Напишите уравнение касательной и нормали к линии x$^3 + y^3 = 3$·x·y в точке A($\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$)

x^3 + y^3 = 3·x·y $\Rightarrow F(x$·y$) = x^3 + y^3$ - 3·x·y
$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$ - $3y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2$ - $3x \Rightarrow \overrightarrow{grad}F = (3x^2$ - $3y$, $3y^2$ - $3x)$

Рассмотрим точку A($\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$)
$\overrightarrow{grad}F(A) = (3\cdot(\frac{3}{2})^2$ - $3\cdot(\frac{3}{2})$, $3\cdot(\frac{3}{2})^2$ - $3\cdot(\frac{3}{2})) = (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$

Уравнение касательной через точку A:
(*): $\overline{A}$·(x - $\frac{3}{2}$) + $\overline{B}$·(y - $\frac{3}{2}$) = 0,
где $\overrightarrow{n} = (\overline{A}, \overline{B})$ - вектор нормали касательной прямой, $\overrightarrow{n} \parallel \overrightarrow{grad}F(A) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{n} = (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$

Подставляем $\overrightarrow{n}$ в (*):
$\frac{9}{4} \cdot (x - \frac{3}{2}) + \frac{9}{4} \cdot (y - \frac{3}{2}) = 0$
$(x - \frac{3}{2}) + (y - \frac{3}{2}) = 0$
x + y - 3 = 0 - уравнение касательной в точке A.

Ищем уравнение нормали:
$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{grad}F(A) \Rightarrow \overline{A}\cdot\frac{9}{4} + \overline{B}\cdot\frac{9}{4} = 0 \Rightarrow \overline{B} = \overline{-A}$

$A:$

$$\begin{cases} \overline{A}\text{·x - }\overline{B}\text{·y} + \overline{C} = 0, \\ x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

$\frac{3}{2}\overline{A} + \frac{3}{2}\overline{B} + \overline{C} = 0, \Rightarrow \frac{3}{2}\overline{A} - \frac{3}{2}\overline{A} + \overline{C} = 0 \Rightarrow \overline{C} = 0 \Rightarrow \overline{A}$·x - $\overline{A} = 0 \Rightarrow$
x - y = 0 - уравнение нормали в точке A