Колесова Маша, КН-401

Лабораторная работа №1

Найти приближенно сумму ряда $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n=\frac{r(n+1)}{n^3-r}$; $r=0{,}15$

с точностью $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-5}$

Погрешность суммы $A_{\Sigma} = \varepsilon = A_{метода} + A_{вычисл.} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$$A_{выч} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{слаг} = N\cdot A_{слаг} \le \frac{\varepsilon}{2} = 0{,}25\cdot 10^{-5}$$

Оценим погрешность метода:

$$|S - S_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{0{,}15(n+1)}{n^3+0{,}15}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{0{,}15}{n^2} = \left.\frac{-0{,}15}{x}\right|_N^{\infty} = \frac{0{,}15}{N}$$

$$A_{мет} \le \frac{0{,}15}{N} \le 0{,}25\cdot 10^{-5} \Rightarrow \boxed{N \ge 60000}$$

$$A_{слаг} \le \frac{0{,}25\cdot 10^{-5}}{N} = \frac{0{,}25\cdot 10^{-5}}{60000} \approx 0{,}417\cdot 10^{-10}$$ $\Rightarrow$ 10 верных знаков после запятой

Метод Куммера:
эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,15$$

$$S = \lambda \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{0,15(n+1)}{n^3+0,15} - \frac{\lambda}{n^2}\right) = \left(\frac{\pi}{20}\right)^2 - \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{0,15n^2+0,15^2}{n^5+0,15n^2}}_{S_1}$$

$$A_{мет} = \left|-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{0,15n^2+0,15^2}{n^5+0,15n^2}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{0,15n^2+0,15^2}{n^5} \leq 0,15\int_N^{\infty}\frac{dx}{x^3} + 0,0225\int_N^{\infty}\frac{dx}{x^5} =$$

$$= \frac{0,15}{2N^2} + \frac{0,0225}{4N^4} = \frac{0,075}{N^2} + \frac{0,005625}{N^4} \leq 0,25\cdot10^{-5}$$

$$// \frac{0,075}{N^2} \gg \frac{0,005625}{N^4} // \quad \frac{0,075}{N^2} \leq 0,25\cdot10^{-5}$$

$N^2 \geq 0,3\cdot10^5$ //смотрим N в большую сторону// $\boxed{N \geq 30000}$

$A_{выч} = N\cdot A_{слаг} \leq 0,25\cdot10^{-5} \Rightarrow A_{слаг} = \frac{0,25}{10^{-9}\,3} \approx 0,83\cdot10^{-10}$ – 10 верных зн. после запятой

Метод Куммера 2:

эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \approx 1,2020569032\ldots = k$

$$\underline{\lambda} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{0,15n^2+0,15^2}{n^5+0,15n^2} : \frac{1}{n^3}\right] \to \underline{0,15}$$

$$S_1 = 0{,}15k + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\text{[illegible]}}{n^5+0{,}15n^2} + \frac{0{,}15}{n^3}\right) = 0{,}15k + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{0{,}1278n^3 - 0{,}15n^5 + 0{,}0225n^2}{n^8+0{,}15n^5} =$$

$$= 0{,}15k + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0{,}1275n + 0{,}15n^3 + 0{,}0225}{n^6+0{,}15n^3}}_{S_2}$$

$$A_{мет} = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{0{,}1275n+0{,}15n^3+0{,}0225}{n^6+0{,}15n^3}\right| < \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{0{,}1275n+0{,}15n^3+0{,}0225}{n^6} \le$$

$$\int_N^{\infty}\frac{0{,}1275}{x^5}dx + 0{,}15\int_N^{\infty}\frac{dx}{x^3} + 0{,}0225\int_N^{\infty}\frac{dx}{x^6} = 0{,}1275\,\frac{(-1)}{4x^4}\Big|_N^{\infty} + 0{,}15\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_N^{\infty} +$$

$$+ 0{,}0225\,\frac{(-1)}{5x^5}\Big|_N^{\infty} = \frac{0{,}031875}{N^4} + \frac{0{,}075}{N^2} + \frac{0{,}0045}{N^5} \le 0{,}25\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{0{,}075}{N^2} \gg \frac{0{,}0045}{N^5}$$

$$\frac{0{,}075}{N^2} \gg \frac{0{,}031875}{N^4}$$

$$\frac{0{,}075}{N^2} \le 0{,}25\cdot 10^{-5}$$

$$\boxed{N \ge 30\,000}$$

$A_{алг} \approx 0{,}83\cdot 10^{-10}$ – 10 верных знаков после запятой

N≥60.000	15652,173913054849	15652,173913054849
M≥30.000	7826,086956517773	4500,0246740117755
L≥30000	7826,086956517773	4500,000000007731