# Найти длину одной арки циклоиды

Напишем уравнение циклоиды в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = r\cdot\text{t - r}\cdot\text{sin(t)}, \\ y = r - r\cdot\text{cos(t)} \end{cases}$$

Длина кривой равна $l = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$

Найдем концы арки циклоиды:

$\text{y} = 0 \Rightarrow r - r\cdot\text{cos(t)} = 0 \Rightarrow$

$1 - cos(t) = 0$

$cos(t) = 1$

$t = 2\pi\text{n, n} \in \mathbb{Z}$

Возьмем a = 0, b = $2\pi$.

Вычислим x'(t) и y'(t):

x'(t) = r - r·cos(t) y'(t) = r·sin(t)

Вычислим длину одной арки циклоиды:

$$\text{l} = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(r - r\cdot cos(t))^2 + (r\cdot sin(t))^2}\ \text{dt} = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - 2r^2\cdot cos(t) + r^2cos^2(t) + r^2sin^2(t)}\ \text{dt} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2r^2\cdot(1 - cos(t))}\ \text{dt} = \begin{bmatrix} cos(2\alpha) = 1 - 2sin^2(\alpha) \\ 1 - cos(2\alpha) = 2sin^2(\alpha) \\ 1 - cos(t) = 2sin^2(\frac{t}{2}) \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2r^2\cdot 2sin^2(\tfrac{t}{2})}\ \text{dt} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 2\text{r}\cdot sin(\tfrac{t}{2})\ \text{dt} = 2\text{r}\ \cdot(-2cos(\tfrac{t}{2}))\Big|_0^{2\pi} = -4r\cdot(cos(\pi) - cos(0)) =$$

$$= -4r\cdot(-1-1) = 8r$$