

Otimização da Atribuição de Clientes em Redes de Internet via Rádio na Zona Rural: Uma Abordagem Eficiente com Teoria dos Grafos e Fluxo Máximo

1st Mariana Rodrigues Lamounier Melo

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Estudante de Engenharia da Computação

Divinópolis-MG, Brasil

mariana.itaptec@gmail.com

Resumo—Este artigo aborda a otimização da atribuição de clientes a antenas de internet via rádio em áreas rurais, utilizando a teoria dos grafos e o conceito de fluxo máximo. A metodologia adotada compreende a coleta de dados em uma empresa provedora de internet, a modelagem do problema em grafos bipartidos direcionados, e a aplicação do algoritmo de fluxo máximo. A análise dos resultados revela melhorias significativas na conexão de 41.81% dos clientes, proporcionando *insights* sobre gargalos de antenas e antenas subutilizadas. O estudo destaca a eficácia da abordagem, ressaltando a contribuição da teoria dos grafos na otimização de redes de comunicação em ambientes desafiadores. Considerações finais discutem limitações e apontam para futuras pesquisas, incluindo estratégias de balanceamento de carga. Este trabalho fornece uma base sólida para melhorias na alocação de recursos em redes de internet rural.

Palavras-Chave—Otimização, Fluxo Máximo, Internet via Rádio, Grafos, Áreas Rurais

Abstract—This paper addresses the optimization of client assignment to radio internet antennas in rural areas, utilizing graph theory and the concept of maximum flow. The adopted methodology involves data collection from an internet service provider, modeling the problem as directed bipartite graphs, and applying the maximum flow algorithm. The analysis of results reveals significant improvements in the connection for 41.81% of the clients, providing *insights* into antenna bottlenecks and underutilized antennas. The study highlights the effectiveness of the graph theory approach, emphasizing its contribution to optimizing communication networks in challenging environments. Concluding remarks discuss limitations and point to future research, including load balancing strategies. This work provides a solid foundation for resource allocation improvements in rural internet networks.

Index Terms—Optimization, Maximum Flow, Radio Internet, Graphs, Rural Areas

I. INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos oferece uma base sólida para modelar e resolver uma variedade de problemas, destacando-se em sua aplicabilidade em contextos diversos (1). Muitas vezes, na resolução de problemas complexos na prestação de serviços de internet, essa teoria se revela uma ferramenta matemática robusta e eficiente, utilizando vértices e arestas para representar visualmente relações entre entidades.

Na presente pesquisa, a análise é dedicada à otimização da atribuição de clientes a antenas de internet via rádio em áreas rurais, reconhecendo e enfrentando os desafios frequentes inerentes a esse cenário específico. Compreende-se a importância crucial

desse processo na entrega de conectividade de qualidade, especialmente em ambientes onde a infraestrutura é limitada, demandando uma abordagem estratégica para garantir eficiência e satisfação dos usuários. A escolha do método de fluxo máximo de Ford-Fulkerson é motivada pela sua aplicabilidade a problemas de fluxo em redes. Para implementar esse método, optou-se pelo algoritmo de Edmonds-Karp, conhecido por sua eficácia em encontrar fluxos máximos em grafos de forma precisa e eficiente.

O presente artigo segue a seguinte estrutura organizacional: A Seção I aborda o tema central do estudo. Na Seção II, contextualiza-se o problema, oferecendo uma fundamentação tanto para a problemática quanto para a solução apresentada, visando proporcionar uma compreensão abrangente do artigo. A Seção III apresenta uma revisão de trabalhos prévios que empregaram conhecimentos semelhantes para abordar problemas correlatos. A Seção IV descreve minuciosamente o modelo adotado para alcançar os objetivos propostos. A Seção V discorre sobre os resultados obtidos, promovendo discussões e comparações para avaliar a adequação do algoritmo ao propósito estabelecido. A Seção VI avalia a metodologia empregada e os resultados alcançados nos experimentos de maneira abrangente. Na Seção VII, são destacados aspectos passíveis de aprimoramento para futuras pesquisas. Por fim, são incluídos um espaço dedicado às referências bibliográficas e um apêndice contendo as tabelas de dados utilizadas no trabalho.

II. CONTEXTUALIZAÇÃO

Nesta seção, é apresentada a fundamentação teórica essencial para a compreensão do problema em questão.

A. Desafios na Conexão à Internet em Áreas Rurais

A internet, sendo o segundo meio de comunicação mais utilizado pelos brasileiros, desempenha um papel fundamental na troca globalizada de informações e na democratização da cultura (2). Contudo, mesmo com sua crescente importância, um estudo recente revelou que significativa parcela da população, especialmente em áreas rurais, enfrenta obstáculos no acesso à internet ¹. Dados provenientes da pesquisa TIC Domicílios 2022, indicam que a taxa de domicílios com acesso à internet no Brasil alcançou 80%. Conforme os resultados, a conectividade é mais expressiva nas áreas urbanas, abrangendo 82% das residências, enquanto nas zonas rurais a inclusão digital atingiu apenas 68% dos domicílios (3).

Nas zonas rurais, a conectividade enfrenta desafios únicos devido à distância em relação aos centros urbanos, à dispersão populacional e às condições geográficas adversas. O custo elevado de implementação

¹O ABISMO digital no Brasil. Disponível em: <https://www.pwc.com.br/pt/estudos/preocupacoes-ceos/mais-temas/2022/o-abismo-digital-no-brasil.html>.

de infraestrutura de telecomunicações nessas regiões é outro entrave significativo (4). A falta de acesso à internet nessas áreas têm impactos diretos na qualidade de vida, limitando o acesso à educação, emprego, serviços públicos e informação.

A expansão da conectividade em áreas rurais não apenas promete criar oportunidades de desenvolvimento, mas também valorizar o espaço, gerar renda e facilitar a integração da população rural às diversas atividades cotidianas, como educação e comunicação (4).

B. A internet via rádio

A Internet via rádio é uma solução crucial para proporcionar acesso à Internet em áreas não abrangidas pela rede cabeada. Esta tecnologia utiliza um par de antenas, uma na torre de transmissão e outra na casa do cliente, permitindo a transmissão e recepção do sinal por ondas eletromagnéticas. Contudo, assim como o WiFi, está suscetível a interferências, especialmente causadas por fatores climáticos, como chuvas e raios. Essas interferências podem distorcer o sinal, resultando na perda de pacotes e, em casos extremos, na desconexão (4). A potência do sinal em sistemas de telecomunicação é medida em dBm, onde valores menos negativos indicam uma conexão melhor.

C. Teoria dos Grafos

As referências (5) e (6) destacam que, ao contrário de muitos ramos matemáticos derivados de problemas de cálculos e movimento, a Teoria de Grafos teve sua origem em desafios ligados a jogos e quebra-cabeças. Apesar de inicialmente parecer insignificante do ponto de vista matemático, essa abordagem atraiu a atenção de matemáticos devido aos resultados teóricos diversos e profundos (7).

Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler deixou uma marca significativa ao redigir o primeiro artigo dedicado aos grafos. Este trabalho não apenas revolucionou a teoria dos grafos, mas também impactou profundamente toda a disciplina matemática. Euler abordou o Problema das Pontes de Königsberg, oferecendo não apenas a solução, mas estabelecendo um método geral para problemas semelhantes. Ao longo do século XIX, os grafos encontraram aplicações em domínios como circuitos elétricos e representações moleculares (8).

Na área da Ciência da Computação, os grafos desempenham um papel fundamental, impulsionando um contínuo desenvolvimento de algoritmos para sua manipulação. Esse impulso decorre do amplo emprego dessa ferramenta na área, destacando-se como uma peça central em diversas aplicações e problemáticas computacionais (9).

Em um grafo G , os conjuntos finitos de vértices $V(G)$ e arestas $E(G)$ têm papéis fundamentais. Geralmente representado como $G = (V, E)$, onde V é um conjunto não vazio de vértices e E é um conjunto de arestas, esse grafo consiste em conectar esses vértices por meio de suas extremidades, estabelecendo uma rede de conexões. Essa definição proporciona a capacidade de mapear, por exemplo, clientes (vértices) conectados a antenas de internet via rádio por meio de diversas ligações (arestas).

Cada aresta está associada a um conjunto de um ou dois vértices, denominados “nós terminais”. É importante destacar que um vértice isolado é aquele desprovido de arestas incidentes. Além disso, um grafo sem vértices é categorizado como vazio (10). Essa estrutura abstrata oferece uma representação eficiente para modelar e compreender diversas relações e sistemas em diferentes áreas.

A representação de grafos exibe notável variabilidade, dependendo do contexto e da aplicação em questão. A direcionalidade das arestas é um fator crucial nesse cenário, pois os grafos podem ser classificados como direcionados ou não direcionados. Nos grafos direcionados, as arestas possuem uma orientação específica, indicada por setas que denotam o sentido. Por outro lado, nos grafos não direcionados, as arestas não têm uma orientação fixa, permitindo que o percurso entre os vértices ocorra em qualquer direção (11). Essa distinção na orientação das arestas é fundamental para a compreensão e a interpretação adequada das relações representadas nos grafos,

adaptando-se às nuances e requisitos específicos de cada situação. Para grafos direcionados, as arestas são comumente chamadas de arcos.

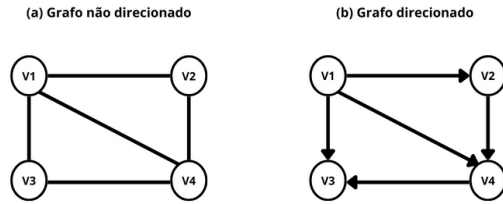


Figura 1: Exemplos de grafos direcionados (a) e não direcionados (b). Fonte: Autor.

Um grafo é considerado bipartido quando seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos, $V1$ e $V2$, de modo que cada aresta ligue apenas vértices de grupos diferentes. Quando essa condição é válida, o par $(V1, V2)$ é chamado de bipartição do conjunto de vértices V de G .

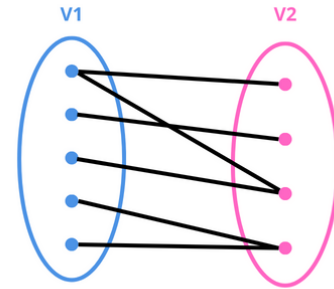


Figura 2: Exemplo de um grafo bipartido. Fonte: Autor.

Um grafo $G = (V, E)$ é chamado de valorado ou ponderado quando existe um número real associado a cada aresta pertencente a E .

D. Redes de Fluxo

Uma estrutura de rede de fluxo $G = (V, E)$ pode ser definida como um grafo direcionado no qual cada aresta $(u, v) \in E$ possui uma capacidade não negativa $c(u, v) \geq 0$. Essa rede de fluxo é caracterizada pela presença de dois vértices distintos: uma fonte, representada por s , e um sorvedouro, representado por t . Com o propósito de simplificação, assume-se que cada vértice está situado em algum caminho que conecta a fonte ao sorvedouro (10). Em outras palavras, para todo vértice $v \in V$, a rede de fluxo contém um caminho $s \rightarrow v \rightarrow t$. Isso assegura que o grafo seja conexo, uma vez que cada vértice, com exceção de s , possui pelo menos uma aresta de entrada.

Considere $G = (V, E)$ como uma rede de fluxo com uma função de capacidade c , onde s é a fonte e t é o sorvedouro. Um fluxo em G é uma função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que deve satisfazer três propriedades cruciais (10). Primeiramente, a Restrição de Capacidade determina que o fluxo ao longo de qualquer arco não pode ser negativo e está limitado pela capacidade máxima do arco. Em segundo lugar, a Conservação de Fluxo assegura que o fluxo é conservado nos vértices intermediários, garantindo que a soma total do fluxo que entra em um vértice seja igual à soma total do fluxo que dele sai. Por fim, a Restrição de Não Fluxo em Arcos Ausentes impede a existência de fluxo em arcos que não fazem parte do grafo original.

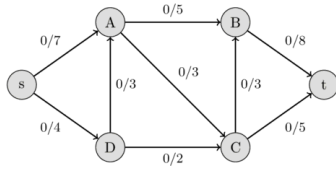


Figura 3: Rede de fluxo (Fluxo inicial). Fonte: Algorithms² (com adaptações).

Através da observação da Figura 3, é evidente a presença de dois valores distintos, delineados por uma barra oblíqua, atribuídos a cada arco da rede: o primeiro denota o fluxo $f(e)$, que é inicialmente nulo, enquanto o segundo indica a capacidade $c(e)$.

E. Fluxo Máximo e Método de Ford-Fulkerson

No contexto da otimização de fluxos em redes, dois objetivos são frequentemente considerados: maximizar o fluxo total que percorre a rede ou minimizar o custo associado a um determinado fluxo (12).

O problema do fluxo máximo constitui uma questão de otimização em sistemas que, dado um grafo de fluxo $G = (V, E)$ com uma fonte $s \in V$ e um sorvedouro $t \in V$, busca identificar o maior fluxo possível de uma magnitude específica, partindo do nó fonte s até o nó sorvedouro t na rede. Além disso, o problema busca determinar os canais da rede pelos quais o fluxo deve ocorrer e em que quantidade, a fim de atingir esse fluxo máximo (13).

A figura subsequente ilustra o fluxo máximo na rede de fluxo apresentada anteriormente na Figura 3, destacando a condição crucial em que o fluxo incidente em cada aresta não excede a capacidade atribuída a essa aresta. Além disso, a soma dos fluxos que convergem para um vértice é igual à soma dos fluxos que emanam desse vértice.

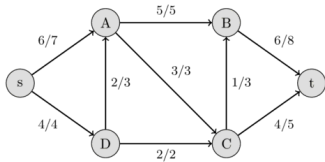


Figura 4: Rede de fluxo (Fluxo máximo). Fonte: Algorithms² (com adaptações).

Em várias aplicações do problema de fluxo máximo, as redes podem apresentar não apenas uma única fonte e um único sorvedouro, mas sim dois, três ou até mais. No entanto, independentemente do número de fontes presentes, essa situação pode ser simplificada para um problema padrão de pico de fluxo. Isso é alcançado pela introdução de uma superfonte, conectada por arcos de capacidade finita ou infinita a cada uma das fontes originais do grafo. Da mesma forma, um supersorvedouro é adicionado, com arcos de capacidade finita ou infinita, que se estendem de cada um dos destinos originais na rede até o supersorvedouro recém-criado (10). Com essa abordagem, o problema é então transformado em um problema conhecido de fluxo máximo, conforme ilustrado na Figura 5:

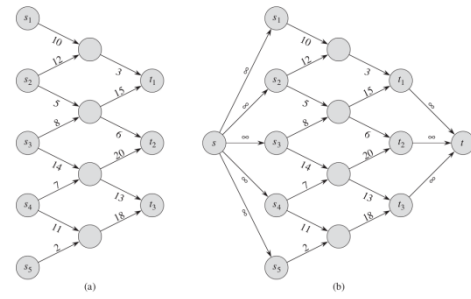


Figura 5: Convertendo um problema de fluxo máximo de múltiplas fontes e múltiplos sorvedouros em um problema com uma única fonte e um único sorvedouro. (a) Representação de uma rede de fluxo com cinco fontes (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) e três sumidouros ($T = t_1, t_2, t_3$). (b) Representação equivalente de uma rede de fluxo com fonte única e sumidouro único. Uma superfonte “ s ” foi adicionada, conectada por arestas com capacidade infinita a cada uma das múltiplas fontes. Da mesma forma, um supersorvedouro “ t ” foi adicionado, conectando por arestas com capacidade infinita a cada um dos múltiplos sorvedouros. Fonte: Marco Barbosa³ (com adaptações).

O principal método para resolver o problema de fluxo máximo é o método de Ford-Fulkerson, desenvolvido por Lester Randolph Ford Jr. e Delbert Ray Fulkerson em 1956 (14). Este método, considerado mais do que um simples algoritmo, é baseado em três conceitos fundamentais: Redes Residuais, Caminhos Aumentadores e Cortes em Redes de Fluxo, bem como o Teorema do Fluxo Máximo/Corte Mínimo.

1) *Redes Residuais*: Ao examinar uma rede de fluxo G em conjunto com um fluxo f , a rede residual G_f surge de maneira intuitiva. Esta é composta por arestas que refletem ajustes no fluxo da rede original G . Cada aresta na rede de fluxo tem a capacidade de acomodar um fluxo adicional, calculado como a diferença entre sua capacidade e o fluxo atual. Quando essa diferença é positiva, a aresta é incorporada à rede residual G_f , possuindo uma “capacidade residual” $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$. Apenas as arestas de G que têm capacidade para aceitar mais fluxo são incluídas em G_f , enquanto as arestas (u, v) com fluxos iguais às suas capacidades têm $c_f(u, v) = 0$ e são excluídas da rede residual. Este conceito é crucial ao analisar uma rede de fluxo $G = (V, E)$ com fonte s e sorvedouro t . Ao considerar um par de vértices $u, v \in V$, define-se a capacidade residual $c_f(u, v)$ (10).

2) *Caminhos Aumentadores*: Dentro de uma estrutura de rede de fluxo $G = (V, E)$ e seu padrão de fluxo correspondente f , um caminho aumentador, denotado como p , é identificado como um trajeto simples de s a t dentro da rede residual G_f . A concepção da rede residual permite ampliar o fluxo ao longo de uma aresta específica (u, v) em um caminho aumentador até atingir sua capacidade residual $c_f(u, v)$, sem violar as restrições de capacidade estabelecidas para as arestas (u, v) e (v, u) na configuração original da rede de fluxo G (10).

3) *Cortes de Redes de Fluxo*: Um corte representa a segmentação da rede de fluxo em duas partes, onde uma inclui a fonte e a outra engloba o sorvedouro. A capacidade de um corte é definida como a soma das capacidades das arestas que conectam a parte contendo a fonte à parte que abriga o sorvedouro.

²MAXIMUM flow - Ford-Fulkerson and Edmonds-Karp. 17 set. 2023. Disponível em: https://cp-algorithms.com/graph/edmonds_karp.html

³BARBOSA, Marco. Disponível em: <https://malbarbo.pro.br/arquivos/2013/6898/12-fluxo-em-redes.pdf>.

Nesse contexto, o corte mínimo, dentre todas as possíveis divisões na rede de fluxo, é identificado como aquele com a capacidade mínima. A importância do corte mínimo reside na sua capacidade, que atua como um limitante crucial para a quantidade de fluxo que pode circular efetivamente pela rede, destacando-se como um elemento-chave no controle do sistema (15).

4) **Teorema do Fluxo Máximo/Corte Mínimo:** O Teorema do Fluxo Máximo/Corte Mínimo estabelece que se f é um fluxo em uma rede de fluxo $G = (V, E)$ com fonte s e sorvedouro t , então as seguintes condições são equivalentes: f é um fluxo máximo em G . A rede residual G_f não contém nenhum caminho aumentador. $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de G (10).

O método de Ford-Fulkerson tem início ao atribuir uma magnitude de fluxo zero a cada arco da rede ($f(u, v) = 0$ para todo $u, v \in V$). A cada iteração, o fluxo ao longo de cada arco nessa trajetória é incrementado pelo valor da capacidade residual associada (ou seja, o fluxo em tais arcos é aumentado pelo menor valor entre todas as capacidades dos arcos que compõem a mencionada trajetória). Esse processo é repetido até que não seja mais possível encontrar caminhos aumentadores. Assim, em virtude do Teorema do Fluxo Máximo/Corte Mínimo, ao não haver mais trajetórias ascendentes, o fluxo máximo é determinado.

Algorithm 1: Algoritmo de Ford-Fulkerson

Data: Grafo $G = (V, E)$, fonte s , sorvedouro t
Result: Fluxo máximo de s para t na rede G

```

1 foreach aresta  $(u, v)$  em  $G.E$  do
2    $(u, v).f = 0$ ;
3 while existe um caminho  $p$  de  $s$  a  $t$  na rede residual  $G_f$  do
4    $cf(p) = \min\{cf(u, v) \text{ para } (u, v) \text{ em } p\}$ ;
5   foreach aresta  $(u, v)$  em  $p$  do
6     if  $(u, v)$  está em  $G.E$  then
7        $(u, v).f = (u, v).f + cf(p)$ ;
8     else
9        $(v, u).f = (v, u).f - cf(p)$ ;

```

O Algoritmo 1 apresenta o método de Ford-Fulkerson. As linhas 1-2 iniciam o fluxo f com o valor zero. O loop **while** das linhas 3-8 itera repetidamente para encontrar um caminho aumentador p na rede residual G_f , aumentando o fluxo f ao longo de p pela adição da capacidade residual $cf(p)$. Cada aresta residual em p é uma aresta na rede original ou sua inversa. As linhas 6-8 ajustam o fluxo de maneira apropriada em ambos os casos, adicionando fluxo quando a aresta residual é original e subtraindo caso contrário. Quando não há mais caminhos aumentadores, o fluxo f representa um fluxo máximo (10).

A eficácia do algoritmo Ford-Fulkerson é fortemente influenciada pela seleção do caminho aumentador p . A metodologia empregada para identificar esses caminhos pode variar, envolvendo abordagens como busca em profundidade, busca em largura e escolha gulosa nos elos intermediários entre a fonte e o sorvedouro. Se a escolha não for adequada, o algoritmo pode não convergir para o valor máximo de fluxo, visto que o valor do fluxo aumenta em incrementos sucessivos sem atingir a convergência. No entanto, ao adotar uma abordagem de busca em largura para determinar o caminho aumentador, o algoritmo opera de maneira eficiente em tempo polinomial, assegurando uma execução rápida (10). Essa implementação específica do método Ford-Fulkerson é conhecida como o algoritmo de Edmonds-Karp, creditado a J. Edmonds e R. M. Karp (16).

O algoritmo de Edmonds-Karp (Algoritmo 2) apresenta uma complexidade temporal de $O(VE^2)$, representando uma melhoria significativa no tempo de execução.

Algorithm 2: Algoritmo de Edmonds-Karp

Data: Rede $G = (V, E)$, capacidade u_{ij} para cada aresta (i, j)
Result: Fluxo máximo de s para t na rede G

```

1 while existe um caminho aumentante  $p$  de  $s$  a  $t$  do
2    $l_i = (\infty, -)$  para cada vértice  $i \in V$ ;
3   Marca a origem com  $(\infty, -)$ ;
4   Enfileira  $s$  em uma fila  $Q$ ;
5   while a fila  $Q$  não está vazia do
6      $i = \text{RemoveFrente}(Q)$ ;
7     foreach aresta  $(i, j)$  em  $G.E$  do
8       if  $j$  está desmarcado then
9          $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ ;
10        if  $r_{ij} > 0$  then
11           $l_j = \min\{l_i, r_{ij}\}$ ; marca  $j$  com  $(l_j, i-)$ ;
12          Enfileira  $j$  em  $Q$ ;
13        foreach aresta  $(j, i)$  em  $G.E$  do
14          if  $j$  está desmarcado then
15            if  $x_{ij} > 0$  then
16               $r_{ij} = x_{ij}$ ;
17               $l_j = \min\{l_i, r_{ij}\}$ ; marca  $j$  com  $(l_j, i+)$ ;
18              Enfileira  $j$  em  $Q$ ;
19        if o destino foi marcado then
20           $j = t$ ;
21          while  $j \neq s$  do
22            if a segunda marca do vértice  $j$  é  $i+$  then
23               $x_{ij} = x_{ij} + l_j$ ;
24            else
25               $x_{ij} = x_{ij} - l_j$ ;
26             $j = i$ ;  $i =$  o vértice indicado na segunda marca;
27        Apaga todas as marcas exceto as da fonte;
28        Reinicia  $Q$  com a fonte apenas;
29 return  $\sum_j x_{1j}$ ; // A soma dos fluxos deixando
    a origem

```

III. TRABALHOS CORRELATOS

Diversos estudos relacionados à atribuição e otimização de fluxo em redes foram conduzidos, proporcionando uma visão abrangente sobre técnicas, aplicabilidades e resultados relevantes.

O estudo conduzido por Cézarne Alves Mendes Motta e George Lauro Ribeiro de Brito (17) abordou a otimização de fluxo em redes, com foco na modelagem e otimização de uma rede conectada de fibra óptica. As técnicas de otimização de fluxo, incluindo os algoritmos de Ford-Fulkerson e Edmonds-Karp, foram implementadas em Java e testadas na Rede Ipê. Os resultados destacaram o desempenho superior do algoritmo de Edmonds-Karp, contribuindo significativamente para a compreensão do fluxo máximo em redes complexas de fibra óptica.

O projeto final de graduação dos autores Marín Gonzales, Gean Piers, e Joaquim Borges (15) abordou o problema do fluxo máximo em grafos direcionados, implementando o algoritmo Ford-Fulkerson. Este estudo ofereceu uma solução computacional eficaz, aplicável em diversas áreas práticas, desde o cálculo de rotas em redes de comunicação até a programação de antenas e seleção de projetos.

A exploração feita por Revital Marbel, Boaz Ben-Moshe e Tal Grinshpoun (18) destaca desafios de otimização em redes de

comunicação fundamentadas na tecnologia de óptica de espaço livre (FSO) em ambientes urbanos. O trabalho apresenta uma heurística baseada em algoritmo genético, evidenciando sua eficácia por meio de experimentos de simulação. Este estudo aponta para potenciais benefícios na construção de infraestrutura central para redes 5G em ambientes urbanos, por meio da implementação de redes ópticas de espaço livre.

A pesquisa realizada por Saulo Martinho Alves dos Santos (19) propõe uma solução eficaz para o problema de alocação de professores a disciplinas em um ambiente acadêmico. Utilizando o algoritmo Húngaro e um modelo de emparelhamento em grafos, a pesquisa automatiza o processo de alocação, apresentando uma solução 14% mais otimizada em comparação com alocações manuais.

O artigo de Pei Zhang, Yirou Gang, Sheng Zeng e Kun Xie (20) propõe um algoritmo inovador para otimizar a utilidade da rede em cenários de rede IP/SR híbrida. O estudo destaca a alocação dinâmica de largura de banda em uma topologia de rede híbrida, onde nós SR e IP tradicionais coexistem, demonstrando a eficácia do algoritmo proposto em comparação com o tradicional OSPF.

A dissertação de Victor Hugo Régis de Freitas (21) focou na análise computacional de otimização em redes de fluxo, com ênfase no algoritmo de Ford e Fulkerson. O trabalho proporcionou informações sobre a determinação do fluxo máximo em redes e sua aplicação na identificação de vulnerabilidades físicas. A solução automatizada proposta avalia os resultados do algoritmo, oferecendo uma compreensão aprofundada e possibilitando a tomada de decisões informadas na exploração de redes saturadas.

O trabalho realizado por Jonatan Schroeder e Elias Procópio Duarte Jr. [22] apresenta uma estratégia de roteamento em redes de comunicação. Inspirado no método de Ford-Fulkerson, o algoritmo proposto utiliza critérios, tais como a cardinalidade do fluxo máximo e o comprimento do menor caminho. Os resultados experimentais destacam a eficácia do roteamento em termos de complexidade e latência, oferecendo, assim, uma contribuição relevante para o campo de roteamento em redes complexas e dinâmicas.

Esses estudos fornecem contribuições úteis para a otimização em redes de comunicação, destacando a utilização eficaz de grafos para resolver problemas de atribuição, otimização e distribuição de fluxos. No entanto, é possível perceber que nenhum deles trata especificamente da atribuição de clientes de internet via rádio a antenas em zonas rurais. Essa lacuna na literatura evidencia a necessidade de mais pesquisas direcionadas a essa área específica.

IV. METODOLOGIA

O presente estudo visa abordar a atribuição eficiente de clientes a antenas de internet via rádio, buscando otimizar a conexão por meio da teoria dos grafos e do fluxo máximo. Para alcançar esse objetivo e demonstrar a aplicabilidade da teoria dos grafos na resolução de desafios práticos, foi adotada uma metodologia que compreende as etapas de coleta, leitura e processamento de dados, modelagem em grafo, e extração de informações, utilizando a linguagem de programação Python na versão 3.12.0. Por se tratar de uma linguagem de alto nível, que visa priorizar o esforço do homem em relação à máquina, as utilidades do Python⁴ estão muito alinhadas às necessidades da ciência de dados, tendo como objetivo aumentar a produtividade. O ambiente de desenvolvimento escolhido foi o Visual Studio Code⁵, reconhecido por sua interface intuitiva e amigável, o que o torna acessível tanto para desenvolvedores experientes quanto para iniciantes.

A coleta de dados foi conduzida em uma empresa provedora de internet, aqui denominada como Empresa X, a qual atende diversas regiões do interior de Minas Gerais, incluindo áreas rurais. Dificuldades relacionadas a conexões precárias nessas localidades impactam

diretamente nos custos operacionais, uma vez que a topologia rural apresenta desafios diversos, aumentando a demanda por manutenção e combustível devido às distâncias envolvidas. Com o propósito de solucionar tais questões, foram coletados dados referentes a clientes, antenas e as conexões possíveis e efetivas na região em análise. Para garantir a preservação da privacidade, os clientes foram identificados como “*Cliente_x*” (onde *x* é uma variável de 1 até o número total de clientes) e as antenas como “*Antena_y*” (onde *y* é uma variável de 1 até o número total de antenas).

O processo de coleta de dados teve início com a obtenção de informações referentes a 55 clientes em uma área rural específica, incluindo detalhes sobre os respectivos planos de internet. Essas informações foram organizadas em uma planilha composta por 56 linhas e 2 colunas. Adicionalmente, foram identificadas 18 antenas na região, cada uma com sua capacidade medida em megabits por segundo (Mbps), totalizando 19 linhas e 2 colunas em outra planilha. Importante ressaltar que as capacidades das antenas foram determinadas pelos colaboradores da empresa, responsáveis por conduzir testes nas áreas para estabelecer a quantidade de dados em Mbps que cada antena pode transmitir sem ocasionar sobrecarga. Todos os dados completos encontram-se disponíveis na Seção A.

NomeCliente	PlanoDeInternet(Mbps)
Cliente1	4
Cliente2	3
Cliente3	4
Cliente4	5

Tabela I: Pequeno exemplo de dados coletados dos clientes: 4 clientes e seus respectivos planos de internet rádio em megabits por segundo (Mbps).

NomeAntena	Capacidade(Mbps)
Antena1	40
Antena2	40
Antena3	40
Antena4	40

Tabela II: Pequeno exemplos de dados coletados das antenas: 4 antenas e suas respectivas capacidades em megabits por segundo (Mbps).

Posteriormente, as relações cliente→antena foram coletadas, indicando as possíveis antenas às quais cada cliente pode se conectar, juntamente com os níveis de sinal em dBm. Esses dados foram armazenados em uma terceira planilha com 199 linhas e 3 colunas.

Cliente	Antena	Sinal(dBm)
Cliente1	Antena1	-53
Cliente1	Antena3	-42
Cliente2	Antena2	-88
Cliente2	Antena1	-64
Cliente2	Antena3	-59
Cliente3	Antena1	-59
Cliente3	Antena3	-58

Tabela III: Pequeno exemplo de dados coletados das conexões: 3 clientes e todas as antenas que cada um pode se conectar, juntamente com seus sinais em decibel-miliwatt (dBm).

Além disso, realizou-se a coleta das conexões efetivas de cada cliente para cada antena (antes da aplicação do algoritmo de fluxo máximo), registrando os sinais correspondentes em dBm com o objetivo de viabilizar comparações futuras. Todas as planilhas foram salvas no formato CSV (valores separados por vírgula) para permitir uma estruturação tabular dos dados.

⁴PYTHON. Disponível em: [urlhttps://www.python.org/](https://www.python.org/).

⁵MICROSOFT. Visual Studio Code. Disponível em: <https://code.visualstudio.com/>.

Cliente	Antena	Sinal(dBm)
Cliente1	Antena1	-53
Cliente2	Antena1	-64
Cliente3	Antena1	-59
Cliente4	Antena2	-81

Tabela IV: Pequeno exemplo de dados coletados das conexões: 4 clientes e todas as antenas que cada um está efetivamente conectado, juntamente com seu sinal em decibel-miliwatt (dBm).

A fim de simplificar o acesso aos dados, os arquivos foram organizados e armazenados em uma pasta designada denominada “data” no diretório do código em Python (23). A leitura detalhada dos arquivos CSV foi conduzida por meio do módulo csv do Python, o qual oferece funcionalidades eficazes para a manipulação de dados tabulares.

No escopo da modelagem e análise de grafos, empregou-se a biblioteca networkx⁶. Esta ferramenta proporciona uma ampla variedade de recursos destinados à criação, manipulação e estudo de estruturas de redes complexas, especialmente grafos. No contexto do presente projeto, o networkx revelou-se fundamental para a modelagem da inter-relação entre antenas, clientes e suas conexões correspondentes, estabelecendo assim uma base sólida para as análises subsequentes.

Para a visualização gráfica dos resultados obtidos, utilizou-se a biblioteca matplotlib.pyplot⁷. Essa biblioteca é amplamente reconhecida por sua eficiência na criação de visualizações, sendo especialmente útil para representar graficamente os grafos construídos com o networkx. A capacidade do matplotlib.pyplot de gerar gráficos claros e informativos contribui significativamente para a interpretação dos resultados obtidos na análise de atribuição de clientes a antenas.

Ademais, a biblioteca NumPy⁸ desempenhou um papel crucial nas operações numéricas essenciais para o presente projeto. Sua robustez e eficácia na manipulação de dados numéricos foram exploradas a fim de otimizar as operações relacionadas às posições dos nós no grafo, proporcionando maior flexibilidade na análise e interpretação dos resultados.

Dessa forma, a combinação destas bibliotecas - networkx, matplotlib.pyplot e numpy - mostra-se fundamental para o desenvolvimento eficiente deste estudo, fornecendo as ferramentas necessárias para a manipulação, modelagem, análise e visualização dos dados relacionados à atribuição de clientes a antenas de internet via rádio.

Com os dados devidamente preparados e as bibliotecas e módulos implementados, deu-se início à modelagem em grafo do problema em questão. Observa-se que a relação cliente→antena pode ser representada como um grafo orientado, no qual cada cliente pode se conectar a uma ou mais antenas. Adicionalmente, trata-se de um grafo bipartido, uma vez que um cliente está conectado a uma antena e vice-versa, não havendo interações cliente→cliente ou antena→antena. Dessa forma, foi criado um grafo bipartido direcionado, contendo dois conjuntos de vértices: V_1 representando os clientes e V_2 representando as antenas.

No contexto das redes de fluxo, o termo refere-se a um sistema contínuo de transmissão de algo de um ponto a outro. Neste cenário, o objetivo é transportar a taxa de conexão de internet em Mbps entre antenas e clientes, visando maximizar esse fluxo. Assim, o problema torna-se modelável como uma rede de fluxo máximo, onde a taxa de fluxo representa a quantidade máxima de dados que pode ser transmitida pela rede.

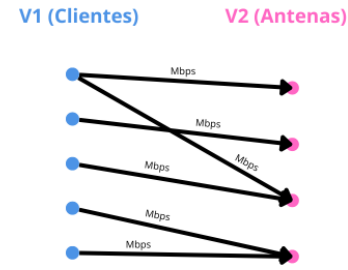


Figura 6: Exemplo de conexão de cliente e antena, com uma taxa de fluxo representada por megabits por segundo (Mbps). Fonte: Autor.

Ao realizar uma análise visual, torna-se evidente que o problema original é expandido para acomodar diversas antenas (fontes) e clientes (sorvedouros). Observa-se que essa ampliação é efetuada por meio da introdução, de forma artificial, de uma superfonte e um supersorvedouro ao grafo, representando a origem e o destino, respectivamente. A superfonte estabelece conexões direcionadas para cada cliente, enquanto o supersorvedouro recebe conexões provenientes de cada antena.

A modelagem do problema por meio de grafos de fluxo de rede foi conduzida, exigindo a definição das capacidades das arestas. No que se refere às conexões origem→cliente, a capacidade foi estabelecida com base no plano de cada cliente, uma vez que a internet não pode ultrapassar esse limite. Para as conexões antena→destino, a capacidade corresponde à capacidade de cada antena em Mbps, uma vez que o fluxo não pode exceder a capacidade suportada pela antena.

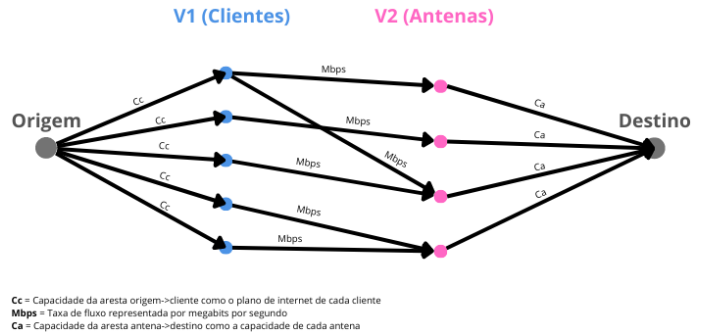


Figura 7: Inclusão de uma fonte (Origem) e um sorvedouro (Destino) na rede de fluxo da Figura 6. Fonte: Autor.

Na otimização do fluxo de rede, é crucial aplicar um cálculo mais elaborado para avaliar a capacidade das arestas cliente→antena. A análise da qualidade da conexão, representada por esse cálculo, desempenha um papel fundamental na determinação do fluxo máximo dentro do sistema.

Ao considerar o plano do cliente e o sinal de conexão, é possível obter uma avaliação abrangente da robustez da ligação. Para evitar manipulações com números negativos, adotam-se estratégias como a multiplicação da capacidade da aresta por (-1) e a utilização do inverso do sinal. Essa abordagem é crucial, pois o resultado, ao ser multiplicado pelo plano de internet do cliente, reflete uma medida proporcional à qualidade da conexão.

O cálculo $((\frac{1}{\text{sinal}} \cdot (-1)) \cdot (\text{plano do cliente}))$ fornece uma métrica significativa, onde valores mais altos indicam uma conexão mais robusta. Ao incorporar essa medida no cálculo do fluxo máximo, o sistema prioriza caminhos de comunicação mais estáveis e eficientes, contribuindo para o desempenho geral e a confiabilidade da rede.

Para a identificação do fluxo máximo na presente rede, foi empregado o algoritmo de fluxo máximo conhecido como “maximum_flow”⁹, disponibilizado pela biblioteca NetworkX em Python.

⁶NETWORKX Documentation. Disponível em: <https://networkx.org/>

⁷MATPLOTLIB Documentation. Disponível em: https://matplotlib.org/3.5.3/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.html

⁸NUMPY. Disponível em: <https://numpy.org/pt/>

Essa função facilita a determinação do fluxo máximo em uma rede, sendo possível realizar uma simples modificação na função para utilizar a implementação do algoritmo de Edmonds-Karp. A referida função requer como parâmetros um grafo direcionado, um nó de origem para o fluxo e um nó coletor para o fluxo, retornando, como resultado, um valor de vazão máxima, isto é, a vazão líquida da fonte. Adicionalmente, fornece um dicionário contendo os valores de fluxo que percorreram cada aresta [26].

O cerne do trabalho reside na otimização do fluxo de conexão para cada cliente na rede. Um recorte especial foi aplicado no dicionário de conexões, concentrando-se exclusivamente nas interações entre clientes e antenas. Para cada cliente, identificou-se a antena que oferece o maior fluxo, e essa aresta foi adicionada a um novo grafo direcionado. O resultado consiste em um grafo que representa as melhores conexões possíveis para cada cliente em termos de fluxo.

A representação visual do grafo é crucial para a interpretação dos resultados. Os ajustes das posições dos nós foram realizados de maneira a proporcionar uma visualização clara e informativa, contribuindo não apenas para a estética, mas desempenhando um papel fundamental na interpretação visual das relações entre os elementos do grafo. Isso torna mais acessível a identificação de caminhos críticos, gargalos de capacidade e outras características relevantes.

Os ajustes realizados compreenderam a disposição da origem no canto esquerdo, o ajuste do espaçamento vertical entre clientes e antenas, bem como o posicionamento do destino à direita das antenas. O resultado desse procedimento consiste na representação gráfica de três grafos distintos, os quais são apresentados e discutidos na Seção V. O código desenvolvido, conforme a metodologia para determinar o maior fluxo de conexão para cada cliente, encontra-se disponível em (23) e pode ser resumido no Algoritmo 3.

Algorithm 3: Algoritmo para Encontrar Conexões de Maior Fluxo

Data: Grafo $G = (V, E)$, origem s , destino t

Result: Conexões de maior fluxo de s para t no grafo G

```

1  $fluxo\_maximo, dic \leftarrow$  AlgoritmoEdmondsKarp( $G, s, t$ );
2  $novo\_G \leftarrow$  CriarGrafoVazio();
3 foreach cliente em  $DadosClientes$  do
4   AdicionarAresta( $novo\_G, 'Origem',$ 
   cliente['NomeCliente']) # Adicionar arestas
   origem→cliente
5 foreach cliente,  $conexoes$  em  $dic$  do
6   if  $conexoes$  não está vazio then
7      $antena\_max\_fluxo \leftarrow$ 
       EncontrarAntenaMaxFluxo( $conexoes$ );
8     AdicionarAresta( $novo\_G, cliente,$ 
        $antena\_max\_fluxo$ ); # Adicionar arestas
       cliente→antena de maior fluxo
9 foreach antena em  $DadosAntenas$  do
10  AdicionarAresta( $novo\_G, antena['NomeAntena'],$ 
   'Destino'); # Adicionar arestas antena→destino
11 ConfigurarPosicaoNos( $novo\_G$ );
12 DesenharGrafo( $novo\_G, Posição, 'Novo Grafo com$ 
   Conexões de Maior Fluxo') # Desenhar o novo grafo sem
   as capacidades

```

⁹MAXIMUM_FLOW-NetworkX 3.2.1 documentation. Disponível em: https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms.flow.maximum_flow.html

V. RESULTADOS

A seguir, são apresentados todos os grafos obtidos durante a metodologia. Cada um deles inclui as mesmas conexões origem→cliente e antena→destino, uma vez que se referem aos mesmos dados. No entanto, cada grafo possui configurações distintas nas conexões cliente→antena: a Figura 8 exhibe todas as conexões efetivas às quais os clientes estão atualmente associados, a Figura 9 abrange todas as possibilidades de conexão, e a Figura 10 representa o grafo resultante após a aplicação do algoritmo de fluxo máximo.

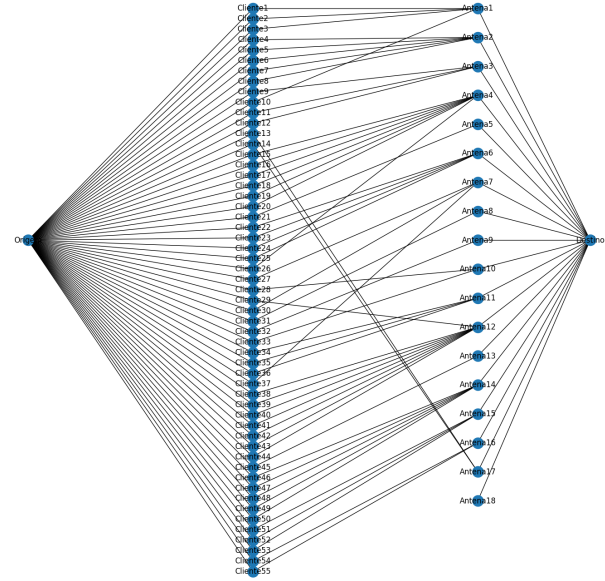


Figura 8: Grafo com todas as conexões efetivas entre cliente e antena e seus devidos pesos. Fonte: Autor.

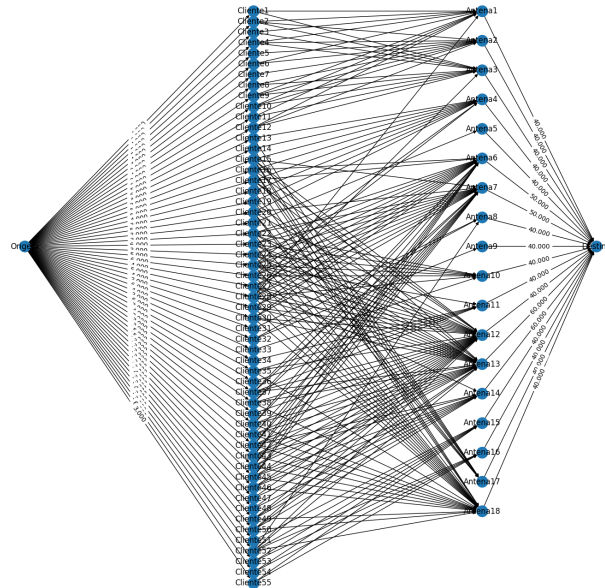


Figura 9: Grafo com todas as possíveis conexões entre cliente e antena. Fonte: Autor.

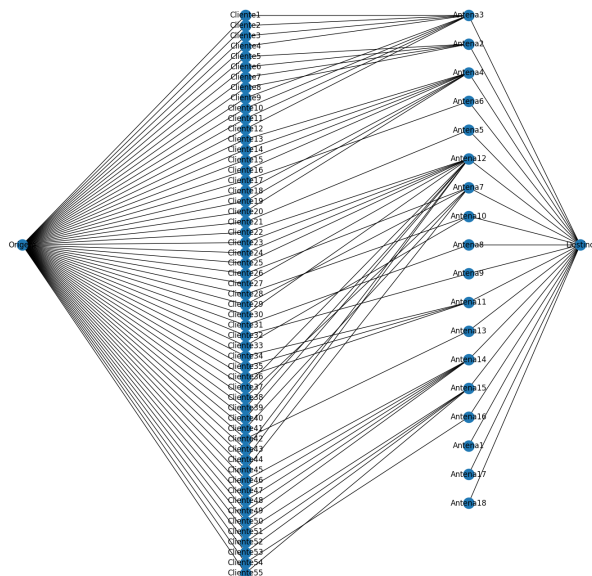


Figura 10: Grafo após a aplicação do algoritmo de fluxo máximo, com todas as melhores conexões possíveis. Fonte: Autor.

O grafo resultante (Figura 10) incorpora as conexões de maior fluxo para todos os clientes, garantindo que cada cliente esteja conectado à antena que proporciona a melhor conexão de internet possível para ele. Sua análise possibilita a identificação de elementos cruciais, com destaque para os seguintes pontos:

1) *Gargalos de Antenas:* É evidente que as antenas 3, 4 e 12 apresentam um número significativamente maior de conexões em comparação com as demais. Dada a natureza rural da região, as antenas, incapazes de transmitir o sinal como em áreas urbanas, enfrentam o risco de sobrecarga quando poucos clientes são capazes de impactar adversamente a qualidade da internet para todos.



Figura 11: Conexões cliente→antena ampliadas para as antenas: 3, 4 e 12. Fonte: Autor.

2) *Antenas Pouco ou Não Utilizadas:* As antenas 1, 17 e 18 não estão sendo utilizadas, constituindo uma preocupação considerável, considerando o custo desses equipamentos. Além disso, as antenas 5, 6, 8, 9, 13 e 16 atendem apenas a um cliente cada, mesmo tendo uma capacidade substancial. Isso aponta para uma subutilização dessas antenas, sugerindo a possibilidade de realocação para áreas mais necessitadas.

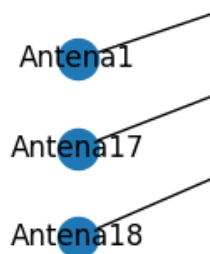


Figura 12: Conexões cliente→antena ampliadas para as antenas: 1, 17 e 18. Nenhum cliente conectado. Fonte: Autor.



Figura 13: Conexões cliente→antena ampliadas para as antenas: 5, 6, 8 e 9. Apenas um cliente conectado. Fonte: Autor.

Com o intuito de realizar comparações na alocação de conexões, o estudo gerou um grafo que ilustra as conexões prévias (Figura 8) quando a Empresa X as estabelecia, baseando-se na avaliação do sinal no momento da instalação da internet. As figuras subsequentes ilustram as conexões cliente→antena no grafo anterior à aplicação do algoritmo de fluxo máximo (Figura 8) e no grafo posterior à execução do referido algoritmo (Figura 10). Em ambas as representações, as conexões foram ampliadas para facilitar a visualização.

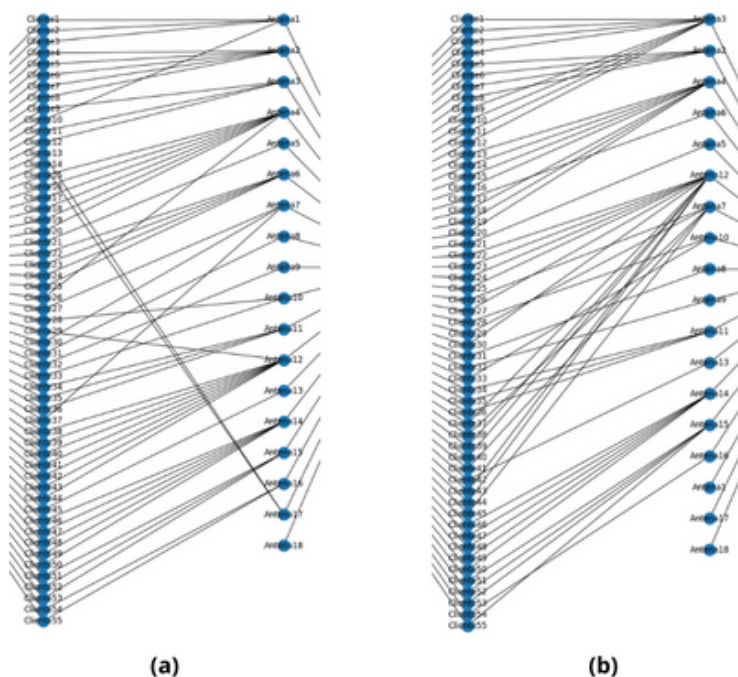


Figura 14: Conexões cliente→antena. (a) Conexão anterior ao algoritmo de fluxo máximo. (b) Conexão posterior ao algoritmo de fluxo máximo. Fonte: Autor.

É evidente que alguns clientes foram designados para antenas distintas após a aplicação do algoritmo de fluxo máximo, resultando na desocupação das antenas 1 e 17. Esse cenário ocorreu devido ao fato de que essas antenas não proporcionavam o melhor sinal possível para os respectivos clientes. Após a execução do algoritmo, torna-se viável avaliar quais antenas podem ser desativadas na região, possibilitando uma realocação mais eficiente em outras áreas, uma vez que sua utilidade local foi comprometida.

A modelagem do grafo possibilitou a observação de que a Antena18 já não estava sendo utilizada antes mesmo da aplicação do algoritmo. Essa constatação seria de difícil análise no contexto de

diversas conexões, e o grafo desempenhou um papel crucial nesse processo.

Para avaliar a eficácia do algoritmo de fluxo máximo na determinação da melhor antena para cada cliente da região, foi conduzida uma análise por meio de uma tabela comparativa. Nesse contexto, foram registrados os sinais que os clientes apresentavam anteriormente e aqueles que teriam caso fossem transferidos para a antena recomendada pelo algoritmo. O procedimento consistiu na seguinte operação: o negativo do sinal anterior foi subtraído do negativo do sinal recomendado. Resultados positivos indicam melhorias na conexão; resultados negativos sinalizam uma deterioração e resultados iguais a zero apontaram a ausência de alterações no sinal. A tabela resultante completa pode ser visualizada na Seção A, especificamente na Tabela X.

Cliente	SinalAnt	SinalPos	((-SinalAnt)-(-SinalPos))
Cliente1	-53	-42	11
Cliente2	-64	-59	5
Cliente3	-59	-58	1
Cliente4	-81	-80	1

Tabela V: Pequeno exemplo do cálculo realizado para comparar o sinal de cada cliente antes da aplicação do algoritmo de fluxo máximo (SinalAnt) e após o algoritmo de fluxo máximo (SinalPos).

É perceptível que a maioria dos clientes permaneceram nas mesmas conexões, evidenciando a inexistência de alternativas mais favoráveis para eles. Contudo, para 23 dos 55 clientes, uma antena mais adequada foi sugerida, representando uma notável melhoria em uma área geograficamente restrita e com um número limitado de clientes. Como exemplo, o Cliente 44 experimentou um aumento significativo de 21dBm no sinal, e o Cliente 26 um aumento de 13dBm, o que representa uma significativa otimização, especialmente em regiões com sinais limitados.

Considerando que todos os resultados foram positivos, confirma-se que o algoritmo de fluxo máximo alcançou com êxito o propósito deste estudo, identificando o máximo fluxo de internet viável para os 55 clientes de internet via rádio na zona rural. Além disso, proporcionou uma visão clara das possíveis mudanças que podem ser implementadas na região para aprimorar a logística de atendimento. Dado o impacto positivo do algoritmo, que resultou na melhoria da conexão de 41.81% dos clientes em uma pequena base de dados, espera-se que esse efeito seja ainda mais expressivo em regiões de maior escala.

VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo destaca a contribuição significativa da teoria dos grafos e do algoritmo de fluxo máximo, especialmente o método de Ford-Fulkerson, na otimização da alocação de clientes às antenas de internet via rádio em áreas rurais. A aplicação prática desses conceitos revelou-se valiosa, oferecendo uma análise detalhada das conexões existentes e indicando melhorias na distribuição do fluxo de internet. A visualização clara dos grafos, especialmente em relação às antenas menos utilizadas, é crucial na estratégia logística da empresa. O setor de marketing pode concentrar esforços nessas áreas específicas, atraindo novos clientes e melhorando não apenas o acesso à internet para as pessoas, mas também contribuindo para a eficiência operacional da empresa.

No entanto, é importante destacar que este estudo tem limitações. Uma desvantagem específica é que a capacidade da antena é considerada apenas durante a execução do algoritmo, na conexão antena→destino. Ao escolher a aresta de maior fluxo para a conexão do cliente, todo o fluxo é direcionado para uma única aresta, eliminando a distribuição e podendo levar à sobrecarga da antena. Apesar dessas limitações, é importante observar que o algoritmo atendeu ao seu propósito principal, que é encontrar o fluxo máximo para cada

conexão. Dessa forma, este trabalho estabelece uma base sólida para pesquisas futuras e inovações.

VII. TRABALHOS FUTUROS

Para pesquisas futuras, seria interessante explorar abordagens que busquem equilibrar o fluxo de internet do cliente com a capacidade da antena, de modo a garantir uma conexão satisfatória para o cliente sem sobrecarregar a antena. Uma estratégia viável para mitigar esse problema envolveria a introdução de um mecanismo de balanceamento de carga durante a atribuição de clientes às antenas. Esta abordagem procuraria distribuir de forma mais equitativa o fluxo de internet entre as antenas disponíveis, levando em consideração não apenas a capacidade, mas também fatores adicionais, como a carga atual da antena e a distância até o cliente. Ao incorporar critérios mais abrangentes na seleção de antenas durante a otimização, seria possível alcançar uma distribuição mais eficiente do tráfego, evitando a sobrecarga de antenas individuais. Essa melhoria potencial contribuiria para a estabilidade do sistema e o desempenho global, garantindo uma experiência de conexão mais consistente para todos os clientes envolvidos.

Além disso, destaca-se que, ao considerar a capacidade da conexão cliente→antena, a distância entre as antenas e as residências pode se mostrar uma métrica eficaz juntamente com o sinal. Isso ocorre porque as distâncias permanecem constantes, ao contrário da variabilidade do sinal ao longo do tempo. O estudo utilizou exclusivamente o sinal devido à indisponibilidade dos dados de distância pela Empresa X. No entanto, em situações em que esses dados estejam disponíveis, a inclusão da distância pode representar uma métrica mais estável e eficiente.

REFERÊNCIAS

- [1] RIAÑO RIAÑO; PATRÍCIA, D.. Integração de dados estatísticos sociais no desenvolvimento de uma possível arquitetura para a internet das coisas. 2016. Dissertação (mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. doi:10.11606/D.3.2016.tde-20122016-081503. Acesso em: 2023-11-12.
- [2] Pesquisa Brasileira de Mídia - PBM 2014 Livro — Secretaria de Comunicação Social. 13 abr. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/aceso-a-informacao/pesquisa/lista-de-pesquisas-quantitativas-e-qualitativas-2013-a-2018/livro-pesquisa-brasileira-de-midia_internet.pdf/view. Acesso em: 16 nov. 2023.
- [3] ASCOM. 80% dos domicílios brasileiros possuem acesso à internet, aponta pesquisa. 17 maio 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/mcom/pt-br/noticias/2023/maio/80-dos-domicilios-brasileiros-possuem-aceso-a-internet-aponta-pesquisa>. Acesso em: 16 nov. 2023.
- [4] ZHANG, Yaguang et al. Challenges and Opportunities of Future Rural Wireless Communications. IEEE Communications Magazine, v. 59, n. 12, p. 16-22, 2021. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9681630>. Acesso em: 17 nov. 2023.
- [5] Ore, Oystein, and Robin J Wilson. Graphs and Their Uses. 2nd ed., Washington, Mathematical Association of America, 1990.
- [6] Biggs, Norman L, et al. Graph Theory 1736-1936. 1st ed., New York, Clarendon Press, 1998.
- [7] COSTA, Polyanna Possani da. Teoria dos grafos e suas aplicações. 2011. 77 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.
- [8] SOUZA, Renato Ferreira de. Resolução de problemas via teoria de grafos. 2015. Dissertação (mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. doi:10.11606/D.55.2015.tde-06072015-103319. Acesso em: 2023-11-23.

- [9] NICOLETTI, M. C., HRUSCHKA, E. R. Fundamentos da Teoria Dos Grafos Para Computação. 3 ed. Rio de Janeiro, Brasil, LTC, 2018.
- [10] Cormen, Thomas H, and Et Al. Algoritmos : Teoria E Pratica. 3rd ed., Rio De Janeiro, Campus, 2012.
- [11] JUNIOR, Jorge. Análise da eficiência de áreas de carga e descarga através da aplicação de dissimilaridade e diversidade em redes multiplex. 2019. 76 p. Dissertação (mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1843/33725>. Acesso em: 16 nov. 2023.
- [12] DOS S. DE OLIVEIRA, Daniela. Análise de Sensibilidade de Problema de Fluxo em Redes com Custo Mínimo. 2010. Universidade Federal do Rio Grande, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/45839>. Acesso em: 17 nov. 2023.
- [13] MOREIRA, Bruno. Fluxo em Redes: o problema do fluxo máximo. 2022. Universidade Federal do Pará, 2022. Disponível em: <https://www.studocu.com/pt-br/document/universidade-federal-do-para/grafos/trabalho-de-redes-de-fluxo-bruno-moreira/34170573>. Acesso em: 16 nov. 2023.
- [14] Ford Jr., L.R. and Fulkerson D.R. 1962. Flows in Networks. Universidade de Princeton, Princeton, NJ.
- [15] Marín Gonzales, Gean Piers; Borges, J. Cálculo del Flujo Máximo en una Red (Grafo Dirigido). 2017. Universidade Autônoma de Barcelona, 2017. Disponível em: <https://ddd.uab.cat/record/173874>. Acesso em: 17 nov. 2023.
- [16] EDMONDS, J.; KARP, R.M. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 19, No. 2, 1972.
- [17] Brito, G. L. R. de, & Motta, C. A. M. (2017). Modelagem e Otimização de Fluxo em uma Rede Real Conectada. Desafios - Revista Interdisciplinar Da Universidade Federal Do Tocantins, 3(Especial), 99–104. Disponível em: <https://doi.org/10.20873/ufmt.2359-3652.2016v3nespp99>. Acesso em: 19 nov. 2023.
- [18] TESTEA, Marbel. Urban Free-Space Optical Network Optimization. Applied Sciences, v. 10, n. 21, 2020. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/21/7872>. Acesso em: 17 nov. 2023.
- [19] ALVES DOS SANTOS, Saulo. Otimização na Alocação de Disciplinas a Professores. 2019. 77 p. Universidade Federal de Ouro Preto, João Monlevade, 2019. Disponível em: <http://www.monografias.ufop.br/handle/35400000/1964>. Acesso em: 18 nov. 2023.
- [20] ZHANG, Pei et al. Bandwidth Allocation With Utility Maximization in the Hybrid Segment Routing Network. IEEE Access, v. 7, p. 85253-85261, 24 jun. 2019. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8744578>. Acesso em: 18 nov. 2023.
- [21] REGIS DE FREITAS, Victor Hugo. Análise Computacional De Otimização Em Redes De Fluxo Saturadas Pela Metodologia Do Algoritmo De Ford E Fulkerson. 2014. 76 p. Universidade Federal Rural Do Semi-Árido, Mossoró, 2014. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1838203. Acesso em: 18 nov. 2023.
- [22] SCHROEDER, Jonatan. Roteamento Dinâmico Tolerante a Falhas Baseado em Avaliação de Fluxo Máximo. 2006. 78 p. (mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/5879>. Acesso em: 18 nov. 2023.
- [23] RODRIGUES, Mariana. GrafosOtimizacao. 26 nov. 2023. Disponível em: <https://github.com/MariRodrigues/GrafosOtimizacao.git>. Acesso em: 26 nov. 2023.

APÊNDICE

TABELAS

Tabela VI: Dados coletados dos clientes: 55 clientes e seus respectivos planos de internet rádio em megabits por segundo (Mbps).

NomeCliente	PlanoDeInternet(Mbps)
Cliente1	4
Cliente2	3
Cliente3	4
Cliente4	5
Cliente5	5
Cliente6	4
Cliente7	4
Cliente8	3
Cliente9	4
Cliente10	3
Cliente11	6
Cliente12	5
Cliente13	6
Cliente14	4
Cliente15	3
Cliente16	5
Cliente17	6
Cliente18	4
Cliente19	3
Cliente20	5
Cliente21	3
Cliente22	3
Cliente23	6
Cliente24	3
Cliente25	5
Cliente26	6
Cliente27	4
Cliente28	5
Cliente29	4
Cliente30	3
Cliente31	6
Cliente32	4
Cliente33	3
Cliente34	6
Cliente35	3
Cliente36	4
Cliente37	3
Cliente38	3
Cliente39	3
Cliente40	5
Cliente41	5
Cliente42	3
Cliente43	3
Cliente44	3
Cliente45	3
Cliente46	3
Cliente47	3
Cliente48	4
Cliente49	3
Cliente50	3
Cliente51	4
Cliente52	3
Cliente53	3
Cliente54	6
Cliente55	3

Tabela VIII: Dados coletados das conexões: 55 clientes e todas as antenas que cada um pode se conectar, juntamente com seus sinais em decibel-miliwatt (dBm).

Tabela VII: Dados coletados das antenas: 18 antenas e suas respectivas capacidades em megabits por segundo (Mbps).)

NomeAntena	Capacidade(Mbps)
Antena1	40
Antena2	40
Antena3	40
Antena4	40
Antena5	40
Antena6	50
Antena7	50
Antena8	40
Antena9	40
Antena10	40
Antena11	40
Antena12	40
Antena13	60
Antena14	60
Antena15	40
Antena16	40
Antena17	40
Antena18	40

Cliente	Antena	Sinal(dBm)
Cliente1	Antena1	-53
Cliente1	Antena3	-42
Cliente2	Antena2	-88
Cliente2	Antena1	-64
Cliente2	Antena3	-59
Cliente3	Antena1	-59
Cliente3	Antena3	-58
Cliente4	Antena2	-81
Cliente4	Antena1	-87
Cliente4	Antena3	-80
Cliente5	Antena2	-65
Cliente6	Antena2	-44
Cliente6	Antena1	-82
Cliente7	Antena2	-80
Cliente8	Antena2	-60
Cliente8	Antena3	-84
Cliente9	Antena2	-87
Cliente9	Antena1	-71
Cliente9	Antena3	-51
Cliente10	Antena2	-78
Cliente10	Antena1	-68
Cliente10	Antena3	-66
Cliente11	Antena1	-77
Cliente11	Antena3	-51
Cliente12	Antena2	-92
Cliente12	Antena1	-62
Cliente12	Antena3	-46
Cliente13	Antena4	-42
Cliente13	Antena17	-52
Cliente14	Antena4	-58
Cliente14	Antena17	-66
Cliente15	Antena4	-58
Cliente15	Antena12	-66
Cliente15	Antena18	-73
Cliente15	Antena7	-66
Cliente15	Antena17	-65
Cliente16	Antena4	-58
Cliente16	Antena12	-78
Cliente16	Antena18	-81

(Continua...)

Cliente	Antena	Sinal(dBm)
Cliente16	Antena6	-79
Cliente16	Antena17	-64
Cliente17	Antena12	-84
Cliente17	Antena18	-86
Cliente17	Antena4	-76
Cliente17	Antena6	-72
Cliente17	Antena13	-88
Cliente18	Antena4	-58
Cliente18	Antena17	-75
Cliente19	Antena4	-65
Cliente19	Antena13	-91
Cliente19	Antena17	-78
Cliente20	Antena12	-85
Cliente20	Antena18	-91
Cliente20	Antena4	-64
Cliente20	Antena7	-82
Cliente20	Antena7	-82
Cliente20	Antena17	-80
Cliente21	Antena5	-41
Cliente22	Antena6	-75
Cliente22	Antena12	-67
Cliente22	Antena18	-75
Cliente22	Antena10	-81
Cliente22	Antena7	-76
Cliente22	Antena13	-79
Cliente23	Antena6	-68
Cliente23	Antena12	-61
Cliente23	Antena18	-68
Cliente23	Antena10	-83
Cliente23	Antena7	-74
Cliente23	Antena13	-71
Cliente24	Antena12	-57
Cliente24	Antena18	-63
Cliente24	Antena6	-62
Cliente24	Antena10	-76
Cliente24	Antena7	-64
Cliente24	Antena13	-70
Cliente25	Antena11	-79
Cliente25	Antena12	-55
Cliente25	Antena18	-59
Cliente25	Antena4	-86
Cliente25	Antena6	-62
Cliente25	Antena10	-84
Cliente25	Antena7	-62
Cliente25	Antena13	-68
Cliente26	Antena7	-53
Cliente26	Antena12	-60
Cliente26	Antena18	-59
Cliente26	Antena4	-66
Cliente26	Antena6	-68
Cliente26	Antena10	-62
Cliente26	Antena13	-60
Cliente27	Antena12	-57
Cliente27	Antena18	-57
Cliente27	Antena14	-75
Cliente27	Antena6	-76
Cliente27	Antena7	-58
Cliente27	Antena13	-66
Cliente28	Antena7	-61
Cliente28	Antena1	-76
Cliente28	Antena12	-58

(Continua...)

Cliente	Antena	Sinal(dBm)
Cliente28	Antena6	-69
Cliente28	Antena10	-54
Cliente28	Antena13	-78
Cliente28	Antena3	-78
Cliente28	Antena6	-69
Cliente28	Antena10	-54
Cliente28	Antena13	-78
Cliente28	Antena3	-78
Cliente29	Antena7	-55
Cliente29	Antena12	-62
Cliente29	Antena18	-64
Cliente29	Antena6	-71
Cliente29	Antena13	-61
Cliente30	Antena12	-61
Cliente30	Antena18	-63
Cliente30	Antena6	-81
Cliente30	Antena7	-63
Cliente30	Antena13	-69
Cliente31	Antena8	-51
Cliente32	Antena9	-75
Cliente32	Antena8	-80
Cliente33	Antena10	-52
Cliente34	Antena11	-64
Cliente35	Antena11	-56
Cliente35	Antena12	-86
Cliente35	Antena18	-82
Cliente36	Antena11	-55
Cliente37	Antena12	-50
Cliente37	Antena11	-80
Cliente37	Antena6	-77
Cliente37	Antena7	-53
Cliente37	Antena13	-63
Cliente38	Antena12	-49
Cliente38	Antena18	-49
Cliente38	Antena6	-60
Cliente38	Antena7	-44
Cliente38	Antena13	-57
Cliente39	Antena12	-74
Cliente40	Antena12	-54
Cliente40	Antena18	-54
Cliente40	Antena6	-80
Cliente40	Antena7	-76
Cliente40	Antena13	-56
Cliente41	Antena12	-63
Cliente41	Antena18	-63
Cliente41	Antena7	-60
Cliente41	Antena13	-68
Cliente42	Antena12	-57
Cliente42	Antena18	-55
Cliente42	Antena14	-89
Cliente42	Antena6	-73
Cliente42	Antena7	-67
Cliente42	Antena13	-50
Cliente43	Antena12	-57
Cliente43	Antena18	-57
Cliente43	Antena14	-75
Cliente43	Antena6	-76
Cliente43	Antena7	-60
Cliente43	Antena13	-66
Cliente44	Antena12	-41
Cliente44	Antena18	-44

(Continua...)

Cliente	Antena	Sinal(dBm)
Cliente44	Antena6	-70
Cliente44	Antena7	-62
Cliente44	Antena13	-45
Cliente45	Antena13	-70
Cliente45	Antena12	-70
Cliente45	Antena18	-69
Cliente45	Antena14	-83
Cliente45	Antena6	-80
Cliente45	Antena7	-65
Cliente46	Antena12	-84
Cliente46	Antena18	-80
Cliente46	Antena14	-64
Cliente46	Antena13	-85
Cliente47	Antena12	-83
Cliente47	Antena14	-59
Cliente48	Antena12	-82
Cliente48	Antena14	-60
Cliente49	Antena12	-81
Cliente49	Antena18	-75
Cliente49	Antena14	-67
Cliente49	Antena13	-82
Cliente50	Antena14	-48
Cliente50	Antena12	-70
Cliente50	Antena18	-62
Cliente50	Antena13	-80
Cliente51	Antena15	-61
Cliente52	Antena15	-64
Cliente52	Antena12	-74
Cliente52	Antena18	-83
Cliente52	Antena8	-88
Cliente52	Antena13	-85
Cliente53	Antena15	-60
Cliente53	Antena16	-78
Cliente54	Antena16	-57
Cliente54	Antena15	-85
Cliente55	Antena16	-75
Cliente55	Antena15	-71

Tabela IX: Dados coletados das conexões: 55 clientes e todas as antenas que cada um está efetivamente conectado -antes do algoritmo de fluxo máximo- , juntamente com seu sinal em decibel-miliwatt (dBm).

Cliente	Antena	Sinal(dBm)
Cliente1	Antena1	-53
Cliente2	Antena1	-64
Cliente3	Antena1	-59
Cliente4	Antena2	-81
Cliente5	Antena2	-65
Cliente6	Antena2	-44
Cliente7	Antena2	-80
Cliente8	Antena2	-60
Cliente9	Antena3	-51
Cliente10	Antena1	-68
Cliente11	Antena3	-51
Cliente12	Antena3	-46
Cliente13	Antena17	-52
Cliente14	Antena17	-66
Cliente15	Antena4	-58
Cliente16	Antena4	-58
Cliente17	Antena4	-76
Cliente18	Antena4	-58
Cliente19	Antena4	-65
Cliente20	Antena4	-64
Cliente21	Antena5	-41
Cliente22	Antena6	-75
Cliente23	Antena6	-68
Cliente24	Antena6	-62
Cliente25	Antena6	-62
Cliente26	Antena4	-66
Cliente27	Antena7	-58
Cliente28	Antena10	-54
Cliente29	Antena12	-62
Cliente30	Antena7	-63
Cliente31	Antena8	-51
Cliente32	Antena9	-75
Cliente33	Antena10	-52
Cliente34	Antena11	-64
Cliente35	Antena11	-56
Cliente36	Antena11	-55
Cliente37	Antena7	-53
Cliente38	Antena12	-49
Cliente39	Antena12	-74
Cliente40	Antena12	-54
Cliente41	Antena12	-63
Cliente42	Antena12	-57
Cliente43	Antena12	-57
Cliente44	Antena7	-62
Cliente45	Antena13	-70
Cliente46	Antena14	-64
Cliente47	Antena14	-59
Cliente48	Antena14	-60
Cliente49	Antena14	-67
Cliente50	Antena14	-48
Cliente51	Antena15	-61
Cliente52	Antena15	-64
Cliente53	Antena15	-60
Cliente54	Antena16	-57
Cliente55	Antena16	-75

Tabela X: Cálculo realizado para comparar o sinal de cada cliente antes da aplicação do algoritmo de fluxo máximo (SinalAnt) e após o algoritmo de fluxo máximo (SinalPos).

Cliente	SinalAnt	SinalPos	((-SinalAnt)-(-SinalPos))
Cliente1	-53	-42	11
Cliente2	-64	-59	5
Cliente3	-59	-58	1
Cliente4	-81	-80	1
Cliente5	-65	-65	0
Cliente6	-44	-44	0
Cliente7	-80	-80	0
Cliente8	-60	-60	0
Cliente9	-51	-51	0
Cliente10	-68	-66	2
Cliente11	-51	-51	0
Cliente12	-46	-46	0
Cliente13	-52	-42	10
Cliente14	-66	-58	8
Cliente15	-58	-58	0
Cliente16	-58	-58	0
Cliente17	-76	-72	4
Cliente18	-58	-58	0
Cliente19	-65	-65	0
Cliente20	-64	-64	0
Cliente21	-41	-41	0
Cliente22	-75	-67	8
Cliente23	-68	-61	7
Cliente24	-62	-57	5
Cliente25	-62	-55	7
Cliente26	-66	-53	13
Cliente27	-58	-57	1
Cliente28	-54	-54	0
Cliente29	-62	-55	7
Cliente30	-63	-61	2
Cliente31	-51	-51	0
Cliente32	-75	-75	0
Cliente33	-52	-52	0
Cliente34	-64	-64	0
Cliente35	-56	-56	0
Cliente36	-55	-55	0
Cliente37	-53	-50	3
Cliente38	-49	-44	5
Cliente39	-74	-74	0
Cliente40	-54	-54	0
Cliente41	-63	-60	3
Cliente42	-57	-50	7
Cliente43	-57	-57	0
Cliente44	-62	-41	21
Cliente45	-70	-65	5
Cliente46	-64	-64	0
Cliente47	-59	-59	0
Cliente48	-60	-60	0
Cliente49	-67	-67	0
Cliente50	-48	-48	0
Cliente51	-61	-61	0
Cliente52	-64	-64	0
Cliente53	-60	-60	0
Cliente54	-57	-57	0
Cliente55	-75	-71	4