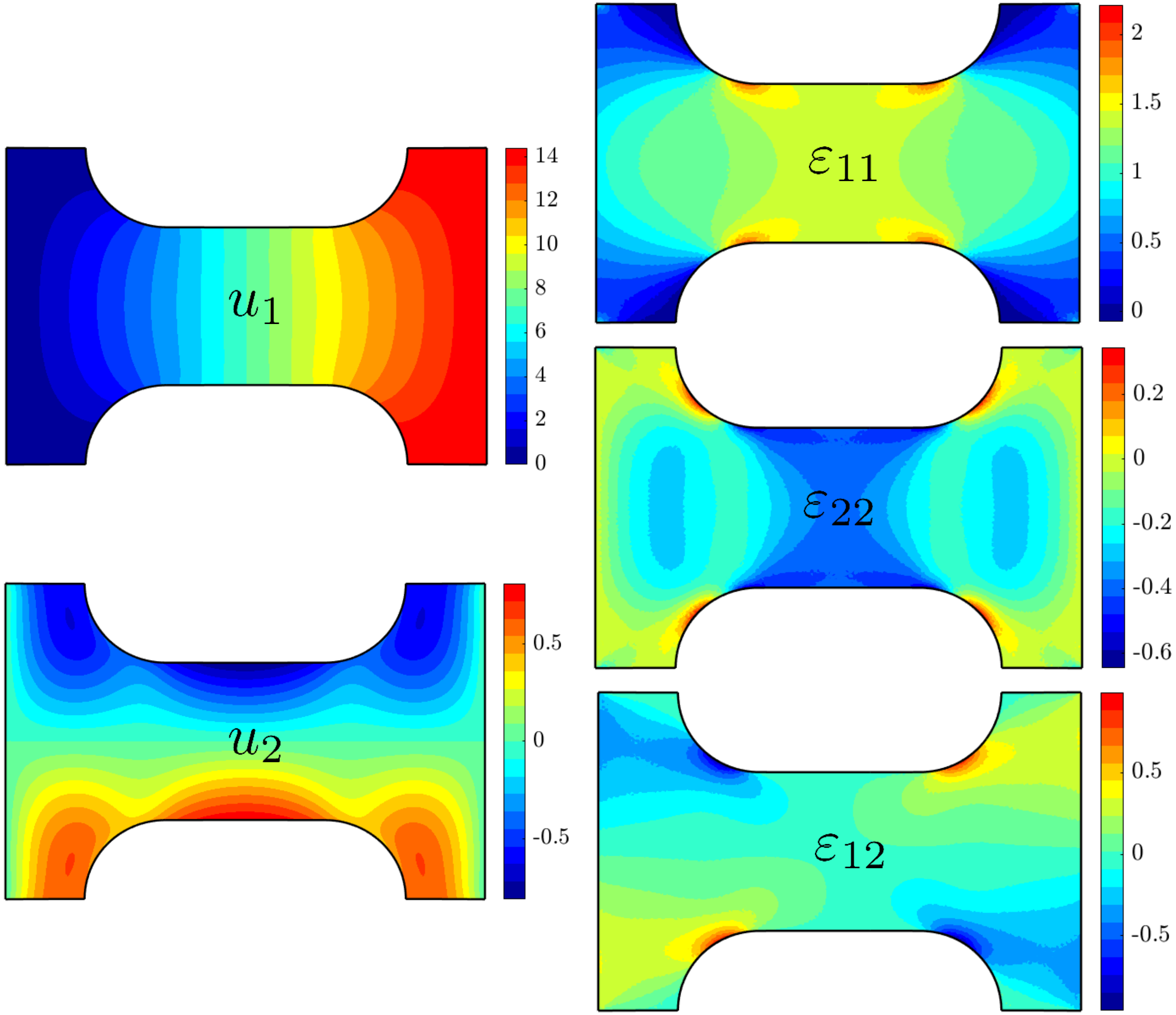
- Héssienne

$$\underbrace{[\mathbf{H}]}_{(2\times2)} = {}^{\top}\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial\underline{\boldsymbol{u}}} \cdot \frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial\underline{\boldsymbol{u}}}$$

Application: 2D | maillage



Images fournies



- Paramétrage du déplacement: maillage EF

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})$$

$$\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}}) = \boxed{\underline{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{X}})} \cdot \boxed{[\mathbf{u}]}$$

(Q×2) déplacements nodaux

(1×Q) fonctions de forme

- Configuration actuelle

$$\boxed{[\mathbf{x}]} = [\mathbf{X}] + \boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{N}}}([\mathbf{X}])} \cdot \boxed{[\mathbf{u}]}$$

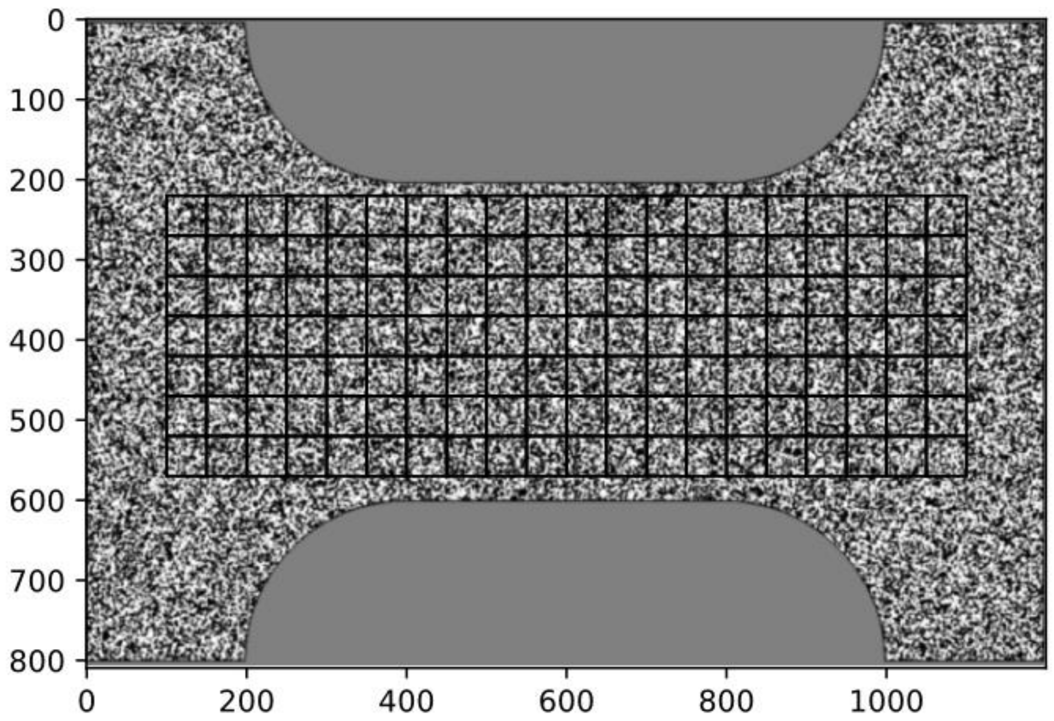
(N×2) (N×Q) (Q×2)

- Eléments quadrangles:

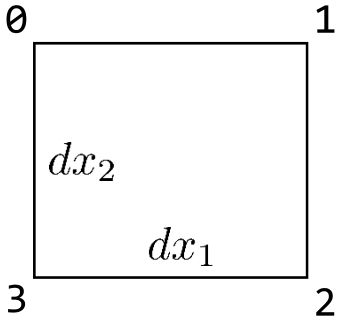
coordonnées **globales**

coordonnées **locales**

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{\xi}}} = \frac{\boxed{\underline{\boldsymbol{X}}} - \underline{\boldsymbol{X}}_0}{\underline{\boldsymbol{dx}}}$$



Maillage de quadrangles à Q nœuds



$$n_0(\underline{\xi}) = (1 - \xi_1) \times (1 - \xi_2)$$
$$n_1(\underline{\xi}) = \xi_1 \times (1 - \xi_2)$$
$$n_2(\underline{\xi}) = \xi_1 \times \xi_2$$
$$n_3(\underline{\xi}) = (1 - \xi_1) \times \xi_2$$

Application: 2D | maillage

- Fonction à minimiser

$$J([\mathbf{u}]) = \|\boxed{i}([\mathbf{x}]) - \boxed{I}([\mathbf{X}])\|^2 = {}^{\top}[\mathbf{r}]\cdot[\mathbf{r}]$$

image actuelle

image de référence

- Résidu

$$\boxed{[\mathbf{r}]} = i(\boxed{[\mathbf{X}] + \underline{\boldsymbol{N}}([\mathbf{X}])}\cdot[\mathbf{u}]) - I([\mathbf{X}])$$

(N×1)

interpolation 2D

- Jacobien

$$\boxed{[\mathbf{j}]} = {}^{\top}\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial[\mathbf{u}]}\cdot[\mathbf{r}] \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial[\mathbf{u}]}} = \left[\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial[\mathbf{u}_1]}\,,\;\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial[\mathbf{u}_2]}\right]$$

(P×1)

(N×P)

.. et

$$\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial[\mathbf{u}_i]} = \boxed{\frac{\partial i([\mathbf{x}])}{\partial x_i}}\cdot\boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{N}}}([\mathbf{X}])}$$

(N×P) **sparse** ⚠

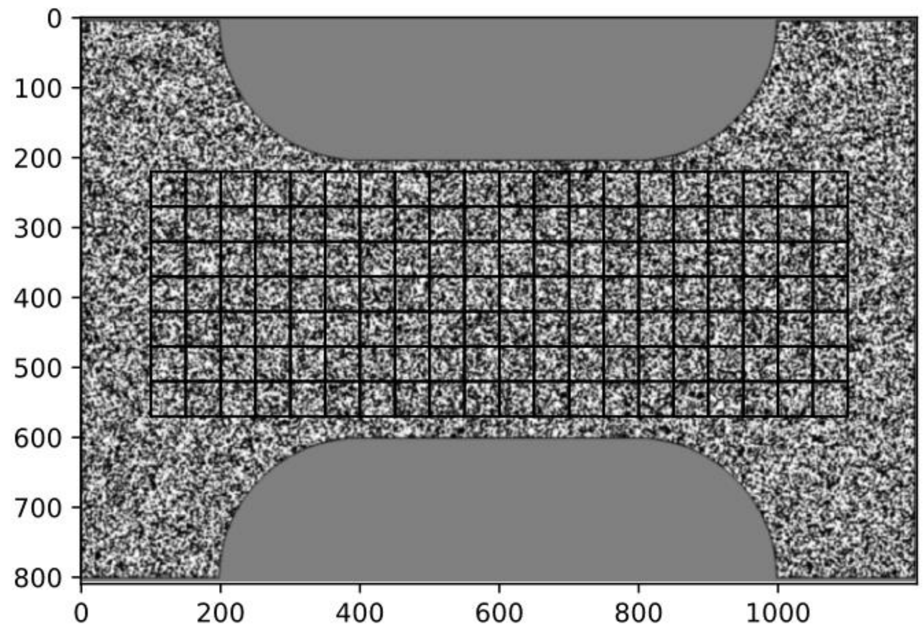
différences finies

2 ds_dx(x,y) = s(x+dx,y) - s(x-dx,y)

- Héssienne

$$\boxed{[\mathbf{H}]} = {}^{\top}\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial[\mathbf{u}]}\cdot\frac{\partial[\mathbf{r}]}{\partial[\mathbf{u}]}$$

(P×P)



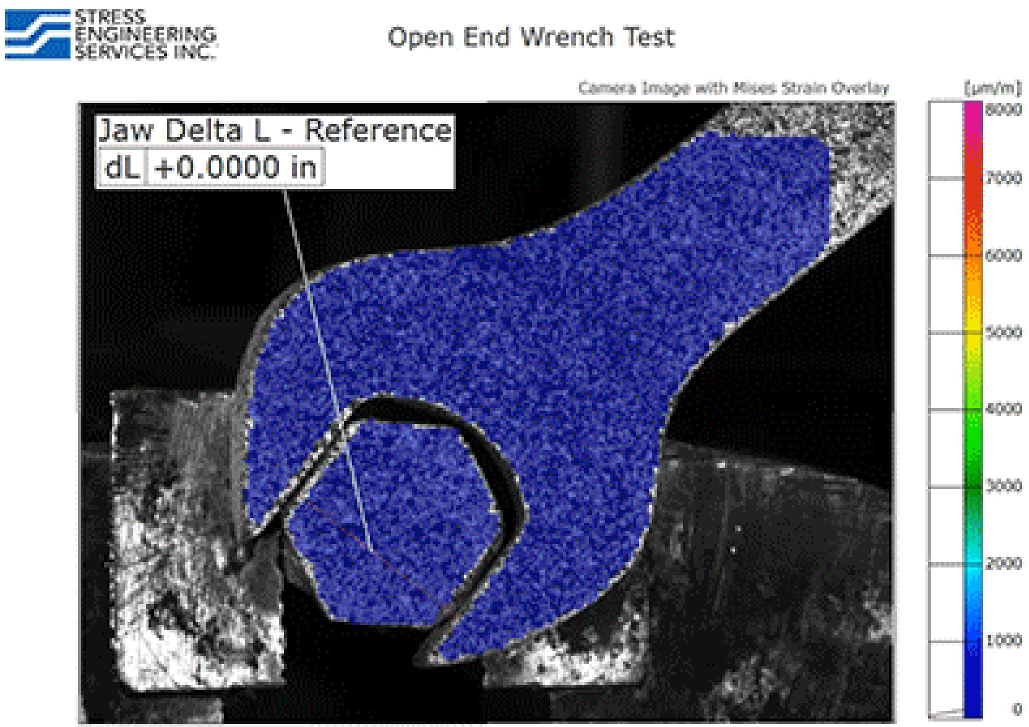
Application: 2D | maillage

- **Compléter** le code *2D_Grid*

- Quels **paramètres** influent sur la **convergence** de l’algorithme ?

- Calculer les **déformations**. Que remarquez-vous ? Que se passe-t-il si l’on change la **taille des éléments** ?

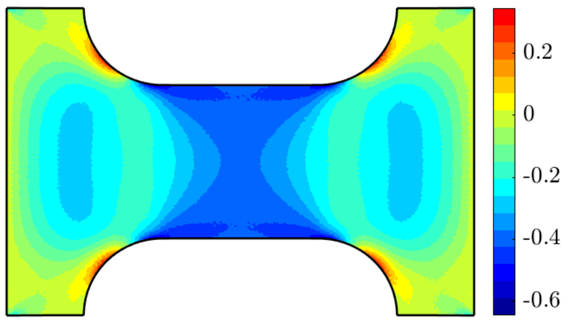
- Que pouvez vous proposer pour **réduire** le bruit observé ?

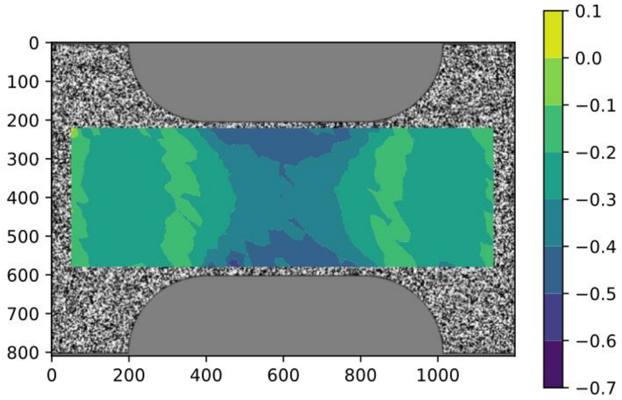


À vous de jouer !

Application: 2D | maillage, régularisation

Régularisation: prise en compte d'informations supplémentaires sur les paramètres à identifier





- **Tikhonov:** fonction coût **augmentée**

$$J'([\mathbf{u}]) = \boxed{J}([\mathbf{u}]) + \boxed{\beta} \times J_r([\mathbf{u}])$$

fonction non régularisée — *paramètre* de régularisation

- **Exemple:** le champ de déformation attendu est *relativement* **lisse**

$$J_r([\mathbf{u}]) = \int_\Omega \left\| \boxed{\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}([\mathbf{u}])}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}} \right\|^2 \mathrm{d}\Omega$$

minimisation du gradient des déformations

ou

$$J_r([\mathbf{u}]) = \int_\Omega \left\| \boxed{\frac{\partial^2 \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}^2}} \right\|^2 \mathrm{d}\Omega$$

minimisation du second gradient

- On remarque que: $$\frac{\partial^2 \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}^2} = \frac{\partial^2 \underline{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{X}})}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}^2} \cdot [\mathbf{u}]$$

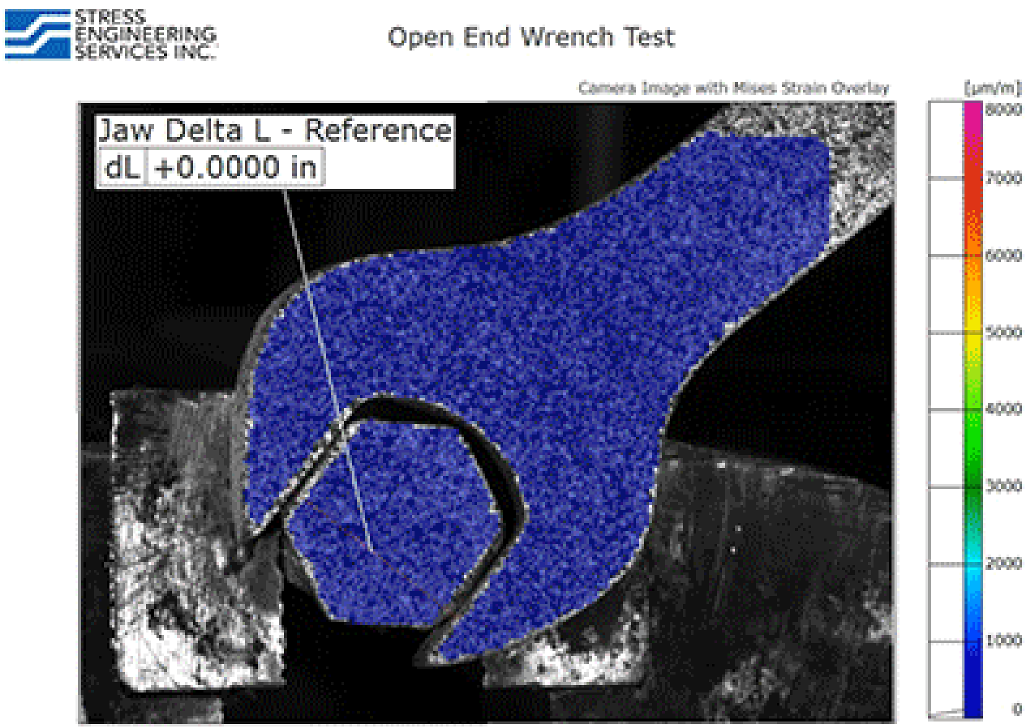
Application: 2D | maillage, régularisation

- Calculer le nouveau **jacobien** et la **Héssienne** correspondant à la fonction coût régularisée

- **Compléter** le code *2D_Grid_with_reg*

- Quelle est **l'influence du paramètre beta** sur les résultats ?
  - Sur la **convergence** ?
  - Sur la **forme du champ de déformation** ?

- Proposez une méthode permettant de **choisir** le paramètre beta



À vous de jouer !