Написать уравнения соприкасающейся окружности к циклоиде $\begin{cases} x = r\cdot(\text{t-sin(t)}), \\ y = r\cdot(\text{1-cos(t)}) \end{cases}$

в точке A(πr, 2r).

Уранение окружности в неявном виде:

$$F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

Условия касания окружности и циклоиды в точке A:

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = A & (1) \\ F(A) = 0 & (2) \\ \langle \alpha(t_0), \overrightarrow{grad} F \Big|_A \rangle = 0 & (3) \end{cases}$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - x_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - y_0) \Rightarrow \overrightarrow{grad} F = (2(x - x_0), 2(y - y_0))$

$\alpha = (r\cdot(t - \sin(t), r\cdot(1 - \cos(t))$

$\dot{x_t} = r(1\text{-}\cos(t))$, $\dot{y_t} = r\cdot\sin(t) \Rightarrow \dot{\alpha} = (r\cdot(1 - \cos(t), r\cdot\sin(t))$

(1) $\Rightarrow \begin{cases} r\cdot(t - \sin(t_0))) = \pi r, \\ r\cdot(1 - \cos(t_0))) = 2r \end{cases}$ (1.1) $\begin{cases} t_0 - \sin(t_0) = \pi, \\ 1 - cos(t_0) = 2 \Rightarrow cos(t_0) = -1 \Rightarrow t_0 = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Подставим получившееся t_0 в (1.1):

$\pi + 2\pi n - \sin(\pi + 2\pi n) = \pi$

$2\pi n = \sin(\pi + 2\pi n)$

$2\pi n = 0 \Rightarrow$

$n = 0 \Rightarrow$

$t_0 = \pi$

(2) $\Rightarrow (r\pi - x_0)^2 + (2r - y_0)^2 - R^2 = 0$ (2.1)

(3) $\Rightarrow \langle (r(1 - \cos(t_0)), r\cdot\sin(t_0)), (2(r\pi - x_0), 2(2r - y_0)\rangle = 0 \Rightarrow$

$r(1 - cos(\pi))\cdot 2(r\pi - x_0) + r\cdot\sin(\pi)\cdot 2(2r - y_0) = 0$

$4r(r\pi - x_0) = 0$

Так как $r > 0$, то $x_0 = r\pi$

Подставим полученное x_0 в (2.1) и получим

$(2r - y_0)^2 - R^2 = 0 \Rightarrow y_0 = 2r \pm R$

Искомые семейства окружностей $(x - r\pi)^2 + (y - 2r \pm R)^2 = R^2$