

Колесова Маша, Кантимиров Игорь

Плоскость π проходит через точки $A(2,1,3)$, $B(2,4,0)$, $C(-3,0,4)$. Зафиксирован репер $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Находим координаты новых базисных векторов $\overrightarrow{AB} = (0, 3, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-5, -1, 1)$

1) Точка $p \in \pi$ имеет в этом репере координаты $(5, 3)$. Найдите координаты точки p в стандартном репере пространства \mathbb{R}^3 .

Имея координаты точки в новом репере, найдем их в стандартном, пользуясь определением координат точки и разложив их по базису:

$$A + 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = (2, 1, 3) + 5 \cdot (0, 3, -3) + 3 \cdot (-5, -1, 1) = (-13, 13, -9)$$

Таким образом, получили координаты $(-13, -13, -9)$.

2) Найдем уравнение плоскости в пространстве по 3 точкам в стандартном репере:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

В каноническом виде получаем уравнение вида $(x-2) \cdot 0 + (y-1) \cdot 15 + (z-3) \cdot 15 = 0$

Или в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = -3 + 2\lambda, \\ y = 6 + 0\lambda, \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

Подставим полученные x , y , z в уравнение плоскости, чтобы найти точку пересечения плоскости и прямой:

$$\begin{cases} 90 - 30 + 45 \cdot \lambda - 60 = 0, \\ 45\lambda = 0, \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 6, \\ z = -2 \end{cases}$$

D' - точка пересечения плоскости и прямой. Находим координаты $D' = (t_1, t_2)$ в новом репере. Воспользуемся определением координат точки в базисе, где неизвестные координаты обозначим (t_1, t_2) :

$$A + t_1 \cdot \overrightarrow{AB} + t_2 \cdot \overrightarrow{AC} \quad (-3, 6, -2) - (2, 1, 3) = t_1(0, 3, -3) + t_2(-5, -1, 1) \Rightarrow \begin{cases} -5t_2 = -5, \\ 3t_1 - t_2 = 5, \\ -5 = -3t_1 + t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3t_1 = 6, t_2 = 1 \Rightarrow D' = (2, 1) \in (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$