14. NOVEMBER 2013

DOKUMENTATION

ZU AUFGABENBLATT 04 AUS DER VORLESUNGSREIHE „ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN“

HAW HAMBURG

DOKUMENTATION

ZU AUFGABENBLATT 04 AUS DER VORLESUNGSREIHE „ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN“

ÜBUNGSAUFGABE 4.1

Gegeben sei folgende Rekurrenz:

$$f(n) = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 3 * (f(n-1) + 2, & n > 0 \end{cases}$$

TEILAUFGABE 1

Wickeln Sie die Rekurrenz ab, bis Sie ein Schema erkennen können.

$$\begin{aligned}
&3 * f(n-1) + 2 \\
&3 * (3 * (f(n-2) + 2) = 9 * f(n-2) + 3 * 2 + 2 \\
&3 * (3 * (3 * f(n-3) + 2) + 2) + 2 = \ 27 * f(n-3) + 3 * 3 * 2 + 3 * 2 + 2 \\
&= 3^k f(n-k) + 3^{k-1} * 2 + 3^{k-2} * 2 + \cdots + 9 * 2 + 3 * 2 + 2 \\
&= 3^k * f(n-k) + 3^{k-1}
\end{aligned}$$

Das ist das Schema dass wir daraus erkennen konnten

TEILAUFGABE 2

Beweisen Sie dann die durch Abwickeln gewonnene Vermutung per Induktion.

Induktionsanfang:
Der Anfang ist der triviale Schritt

Angenommen für n = 0 gilt f(n) = 2
Und n = 1

3*2+2 = 8

Induktionsbehauptung:
Unter der Annahme das für $f(n) = 3^k * f(n-k) + 3^{k-1}$ für ein k ≥ 0 und k ≤ n-1 bereits gilt

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
&f(n) = 3^k * f(n-k) + 3^{k-1} \\
&= 3 * (3^k * f(n-k-1) + 3^{k-1}) \\
&= 3^{k+1} * f\big(n-(k+1)\big) + 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} \\
&= 3^{k+1} * f\big(n-(k+1)\big) + 3^k
\end{aligned}$$

Somit entspricht es dem erwarteten Wert.

TEILAUFGABE 3

Nutzen sie das Abbruch Kriterium um einen geschlossenen Ausdruck dafür zu finden

Der geschlossene Ausdruck ergibt sich aus der Form und ist:

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i - 2$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.2

TEILAUFGABE 1

Wickeln sie die die Rekurrenz ab bis sie ein Schema erkennen können

$$\begin{aligned}
f(n) &= c * f\left(\frac{n}{d}\right) + an \\
&= c * \left(c * f\left(\frac{n}{d^2}\right) + \frac{an}{d^1}\right) + an \\
&= c * \left(c * \left(c * f\left(\frac{n}{d^3}\right) + \frac{an}{d^2}\right) + \frac{an}{d^1}\right) + an \\
&= c^k * f\left(\frac{n}{d^k}\right) + c^{k-1}\frac{an}{d^{k-1}} + c^{k-2}\frac{an}{d^{k-2}} \ldots + an \\
&= c^k f\left(\frac{n}{d^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i}
\end{aligned}$$

Das ist das Schema das wir daraus erkennen konnten

TEILAUFGABE 2

Beweisen sie ihre Annahme per Induktion

Induktionsanfang:

Der Anfang ist der triviale Schritt
Angenommen für n = 1 gilt f(n) = a
Und n = 1

$$c * f(a) + an$$

Induktionsbehauptung:

Unter der Annahme dass $\mathrm{f(n)} = c^k f\left(\frac{n}{d^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i}$ *für ein k ≥ 1 und k < n-1 bereits gilt*

Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= c^k f\left(\frac{n}{d^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i} \\
&= c^k \left(c * f\left(\frac{n}{d^{k+1}}\right) + \frac{an}{d^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i} \\
&= c^{k+1} \left(f\left(\frac{n}{d^{k+1}}\right) + c^k * \frac{an}{d^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} c^i * \frac{an}{d^i} \\
&= c^{k+1} * f\left(\frac{n}{d^{k+1}}\right) + \sum_{i=0}^{k} c^i * \frac{an}{d^i}
\end{aligned}
$$

Somit entspricht es dem erwarteten Wert.

TEILAUFGABE 3

Nehmen Sie nun $c = d$ an. Hat $f(n)$ jetzt eine Form für die das Mastertheorem die Lösung kennt?

Es gibt eine Form des Mastertheorems die uns hier weiterhilft. Es handelt sich dabei um die zweite Form

1.

$$an \in O\left(n^{\log_d c - \varepsilon}\right), \varepsilon > 0$$

da d = c

$$an \in O(n^{1 * \varepsilon}), \varepsilon > 0$$

*2.

$$an \in \theta\left(n^{\log_d c}\right)$$
$$an \in \theta(n^1)$$

TEILAUFGABE 4

Vereinfachen Sie Ihren Term für $f(n)$, um unter der Annahme $c = d$ eine geschlossene Form zu bekommen.

Für d = c

$$
\begin{aligned}
& f(n) = c * f\left(\frac{n}{c}\right) + an \\
& = c * \left(c * f\left(\frac{n}{c^2}\right) + \frac{an}{c^1}\right) + an = c^2 f\left(\frac{n}{c^2}\right) + 2an \\
& = c * \left(c * (c * f\left(\frac{n}{c^3}\right) + \frac{an}{c^2}\right) + \frac{an}{c}) + an = c^3 f\left(\frac{n}{c^3}\right) + 3an \\
& = c^k * f\left(\frac{n}{c^k}\right) + k * an \\
& = an + \log_c n
\end{aligned}
$$

Laut des Mastertheorems muss eine Komplexität O(n*log(n)) herauskommen. Dies ist bei uns der Fall.