

Напишите уравнение касательной и нормали к линии $x^3 + y^3 = 3 \cdot x \cdot y$ в точке $A(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

$$x^3 + y^3 = 3 \cdot x \cdot y \Rightarrow F(x, y) = x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x \Rightarrow \overrightarrow{grad F} = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$$

Рассмотрим точку $A(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

$$\overrightarrow{grad F}(A) = (3 \cdot (\frac{3}{2})^2 - 3 \cdot (\frac{3}{2}), 3 \cdot (\frac{3}{2})^2 - 3 \cdot (\frac{3}{2})) = (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$$

Уравнение касательной через точку A:

$$(*) : \overline{A} \cdot (x - \frac{3}{2}) + \overline{B} \cdot (y - \frac{3}{2}) = 0,$$

где $\overrightarrow{n} = (\overline{A}, \overline{B})$ - вектор нормали касательной прямой, $\overrightarrow{n} \parallel \overrightarrow{grad F}(A) \Rightarrow \Rightarrow \overrightarrow{n} = (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$

Подставляем \overrightarrow{n} в (*):

$$\frac{9}{4} \cdot (x - \frac{3}{2}) + \frac{9}{4} \cdot (y - \frac{3}{2}) = 0$$

$$(x - \frac{3}{2}) + (y - \frac{3}{2}) = 0$$

$$x + y - 3 = 0 - \text{уравнение касательной в точке A.}$$

Ищем уравнение нормали:

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{grad F}(A) \Rightarrow \overline{A} \cdot \frac{9}{4} + \overline{B} \cdot \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow \overline{B} = -\overline{A}$$

A :

$$\begin{cases} \overline{A} \cdot x + \overline{B} \cdot y + \overline{C} = 0, \\ x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\overline{A} + \frac{3}{2}\overline{B} + \overline{C} = 0, \Rightarrow \frac{3}{2}\overline{A} - \frac{3}{2}\overline{A} + \overline{C} = 0 \Rightarrow \overline{C} = 0 \Rightarrow \overline{A} \cdot x - \overline{A} \cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$x - y = 0 - A$$