

Efecto fotoeléctrico

María Antonia Zúñiga Jiménez*
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
(Dated: 1 de septiembre de 2025)

En el presente informe se estudia el efecto fotoeléctrico mediante un montaje experimental conformado por un potenciómetro con su respectiva fotocelda, un multímetro, un microamperímetro, una fuente de voltaje y 4 LEDs de distintas longitudes de onda. Se registraron y analizaron datos de frecuencia contra voltaje para los 4 colores diferentes y para 4 intensidades de radiación distintas a partir de un mismo color. El objetivo principal de la práctica fue corroborar la relación directa entre la frecuencia de una luz incidente con la energía cinética de los fotoelectrones, así como utilizar la hipótesis de Einstein para determinar la constante de Planck h , la función de trabajo ϕ , la frecuencia umbral ν_0 y el voltaje de frenado V_s . Los resultados obtenidos se caracterizaron por ser inexactos pero precisos, entre ellos están: (1) la constante de Planck $h_{exp} = (1,43 \pm 0,01) \times 10^{-34}$ J·s, (2) la función de trabajo $\phi_{exp} = (9,10 \pm 0,64) \times 10^{-21}$ J, (3) la frecuencia umbral $\nu_{exp} = (6,36 \pm 0,45) \times 10^{13}$ Hz y (4) el voltaje de frenado $V_s = -0,388 \pm 0,006$, donde se encuentran a 500, 370, 68 y 7,2 sigmas respectivamente.

Palabras clave: Efecto fotoeléctrico, fotoelectrones, longitud de onda, constante de Planck, función de trabajo, frecuencia umbral, voltaje de frenado.

I. INTRODUCCIÓN

En 1887 el físico alemán Heinrich Hertz observó que, al incidir luz ultravioleta sobre dos esferas cargadas, se generaba con facilidad una corriente eléctrica entre ellas. En 1905, Albert Einstein ofreció una explicación al fenómeno apoyándose en la hipótesis cuántica de Planck, concluyendo que la luz está compuesta por cuantos de energía denominados fotones. En el artículo titulado “Un punto de vista heurístico sobre la producción y transformación de la luz”, Einstein explica que la radiación electromagnética se manifiesta como una agrupación de cuantos de energía independientes. Esta propuesta permitió superar las limitaciones que surgían de la explicación ondulatoria y que contradecían los resultados experimentales. Posteriormente, el físico estadounidense Robert Millikan, aunque inicialmente escéptico frente a la hipótesis de Einstein, llevó a cabo experimentos rigurosos que confirmaron de manera precisa la relación planteada. Este trabajo le valió el Premio Nobel de Física en 1923, consolidando experimentalmente la teoría cuántica de la luz.

Concretamente, el efecto fotoeléctrico consiste en la irradiación de una placa metálica con luz, lo cual produce una emisión de electrones y, en consecuencia, una corriente eléctrica. Al realizar el experimento correspondiente, se observaron resultados que contradecían las predicciones de la teoría ondulatoria clásica de la luz: la emisión de electrones ocurría de forma instantánea,

la energía de los fotoelectrones no dependía de la intensidad de la radiación incidente y existía una frecuencia mínima de la luz por debajo de la cual no se producía fotocorriente.

La incapacidad de la física clásica para explicar este fenómeno era evidente. Como se mencionó anteriormente, Einstein logró dar una explicación al fenómeno mediante un cambio de paradigma. Generalizando la hipótesis de Planck, propuso que la radiación está constituida por partículas, cuya energía es proporcional a la frecuencia de radiación

$$E = h\nu. \quad (1)$$

De este modo, el efecto fotoeléctrico se entiende como una serie de colisiones elásticas entre los fotones irradiados y los electrones presentes en el material, donde ocurre una transferencia de energía, la cual ocasiona la producción de una fotocorriente. Para describir la liberación de los electrones, Einstein introduce el concepto de función de trabajo ϕ , que define como la energía mínima necesaria para generar dicha corriente y que depende del material de la lámina. De esta manera, la energía cinética de los fotoelectrones se describe como

$$K_{\max} = h\nu - \phi. \quad (2)$$

En el presente experimento se busca estudiar cómo la emisión de electrones por una superficie metálica iluminada depende de la frecuencia e intensidad de la luz incidente, así como determinar cuantitativamente la relación entre la energía de los fotones y la energía cinética de los fotoelectrones, verificando la teoría de Einstein. Para realizarlo, se utilizan diferentes longitudes de onda de luz, a partir de los cuales se determina la frecuencia mediante

* Correo institucional: m.zunigaj@uniandes.edu.co

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad (3)$$

y se relaciona con la energía cinética máxima y el voltaje de frenado por medio de

$$K_{\max} = e |V_s|. \quad (4)$$

Estas expresiones permiten analizar los datos experimentales y realizar una estimación para la constante de Planck y la función de trabajo de la celda fotoeléctrica, a partir de la cual se finalizará hallando la frecuencia umbral

$$\nu_0 = \frac{\phi}{h}. \quad (5)$$

El voltaje de frenado V_s se determina directamente de los resultados experimentales con el fin de observar el valor para el cual se anula la corriente fotoeléctrica, lo cual permite calcular la energía cinética máxima y verificar que esta cantidad depende de la frecuencia y no de la intensidad. Análogamente, se desea variar la intensidad de la luz para una misma longitud de onda para corroborar, en concordancia con la teoría cuántica, esta no modifica la energía de los electrones liberados, únicamente la cantidad de fotoelectrones.

II. METODOLOGÍA Y MONTAJE EXPERIMENTAL

Para estudiar el efecto fotoeléctrico se propone el montaje mostrado en la Figura 1, mediante el cual se observó el comportamiento de la energía de los fotoelectrones en función de la intensidad y frecuencia de la luz incidente.

Para ello, se utilizó una celda fotoeléctrica a la cual se le midió el voltaje con un multímetro y la corriente con un microamperímetro, mientras que la fuente de voltaje suministró energía a estos instrumentos. Esta celda fue expuesta a una fuente de luz mediante LEDs de un mismo color, incorporados en una caperuza que permitió aislar la luz exterior.

En primer lugar, se suministró energía al potenciómetro conectándolo a la fuente de voltaje. Para medir la corriente de los fotoelectrones, se vinculó el microamperímetro a la misma fuente con el fin de establecer una conexión entre el multímetro y la fuente. Finalmente, después de asegurar que todo estuviera correctamente ensamblado, se encendió la fuente y se corroboró el funcionamiento de la fotocelda al observar una corriente no-nula al iluminarla.

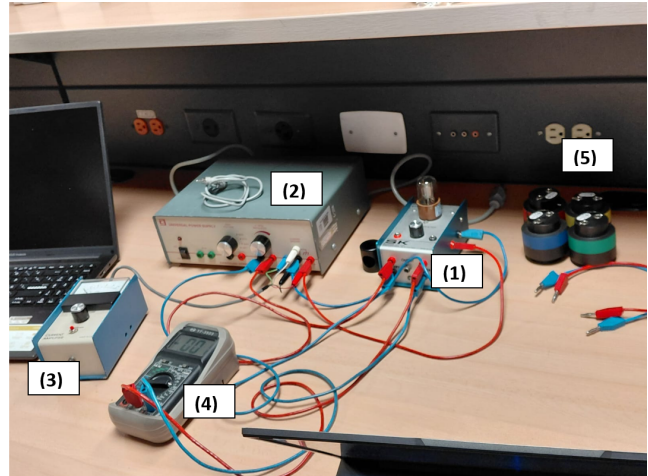


Figura 1. La imagen muestra el montaje experimental de la práctica Efecto Fotoeléctrico. Los números en paréntesis indican los instrumentos utilizados con sus respectivas conexiones. Estos fueron (1): potenciómetro, (2): fuente de voltaje, (3) microamperímetro, (4) voltímetro Y (5) caperuzas de LED's de color ámbar, verde, rojo y azul.

Una vez se tuvieron correctamente acoplados los instrumentos, se procedió a calibrar el microamperímetro con la finalidad de garantizar exactitud en las medidas. Para ajustar el cero de escala, el dispositivo se desconectó y se verificó que la corriente se anulara. Acto seguido, se oprimió el botón *Sensitivity* para maximizar la sensibilidad y luego se giró la perilla *Zero Adjust* hasta que la aguja indicó "cero".

Ahora, la práctica de laboratorio se dividió en dos, en *el efecto fotoeléctrico en función de la frecuencia* y *el efecto fotoeléctrico en función de la intensidad*, en ese orden. Tras completar el montaje y la calibración correspondiente, se inició la toma de datos.

En la primera parte se midió la corriente I de los fotoelectrones que llegaban al ánodo de la celda fotoeléctrica en función del voltaje aplicado para los 4 distintos colores de LED. Para cada color, inicialmente se identificó el voltaje correspondiente a una corriente de 100 nA y a partir de ese valor, se redujo gradualmente el voltaje hasta llegar a una corriente nula en pasos de 10 nA. De este modo, se tomaron 10 pares de datos de voltaje vs. corriente para cada longitud de onda. Para cada medición, las caperuzas de los LEDs se colocaron en la misma posición con el fin de mantener la intensidad de la luz como un parámetro constante. Cabe señalar que, para el color rojo, el voltaje se midió en una escala mayor que la empleada para los demás colores. Asimismo, por cuestiones de precisión, para los otros colores y para la segunda parte de la práctica se decidió aumentar la resolución del multímetro. Esto se verá reflejado en las incertidumbres y valores para el voltaje en la tabla 1.

En la segunda parte se analizó la relación entre la

intensidad de la luz y la energía cinética de los fotoelectrones a partir de la relación registrada entre voltaje y corriente en la celda. Para ello se eligió el color rojo y se varió su intensidad modificando la posición de la caperuza mediante la rotación, eligiendo 4 ángulos distintos para las mediciones. Para cada caso se identificó el voltaje correspondiente a una corriente de 100 nA y, de manera análoga a la primera parte, se disminuyó el voltaje progresivamente de forma que la corriente disminuyera en pasos de 10 nA hasta llegar a cero.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

La presente sección presenta los datos obtenidos experimentalmente, con sus respectivos análisis, regresiones y errores asociados.

A. Efecto fotoeléctrico en función de la frecuencia

Dada la metodología descrita anteriormente, se presenta la corriente obtenida experimentalmente en función del voltaje por medio de una gráfica en la Figura 2 para 4 colores diferentes: rojo, azul, ámbar y verde. A partir de estos datos, se determinó la energía cinética máxima de los fotoelectrones para cada longitud de onda mediante la ecuación 4. Similarmente, con la ecuación 2 se calculó el voltaje de frenado, la frecuencia umbral y la función de trabajo del material de la fotocelda. Los resultados son presentados en la Tabla I.

Como se esperaba, se evidenció una caída en la corriente al reducir el voltaje, donde aquella disminución depende de cada longitud de onda y, por ende, de la energía de los fotoelectrones. Como predice la teoría, para cada frecuencia se obtiene un voltaje de frenado V_s diferente en el cual la corriente se anula. Además, las ecuaciones 2 y 4 establecen que la frecuencia de la luz es directamente proporcional a la energía cinética máxima, relación que se confirma con los datos graficados: el LED azul, de mayor frecuencia, presenta un mayor voltaje de frenado $|V_s|$, mientras que para el LED rojo, de menor frecuencia, se tiene el voltaje $|V_s|$ más bajo.

Para encontrar una relación lineal entre los datos de energía cinética máxima y frecuencia como lo predice la ecuación 2, se usó el método de mínimos cuadrados ponderados (usando las incertidumbres de las energías como pesos), en la cual por la ecuación 2 la pendiente de la ecuación equivale a la constante de Planck h y el punto de corte en y , a la función de trabajo ϕ . La Figura 3 muestra la gráfica correspondiente del ajuste lineal, junto con sus valores de m y b : $m = h = (1,43 \pm 0,01) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ y $b = \phi = (9,10 \pm 0,64) \times 10^{-21} \text{ J}$.

Para el caso de la constante de Planck, la pendiente de la función obtenida fue $h_{exp} = (1,43 \pm 0,01) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$,

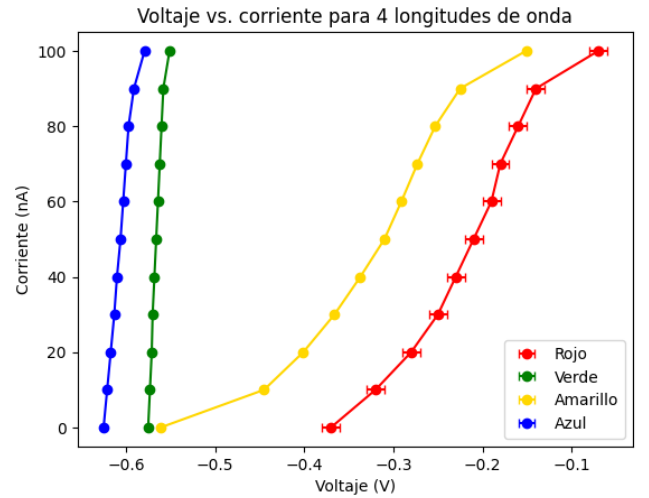


Figura 2. La figura muestra los datos obtenidos experimentalmente graficados según las 4 diferentes longitudes de onda. Además, se grafican las incertidumbres asociadas a la medición del voltaje y corriente, pero al ser de un orden de magnitud menor que el de los datos recopilados, no se logra apreciar. A pesar de ello, como se aclaró en la sección de metodología experimental, el error asociado a la medición del voltaje para color rojo es mayor, es por eso que es el único que tiene barras de error apreciables a simple vista.

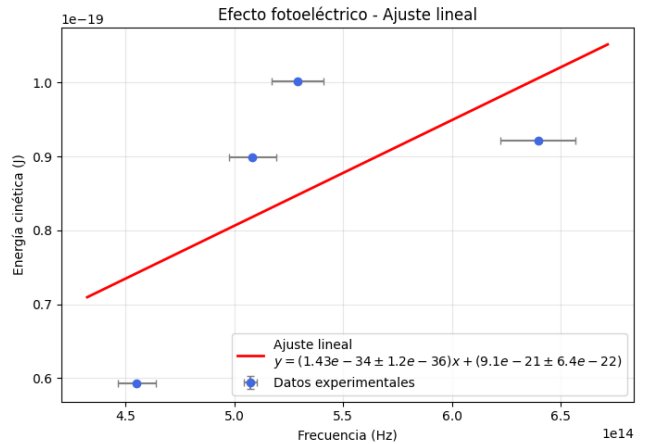


Figura 3. La figura muestra la regresión lineal de los datos de frecuencia contra energía cinética para cada color. La ecuación de la recta es la siguiente: $E_c(f) = (1,43 \pm 0,01) \times 10^{-34} f + (9,10 \pm 0,64) \times 10^{-21}$. Como el error asociado a la energía cinética es tan pequeño, no se logra apreciar.

valor 4.62 veces menor al reportado en la literatura ($h = 6,62 \times 10^{-34}$). Pese a que ambos valores se encuentran en el mismo orden de magnitud, la discrepancia equivale a más de 500 sigmas, es decir, más de 500 veces la incertidumbre experimental, cálculo que indica la baja exactitud en los resultados. No obstante, la in-

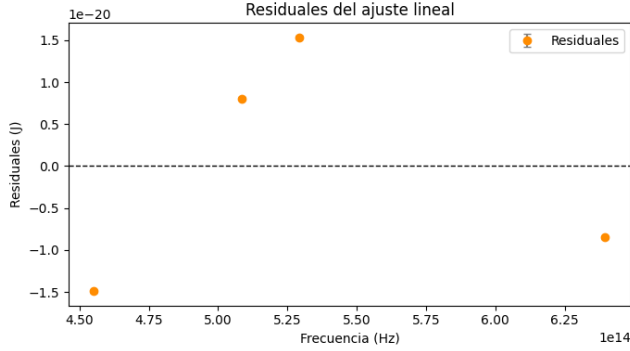


Figura 4. Figura 4.

certidumbre fue del 0.7 %, reflejando la alta precisión de los datos a pesar de su inconsistencia con la teoría, pero a su vez indicando la presencia de errores sistemáticos en el desarrollo del experimento.

Por otro lado, la función de trabajo obtenida fue $\phi_{exp} = (9,10 \pm 0,64) \times 10^{-21}$ J, o equivalentemente $(0,057 \pm 0,004)$ eV, con una incertidumbre relativa de aproximadamente 2.3 %. El valor teórico, en cambio, es $\phi = 2,46 \pm 10^{-19}$. La diferencia absoluta entre dichos valores fue de $2,37 \pm 10^{-19}$ J, lo que corresponde a 370 sigmas respecto a la incertidumbre experimental. Estos desajustes indican de nuevo que existieron errores sistemáticos en la medición que afectaron la exactitud de los datos.

Finalmente, a partir de la función de trabajo y la constante de Planck, se calculó la frecuencia umbral de la fotocelda con la ecuación 5, obteniendo así $\nu_{exp} = (6,36 \pm 0,45) \times 10^{13}$ Hz, mientras que el valor teórico es $\nu = 3,71 \times 10^{14}$ Hz. Calculando la diferencia absoluta se obtiene $3,07 \times 10^{14}$ Hz y comparándolo con la incertidumbre se determina que el valor experimental difiere en aproximadamente 68 sigmas respecto al teórico. Esta desviación muestra una carencia de exactitud en los resultados a pesar de la buena precisión alcanzada dada por la incertidumbre relativa que fue alrededor del 7 %.

Para evaluar la calidad de la regresión mostrada en la Figura 3 de frecuencia contra energía cinética máxima, se construyó una gráfica de residuales mostrado en la Figura 4. Los residuales de un ajuste con tendencia lineal debería lucir como puntos aleatoriamente distribuidos alrededor del cero, sin mostrar alguna tendencia en particular. Sin embargo, se observa que para las primeras tres frecuencias graficadas parece haber un patrón lineal con alternancia de signos. Este comportamiento puede deberse a dos causas principales: se tienen pocos datos, lo cual limita la posibilidad de observar aleatoriedad y dicho patrón no es más que una coincidencia; o, por otro lado, se tienen errores sistemáticos o ligeras desviaciones en la linealidad de los datos. Como consecuencia, se observa que, a pesar de que la regresión

permitió estimar valores para la función de trabajo y la constante de Planck, puede que el modelo no describa a la perfección la relación experimental, lo que refuerza la necesidad de disminuir los errores sistemáticos y aumentar el tamaño de la muestra.

En cuanto a posibles errores, como se mencionó en la metodología, se intentó que todas las caperuzas de cada LED quedaran en la misma posición, pero no se adoptó ninguna metodología precisa para dicha colocación; esto pudo haber afectado la toma de datos de voltaje y corriente y por consiguiente, la determinación de h_{exp} y ϕ_{exp} . Por otra parte, se pasó por alto la calibración del multímetro y pudo haber algún error en la calibración del microamperímetro, por errores humanos pudo haber existido un ligero *offset* en el instrumento que afectara los valores de corriente.

B. Efecto fotoeléctrico en función de la intensidad

Los datos del segundo experimento se presentan en la Figura 5. Se observó que, como predice la teoría, aunque la corriente varía con la intensidad de la luz, los voltajes de frenado de todas las distintas posiciones convergen al mismo punto. En otras palabras, la intensidad influye en el valor de la corriente para altos amperajes, pero no modifica el voltaje de frenado, que únicamente depende de la frecuencia.

Los voltajes de frenado $|V_s|$ para cada rotación fueron de -0,388 V, -0,375 V, -0,403 y -0,386 V, todos con una incertidumbre de $\pm 0,001$ V. A partir de ellos, se obtuvo un valor medio de $V = -0,388$ V, con una desviación típica de $s = 0,011$ V, un error estándar de 0,005 V y un coeficiente de variación del 3 %. En suma, la media de los voltajes de frenado para cada intensidad es $V = -0,388 \pm 0,006$ V donde la baja dispersión confirma la consistencia de los datos experimentales. Como estos valores se encuentran a menos de 2s de la media, es correcto afirmar que los 4 voltajes convergen a un mismo punto, demostrando que el voltaje de frenado depende únicamente de la frecuencia de la luz, no de su intensidad.

Suponiendo los valores teóricos mencionados anteriormente para la constante de Planck h , función de trabajo ϕ , la longitud de onda para el color rojo y usando las ecuaciones 2, 3 y 4, se encuentra que $V_s = -0,346$ V. La diferencia absoluta entre dichos valores es de 0,042 V, que con el error estándar de la media se estima que existe una discrepancia entre los datos experimentales y teóricos de 7.2 sigmas. Además, se presenta una incertidumbre relativa del 1.5 % mientras que la dispersión muestra fue del 3 %. A pesar de que la cantidad de sigmas es mucho menor a las reportadas para la constante de Planck, función de trabajo y frecuencia umbral de la primera parte del análisis, sigue siendo muy alta para considerar al voltaje de frenado V_s exacto. Esto signifi-

ca que también hubo errores sistemáticos involucrados en la toma de datos que, muy probablemente, son los mismos existentes para la primera parte de la práctica.

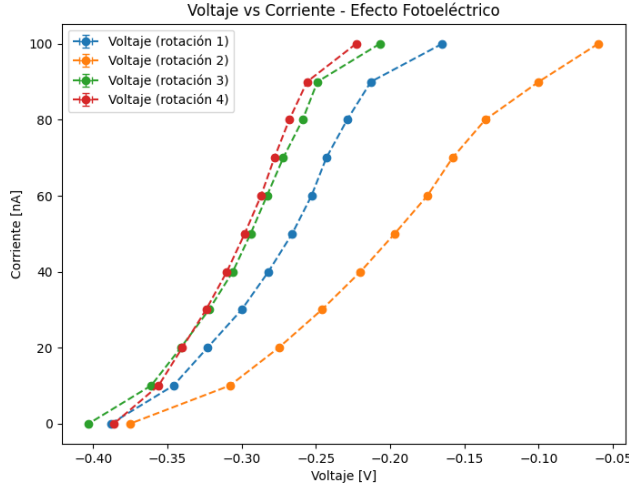


Figura 5. La figura presenta los datos experimentales graficados según las 4 disposiciones diferentes de la caperuza, es decir, según la intensidad de la luz incidente sobre la fotocelda. Además, se grafican las incertidumbres asociadas a la medición del voltaje y corriente, pero al ser de un orden de magnitud menor que el de los datos recopilados, no se logra apreciar.

IV. CONCLUSIONES

En la práctica se logró cumplir parcialmente el objetivo de verificar la relación entre la frecuencia de la luz incidente y la energía cinética máxima de los foto-

electrones liberados como lo establece el marco teórico para el efecto fotoeléctrico. La obtención experimental para la constante de Planck y la función de trabajo presentó una alta precisión pero una muy baja exactitud, mostrando una divergencia de más de 500 y 370 sigmas respectivamente. Estos resultados indican una alta precisión, pero una baja exactitud, atribuible principalmente a errores sistemáticos del montaje.

Para la segunda parte del experimento, se logró verificar cualitativamente una de las predicciones fundamentales de la teoría al identificar de las gráficas que el voltaje de frenado depende únicamente de la frecuencia y no de la intensidad de la luz incidente. A pesar de ello, al igual que con la primera parte de los experimentos, se evidenció una carencia de exactitud de 7,2 sigmas, acompañado de una alta precisión.

Las principales fuentes de error identificadas fueron de carácter sistemático. Los desaciertos pudieron haber sido la incapacidad de colocar todas las caperuzas en exactamente la misma posición, la falta de calibración adecuada del multímetro y microamperímetro y/o posibles corrimientos del cero u *offsets* en la medición del amperaje. Estas limitaciones explican la falta de exactitud en los resultados pese a la alta precisión.

En conclusión, cualitativamente se logró llegar a los objetivos planteados, evidenciando la dependencia lineal entre la frecuencia y la energía cinética máxima. Sin embargo, cuantitativamente no se alcanzó una exactitud aceptable para la constante de Planck, la función de trabajo ni la frecuencia umbral, lo que evidencia una necesidad de mayor cuidado y control a la hora de realizar el montaje experimental, en especial en la calibración de los instrumentos y de tomar más datos para tener un mejor panorama del comportamiento lineal de la frecuencia y energía.

V. BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. García Castañeda, J. Ewert De-Geus, *Introducción a la física moderna*, 3rd ed. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, 2003.
- [2] K. S. Krane, *Modern Physics*, 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc., 2012.
- [3] Universidad de los Andes, *Experimento 2: Efecto Fotoeléctrico*, Guía de Laboratorio de Física Moderna, Bogotá, Colombia.
- [4] C. R. Nave, *Fundamental Physical Constants*, HyperPhysics, Georgia State University. Available: <https://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Tables/funcon.html>

- [5] H. D. Young and R. A. Freedman, *Física universitaria con física moderna*, 13th ed. México: Pearson Educación, 2012.

- [6] C. R. Nave, *Photoelectric Effect*, HyperPhysics, Georgia State University. Available: <https://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Tables/photoelec.html>

APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

Modelo lineal:

$$y_i \approx mx_i + b \quad (6)$$

Cuadro I. Resultados obtenidos en el la parte 1 de la práctica. Se muestra el color de cada LED, su longitud de onda, la frecuencia de la luz, el voltaje de frenado medido y la energía cinética máxima de los fotoelectrones, todos con sus respectivos errores asociados a la medición o a su propagación y unidades. El único dato recopilado experimentalmente fue el voltaje de frenado, las longitudes de onda fueron medidas por el profesor Benjamín Oostra y la frecuencia y energía cinética máxima fueron calculadas a partir de los datos anteriores.

Color	Longitud de onda (nm) $\pm 12,7$	Frecuencia (Hz)	Voltaje de frenado (V)	K_{\max} (J) $\pm 0,01 \times 10^{-20}$
Rojo	659	$(4,55 \pm 0,08) \times 10^{14}$	$-0,37 \pm 0,01$	$5,93 \times 10^{-20}$
Verde	567	$(5,29 \pm 0,11) \times 10^{14}$	$-0,625 \pm 0,001$	$1,00 \times 10^{-19}$
Ambar	590	$(5,08 \pm 0,10) \times 10^{14}$	$-0,561 \pm 0,001$	$8,98 \times 10^{-20}$
Azul	469	$(6,39 \pm 0,17) \times 10^{14}$	$-0,575 \pm 0,001$	$9,21 \times 10^{-20}$

Función objetivo:

$$\chi^2(m, b) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - (mx_i + b))^2}{\sigma_i^2} \quad (7)$$

Error de propagación para la frecuencia:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta \lambda \right)^2 = \frac{f}{\lambda} \sigma_\lambda \quad (15)$$

Pesos y parámetros óptimos:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (8)$$

Error de propagación para la energía cinética máxima:

$$\sigma_K^2 = \left(\frac{\partial K_{\max}}{\partial V} \sigma_V \right)^2 = e^2 \sigma_V^2 \quad (16)$$

$$S = \sum_i w_i, \quad S_x = \sum_i w_i x_i, \quad S_y = \sum_i w_i y_i \quad (9)$$

Error de propagación para la frecuencia umbral:

$$\sigma_{\nu_0}^2 = \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial \phi} \sigma_\phi \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial h} \sigma_h \right)^2 = \left(\frac{1}{h} \sigma_\phi \right)^2 + \left(\frac{\phi}{h^2} \sigma_h \right)^2 \quad (17)$$

$$S_{xx} = \sum_i w_i x_i^2, \quad S_{xy} = \sum_i w_i x_i y_i \quad (10)$$

Media de los valores experimentales:

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \quad (18)$$

Ajuste lineal por mínimos cuadrados ponderados (pendiente):

$$m = \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{SS_{xx} - (S_x)^2} \quad (11)$$

Desviación típica muestral:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2} \quad (19)$$

Ajuste lineal por mínimos cuadrados ponderados (intercepto):

$$b = \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{SS_{xx} - (S_x)^2} \quad (12)$$

Error estándar de la media:

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (20)$$

Matriz de covarianza y errores asociados:

$$\sigma_m^2 = \frac{S}{SS_{xx} - (S_x)^2}, \quad \sigma_b^2 = \frac{S_{xx}}{SS_{xx} - (S_x)^2} \quad (13)$$

Coefficiente de variación:

$$CV = \frac{s}{|\bar{V}|} \times 100 \% \quad (21)$$

$$\text{Cov}(m, b) = -\frac{S_x}{SS_{xx} - (S_x)^2} \quad (14)$$