

Написать уравнения соприкасающейся окружности к циклоиде $\begin{cases} x = r \cdot (t - \sin(t)), \\ y = r \cdot (1 - \cos(t)) \end{cases}$
в точке $A(\pi r, 2r)$.

Уравнение окружности в неявном виде:

$$F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

Условия касания окружности и циклоиды в точке A :

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = A & (1) \\ F(A) = 0 & (2) \\ \langle \dot{\alpha}(t_0), \overrightarrow{grad F} \Big|_A \rangle = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - x_0), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - y_0) \Rightarrow \overrightarrow{grad F} = (2(x - x_0), 2(y - y_0))$$

$$\alpha = (r \cdot (t - \sin(t)), r \cdot (1 - \cos(t)))$$

$$\dot{x}_t = r(1 - \cos(t)), \quad \dot{y}_t = r \cdot \sin(t) \Rightarrow \dot{\alpha} = (r \cdot (1 - \cos(t)), r \cdot \sin(t))$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} r \cdot (t - \sin(t_0)) = \pi r, \\ r \cdot (1 - \cos(t_0)) = 2r \end{cases} \quad (1.1) \begin{cases} t_0 - \sin(t_0) = \pi, \\ 1 - \cos(t_0) = 2 \Rightarrow \cos(t_0) = -1 \Rightarrow t_0 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Подставим получившееся t_0 в (1.1):

$$\pi + 2\pi n - \sin(\pi + 2\pi n) = \pi$$

$$2\pi n = \sin(\pi + 2\pi n)$$

$$2\pi n = 0 \Rightarrow$$

$$n = 0 \Rightarrow$$

$$t_0 = \pi$$

$$(2) \Rightarrow (r\pi - x_0)^2 + (2r - y_0)^2 - R^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$(3) \Rightarrow \langle (r(1 - \cos(t_0)), r \cdot \sin(t_0)), (2(r\pi - x_0), 2(2r - y_0)) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$r(1 - \cos(\pi)) \cdot 2(r\pi - x_0) + r \cdot \sin(\pi) \cdot 2(2r - y_0) = 0$$

$$4r(r\pi - x_0) = 0$$

Так как $r > 0$, то $x_0 = r\pi$

Подставим полученное x_0 в (2.1) и получим

$$(2r - y_0)^2 - R^2 = 0 \Rightarrow y_0 = 2r \pm R$$

Искомые семейства окружностей $(x - r\pi)^2 + (y - 2r \pm R)^2 = R^2$