Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»
факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №4

по дисциплине
Вычислительная математика

Выполнил:
Студент группы Р3230
Толстых М.А.

Преподаватель:
Перл И. А.
Перл О. В.

Санкт-Петербург, 2024

Описание метода

Метод средних прямоугольников.

Задается отрезок [a ; b] ($a = x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_0 + nh - b$), функция и точность ε. Нужно отрезок [a ; b] разделить на равные части длины h

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \text{где } i = 1,2,\ldots,n$$

Имеем формулу метода прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + \frac{h}{2})$$

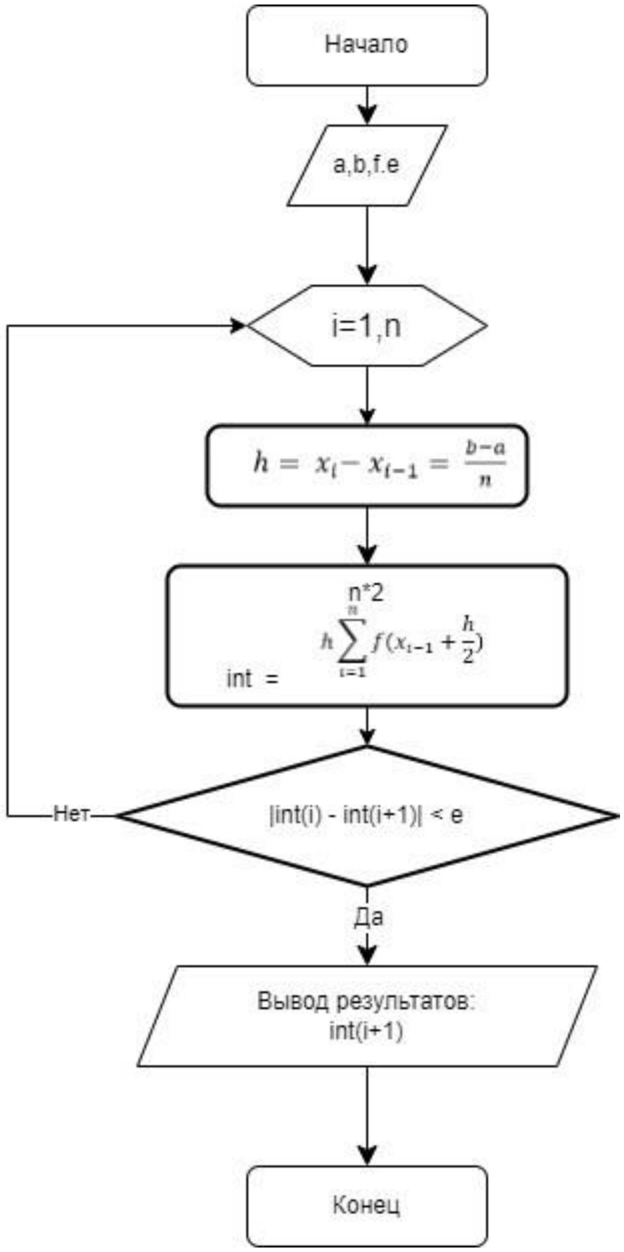
Метод средних прямоугольников называется таковым, поскольку действует выбор точек ε_i – середина элементарных отрезков $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$:

$$\varepsilon_i = x_{i-1} + \frac{h}{2}, \text{где } i = 1,2,\ldots,n$$

Соответственно, формула метода прямоугольников может выглядеть и таким образом:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$$

Блок-схема численного метод



Код

```python
def calculate_integral(a, b, f, epsilon):
    Result.has_discontinuity = False
    func = Result.get_function(f)
    n = 1
    h = (b - a) / n
    integral_old = 0

    def integral_sum(a, b, n):
        return sum(func(a + (i + 0.5) * h) for i in range(n))

    integral_new = h * integral_sum(a, b, n)

    while abs(integral_new - integral_old) > epsilon:
        n *= 2
        h = (b - a) / n
        integral_old = integral_new
        integral_new = h * integral_sum(a, b, n)

        if math.isnan(integral_new) or math.isinf(integral_new):
            Result.has_discontinuity = True
            Result.error_message = "Integrated function has discontinuity or is not defined in the current interval"
            break

    if Result.has_discontinuity:
        return Result.error_message

    return integral_new
```

Метод средних прямоугольников.

Примеры работы программы

1. Тест граничного случая для первой функции.

```
>? 0
>? 1
>? 1
>? 0.001
Integrated function has discontinuity or is not defined in the current interval
```

2. Тест случая для четвертой функции.

```
>? -1
>? 1
>? 4
>? 0.001
4.0
```

3. Тест случая для третьей функции.

```
>? -1
>? 1
>? 3
>? 0.001
4.66650390625
```

4. Тест случая, для которого выводом будет значение интеграла с расколом.

```
>? 0
>? 1
>? 2
>? 0.001
0.9462791962860707
```

5. Тестовый случай, в котором функция math.log(x) не определена для x<= 0, а интервал интегрирования [1, 2] включает x=0 .

```
>? 1
>? 2
>? 5
>? 0.001
Integrated function has discontinuity or is not defined in the current interval
```

Вывод

Простейшим методом численного интегрирования является метод средних прямоугольников. Он использует замену непрерывной функции дискретной последовательностью значений, вычисленных в середине каждого интервала, после чего заменяет интеграл суммой площадей этих прямоугольников. В зависимости от выбранной функции могут быть граничные случаи, неопределенности и т.д. (примеры есть выше)
Также нужно учитывать точность вычислений, которая зависит от количества разбиений интегрирования. Метод может давать неточные результаты из-за выбросов или резких изменений, поэтому он лучше работает для функций с гладким графиком.
Существуют и другие методы для численного интегрирования, как метод трапеций, метод Симпсона и метод Гаусса. Метод Симпсона и трапеций обычно дают более точные результаты, чем метод средних прямоугольников, но требуют больше вычислений. А метод Гаусса является самым точным, но также самым сложным.
Рассмотрим для сравнения, например, метод трапеций. Аналогично, как и в методе средних прямоугольников, разбивается отрезок [a; b] на n равных интервалов длины h точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, шаг h считается также, а узлы определяются $x_i = a + ih,$ где $i = 0,1, \dots, n$. Однако, формула метода трапеций значительно отличается и использует пятое свойство определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n))$$

Алгоритмическая сложность метода составляет $O(n)$, где n – количество разбиений интервала интегрирования.
Анализ численной ошибки в численном методе средних прямоугольников может возникать из-за аппроксимации подынтегральной функции прямоугольниками. Ошибка метода средних прямоугольников уменьшается с увеличением числа подинтервалов n и

увеличением точности аппроксимации. Это можно показать общей формулой для оценки остаточного члена метода прямоугольников:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \right) dx)$$

$$|\delta_n| = \max_{x\in[a;b]} \left| f\ddot{(x)} \right| * (b-a)^3 \ /24n^2$$

Однако, увеличение количества интервалов увеличивает время выполнения алгоритма, так как количество вычислений функции возрастает пропорционально количеству интервалов.