

Колесова Маша, КН-401

Лабораторная работа №3

1

Система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 1,2345x_1 + 3,1415x_2 + x_3 = 7,5175 + A \\ 2,3456x_1 + 5,9690x_2 = 14,2836 \\ 3,4567x_1 + 2,1828x_2 + (2 + 0,1N)x_3 = 7,8223 + B \end{cases}$$

Вариант 1  $\Rightarrow N=1$

Рассчитаем исходные данные:

$$M = 50 - N = 49$$

$$A = 0,1M + 0,01N = 0,5$$

$$B = 0,2M + 0,02N + 0,01MN + 0,001N^2 = 10,311$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 1,2345x_1 + 3,1415x_2 + x_3 = 8,0175 \\ 2,3456x_1 + 5,9690x_2 = 14,2836 \\ 3,4567x_1 + 2,1828x_2 + 2,01x_3 = 18,1333 \end{cases}$$

№1 Компактная схема Гаусса

$$Ax = b \quad A = B \cdot C$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} b_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ b_{21} & b_{22} & C_{23} & C_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & C_{34} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} \\ 0 & 1 & C_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} C_{kj}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n$$

$$C_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} C_{kj}) / b_{ii}, \quad i \leq j \leq i' \leq n+1$$

$$\begin{cases} By = b \\ Cx = y \end{cases}$$

а) окрышение го 2х уфр носие заметос

$$A = \begin{pmatrix} 1,23 & 3,14 & 1 & 8,02 \\ 2,35 & 5,97 & 0 & 14,28 \\ 3,46 & 2,18 & 2,01 & 18,13 \end{pmatrix}$$

$$\bullet b_{11} = a_{11} = 1,23$$

$$b_{21} = a_{21} = 2,35$$

$$b_{31} = a_{31} = 3,46$$

$$c_2 = a_{12}/b_{11} = 3,14/1,23 = 2,55$$

$$c_3 = a_{13}/b_{11} = 1/1,23 = 0,81$$

$$c_4 = a_{14}/b_{11} = 8,02/1,23 = 6,52$$

$$\bullet b_{22} = a_{22} - b_{21} \cdot c_2 = 5,97 - 2,35 \cdot 2,55 = -0,02$$

$$b_{32} = a_{32} - b_{31} \cdot c_2 = 2,18 - 3,46 \cdot 2,55 = -6,64$$

$$c_{23} = (a_{23} - b_{11} \cdot c_3)/b_{22} = (0 - 1,23 \cdot 0,81)/(-0,02) = 49,82$$

$$c_{24} = (a_{24} - b_{21} \cdot c_4)/b_{22} = (14,28 - 2,35 \cdot 6,52)/(-0,02) = 52,1$$

$$\bullet b_{33} = a_{33} - b_{31}C_{13} - b_{32}C_{23} = 2,01 - 3,46 \cdot 0,81 - (-6,64) \cdot 49,82 = 330,01$$

$$C_{34} = (a_{34} - b_{31}C_{14} - b_{32}C_{24})/b_{33} = (18,13 - 3,46 \cdot 6,52 - (-6,64) \cdot 52,1)/330,01 = 1,03$$

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 2,55 & 0,81 \\ 0 & 1 & 49,82 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,52 \\ 52,1 \\ 1,03 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x_3 = 1,03}$$

$$x_2 + 49,82x_3 = 52,1 \Rightarrow \underline{x_2 = 52,1 - 49,82 \cdot 1,03 = 0,79}$$

$$x_1 + 2,55x_2 + 0,81x_3 = 6,52 \Rightarrow \underline{x_1 = 6,52 - 2,55 \cdot 0,79 - 0,81 \cdot 1,03 = 3,67}$$

до 4х цифр

$$\bullet b_{11} = a_{11} = 1,2345$$

$$b_{21} = a_{21} = 2,3456$$

$$b_{31} = a_{31} = 3,4567$$

$$C_{12} = a_{12}/b_{11} = 3,1415/1,2345 = 2,5448$$

$$C_{13} = a_{13}/b_{11} = 1/1,2345 = 0,81$$

$$C_{14} = a_{14}/b_{11} = 8,0175/1,2345 = 6,4945$$



(3)

$$b_{22} = a_{22} - b_{21} \cdot c_{12} = 5,9690 - 2,3456 \cdot 2,5448 = -0,0001$$

$$b_{32} = a_{32} - b_{31} \cdot c_{12} = 2,1828 - 3,4567 \cdot 2,5448 = -6,6138$$

$$c_{23} = (a_{23} - b_{11} \cdot c_{13}) / b_{22} = (0 - 1,2345 \cdot 0,81) / (-0,0001) = 9999,45$$

$$c_{24} = (a_{24} - b_{21} \cdot c_{14}) / b_{22} = (14,2836 - 2,3456 \cdot 6,4945) / (-0,0001) = 9498,992$$

$$b_{33} = a_{33} - b_{31} \cdot c_{13} - b_{32} \cdot c_{23} = 2,01 - 3,4567 \cdot 0,81 - (-6,6138) \cdot 9999,45 = 66133,5725$$

$$c_{34} = (a_{34} - b_{31} \cdot c_{14} - b_{32} \cdot c_{24}) / b_{33} = (18,1333 - 3,4567 \cdot 6,4945 - (-6,6138) \cdot 9498,992) :$$

$$: 66133,5725 = 0,9499$$

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 2,5448 & 0,81 \\ 0 & 1 & 9999,45 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,4945 \\ 9498,992 \\ 0,9499 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0,9499$$

$$x_2 + 9999,45 x_3 = 9498,992 \Rightarrow x_2 = 9498,992 - 9999,45 \cdot 0,9499 = 0,5144$$

$$x_1 + 2,5448 x_2 + 0,81 x_3 = 6,4945 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 6,4945 - 0,81 \cdot 0,9499 - 2,5448 \cdot 0,5144 = 4,416$$

c) go 6 ундр

$$\bullet b_{11} = a_{11} = 1,2345$$

$$b_{21} = a_{21} = 2,3456$$

$$b_{31} = a_{31} = 3,4567$$

$$c_{12} = a_{12}/b_{11} = 3,1415/1,2345 = 2,544755$$

$$c_{13} = a_{13}/b_{11} = 1/1,2345 = 0,810045$$

$$c_{14} = a_{14}/b_{11} = 8,0175/1,2345 = 6,494532$$

$$\bullet b_{22} = a_{22} - b_{21} \cdot c_{12} = 5,9690 - 2,3456 \cdot 2,544755 = 0,000023$$

$$b_{32} = a_{32} - b_{31} \cdot c_{12} = 2,1828 - 3,4567 \cdot 2,544755 = -6,613655$$

$$c_{23} = (a_{23} - b_{11} \cdot c_{13})/b_{22} = (0 - 1,2345 \cdot 0,810045)/0,000023 = -43478,284891$$

$$c_{24} = (a_{24} - b_{21} \cdot c_{14})/b_{22} = (14,2836 - 2,3456 \cdot 6,494532)/0,000023 = -41303,228661$$

$$\bullet b_{33} = a_{33} - b_{31} \cdot c_{13} - b_{32} \cdot c_{23} = 2,01 - 3,4567 \cdot 0,810045 - (-6,613655)(-43478,284891) = -287551,166343$$

$$c_{34} = (a_{34} - b_{31} \cdot c_{14} - b_{32} \cdot c_{24})/b_{33} = (18,1333 - 3,4567 \cdot 6,494532 - (-6,613655)(-41303,228661))/b_{33}$$

$$= (-41303,228661)/(-287551,166343) = 0,949986$$

$$Cx = \begin{pmatrix} 1 & 2,544755 & 0,810045 \\ 0 & 1 & -43478,284891 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,494532 \\ -41303,228661 \\ 0,949986 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$x_3 = 0,949986$$

$$x_2 + (-43478,284891)x_3 = -41303,228661 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = -41303,228661 - (-43478,284891) \cdot 0,949986 = 0,533289$$

$$x_1 + 2,544755x_2 + 0,810045x_3 = 6,494532 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 6,494532 - 0,810045 \cdot 0,949986 - 2,544755 \cdot 0,533289 = 4,36791$$

Вывод по 3 видам округления:

с округлением до 4 и до 6 знаков после запятой в итоговом ответе совпадают минимум 2 цифры после запятой. С результатом округления до 2 цифр после запятой различия глобальные, не совпадает даже целая часть  $\Rightarrow$  алгоритм получает ответ точнее при изначальной большей точности промежуточных результатов.



путь решения.

№2 Метод Гаусса с выбором главного элемента

а) по 2х знаков

$$\begin{pmatrix} 1,23 & 3,14 & 1 \\ 2,35 & 5,97 & 0 \\ 3,46 & 2,18 & 2,01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,02 \\ 14,28 \\ 18,13 \end{pmatrix} \begin{matrix} : 1,23 \\ : 2,35 \\ : 3,46 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,55 & 0,81 \\ 1 & 2,54 & 0 \\ 1 & 0,63 & 0,58 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,52 \\ 6,08 \\ 5,24 \end{pmatrix} \begin{matrix} - I \\ - I \\ - I \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,55 & 0,81 \\ 0 & -0,01 & -0,81 \\ 0 & -1,92 & -0,23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,52 \\ -0,44 \\ -1,28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ : (-0,01) \\ : (-1,92) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,55 & 0,81 \\ 0 & 1 & 81 \\ 0 & 1 & 0,12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,52 \\ 44 \\ 0,67 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ - II \end{matrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2,55 & 0,81 \\ 0 & 1 & 81 \\ 0 & 0 & -80,88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,52 \\ 44 \\ -43,33 \end{pmatrix} : (-80,88)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,55 & 0,81 \\ 0 & 1 & 81 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,52 \\ 44 \\ 0,54 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0,54$$

$$x_2 + 81x_3 = 44 \Rightarrow x_2 = 44 - 81 \cdot 0,54 = 0,26$$

$$x_1 + 2,55x_2 + 0,81x_3 = 6,52 \Rightarrow x_1 = 6,52 - 2,55 \cdot 0,26 - 0,81 \cdot 0,54 = 5,42$$

б) go 4 знаков

$$\begin{pmatrix} 1,2345 & 3,1415 & 1 \\ 2,3456 & 5,9690 & 0 \\ 3,4567 & 2,1828 & 2,01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,0175 \\ 14,2836 \\ 18,1333 \end{pmatrix} : \begin{matrix} 1,2345 \\ 2,3456 \\ 3,4567 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,5448 & 0,81 \\ 1 & 2,5448 & 0 \\ 1 & 0,6315 & 0,5815 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,4945 \\ 6,0895 \\ 5,2458 \end{pmatrix} \begin{matrix} - I \\ - I \\ - I \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,5448 & 0,81 \\ 0 & 0 & -0,81 \\ 0 & -1,9133 & -0,2285 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,4945 \\ -0,405 \\ -1,2487 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} : (-1,9133)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,5448 & 0,81 \\ 0 & 1 & 0,1194 \\ 0 & 0 & -0,81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,4945 \\ 0,6526 \\ -0,405 \end{pmatrix} \quad : (-0,81)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,5448 & 0,81 \\ 0 & 1 & 0,1194 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,4945 \\ 0,6526 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x_2 = 0,5}$$

$$\underline{x_3 + 0,1194 x_2 = 0,6526} \Rightarrow x_3 = 0,6526 - 0,1194 \cdot 0,5 = \underline{0,5929}$$

$$x_1 + 2,5448 x_3 + 0,81 x_2 = 6,4945 \Rightarrow$$

$$\underline{x_1 = 6,4945 - 0,5 \cdot 0,81 - 0,5929 \cdot 2,5448 = \underline{4,5807}}$$

c) до 6 знаков

⑥

$$\begin{pmatrix} 1,2345 & 3,1415 \\ 2,3456 & 5,9690 \\ 3,4567 & 2,1828 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,0175 \\ 14,2836 \\ 18,1333 \end{pmatrix} \begin{matrix} : 1,2345 \\ : 2,3456 \\ : 3,4567 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,544755 \\ 1 & 2,544765 \\ 1 & 0,631469 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,494532 \\ 6,089529 \\ 5,245841 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -I \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,544755 \\ 0 & 0,00001 \\ 0 & -1,913286 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,494532 \\ -0,405003 \\ -1,248691 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \updownarrow : (-1,913286) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,544755 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0,00001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,494532 \\ 0,652642 \\ -0,405003 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ : 0,00001 \end{matrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2,544755 & 0,810045 \\ 0 & 1 & 0,119463 \\ 0 & 1 & 81004,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,494532 \\ 0,652642 \\ 40500,3 \end{pmatrix} - \underline{\underline{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,544755 & 0,810045 \\ 0 & 1 & 0,119463 \\ 0 & 0 & 81004,380537 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,494532 \\ 0,652642 \\ 40499,647358 \end{pmatrix} : 81004,380537$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,544755 & 0,810045 \\ 0 & 1 & 0,119463 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,494532 \\ 0,652642 \\ 0,499969 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x_2 = 0,499969}$$

$$x_3 + 0,119463 x_2 = 0,652642 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_3 = 0,652642 - 0,119463 \cdot 0,499969 = 0,592914}$$

$$x_1 + 2,544755 x_3 + 0,810045 x_2 = 6,494532 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = 6,494532 - 0,810045 \cdot 0,499969 - 2,544755 \cdot 0,592914 = 4,580714}$$

# Результаты вычислений.

		КСГ	метод Гаусса с выбором главного элемента
округление до 3 знаков	$x_1$	3,67	3,42
	$x_2$	0,79	0,26
	$x_3$	1,03	0,54
округление до 4 знаков	$x_1$	4,416	4,5807
	$x_2$	0,5144	0,5
	$x_3$	0,9499	0,5929
округление до 6 знаков	$x_1$	4,36791	4,580714
	$x_2$	0,533289	0,499969
	$x_3$	0,949986	0,592914

На приведенных примерах можно убедиться, что округление значительно влияет на результаты, увеличивая погрешность методов. В сравнении найденных  $x_3$  ответы значительно разнятся. Возможно, это из-за того, что в методе Гаусса с выбором главного элемента результат зависит от выбора преобразований, т.к. в КСГ последовательность и вид вычислений четко указаны.

Метод Гаусса с выбором главного э-та имеет большой разбег в ответах с округлением до  $2/4/6$  знаков после запятой, но заметно, что с увеличением точности округления ответа становится на порядок точнее. Главное отличие методов — метод Гаусса с выбором главного элемента не зависит от входных данных, т.к. в нем не получается деления на 0 и деление на очень маленькие числа, что создает большие погрешности.