TEEC: Conceitos Básicos Relacionados ao Processamento Digital de Sinais

Prof.: Arismar Morais Gonçalves Júnior

Engenharia de Computação

Universidade do Estado de Minas Gerais

Unidade Divinópolis

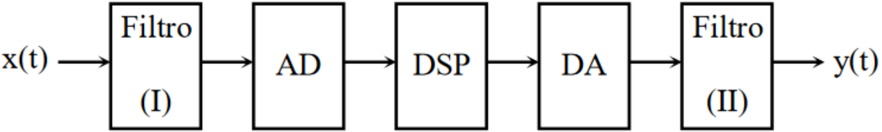
Divinópolis, Abril de 2025

Sumário

Introdução

- Processamento Digital de Sinais (*DSP*):
  - tratamento que se aplica a um sinal de tempo discreto;
  - realizado por meio de computadores ou processadores digitais (*PLC*, *DSP*, *FPGA*, microcontroladores, dentre vários outros);
- Vantagens do *DSP*:
  - Programabilidade $\rightarrow$ *software* utilizado pode ser atualizado, modificado ou refeito;
  - Estabilidade $\rightarrow$ não há dependência da tolerância de componentes, envelhecimento, etc.
- O *DSP* é largamente aplicado em: Comunicação, Aeronáutica, Astronáutica, Projeto de Circuitos, Acústica, Sismologia, Eng. Biomédica, Geração e Transmissão de Energia, Controle de Processos (químicos, etc), Processamento da fala, dentre outras.

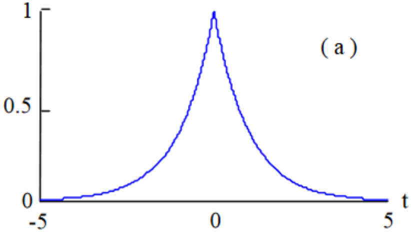
- Componentes de um sistema para o *DSP*:



- Filtro (I) $\rightarrow$ *anti-aliasing*;
- AD $\rightarrow$ conversor analógico-digital;
- DSP $\rightarrow$ computador ou processador digital de sinais;
- DA $\rightarrow$ conversor digital-analógico;
- Filtro (II) $\rightarrow$ reconstrução.

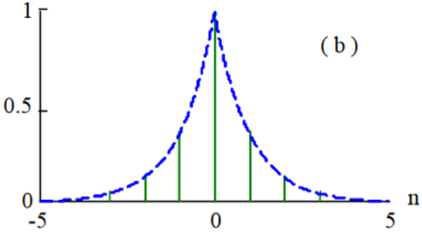
Sinais

- Grandezas físicas, variantes no tempo e que transportam informação acerca do comportamento de um sistema;
- Função de uma ou mais variáveis indepentendes (tempo, espaço, etc);
- Exemplos:
  - Sinais elétricos $\rightarrow$ tensões e correntes em um circuito;
  - Sinais acústicos $\rightarrow$ música, voz, dentre outros;
  - Sinais de vídeo $\rightarrow$ intensidade luminosa em função da posição;
  - Sinais biológicos $\rightarrow$ sequência de DNA;
  - Ruídos $\rightarrow$ quantização, chaveamento, etc.
- Classificação:
  - contínuo x discreto;
  - analógico x digital.



$$x(t) = e^{-|t|}$$

$$-\infty < t < \infty$$



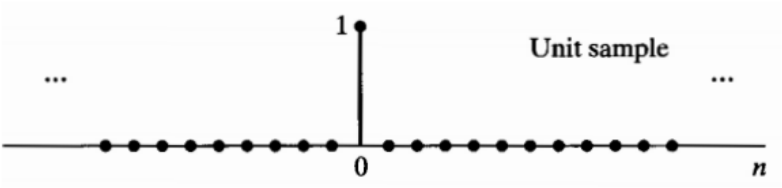
$$x(t_n) = e^{-|t_n|}$$

$$t_n\text{: } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

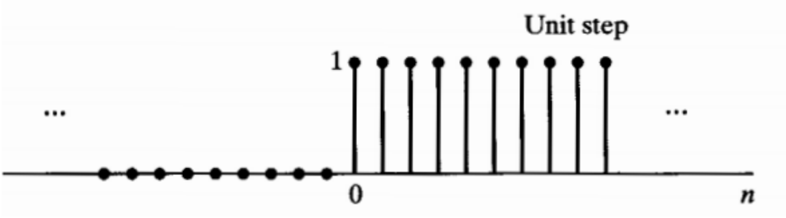
Sinais Básicos

- Utilizados, principalmente, para testes, modelagem e caracterização de sistemas;
- Bem definidos e representados/descritos por uma função matemática, conhecendo-se seus valores em qualquer instante de tempo (presente, passado ou futuro);
- Exemplos:
  - Impulso unitário;
  - Degrau unitário;
  - Exponencial (real e complexa);
  - Senoides.

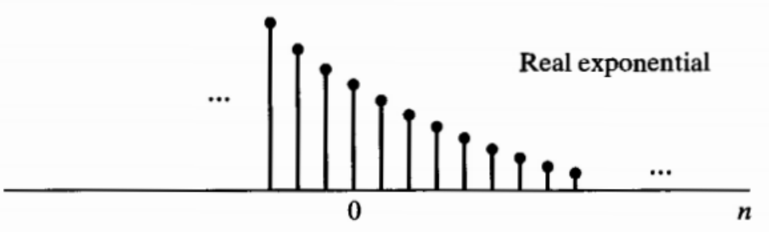
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



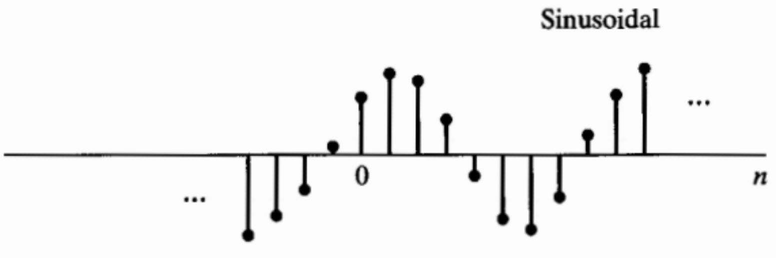
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



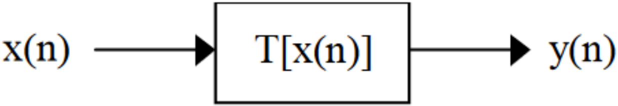
$$x[n] = A\alpha^n$$



$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$



- Dispositivos que realizam operações matemáticas nos sinais:
  - filtro (analógico ou digital) para redução de ruídos ou interferências, por exemplo.

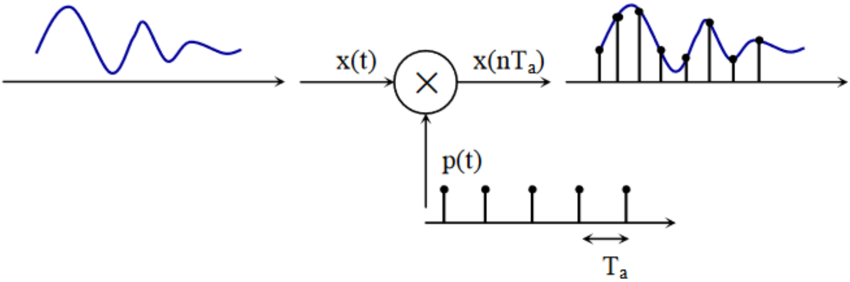


- $x(n) \rightarrow$ sequência de entrada;
- $T[.] \rightarrow$ transformação empregada pelo sistema;
- $y(n) \rightarrow$ sequência de saída, i.e., resposta do sistema à excitação $x(n)$.

- Principais propriedades:
  - Causalidade $\rightarrow$ saída depende apenas de valores presentes e/ou passados da entrada/saída;
  - Estabilidade $\rightarrow$ se a entrada é limitada em amplitude, a saída também será;
  - Invariância com o tempo $\rightarrow$ não alteram sua resposta com o deslocamento no tempo da entrada;
  - Linearidade $\rightarrow$ satisfazem o princípio da superposição.
- Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (*SLIT*):
  - Apropriados para a modelagem de sistemas físicos;
  - Permitem a utilização de técnicas de análise que levam a um conhecimento detalhado do comportamento destes sistemas (o que você conhece, você controla/comanda);
  - Caracterizados no domínio do tempo por sua resposta à função impulso unitário;
  - A expressão geral que relaciona a entrada e saída é dada pela soma de convolução.

Amostragem

- Processo de conversão de um sinal do tempo contínuo para o tempo discreto;
- As amostras são tomadas em intervalos regularmente espaçados por T_a segundos ($T_a = 1/f_a$):



Amostragem

- Teorema da amostragem:
  - A frequência de amostragem (f_a) deve ser no mínimo o dobro da máxima frequência do sinal (f);
  - Evita o fenômeno *aliasing* (superposição espectral);
  - Condição necessária para que o sinal possa ser integralmente reconstruído.
- Na prática:
  - a operação de amostragem é executada por um conversor analógico-digital, o qual inclui também uma quantização das amplitudes das amostras;
  - $f_a >> 2.f$.

Convolução

- É uma operação matemática, assim como a soma;
  - Na soma, dois número geram um terceiro;
  - Na convolução, dois sinais geram um terceiro sinal.
- Representação matemática de como um sistema linear opera sobre um sinal:
  - Para um *SLIT*, o sinal de saída é o resultado da convolução do sinal de entrada $x(n)$ com a resposta ao impulso do sistema $h(n)$.
- No domínio do tempo contínuo $\rightarrow$ integral de convolução:

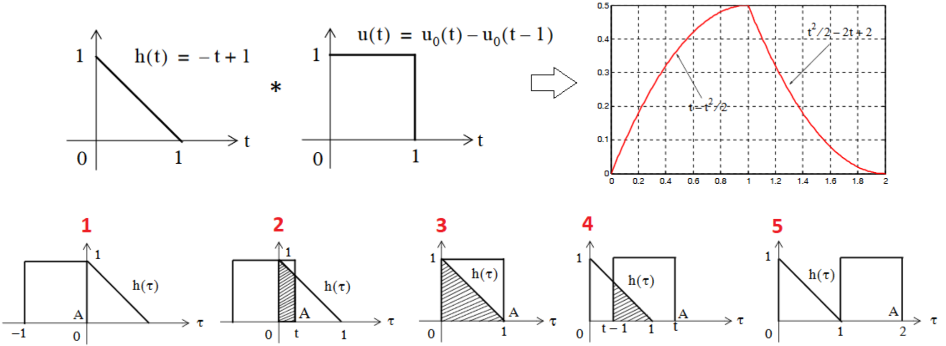
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- No domínio do tempo discreto $\rightarrow$ soma de convolução:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

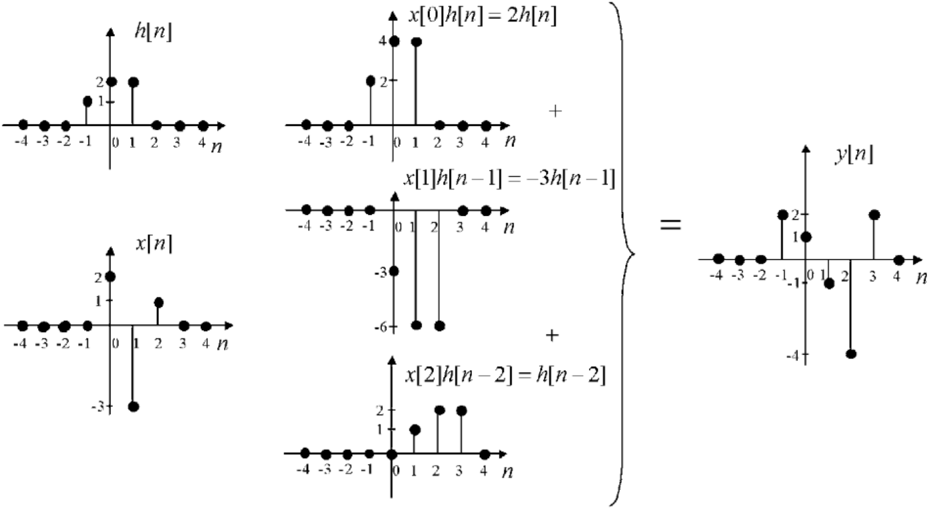
Etapas - Soma de Convolução

1. Rebate-se $h(k)$ em torno de $k = 0$ para se obter $h(-k)$;
2. Desloca-se $h(-k)$ por n amostras à direita, se n for um número positivo (ou à esquerda se n for negativo);
3. Multiplica-se cada elemento $x(k)$ por $h(n-k)$ para se obter a sequência $x(k)h(n-k)$;
4. Somam-se todos os valores da sequência produto para se obter $y(n)$;
5. Repetem-se os passos acima para todos os valores possíveis de n.



h(t) = −t + 1
1
0
1
t
*
u(t) = u0(t) − u0(t − 1)
1
0
1
t
t − t²/2
t²/2 − 2t + 2
1
2
3
4
5
h(τ)
A
τ
−1
0
t
t − 1
2

Convolução - Interpretação gráfica

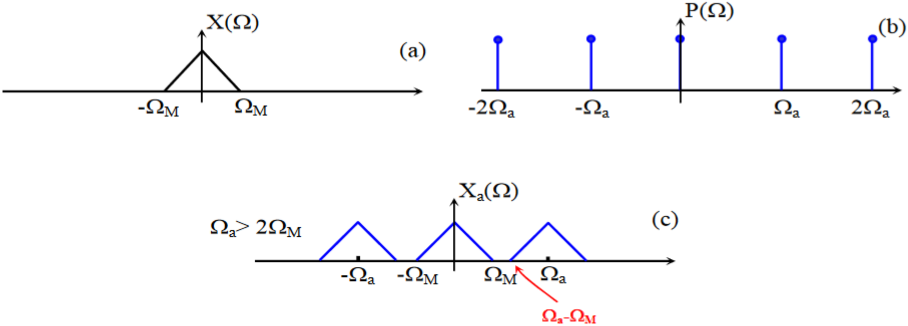


- Simplifica a análise matemática de vários problemas em engenharia;
  - Integração $\rightarrow$ divisão por jw;
  - Convolução $\rightarrow$ multiplicação.
- Permite caracterizar *SLIT*;
- Obtenção por meio da transformada de Fourier (ou Laplace);
- No domínio da frequência:

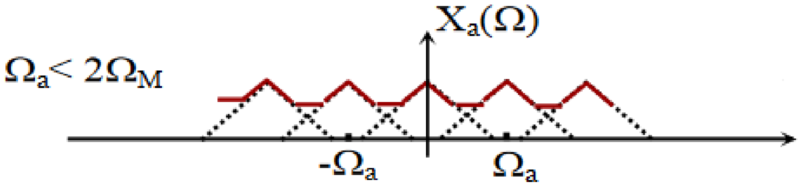
$$Y(w) = X(w)H(w)$$

- A resposta no tempo pode ser obtida aplicando-se a transformação inversa.

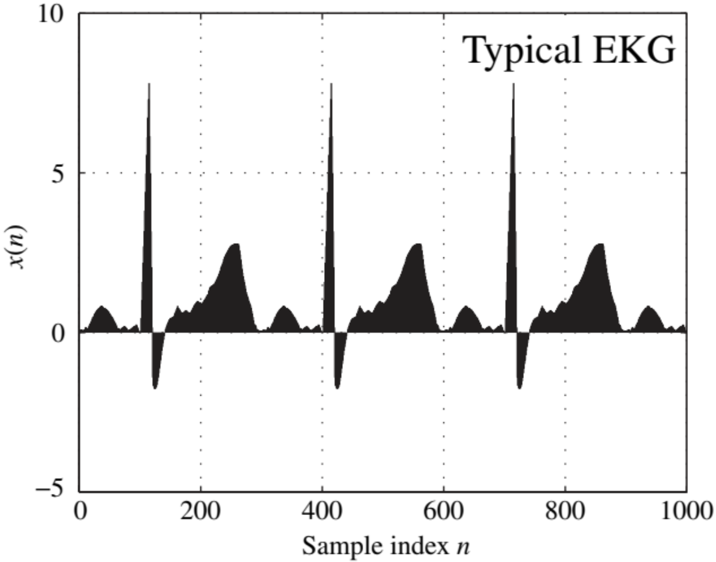
Amostragem no Domínio da Frequência

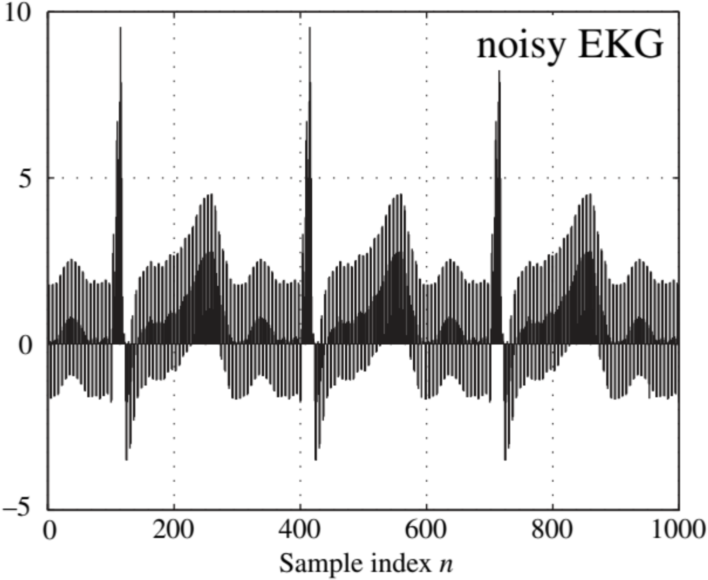


- Visualização do fenômeno *aliasing*:

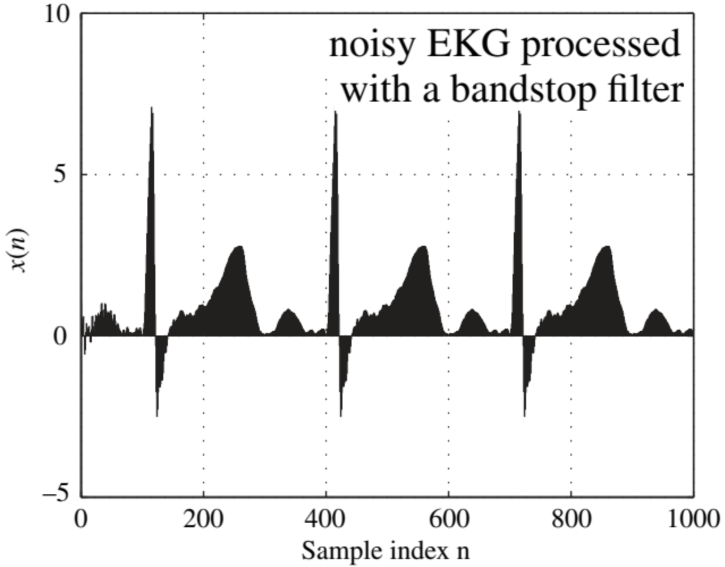


Exemplo da Aplicação de *DSP*

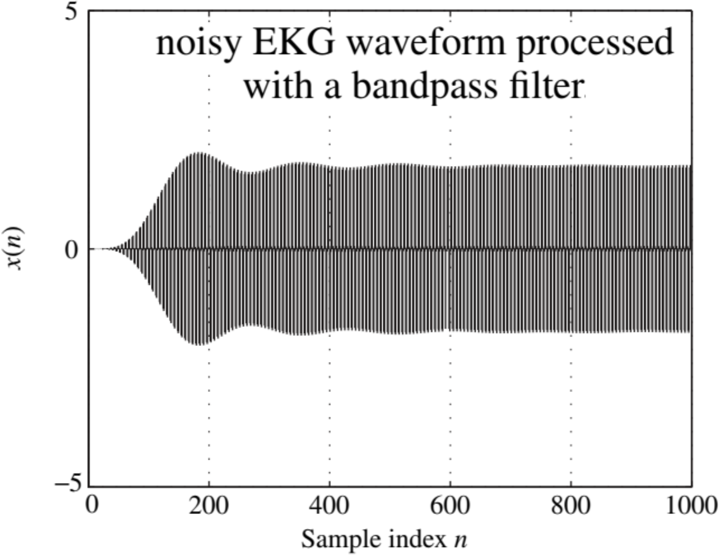



noisy EKG
10
5
0
–5
0
200
400
600
800
1000
Sample index n

Exemplo da Aplicação de *DSP*



Exemplo da Aplicação de *DSP*



- As técnicas de Fourier possibilitam a conversão de sinais do domínio do tempo para o domínio da frequência, ou vice-versa;
- De modo geral, decompõem qualquer sinal em uma soma de sinais senoidais;
- Técnicas de Fourier:
  - Série de Fourier $\rightarrow$ sinais contínuos e periódicos;
  - Transformada de Fourier $\rightarrow$ sinais contínuos e não-periódicos;
  - Transformada de Fourier de Tempo Discreto (*DTFT*) $\rightarrow$ sinais discretos e com duração infinita;
  - Transformada Discreta de Fourier (*DFT*) $\rightarrow$ sinais discretos e com duração finita.

- As técnicas de Fourier possibilitam a conversão de sinais do domínio do tempo para o domínio da frequência, ou vice-versa;
- De modo geral, decompõem qualquer sinal em uma soma de sinais senoidais;
- Técnicas de Fourier:
  - Série de Fourier $\rightarrow$ sinais contínuos e periódicos;
  - Transformada de Fourier $\rightarrow$ sinais contínuos e não-periódicos;
  - Transformada de Fourier de Tempo Discreto (*DTFT*) $\rightarrow$ sinais discretos e com duração infinita;
  - Transformada Discreta de Fourier (*DFT*) $\rightarrow$ sinais discretos e com duração finita.

- A *DFT* é particularmente empregada no processamento digital de sinais:
  - Estende os conceitos do tempo contínuo para o tempo discreto;
  - Ao contrário da *DTFT* é calculada para valores discretos da frequência;
  - Algoritmos computacionalmente eficientes, como a *FFT* (*Fast Fourier Transform)*;
- No domínio da frequência:
  - Espectro de amplitude $\rightarrow$ parte real da *DFT*;
  - Espectro de fase $\rightarrow$ parte imaginária da *DFT*.

Definição

Seja $x(n)$ um sinal discreto de comprimento N. A *DFT* deste sinal é definida como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\left(\frac{-j2\pi}{N} nk\right)}, \qquad k \in (0, 1, \ldots N-1)$$

Se $X(k)$ é a *DFT* de uma determinada sequência de comprimento N, tal sequência pode ser obtida pela *IDFT* por:

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\left(\frac{j2\pi}{N} nk\right)}$$

- A *DFT* é uma forma de mapeamento da sequência $x(n)$ em outra sequência $X(k)$, em que k representa um conjunto de frequências discretas no intervalo 0 a 2π;
- Frequências digitais nas quais a *DFT* é calculada:

$$w_k = \frac{2\pi}{N}k \text{ ou } f_k = \frac{1}{N}k, \quad k \in (0, 1, \ldots N-1)$$

- Frequências analógicas correspondentes:

$$F_k = \frac{F_a}{N}k \; [Hz] \text{ ou } \Omega_k = \frac{2\pi F_a}{N}k \; [rad/s], \quad k \in (0, 1, \ldots N-1)$$

sendo F_a a frequência de amostragem do sinal.

- Determine a *DFT* do sinal de tempo discreto definido pela sequência abaixo, sendo $x(n) = 0$ para todos os outros valores de n:

$$x(0) = 2,\ x(1) = 1,\ x(2) = 1 \text{ e } x(3) = 2$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{nk}=\sum_{n=0}^{3}x(n)e^{-j\frac{\pi}{2}nk}$$

$$X(0)=2e^{-j0}+1e^{-j0}+1e^{-j0}+2e^{-j0}=6$$

$$X(1)=2e^{-j0}+1e^{-j\frac{\pi}{2}1.1}+1e^{-j\frac{\pi}{2}2.1}+2e^{-j\frac{\pi}{2}3.1}=2-j-1+j2=1+j=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$X(2)=2e^{-j0}+1e^{-j\frac{\pi}{2}1.2}+1e^{-j\frac{\pi}{2}2.2}+2e^{-j\frac{\pi}{2}3.2}=2-1+1-1=1$$

$$X(3)=2e^{-j0}+1e^{-j\frac{\pi}{2}1.3}+1e^{-j\frac{\pi}{2}2.3}+2e^{-j\frac{\pi}{2}3.3}=2+j-1-j2=1-j=\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

- $X(k)$ é a *DFT* de $x(n)$ calculada nas frequências digitais $w_k = \frac{\pi}{2}k$, para $k = 0, 1, 2$ e 3.

- Determine a *DFT* da seguinte sequência:

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

- Solução:

$$\mathrm{N} = 10, \quad X(k) = \sum_{n=0}^{9} x(n) W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}}$$

Conhecendo o resultado da série: $\sum_{n=0}^{M-1} ar^n = \frac{a(1 - r^M)}{1 - r}$ e

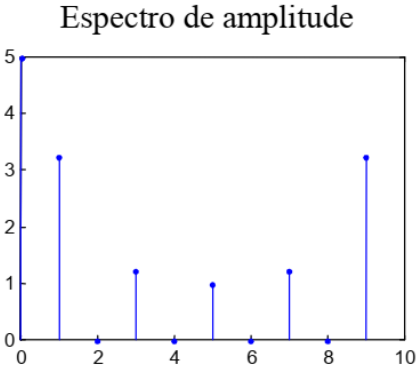
estabelecendo $a = 1, \quad r = e^{2\pi k/10} \quad e \quad M = 5$ tem-se que:

$$X(k) = \frac{1 - e^{-j2\pi k/2}}{1 - e^{-j2\pi k/10}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{e^{j\frac{\pi}{10}k}} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{e^{j\frac{\pi}{10}k} - e^{-j\frac{\pi}{10}k}}$$

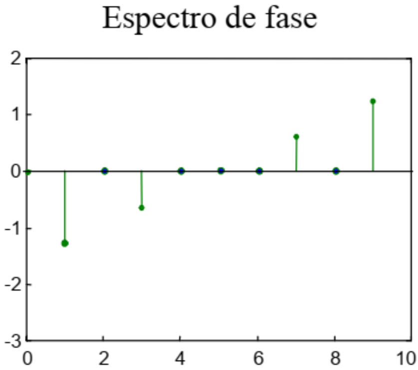
Utilizando as relações de Euler e desenvolvendo a equação acima:

$$X(k) = e^{-j\frac{2\pi k}{5}} \frac{sen(k\pi/2)}{sen(k\pi/10)}, \qquad k = 0, 1, \cdots, 9$$

- $X(k)$ é a *DFT* de $x(n)$ calculada nas frequências digitais $w_k = \dfrac{2\pi}{10}k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$.



Espectro de amplitude
5
4
3
2
1
0
0
2
4
6
8
10

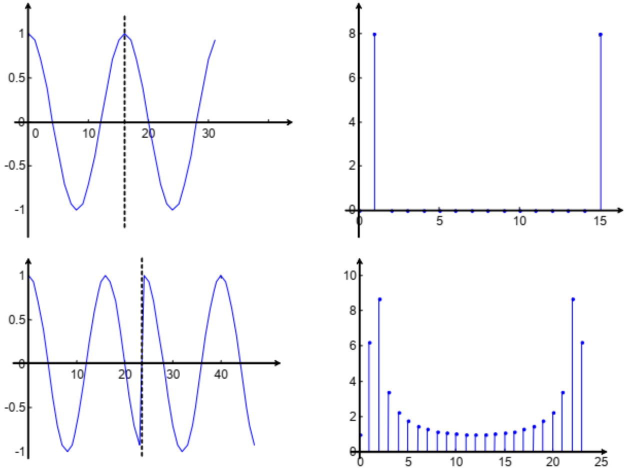


Espectro de fase
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
10

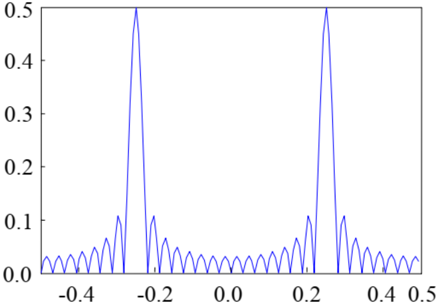
- Periodicidade: $x(n) = x(n+N) \leftrightarrow X(k) = X(k+N)$;
- Linearidade: $DFT\left\{ax(n) + by(n)\right\} = aX(k) + bY(k)$;
- Simetria: Para sequências reais, simetria par da parte real e simetria ímpar da imaginária de $X(k)$;
- Deslocamento circular de $x(n)$: insere uma componente de fase em $X(k)$;
- Deslocamento na frequência em $X(k)$: define uma modulação na sequência $x(n)$;
- Convolução circular (sinais periódicos): $Y(k) = X(k)H(k)$.

DFT - Emprego no *DSP*

- A *DFT* possibilita uma **aproximação** do espectro do sinal, a partir de um número finito de amostras do mesmo;
- Influência da sequência e quantidade de amostras:



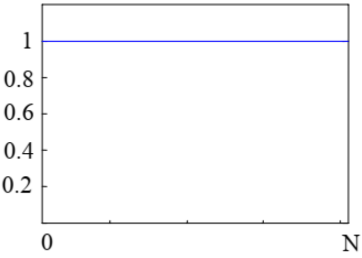
- Melhora da resolução na frequência $\rightarrow$ *zero-padding*;
  - Espectro obtido a partir de 32 amostras de $x(n) = \cos(2\pi 0,25n)$, adicionando 224 zeros no final da sequência ($N = 256$ pontos):

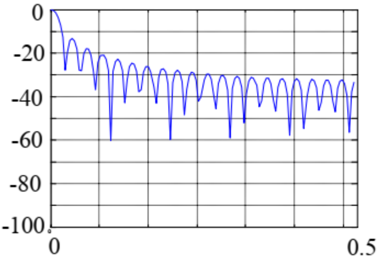


- Vazamento espectral:
  - A *DFT* equivale a convolução do espectro do sinal por uma função janela: $DFT\left\{\widehat{x}(n) = x(n).w(n)\right\} = X(k)W(k)$;
  - Se a janela é retangular, espalhamento do espectro.

- Janela retangular:

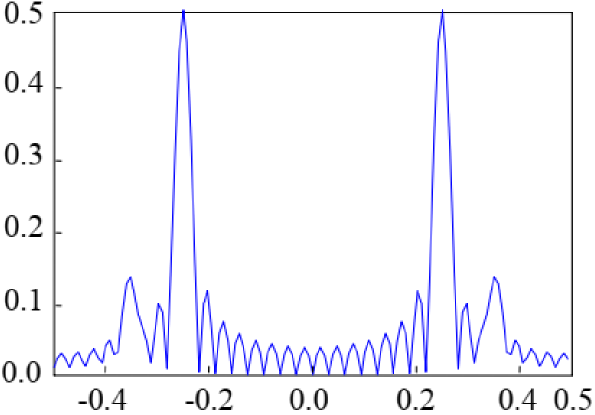
$$w(n)=\begin{cases}1, & 0\le n<N-1\\ 0, & c.c.\end{cases}$$



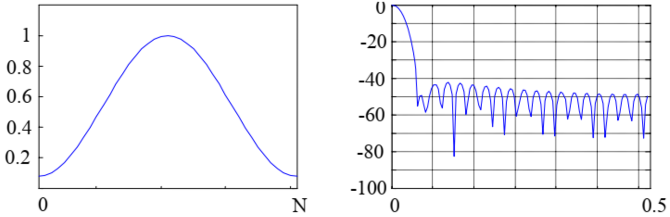


- A transição abrupta no tempo causa grandes lóbulos laterais no espectro da janela.

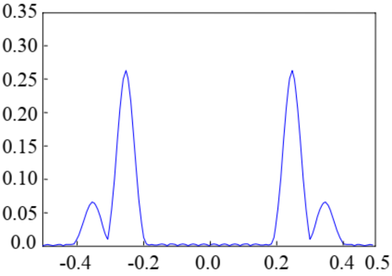
- O vazamento espectral pode mascarar informações importantes:
  - Exemplo para $x(n) = \cos(2\pi 0,25n) + 0,25\cos(2\pi 0,35n)$:



- Usando janela com borda suave (janela de *Hamming*):



⇩



- *FFT* (*<u>F</u>ast <u>F</u>ourier <u>T</u>ransform*);
- Algoritmos que implementam a *DFT* de modo computacionalmente eficiente:
  - Emprego de propriedades como a periodicidade e a simetria complexa na redução do número de cálculos necessários;
  - Na formulação original, $4N^2$ multiplicações e $N(4N-2)$ adições;
  - Na *FFT*, $Nlog(N)$ operações.

- Em Python:
  - Diferentes bibliotecas realizam a *FFT* como *numpy*, *scipy*, dentre outras;
  - Utilizando a biblioteca *scipy*, comandos *fft* (para cálculo da transformada) e fftfreq (para obtenção das frequências associadas).

Referências

- Antoniou, A. Digital Signal Processing. McGraw-Hill, 2006;
- Boulet, B. Fundamentals of Signals & Systems. Charles River Media, 2006;
- Joaquim, M. B. Processamento Digital de Sinais. Apostila utilizada na USP-São Carlos;
- Karris, S. T. Signals and Systems. 3ª edição, Orchard Publications, 2007;
- Oppenheim, A. V., Schaffer, R. W. e Buck, J. R. Discrete Time Signal Processing. 2ª edição, Prentice Hall, 1999.