Колесова Маша, КН-401

Лабораторная работа №2

вариант 1 : $f(x) = e^{-x} - 1,9 + x^2$ точность $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$

① метод половинного деления

Локализуем корень, выбрав отрезок, на котором существует единственный корень ур-я и ф-я на концах которого принимает значения разных знаков:

$f(1) < 0 \quad f(1,5) > 0 \Rightarrow [a; b] = [1; 1,5]$

Проверим условия существования и единственности корня на заданном отрезке:

$$\begin{cases} f(a)f(b) < 0 \\ f'(x) \neq 0 \quad x \in [a; b] \end{cases}$$

$$f'(x) = -e^{-x} + 2x \begin{array}{l} \nearrow f'(1) = 2,36 \neq 0 \\ \searrow f'(1,5) = 3,22 \neq 0 \end{array}$$

Данный метод не имеет дополнительных условий сходимости кроме $f(a)f(b) < 0$

Алгоритм:

1) выбрать середину $c = \frac{a+b}{2}$ отрезка $[a; b]$ в качестве приближенного корня.

2) если $f(c)=0$, то $c$ - искомый корень. Иначе идём на шаг 3)

3) из полученных отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$ переходим к тому, ф-я на концах которого принимает значения разных знаков.

Начинаем процесс заново.

Нужно остановить процесс на шаге $k$, на котором $|b_k - c_k| < \varepsilon$ и вычислить $x = \frac{a_k + b_k}{2}$. Тогда корень $\approx x$.

// т.к. точный корень отличается от $x$ не более, чем на

// половину длины отрезка.

Итоги программы:

$a = 1{,}272766113 28125$

$b = 1{,}27278137 20703125$

$\boxed{c = 1{,}2727737426757812}$ - найденное значение

$f(c) = 6{,}7464810016293 34e^{-06}$

Решение достигнуто на 16 итерации

② метод Ньютона

$f(x) = e^{-x} - 1,9 + x^2$ $\qquad f'(x) = -e^{-x} + 2x$

Численная процедура: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_0)}$

Отрезок берем тот же (как в методе половинного деления)

$[a; b] = [1; 1,5]$

Начальное приближение $x_0$ – правый конец $(b = 1,5)$, так как условие выбора начальной точки: $f(x_0) f'(x_0) > 0$

$f(x) = e^{-x} - 1,9 + x^2 \qquad f(1) < 0 \qquad f(1,5) > 0$

$f''(x) = -e^{-x} + 2 \qquad f''(1) > 0 \qquad f''(1,5) > 0$

Проверим для $x_0 = 1,5$:

$f(1,5) f''(1,5) = (e^{-1,5} + 0,35)(-e^{-1,5} + 2) > 0$

Проверим достаточные условия сходимости:

$$\begin{cases} f(a) f(b) < 0 & (1) \\ f'(x) \neq 0 \text{ на } [a; b] & (2) \\ f''(x) \neq 0 \text{ на } [a; b] & (3) \\ f(x_0) f''(x_0) > 0 & (4) \end{cases}$$

(1) и (2) проверены в методе половинного деления

(4) условие проверено выше

(3) $f''(x) = -e^{-x} + 2 \neq 0$, тк $f''(x) > 0$ на $[a; b]$

! Критерий выхода из цикла уточняющего корня: (лекции - тема 3 „Численное решение уравнений. Метод Ньютона (метод касательных))

Если выполняется $\frac{M}{2m} |x_{n+1} - x_n| < 1$, то условие $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ можно использовать в качестве условия остановки численной процедуры метода Ньютона.

- $m = \min\limits_{x \in [a, b]} |f'(x)| > 0$ $\qquad m = \min\limits_{x \in [a; b]} |-e^{-x} + 2x|$

При возрастании $x$ увеличивается $2x$ и экспонента стремится к 0 =>

Линейная часть растет быстрее, чем уменьшается экспонента => при минимальном значении $x$ на отрезке $|f'(x)|$ будет минимальным:

$x = 1 \Rightarrow m = -e^{-1} + 2 \cdot 1 \approx 1,632$

- $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ $\quad M = \max\limits_{x \in [a,b]} |-e^{-x} + 2|$

При возрастании $x$ экспонента $\to 0$ => для максимального значения $x$ должен быть минимален =>

$x = 1 \Rightarrow M = -e^{-1} + 2 \approx 1,632$

Тогда критерий остановки: $\frac{1}{2} |x_{n+1} - x_n| < 1$ – выполняется, и $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ можно использовать.

В соответствии с условиями заданная точность достигнута при $n = 7$, найденное значение

$x = 1,2727715320140478$

③ метод подвижных хорд $f(x) = e^{-x} - 1,9 + x^2$

Выбор отрезка [a; b], если выполняется система:

$$\begin{cases} 1)\ f(a)f(b) < 0 \\ 2)\ f'(x) \neq 0 \\ 3)\ f''(x) \neq 0 \end{cases} \text{ на } [a; b],$$ то $\exists!$ корень на [a; b]

//метод сходится

Рассмотрим отрезок $[a; b] = [1; 1,5]$.

1) Как ранее выяснено $f(a)f(b) < 0$

2) $f'(x) = -e^{-x} + 2x$

$f'(a) \approx 1,632 > 0$

При возрастании x будет увеличиваться положительная часть 2x и стремиться к 0 экспонента $\Rightarrow f'(x)$ на $[a; b] > 0$

3) $f''(x) = -e^{-x} + 2 > 0$ на [a; b], тк экспонента $\to 0$

$\Rightarrow$ выполняется достаточное условие сходимости метода подвижных хорд на $[a; b] = [1; 1,5]$.

Алгоритм:

(1) метод является двухшаговым $\Rightarrow$ зададим 2 приближения

$x_{n-1} = x_0$, $x_n = x_1$ ($x_0 = 1$, $x_1 = 1,5$)

(2) через $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_n, f(x_n))$ проводим хорду. Точку пересечения с осью абсцисс обозначим $x_{n+1}$

$$d = \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - d$$

$$x_{n-1} = x_n$$

$$x_n = x_{n+1}$$

(3) В качестве критерия останова берут $|f(x_n)| < \varepsilon$ или $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ - изменение $x$ в результате итерации стало меньше заданного $\varepsilon$. При этом имеется в виду не интервальные значения, а два вычисленных значения, тк величина интервала не стремится к 0.

Иначе идем на шаг (2).

Вычисления:

4 итерация:

найденное значение $x = 1,2727707647 39161$; $f(x) = -5.6561422212553225 e^{-12}$

при этом –

$x_{n-1} = 1,2728252594857556$

$x_n = 1,2727706736971989$

$f(x_{n-1}) = 0,00012346051705169891$

$f(x_n) = -2,0626002394941167 e^{-07}$

$d = -9,104196228975872 e^{-08}$

④ метод касательных парабол $f(x) = e^{-x} - 1,9 + x^2$

Выбор отрезка $[a;b]$ - если выполняется система
1) $f(a) f(b) < 0$
2) $f'(x) \neq 0$
3) $|f''(x)| \leq M$ - огр.
на всём $[a;b]$,

то $\exists!$ корень на $[a;b]$ // метод сходится.

Возьмем отрезок $[1; 1,5]$. 1) и 2) доказывается аналогично в методе подвижных хорд.

3) Найдём M:

$f''(x) = -e^{-x} + 2 > 0 \quad \forall x \in [a;b]$

$2 > -e^{-x}$, при возрастании x экспонента уменьшается =>

=> $f''(x)$ принимает наибольшее значение при $x = a = 1$ =>

=> $M = f''(a) = 1,63212$ => метод сходится на $[1; 1,5]$

Алгоритм:

(1) берём начальное приближение $x_n = 1$.

(2) проводим касательную параболу через $x_n$. Точку пересечения ветки с осью абсцисс обозначим $x_{n+1}$:

$$d = \frac{f'(x_n) - \sqrt{(f'(x_n))^2 + 2M f(x_n)}}{M}$$

$$x_{n+1} = x_n + d$$

$$x_n = x_{n+1}$$

(3) проверка на окончание поиска. Сравнить модуль разности значений $x$ на данной и предыдущей итерациях с $\varepsilon$.

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ => полагаем $x_n$ - искомый корень.

Иначе - шаг (2).

Результаты программных расчетов:

$d = -7,4847487576095 76\,e-07$

$x = 1,2727707647421593$ - искомое значение, тк $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

(достигнуто на шаге 4

5. Метод неподвижных хорд

Суть метода – разбиение отрезка $[a; b]$ на 2 с помощью хорды и выборе нового отрезка от точки пересечения хорды с осью абсцисс до неподвижной точки, на котором ф-я меняет знак и содержит решение.

Условия применения метода: $\begin{cases} f'(x) \neq 0 \\ f''(x) \neq 0 \end{cases}$ на $[a; b]$

На 1 шаге находим $[a; b]$: $f(a)f(b) < 0$

Все 3 условия проверены ранее (для отрезка $[1; 1,5]$)

Метод обеспечивает более быстрое нахождение корня, чем метод половинного деления.

Алгоритм:

1. формула метода: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - d}{f(x_n) - f(d)}$,

где $d$ - неподвижная точка, которая выбирается из условия $f(d)f''(x) > 0$ // Это условие соответствует условию на начальное приближение в методе Ньютона //

начальное ... 

2. Определить значение $f(x)$ в точках $a_k$, $b_k$, $c_k$.

Найти точку пересечения хорды с осью абсцисс:

$$c = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

Проверить условие и определить новый интервал поиска:

- если $f(a)f(c) < 0$, то искомый корень – внутри левого отрезка, положить $a = a$, $b = c$

- если $f(c)f(b) < 0$, то корень – внутри правого отрезка.

Положить $a = c$, $b = b$.

3. Условие остановки итерационного процесса:

$|f(x_{n-1})| \le m \cdot \varepsilon$, где $m = \min\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)|$

$m$ найдено ранее – $m \approx 1,632$

При выполнении этого условия $x_{n+1}$ является приближенным значением корня уравнения $f(x) = 0$ на $[a; b]$

Результаты: на 4 итерации $x = 1,2727363572 9612$

6 Метод простой итерации $f(x) = e^{-x} - 1,9 + x^2$

Уравнение $f(x) = 0$ равносильными преобразованиями приводится к виду $x = \varphi(x)$. Для сходимости метода должно выполняться условие $|\varphi'(x)| < 1$ на интервале $[a; b]$. При этом задача сводится к нахождению абсциссы точки пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$.

Алгоритм:

1. $f(x) = 0$ приводим к виду $x = \varphi(x)$.
   Для сходимости нужно обеспечить выполнение условия $|\varphi'(x)| < 1$.
2. Задать начальное приближение и $k = 0$.
3. Шаг итерации:
   - вычислить следующее приближение $x_{k+1} = \varphi(x_k)$
   - точность $\varepsilon$ будет достигнута, если выполнено неравенство
     $$|x_{k+1} - x_k| \le \frac{1-q}{q}$$
     ($q$ - const из теоремы: $|\varphi'(x)| \le q < 1 \quad \forall x \in [a; b]$)
     (критерий остановки взят из А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова „Вычислительные методы для инженеров")
   - иначе $k = k + 1$ и новая итерация.

Преобразование ф-ии:

<u>1 метод</u> $f(x)=0$ заменяется равносильным $x = x + cf(x)$, $c = const \neq 0$.

Тогда, приняв правую часть за $\varphi(x)$ и раскрывая $|\varphi'(x)| = |1 + cf'(x)| < 1$,

получим $2 < cf'(x) < 0$ => можно найти $c$, чтобы выполнялись эти неравенства.

<u>2 метод</u> $f(x)=0$ заменяется равносильным $x = x \pm \dfrac{f(x)}{\max|f'(x)|} = \varphi(x)$

<u>3 метод</u> $x$ выражается из $f(x)=0$ так, чтобы для полученного уравнения $x = \varphi(x)$ выполнялось условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$ в окрестности искомого корня.

Решение: выразим $x$ по 3 методу: $x = \sqrt{-e^{-x} + 1{,}9} = \varphi(x)$

Проверка условия $|\varphi'(x)| < 1$ – $\varphi'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{-e^{-x}+1{,}9}}$

при $x=1$ $\varphi'(x) \approx 0{,}1486$

при $x=1{,}5$ $\varphi'(x) \approx 0{,}086$

→ при возрастании $x$ значение ф-ии уменьшается => преобразование удовлетворяет условием.

Функция удовлетворяет условию $|\varphi'(x)| \le q$, где $q$ используется в критерии остановки.

По логическим умозаключениям из книги А. А. Амосова, справедливой является оценка $|x_n - \xi| \le q^n |x_0 - \xi|$.

Используя формулу конечных приращений Лагранжа:

$x_{n+1} - \xi = \varphi(x_n) - \varphi(\xi) = \alpha^{n+1}(x_n - \xi)$

$x_n$ и $\xi$. $\alpha^{n+1} = \varphi'(\xi_n)$, где $\xi_n$ – точка, расположенная между $x_n$ и $\xi$.

$x_n \in (\xi - \sigma, \xi + \sigma) \Rightarrow |\alpha^{n+1}| \le q \Rightarrow |x^{n+1} - \xi| \le q|x^n - \xi| \Rightarrow$

метод обладает линейной сходимостью, сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q$.

Чем меньше $q$, тем выше скорость сходимости; и чем меньше погрешность начального приближения, тем меньшее число итераций требуется.

Программная реализация:

В качестве начального приближения возьмем $x = \frac{a+b}{2}$, как в методе дихотомии, потому что точнее результат было бы сложнее угадать, не применив перед этим другие методы.

В качестве константы возьмем $q = 0{,}9999$.

// $q < 1$, но чтобы узнать результат, выберем число, близкое к 1,

// сделав вид, что не знаем предыдущих результатов и точнее

// угадать не можем.

С данными условиями результат:

$q = 0{,}9999$

$x = 1{,}2727703925646054$

6 итераций

Результаты программных расчетов:

отрезок везде берём $[1; 1,5]$

| | | | |
|---|---|---|---|
| метод дихотамии | 1,25 | 1,2727737426757812 | 16 |
| метод Ньютона | 1,5 | 1,2727715320140478 | 7 |
| м. подвижных хорд | 1,5 | 1,272770764739161 | 4 |
| м. касательных парабол | 1 | 1,2727707647421593 | 4 |
| м. неподвижных хорд | 1,2407239143536068 | 1,272736357 29612 | 4 |
| м. простой итерации | 1,25 | 1,2727703925646054 | 6 |

Выводы: метод половинного деления всегда сходится, тк на его сходимость не влияет вид функции; но число итераций мб большое (как у нас), тк зависит от длины взятого отрезка.

Метод Ньютона и метод касательных парабол сх-ся быстро, но требуют большую аналитическую работу, тк вычисление 1 и 2 производной не всегда удобно.

Наибольшую точность и высокую скорость показал метод касательных парабол.

Его достижением является то, что он перебирает все корни на отрезке.