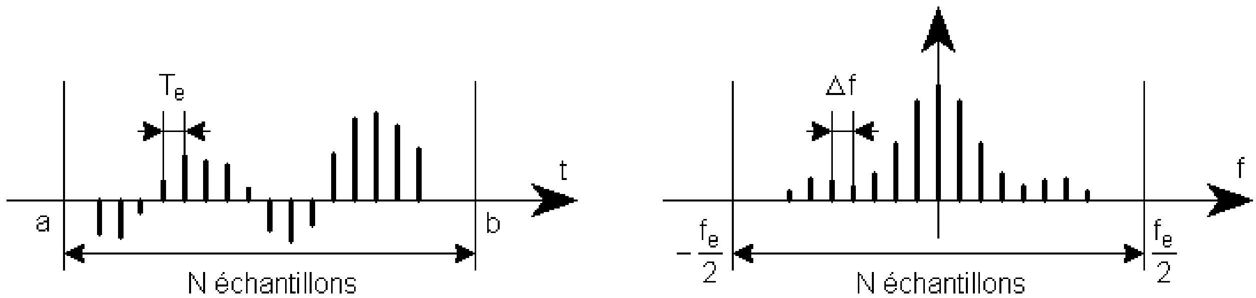
TP MATLAB
Traitement du Signal

I. La fonction Transformée de FOURIER discrète

Description

On considère un signal analogique $x_a(t)$, fonction continue de la variable temps. Pour constituer le signal discret x(n) de N valeurs, on "échantillonne" ce signal $x_a(t)$ avec une période T_e, sur l'intervalle [a, b[. En pratique, cela revient à constituer x(n) selon :

$$x(n) = x_a(\,(n-1).T_e + a\,) \quad \text{avec } T_e = (b-a)\,/\,N \quad \text{et} \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$



T_e est la **période d'échantillonnage**
$f_e = 1/T_e$ est la **fréquence d'échantillonnage**

La fonction Matlab `X=tfour(x)` donne la transformée de FOURIER discrète de ce signal discret x(n) dans un vecteur X de N valeurs. Ce vecteur X correspond à l'échantillonnage de la fonction transformée de FOURIER de $x_a(t)$. Les fréquences représentées sont les fréquences de $-f_e/2$ à $f_e/2$ (ou à peu près). L'écart, en fréquence, entre deux échantillons successifs dans X est donc de :

$$\Delta f = f_e/N = 1\,/(T_e\,.\,N) = 1/(b-a) \text{ Hertz} \quad (\text{ ou } s^{-1}).$$

La fonction Matlab `x=tfourinv(X)` permet de calculer la transformée de FOURIER inverse de la fonction discrétisée X et donc de retrouver x.

PARTIE 1

Application

On choisit N = 16384 échantillons, a = -50 secondes et b = 50 secondes. Avec ces paramètres, on échantillonne les 6 fonctions suivantes :

$x_0(t)$ = constante

$x_1(t) = \cos(2.\pi.f.t)$

$x_2(t) = \sin(2.\pi.f.t)$

$x_3(t) = \delta(t-\Delta t)$

$x_4(t) = e^{i.2.\pi.f.t}$

$x_5(t) = rect_{0.4}(t)$

$x_6(t) = \exp(-\pi.t^2)$

Questions

- Quelle est la période d'échantillonnage ?
- Quelle est la fréquence d'échantillonnage ?
- Affichez ces fonctions ainsi que leurs spectres (utiliser les spectres amplitude / phase ou partie réelle / imaginaire selon les plus représentatifs) pour différentes valeurs de f et de Δt. Pour les fonctions périodiques, on s'intéressera dans un premier temps aux cas qui donnent un nombre entier de périodes entre a et b.
- La fonction $x_6(t)$ est une gaussienne. Calculez sa transformée de Fourier théorique, sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Vérifiez sur les graphiques.
- Qu'observe-t-on lorsque, pour une fonction périodique, on choisit un f qui donne un nombre non-entier de périodes entre a et b ? Donner un exemple et expliquer.
- Vérifiez que la fonction `tfourinv(X)` permet bien de récupérer le signal d'origine.
- Essayez de construire la version périodique de $x_5(t)$. Qu'observe-t-on sur son spectre ?

*Les graphiques "temporels" des fonctions devront avoir **l'échelle des abscisses en secondes**, les graphiques "fréquentiels" devront avoir **l'échelle des abscisses en Hertz**. On repérera donc les pas de discrétisation temporelle et fréquentielle, la fréquence nulle, les fréquences extrêmes représentées ... Utilisez pour cela, les fonctions Matlab plot, figure, hold on, hold off, axis … pour les affichages, et real, imag, abs et angle pour avoir la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument des fonctions complexes.*

II. Echantillonnage et aliasing

On considère la famille de fonctions g_f , de paramètre f, définies par :

$$g_f(t) = -\sin(2\pi.f.t) + \sin(2\pi.(f + \Delta f).t) + \sin(2\pi.(f + 2\Delta f).t) \quad \text{avec } \Delta f = 5$$

Questions

- Quels sont les spectres théoriques des fonctions g_{50} et g_{120} ?
- En reprenant les paramètres précédents (N=16384, a=-50 secondes et b=50 secondes), échantillonnez les deux fonctions précédentes et expliquez les différences observées.
- Pour quelles valeurs positives de la fréquence f obtient-on un simple sinus ? Quelle est alors sa fréquence ?
- Expliquez.