Найдите внутренние углы криволинейного треугольника, образованного кривыми u $= \pm av^2/2$ и v $= 1$ вдоль поверхности, первая фундаментальная форма которой имеет матрицу $(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{bmatrix}$.

Найдем угол $\varphi_0$ между образами кривых $\beta(t) =^t (-\frac{at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$ и $\gamma(t) =^t (\frac{at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$ в точке f(O):$(g_{ij})$(O) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

$\dot\beta(0) =^t (-at, 1)(0) =^t (0, 1), \dot\gamma(0)= t(-at, 1)(0) =^t (0, 1)$. Далее,

$\langle\dot\beta(0),\dot\gamma(0)\rangle$ = (0, 1). $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a^2$; аналогично

$|\dot\beta(0)| = \sqrt{\langle\dot\beta(0), \dot\gamma(0)\rangle} = a$ и $|\dot\gamma(0)| = a$. Имеем $cos(\varphi_0) = \frac{\langle\dot\beta(0),\dot\gamma(0)\rangle}{|\dot\beta(0)|\cdot|\dot\gamma(0)|} = 1$.

Ищем угол $\varphi_A$ между образами кривых $\alpha(\theta) =^t (\theta, 1)$, где $-\frac{a}{2} \le \theta \le \frac{a}{2}$ и $\beta(t) =^t (\frac{-at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$ в Точке A (при $\theta = -\frac{a}{2}$ и $t = 1$) :

$(g_{ij})(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5a^2}{4} \end{pmatrix}, \dot\alpha(-\frac{a}{2}) =^t (1, 0)(-\frac{a}{2}) =^t (1, 0)$,

$\dot\beta(1) =^t (-at, 1)(1) =^t (-a, 1)$. Далее,

$\langle\dot\alpha(-\frac{a}{2}), \dot\beta(1)\rangle$ = (1, 0)$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5a^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = -a$,

$|\alpha(-\frac{a}{2})| = \sqrt{\langle\dot\alpha(-\frac{a}{2}), \dot\alpha(-\frac{a}{2})\rangle} = 1$,

$\langle\dot\beta(1), \dot\beta(1)\rangle = (-a, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5a^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = (-a, \frac{5a^2}{4}) \cdot^t (-a, 1) = \frac{9a^2}{4}$ и

$|\dot\beta(1)| = \sqrt{\langle\dot\beta(1), \dot\beta(1)\rangle} = \frac{3a}{2}$. Таким образом, $cos(\varphi_A) = \frac{\langle\dot\alpha(-\frac{a}{2}),\dot\beta(1)\rangle}{|\dot\alpha(-\frac{a}{2})|\cdot|\dot\beta(1)|} = -\frac{2}{3}$.

Ищем угол $\varphi_B$ между образами кривых $\alpha(\theta) =^t (\theta, 1)$, где $-\frac{a}{2} \le \theta \le \frac{a}{2}$ и $\gamma(t) =^t (\frac{at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$ в точке B (при $\theta = \frac{a}{2}$ и t = 1):

$(g_{ij})(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5a^2}{4} \end{pmatrix}$, $\dot\alpha(\frac{a}{2}) =^t (1, 0)(\frac{a}{2}) =^t (1, 0), \dot\gamma(1) =^t (at, 1)(1)$. Далее,

$\langle\dot\alpha(\frac{a}{2}), \dot\gamma(1)\rangle = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5a^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = a$,

$|\dot\alpha(\frac{a}{2})| = \sqrt{\langle\dot\alpha(\frac{a}{2}), \dot\alpha(\frac{a}{2})\rangle} = 1$,

$\langle\dot\gamma(1), \dot\gamma(1)\rangle$ = (a, 1)$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5a^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = (a, \frac{5a^2}{4}) \cdot^t (a, 1) = \frac{9a^2}{4}$ и

$|\dot\gamma(1)| = \sqrt{\langle\dot\gamma(1), \dot\gamma(1)\rangle} = \frac{3a}{2}$. Таким образом, $cos(\varphi_A) = \frac{\langle\dot\alpha(-\frac{a}{2}),\dot\gamma(1)\rangle}{|\dot\alpha(-\frac{a}{2})|\cdot|\dot\gamma(1)|} = \frac{2}{3}$.