BERRAHO Aya
MARGHT Abde-rrahman

Rapport du projet de Monte-Carlo :

Dans un premier temps, nous avons fixé toutes les constantes de l'énoncé et deux autres variables n et N. n représente le nombre de pas de discrétisation temporelle et N le nombre de simulations dans nos différents estimateurs.
Nous avons ensuite généré notre grille de discrétisation t et créé la variable $delta$ qui représente le pas de discrétisation.

Question 1 : Monte-Carlo classique

- $mouvement\_brownien(n)$ simule les trajectoires de mouvement Brownien W sur la grille discrète. Que nous affichons grâce à $ggplot$.
- $prix\_actif(n)$ simule les prix S_t sur la grille discrète. Que nous affichons aussi grâce à $ggplot$.
- $phi(X)$ est la fonction qui à x associe $(x-K)^+$.
- $A\_n(n,N)$ génère un vecteur de taille N de simulation de $A_n^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$.
-$MC(n,N)$ renvoie un vecteur contenant la moyenne empirique et la variance empirique de notre estimateur de Monte-Carlo classique.

On stocke les résultats de l'estimateur de Monte-Carlo classique dans $prix\_MC$.

Question 2 : Méthode de la variable antithétique

On a remarqué que $-W$ et W sont de même loi donc $-W$ sera notre variable antithétique. Donc on a créé une nouvelle fonction qui génère les prix S_t avec W en argument. Ce qui nous a permis de créer la fonction $MC\_ANT(n,N)$ qui simule $\mathbb{E}[G]$ avec la méthode de la variable antithétique.

On stocke les résultats de l'estimateur par la méthode de la variable antithétique dans $prix\_MC\_ANTI$.

Question 3 : Méthode de la variable de contrôle

Avec l'indication, nous avons considérer $Y = \left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} - K\right)^+$ comme variable contrôle.
Nous avons donc commencé par calculer son espérance (détails du calcul en pièce-jointe) puis nous cherchons le rang n_0 à partir duquel $\hat{b}_{n_0}$converge. On a choisi $n_0 = 100 \ll N = 1000$.
Ceci nous a permis de créer la fonction $MC\_C(n,N)$ qui simule $\mathbb{E}[G]$ avec la méthode de la variable de contrôle.

On stocke les résultats de l'estimateur par la méthode de la variable antithétique dans $prix\_MC\_C$.

Question 4 : Méthode de l'échantillonnage préférentiel

Sous-question a :

$$G = (A_n^T - K)^+$$

$$A_n^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$$

$$S_{t_i} = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma W_{t_i}\right)$$

$$W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_0} = \sum_{k=0}^{i-1} W_{t_{k+1}} - W_{t_k} = \sum_{k=0}^{i-1} \sqrt{t_{k+1} - t_k}\, Z_{k+1}$$

$$S_{t_i} = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma \sum_{k=0}^{i-1} \sqrt{t_{k+1} - t_k}\, Z_{k+1}\right)$$

$$A_n^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma \sum_{k=0}^{i-1} \sqrt{t_{k+1} - t_k}\, Z_{k+1}\right)$$

On pose :

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$z \longmapsto \max(0, g^*(z) - K)$$

Avec,

$$g^*: z = (z_1, \dots, z_n) \longmapsto \frac{S_0}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma \sum_{k=0}^{i-1} \sqrt{t_{k+1} - t_k}\, z_{k+1}\right)$$

On obtient donc,

$$g(Z) = G \textit{ where } Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$$

Avec les suppositions du sujet :

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$z \longmapsto \max(0, g^*(z) - 1)$$

Avec,

$$g^*: z = (z_1, \dots, z_n) \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{i}{32n} + \frac{1}{4\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{i} z_k\right)$$

Sous-question b :

$$On\ a\ Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)\ so, \mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[g(Z)] = \int_{R^n} g(x) \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^T x}\, dx$$

$$= \int_{R^n} g(z+\mu) \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z+\mu)^T (z+\mu)}\, dz$$

$$= \int_{R^n} g(z+\mu) \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^T z} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z^T\mu + \mu^T z + \mu^T \mu)}\, dz$$

$$= \int_{R^n} g(z+\mu) \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^T z} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z^T\mu + \mu^T z + \mu^T \mu)}\, dz$$

$$= \int_{R^n} g(z+\mu) \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^T z} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(2<\mu,z>+<\mu,\mu>)}\, dz$$

$$= \int_{R^n} g(z+\mu) \mathrm{e}^{-<\mu,z>-\frac{1}{2}<\mu,\mu>} \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^T z}\, dz$$

$$= \mathbb{E}\left[g(Z+\mu)\mathrm{e}^{-<\mu,Z>-\frac{1}{2}<\mu,\mu>}\right]$$

Sous-question c :

Nous avons créé une fonction $vecteur\_z\_S(y, N)$ qui génère les vecteurs $z(y)$ et $S(y)$ et avons résolu l'équation $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j(y) - K - y = 0$ par la méthode de bifurcation et avons trouvé $\hat{y} = 0.1550196035$ ce qui nous a permis de générer le vecteur $\hat{\mu} = z(\hat{y})$.
Grâce aux sous-questions a et b, nous avons pu créer une fonction $MC\_EP(\mathrm{n}, \mathrm{N})$ qui simule $\mathbb{E}[G]$ par la méthode de l'échantillonnage préférentiel.

On stocke les résultats de l'estimateur par la méthode de l'échantillonnage préférentiel dans $prix\_MC\_EP$.

Conclusion:

Avec 1000 simulations	MC Classique	Antithétique	Contrôle	Échantillonnage préférentiel
Estimation	5.969441e-02	5.909476e-02	5.646356e-02	5.901174e-02
Variance	9.468713e-06	7.460886e-07	7.647210e-09	8.416822e-07

Avec les différentes manières de simuler $\mathbb{E}[G]$, on remarque que la méthode de la variable de contrôle est celle qui a la plus petite variance.