



14. NOVEMBER 2013

DOKUMENTATION

ZU AUFGABENBLATT 04 AUS DER VORLESUNGSREIHE
„ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN“

HAW HAMBURG

DOKUMENTATION

ZU AUFGABENBLATT 04 AUS DER VORLESUNGSREIHE „ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN“

ÜBUNGSAUFGABE 4.1

Gegeben sei folgende Rekurrenz:

$$f(n) = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 3 * (f(n-1) + 2), & n > 0 \end{cases}$$

TEILAUFGABE 1

Wickeln Sie die Rekurrenz ab, bis Sie ein Schema erkennen können.

$$\begin{aligned} & 3 * f(n-1) + 2 \\ & 3 * (3 * (f(n-2) + 2) + 2) = 9 * f(n-2) + 3 * 2 + 2 \\ & 3 * (3 * (3 * f(n-3) + 2) + 2) + 2 = 27 * f(n-3) + 3 * 3 * 2 + 3 * 2 + 2 \\ & = 3^k f(n-k) + 3^{k-1} * 2 + 3^{k-2} * 2 + \dots + 9 * 2 + 3 * 2 + 2 \\ & = 3^k * f(n-k) + 3^{k-1} \end{aligned}$$

Das ist das Schema dass wir daraus erkennen konnten

TEILAUFGABE 2

Beweisen Sie dann die durch Abwickeln gewonnene Vermutung per Induktion.

Induktionsanfang:

Der Anfang ist der triviale Schritt

Angenommen für $n = 0$ gilt $f(n) = 2$

Und $n = 1$

$$3*2+2 = 8$$

Induktionsbehauptung:

Unter der Annahme dass für $3^k * f(n-k) + 3^{k-1}$ für ein $k \geq 0$ und $k < n-1$ bereits gilt

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3^k * f(n-k) + 3^{k-1} \\ &= 3^k (3^k * f(n-k-1) + 3^{k-1}) \\ &= 3^{k+1} * f(n-(k+1)) + 3^k + 3^k + 3^{k-1} \\ &= 3^{k+1} * f(n-(k+1)) + 3^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Somit entspricht es dem erwarteten Wert ($k = k+1$).

TEILAUFGABE 3

Nutzen sie das Abbruch Kriterium um einen geschlossenen Ausdruck dafür zu finden

Der geschlossene Ausdruck ergibt sich aus der Form und ist:

$$\sum_{i=0}^n 3^i - 2$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.2

TEILAUFGABE 1

Wickeln sie die die Rekurrenz ab bis sie ein Schema erkennen können

$$\begin{aligned} f(n) &= c * f\left(\frac{n}{d}\right) + an \\ &= c * \left(c * f\left(\frac{n}{d^2}\right) + \frac{an}{d^1}\right) + an \\ &= c * \left(c * \left(c * f\left(\frac{n}{d^3}\right) + \frac{an}{d^2}\right) + \frac{an}{d^1}\right) + an \\ &= c^k * f\left(\frac{n}{d^k}\right) + c^{k-1} \frac{an}{d^{k-1}} + c^{k-2} \frac{an}{d^{k-2}} \dots + an \\ &= c^k f\left(\frac{n}{d^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i} \end{aligned}$$

Das ist das Schema das wir daraus erkennen konnten

TEILAUFGABE 2

Beweisen sie ihre Annahme per Induktion

Induktionsanfang:

Der Anfang ist der triviale Schritt

Angenommen für $n = 1$ gilt $f(n) = a$

Und $n = 1$

$$c * f(a) + an$$

Induktionsbehauptung:

Unter der Annahme dass $f(n) = c^k f\left(\frac{n}{d^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i}$ für ein $k \geq 1$ und $k < n-1$ bereits gilt

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 f(n) &= c^k f\left(\frac{n}{d^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i} \\
 &= c^k \left(c * f\left(\frac{n}{d^{k+1}}\right) + \frac{an}{d^k} \right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i} \\
 &= c^{k+1} \left(f\left(\frac{n}{d^{k+1}}\right) + c^k * \frac{an}{d^k} \right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i} \\
 &= c^{k+1} * f\left(\frac{n}{d^{k+1}}\right) + \sum_{i=0}^k c^i * \frac{an}{d^i}
 \end{aligned}$$

Somit entspricht es dem erwarteten Wert.

TEILAUFGABE 3

Nehmen Sie nun $c = d$ an. Hat $f(n)$ jetzt eine Form für die das Mastertheorem die Lösung kennt?

Es gibt eine Form des Mastertheorems die uns hier weiterhilft. Es handelt sich dabei um die zweite Form

1.

$$\begin{aligned}
 an &\in O(n^{\log_d c - \varepsilon}), \varepsilon > 0 \\
 \text{da } d &= c \\
 an &\in O(n^{1 - \varepsilon}), \varepsilon > 0
 \end{aligned}$$

*2.

$$\begin{aligned}
 an &\in \theta(n^{\log_d c}) \\
 an &\in \theta(n^1)
 \end{aligned}$$

TEILAUFGABE 4

Vereinfachen Sie Ihren Term für $f(n)$, um unter der Annahme $c = d$ eine geschlossene Form zu bekommen.

Für $d = c$

$$\begin{aligned}
 &c * f\left(\frac{n}{c}\right) + an \\
 &c * \left(c * f\left(\frac{n}{c^2}\right) + \frac{an}{c^1} \right) + an = c^2 f\left(\frac{n}{c^2}\right) + 2an \\
 &c * \left(c * \left(c * f\left(\frac{n}{c^3}\right) + \frac{an}{c^2} \right) + \frac{an}{c} \right) + an = c^3 f\left(\frac{n}{c^3}\right) + 3an \\
 &c^k * f\left(\frac{n}{c^k}\right) + k * an \\
 &a + a(n - 1)
 \end{aligned}$$

Laut des Mastertheorems stimmt unsere Lösung, da auch das Mastertheorem eine Lineare Komplexität bestimmt.