Колесова Маша, КН-401

Лабораторная 5

Решить задачу методом Коши на отрезке [0; 1]

$$\begin{cases} y' = 50y(x-0{,}6)(x-0{,}85) \\ y(0) = y_0 = 0{,}1 \end{cases}$$

использовать методы Коши, трапеций неявный, Адамса трехшаговый явный при разных шагах $h_1 = 0{,}1$, $h_2 = 0{,}05$, $h_3 = 0{,}025$

Аналитическое решение

$$y' = 50y(x-0{,}6)(x-0{,}85) = 50y(x^2 - 1{,}45x + 0{,}51)$$

$$\int \frac{dy}{50y} = \int (x^2 - 1{,}45x + 0{,}51)\,dx \quad \Big| \cdot 100$$

$$\ln y = \frac{100x^3}{6} - \frac{145x^2}{4} + \frac{51x}{2} + \ln C$$

$$y = e^{\ln C + \frac{50}{3}x^3 - 36{,}25x^2 + 25{,}5x}$$

$$y_0 = y(0) = e^{\ln C} = 0{,}1 \Rightarrow C = 0{,}1$$

Общее решение:

$$y = e^{\frac{50}{3}x^3 - 36{,}25x^2 + 25{,}5x + \ln 0{,}1}$$

метод Коши

$$y_i = y_{i-1} + h\underbrace{f\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2},\ y_{i-1} + \frac{h}{2}\overbrace{f(x_{i-1}, y_{i-1})}^{①}\Big)}_{②} \ ⊜$$

$$① \ f(x_{i-1}, y_{i-1}) = 50y_{i-1}(x_{i-1} - 0{,}6)(x_{i-1} - 0{,}85)$$

$$② \ f\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2},\ y_{i-1} + \frac{h}{2}f(x_{i-1}, y_{i-1})\Big) = 50\Big(y_{i-1} + \frac{h}{2}\cdot ①\Big)\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2} - 0{,}6\Big)\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2} - 0{,}85\Big)$$

$$⊜ \ y_{i-1} + h\cdot 50\Big(y_{i-1} + \frac{h}{2}\big[50y_{i-1}(x_{i-1} - 0{,}6)(x_{i-1} - 0{,}85)\big]\Big)\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2} - 0{,}6\Big)\Big(x_{i-1} + \frac{h}{2} - 0{,}85\Big)$$

Невязка метода Коши имеет третий порядок малости по h, откуда следует, что метод сходится со вторым порядком. И метод требует на каждом шаге вычислений правой части дифференциального уравнения.

$\boxed{\text{метод трапеций неявный}}$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i)\right]$$

Это равенство представляет задачу от неизвестного значения y_i.

Преобразуем метод к явному виду, заменив величиной

$\hat{y}_i = y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1})$. Сделаем метод явным.

Если в правую часть подставить начальное приближение, то получаем метод

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1}))\right]$$

Оценим невязку метода

$$\psi_n = y(x_{n-1}) - y(x_n) = \frac{h}{2}\left(f(x_n, y(x_n)) + f(x_n + h, y(x_n) + h f(x_n, y(x_n)))\right)$$

Разложив решение $y(x)$ в окрестности (x_n) и функцию $f(x,y)$ в окрестности $(x_n, y(x_n))$ получим

$$\psi_n = y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x' + f_y' f) + O(h^3) - y(x_n) - \frac{h}{2}\left(f + f + f_x' h + f_y' h f + O(h^2)\right) = O(h^3)$$

невязка порядка 3 => порядок сходимости метода равен 2.

$\boxed{\text{метод Адамса трехшаговый явный}}$

трехшаговый => $K = 3$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}\right)$$

Особенность: требуется знание начального значения y_0 и стартовых значений y_1, y_2 и f_1, f_2. Стартовые значения получим методом Рунге - Кутты (например) порядка $K+1 = 4$

метод Рунге - Кутты 4 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}K_1 + \frac{2}{6}K_2 + \frac{2}{6}K_3 + \frac{1}{6}K_4$$

$K_1 = hf(x_i, y_i)$

$K_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}K_1)$

$K_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}K_2)$

$K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3)$

Выводы

Быстрота сходимости метода определяется его порядком => среди приведенных методов быстрее всех сходится метод Адамса трехшаговый явный.

Также это можно увидеть, сравнив значение, полученное аналитическим путем, и вычисленное значение для каждого метода (зн-е на конце отрезка) /* для $h = 0,1$ */

точное значение	37, 11724081536368
метод Коши	19, 2806769333212 14
метод Адамса	33, 2974555 3390792
метод трапеций	16, 27169390691 3065

При меньших h зн-е по методу Адамса также более близки к аналитическому.

Исходя из результатов, делаем вывод, что метод Адамса имеет наименьшую погрешность (разность эталонного и вычисленного значения) => более точный.

Более того при уменьшении шага в 2 раза абсолютная погрешность уменьшается в ≈2p раз, где p — порядок сходимости метода.